



بررسی فرکتالی ناپایداری انگشتی لزج دو سیال واکنش پذیر قابل امتزاج در محیط متخلخل همگن

محمد رضا شاه‌نظری^{۱*} و علی صابری^۲

^۱ دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران
^۲ دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، تهران، ایران
 یادداشت تحقیقاتی: تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۰۴/۰۳؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۷/۰۶/۲۴؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۰۲/۱۴

چکیده

ناپایداری انگشتی لزج در محیط متخلخل یکی از فرایندهای طبیعی است که در مسائل مختلفی از جمله، فرایند ازدیاد برداشت نفت کاربرد فراوانی دارد. در این مقاله شبیه‌سازی غیرخطی ناپایداری انگشتی لزج دو سیال قابل امتزاج واکنش‌پذیر در یک محیط متخلخل همگن، مورد بررسی قرار گرفته است. در این حالت، سیال تولیدی در مرز مشترک را می‌توان مشابه خط ساحلی در نظر گرفت، لذا تحلیل چندفرکتالی و تک‌فرکتالی روی این نوع ناپایداری قابل بررسی است. ابتدا کانتورهای غلظت به ازای حالت‌های مختلف ناپایداری ترسیم شده‌اند و سپس با استفاده از آنالیز تصویر، عدد بعد هر کدام از این ناپایداری‌ها در زمان‌های مختلف به ازای هر دو حالت تک‌فرکتالی و چندفرکتالی ترسیم شده است. می‌توان دریافت که عدد بعد در هندسه فرکتالی در مساله ناپایداری، می‌تواند یکی از پارامترهای مهمی باشد که میزان پیچیدگی الگو را توصیف می‌کند؛ همچنین با ترسیم طیف مولتی‌فرکتالی برای حالات مختلف ناپایداری، نتایج نشان می‌دهد، هنگامی که مرز تنها از یک سمت ناپایدار است، عدد بعد نیز با زمان افزایش می‌یابد، اما در شرایطی که در هر دو سمت مرز ناپایداری رخ می‌دهد، به دلیل ایجاد الگوهای مختلف انگشتی‌ها و ترکیب آنها با هم امکان دارد از میزان عدد بعد کاسته شود.

کلمات کلیدی: ناپایداری انگشتی لزج؛ واکنش شیمیایی؛ فرکتال؛ شبیه‌سازی غیرخطی.

Fractal Analysis of Viscous Fingering Instability of Two Reactive Miscible Fluids through Homogeneous Porous Media

M. R. Shahnazari^{1,*}, A. Saberi²

¹ Assoc. Prof., Mech. Eng., K. N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran.

² Ph. D student, Mech. Eng., K. N. Toosi University of Technology, Tehran, Iran.

Abstract

Viscous fingering instability in porous media is one of the natural processes which is widely used in many different type of problems, such as Enhanced oil recovery process. In this paper nonlinear simulation of viscous fingering instability of miscible reactive interface through homogeneous porous medium is examined. In this case, the fluid produced at the interface can be considered similar to the coastline, so mono and multi fractal analysis can be performed. First the concentration contours are plotted in different models of instability, then by using image processing, the fractal dimension of image is computed for both fractal and multifractal cases in different times. It can be seen that the fractal dimension in the instability problems can be one of the important parameters that describes the complexity of the patterns. The multifractal spectrum curves are plotted for different image of instability and the results show that when the leading or trailing front is unstable the growth of disturbances over the time lead to an increase in the amount of fractal dimension. However when both leading and trailing fronts are unstable, the interaction between the fingers and different fingers pattern may lead to a decrease in fractal dimension.

Keywords: Viscous Fingering; Reaction Flow; Fractal; Nonlinear Simulation.

۱- مقدمه

فرکتال^۱ یکی از شاخه‌های هندسه است که پدیده‌ها و اجسام پیچیده را مورد مطالعه قرار می‌دهد و برای اولین بار توسط مندلبورت در سال ۱۹۶۷ معرفی شد و به فضایی اطلاق می‌شود که پیچیده‌تر از آن است که بتوان آن را با استفاده از سایر فضاهای شناخته شده هندسی (به عنوان مثال هندسه اقلیدوسی) توصیف کرد [۱]. پیش از اینکه هندسه فرکتالی معرفی شود، با استفاده از هندسه اقلیدوسی ابعاد صحیحی را برای اجسام در نظر می‌گرفتند، اما در هندسه فرکتالی، می‌توان ابعاد غیرصحیح را نیز به آن نسبت داد.

شکل‌های هندسی معروفی از جمله، برف‌دانه کخ^۲، مثلث و فرش سرپینسکی^۳، معروف‌ترین شکل‌های هندسی فرکتالی هستند و از جمله ویژگی مشترک همه این شکل‌ها، خود متشابه بودن است، یعنی هر جز دقیقاً مشابه کل هندسه است که از آنها به عنوان شکل‌های تک فرکتالی یاد می‌شود؛ اما همه شکل‌های فرکتالی دقیقاً خودمتشابه نیستند، ولی همچنان در گروه هندسه‌های فرکتالی قرار می‌گیرند و به آنها هندسه‌های چندفرکتالی می‌گویند. بسیاری از فرایندهای طبیعی و شکل‌هایی که در طبیعت قرار دارند، از همین دسته‌اند. از جمله آنها می‌توان به شکل رشد شاخه درخت، توزیع ابرها در آسمان، نمایی از رشته کوه‌ها، خط ساحلی، پراکندگی بارش، رشد جمعیت، جریان آشفته در سیال، تغییرات اقتصادی در بازارهای بورس و بافت بدن انسان اشاره کرد [۲، ۳ و ۴].

یکی از فرایندهایی که می‌توان آن را مشابه خط ساحل در نظر گرفت و از آن به عنوان هندسه فرکتالی نام برد، پدیده ناپایداری انگشتی لرج است. این پدیده که یکی از انواع مهم ناپایداری‌های هیدرودینامیکی است، به دلیل اهمیت بالایی که در مسائل مهم طبیعی از جمله، فرایند فیلتراسیون و صنایع نفتی به خصوص فرایند ازدیاد برداشت نفت دارد، مورد مطالعه بسیاری از دانشمندان واقع شده‌است. به صورت کلی می‌توان گفت، زمانی که سیالی با ویسکوزیته کمتر باعث جابجایی سیالی با ویسکوزیته بیشتر شود، این نوع ناپایداری

در مرز رخ می‌دهد و به دلیل عدم توانایی سیال در جابجایی سیال ویسکوزتر، مسیرهای باریکی را در آن به وجود می‌آورد که به دلیل شباهت‌اش به انگشتان دست، به نام ناپایداری انگشتی لرج شناخته می‌شود [۵].

هیل و همکاران [۶] برای اولین بار این نوع ناپایداری را مشاهده کردند و بعد از آن تلاش‌های گسترده‌ای برای شناخت، بررسی و شبیه‌سازی این پدیده صورت گرفت. از جمله اولین این تلاش‌ها، می‌توان به کار پیثمن و همکاران [۷] اشاره کرد. آنها در کار خود با استفاده از معادلات مبتنی بر فشار و سرعت، سعی در شبیه‌سازی ناپایداری داشتند. همچنین کریس و بوند [۸] و بسیاری دیگری از محققین با گسترش سرعت رایانه‌ها، سعی در افزایش دقت در مطالعات پیشین داشتند [۹، ۱۰]؛ اما شاید بتوان تحول عظیم در نوع مطالعه این ناپایداری را در کار تن و حمصی [۱۱] جستجو کرد. آنها برای اولین بار در سال ۱۹۸۸ با استفاده از روش‌های شبه‌طیفی و الگوریتم تفاضل محدود، معادلات را به فضای فوریه انتقال دادند و با استفاده از این روش، الگوی‌های مختلف و جدیدی از انگشتی‌ها را مشاهده و ثبت کردند. بعد از این تلاش، توجه محققان بسیاری در همان سال‌ها به سمت روش معرفی شده در [۱۱] متمرکز شد، به عنوان مثال، تن و حمصی [۱۲] در سال ۱۹۹۲، تأثیر ضریب ناهمگنی را در این نوع ناپایداری بررسی کردند و همینطور زیمرمن و حمصی، در یک محیط سه‌بعدی شبیه‌سازی را انجام دادند و با مقایسه نتایج اعلام کردند که حل مساله در محیط دوبعدی برای درک بهتر مساله کافی است. در سال‌های بعد ویت و حمصی [۱۳]، این بار در یک محیط ناهمگن، جابجایی دو سیال قابل امتزاج را بررسی کردند و الگوهای مختلفی را مشاهده کردند که به ازای تغییرات ضریب نفوذ در راستای عمودی و افقی وجود داشت.

در سال‌های اخیر نیز، مطالعات گسترده‌ای روی این نوع ناپایداری صورت گرفته است. درانی و نوروزی [۱۴] با نسبت‌دادن ویسکوزیته به دما و غلظت، تأثیرات ناهمسانگردی تانسور نفوذپذیری و تأثیر عدد لوئیس و ضریب تأخیر حرارتی را مورد بررسی قرار دادند که به دلیل انتقال حرارت سیالات با محیط جامد به وجود می‌آید. آنها نشان دادند که کاهش ضریب تأخیر حرارتی علاوه بر اینکه باعث عقب‌افتادگی جبهه حرارتی در پشت جبهه سیالاتی می‌شود، باعث پایدارتر شدن

¹ Fractal

² Koch Snowflake

³ Sierpinski Triangle

انگشتی را به ازای حالات مختلف ثبت کردند؛ همچنین واکنش شیمیایی در علوم پزشکی به ویژه روش‌های دارورسانی که واکنش بین حامل پلیمری و دارو در بدن رخ می‌دهد [۲۷] و در طبیعت و علوم مهندسی در جریان آلاینده‌های شیمیایی و محیط زیستی، جداسازی کروماتوگرافی، فرایند بازیابی نفت و فرایند سنتز پلیمرها قابل مشاهده است [۲۸]. از آنجایی که مرز در فرایند بازیابی نفت که محل رخداد ناپایداری است، بسیار حایز اهمیت می‌باشد، مطالعات گسترده‌ای روی آن صورت پذیرفته است.

با توجه به ادبیات موضوع، می‌توان دریافت که مطالعات زیادی روی پدیده ناپایداری انگشتی شدن لزج صورت گرفته است، اما از منظر فرکتالی مطالعات چندانی را شاهد نیستیم، هرچند که در سال‌های اخیر تحقیقات قابل توجهی روی کاربردهای فرکتالی انجام شده است. یکی از مهمترین کاربردهای فرکتالی آن را می‌توان در مسائل پزشکی جستجو کرد. به عنوان مثال کارهایی قابل توجهی روی تشخیص زود هنگام سرطان پستان [۲۹]، آلزایمر [۳۰] و بسیاری دیگر از مسائل پزشکی [۳] با استفاده از دیدگاه فرکتالی و آنالیز تصویر انجام شده است. در این مقاله با در نظرگیری مرز مشترک در جابجایی دو سیال در محیط همگن متخلخل و با فرض واکنش شیمیایی بین دو سیال به عنوان هندسه فرکتالی، سعی در تحلیل نتایج و آنالیز تصاویر به روش چندفرکتالی شده است.

۲- معادلات حاکم

به صورت کلی برای انجام آزمایش‌های تجربی برای ایجاد یک محیط متخلخل، از سلول هل شاول استفاده می‌کنند. لذا برای شبیه‌سازی نیز، سلول هل-شاولی به عرض H ، طول L و ضخامت b فرض می‌شود که در آن $b \gg H$ در نظر می‌گیریم. سیال یک با ویسکوزیته μ_1 و چگالی ρ_1 از سمت چپ با سرعت U وارد محیط شده و سعی در جابجایی سیال دوم با ویسکوزیته μ_2 و چگالی ρ_2 دارد؛ همچنین در مرز مشترک دو سیال واکنش شیمیایی به صورت رابطه (۱) اتفاق می‌افتد که سیالی سومی را با ویسکوزیته μ_3 تولید می‌کند (شکل ۱).

$$A + B \rightarrow C \quad (1)$$

که A غلظت سیال جابجاکننده، B غلظت سیال جابجاشونده و C غلظت سیال حاصل از واکنش سیال‌های ذکر شده است.

جریان نیز می‌شود؛ همچنین خطییبی و همکاران [۱۵] با مطالعه تجربی این نوع ناپایداری در یک سلول هل-شاول شامل دانه‌های بلور شیشه‌ای، طول اختلاط و بازده جاروبی فرایند جابجایی را با باینری کردن تصاویر مورد بررسی قرار دادند.

مساله ناپایداری انگشتی شدن لزج در جابجایی دو سیال دارای جنبه‌های مختلفی است که محققان بسیاری به آن پرداخته‌اند. به عنوان مثال می‌توان با در نظرگیری تنش برشی در بین دو سیال [۱۶]، حالات مختلف ترکیب دوتایی نیوتونی و غیرنیوتونی دو سیال [۱۷]، حالات مختلف ناهمگنی محیط و در نظرگیری توابع مختلف [۱۳]، در نظرگیری جاذبه و تاثیر آن در جابجایی دو سیال [۱۸]، معرفی و استفاده از روش‌های عددی مختلف در حل مساله [۱۹]، تعیین تاثیر پارامترهای مختلف از جمله نسبت ابعاد، پکلت و نسبت ویسکوزیته [۲۰] و ارائه راهکارهای مختلف برای افزایش بازده جابجایی و کاهش انگشتی‌ها در فرایند ازدیاد استخراج نفت [۲۱] اشاره کرد. یکی دیگر از مواردی که نسبت به سایر جنبه‌ها کمتر مورد توجه قرار گرفته است، در نظرگیری واکنش شیمیایی در مرز مشترک دو سیال است. اولین کارهایی که در این زمینه انجام شده است را می‌توان در تحقیق ویت و حمصی [۲۲] مشاهده کرد؛ همچنین در سال ۲۰۰۸ میسرا و همکاران [۲۳] و سال ۲۰۰۹ قسمت و ازایز [۲۴]، با معرفی تابعی برای واکنش شیمیایی، این ناپایداری را شبیه‌سازی کردند. در تمامی این کارها واکنش شیمیایی به صورت اتوکاتالیتسی در نظر گرفته شده بود، اما نوع دیگری از واکنش شیمیایی در سال‌های اخیر، مورد توجه قرار گرفته است که در حین جابجایی سیال دوم توسط سیال اول، در مرز مشترک، سیال سومی نیز به وجود می‌آید و با گذر زمان رشد می‌کند و می‌تواند دارای ویسکوزیته متفاوتی باشد [۲۵]. در سال ۲۰۱۰ حجازی و ازایز [۲۵]، با در نظرگیری سیال تولیدی در مرز مشترک، تاثیر انگشتی‌ها و پایداری جابجایی را برای حالات مختلف نسبت ویسکوزیته بین سیال جابجاکننده و جابجاشونده، سیال جابجاکننده و سیال تولیدی و ترکیب‌های مختلف این حالت‌ها را بررسی کردند؛ همچنین نشان دادند، عدد پکلت بزرگتر منتهی به سرعت واکنش کمتری می‌شود. در سال ۲۰۱۵ الحمید و ازایز [۲۶] با اضافه کردن یک ترم به معادلات حاکم، برگشت‌پذیری واکنش را نیز در معادلات گنجانند و شبیه‌سازی ناپایداری

$$R_b = \ln\left(\frac{\mu_B}{\mu_A}\right) \quad (1-8)$$

$$R_c = \ln\left(\frac{\mu_c}{\mu_A}\right) \quad (2-8)$$

با توجه به این روابط می‌توان گفت که R_b ناپایداری بین دو سیال واکنش‌دهنده را نشان می‌دهد و اگر سیال جابجاکننده دارای ویسکوزیته کمتری باشد، ناپایداری رخ خواهد داد؛ همچنین R_c با توجه به همین استدلال، ناپایداری بین سیال A و سیال تولیدی را تعیین خواهد کرد.

شرایط اولیه را نیز به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$u = U, \quad v = 0, \quad (1-9)$$

$$A = \begin{cases} A_0 & x < L/2 \\ 0 & x > L/2 \end{cases} \quad (2-9)$$

$$B = \begin{cases} 0 & x < L/2 \\ B_0 = A_0 & x > L/2 \end{cases} \quad (3-9)$$

$$C = 0 \quad (4-9)$$

و شرط مرزی نیز به صورت زیر تعریف خواهد شد:

$$at \ x = 0, \quad u = U, \quad v = 0, \quad A = A_0 \quad (1-10)$$

$$at \ x = L, \quad u = U, \quad v = 0, \quad B = A_0 \quad (2-10)$$

$$(u, v, A, B, C)(x, 0, t) = (u, v, A, B, C)(x, H, t) \quad (3-10)$$

با توجه به رابطه (۳-۱۰) فرض می‌شود که مساله در دو مرز بالا و پایین متناوب است.

۲-۱- بی‌بعدسازی معادلات

برای راحتی استفاده از معادلات و همچنین وابستگی به متغیرهای کمتر، از بی‌بعدسازی استفاده می‌کنیم. یکی از راه‌های بی‌بعدسازی مساله ناپایداری، استفاده از پارامتر پراکنش است [۱۱]. در این روش، طول را با D/U ، زمان را با D/U^2 ، ویسکوزیته را با استفاده از ویسکوزیته سیال جابجاکننده μ_A ، فشار را با $\mu_A D/K$ و در نهایت برای غلظت، از غلظت سیال جابجاکننده استفاده می‌شود؛ لذا غلظت سیال یک و دو مقدار عددی یک و سیال تولیدی دارای غلظت صفر می‌شود؛ همچنین برای اینکه بتوان تغییرات مرز را به سهولت مشاهده کرد، دستگاه مختصات را در حالت لاگرانژی در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم، دستگاه مختصات نیز با سرعت ثابت U در حال حرکت است. یعنی:

$$\mathbf{x}^* = (x^*, y^*) = \bar{\mathbf{x}} - \mathbf{it}^* \quad (11)$$

جابجایی بین دو سیال غیرقابل تراکم در محیط متخلخل به وسیله معادله پیوستگی، معادله داری و معادله جابجایی- نفوذ برای غلظت مورد استفاده قرار می‌گیرد؛ لذا می‌توان روابط (۲-۶) را در نظر گرفت:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

$$\nabla p = -\left(\frac{\mu}{K}\right) \mathbf{u} \quad (3)$$

$$\frac{DA}{Dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla A = \nabla \cdot D \nabla A - kAB \quad (4)$$

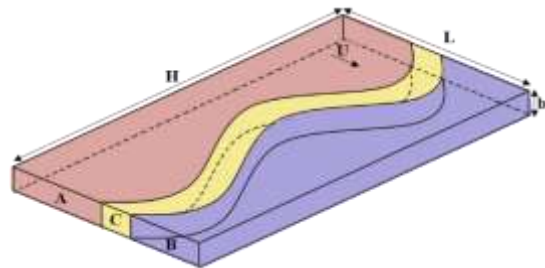
$$\frac{DB}{Dt} = \frac{\partial B}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla B = \nabla \cdot D \nabla B - kAB \quad (5)$$

$$\frac{DC}{Dt} = \frac{\partial C}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla C = \nabla \cdot D \nabla C + kAB \quad (6)$$

که در روابط بالا $\mathbf{u} = (u, v)$ میدان سرعت، p فشار، A, B و C همانطور که گفته شد، غلظت سیال‌های واکنش‌دهنده و تولیدی است، k ضریب واکنش و D تانسور پراکنش همسانگرد است؛ همچنین K/μ تحرک سیال تعریف می‌شود که حاصل نسبت ضریب نفوذپذیری محیط K به ویسکوزیته سیال μ است. لازم به توجه است فرض می‌شود که مقدار ضریب نفوذپذیری و ضریب پراکنش در همه جهتها و در محیط ثابت است. همچنین برای تکمیل روابط باید رابطه‌ای را نیز برای وابستگی ویسکوزیته به غلظت نوشت. تاکنون روابط زیادی برای این کار مطرح شده است، اما در این تحقیق با توجه به [۲۵] از رابطه (۷) استفاده می‌کنیم:

$$\mu = \mu_A e^{(R_b B + R_c C)/A_0} \quad (7)$$

که در این رابطه A_0 غلظت اولیه سیال جابجاکننده است و با غلظت اولیه سیال جابجاشونده برابر فرض می‌شوند.



شکل ۱- شماتیکی از مساله مورد بررسی

همچنین لازم به ذکر است که R_b و R_c هم به ترتیب نسبت تحرک سیال‌های واکنش‌دهنده و تولیدی است که به صورت زیر معرفی می‌شوند [۲۵]:

(۱۸)، فشار حذف شده و رابطه دیگری برای گردابه بدست می‌آید:

$$\omega = R_b \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \left(\frac{\partial B}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + 1 \right) \left(\frac{\partial B}{\partial y} \right) \right) + R_c \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \left(\frac{\partial C}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + 1 \right) \left(\frac{\partial C}{\partial y} \right) \right) \quad (22)$$

همچنین روابط ۱۵ تا ۱۷ نیز به فرم زیر تبدیل خواهند شد:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial x} \left(\frac{\partial A}{\partial y} \right) \right) = \nabla^2 A - D_a AB \quad (23)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \left(\frac{\partial B}{\partial x} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial x} \left(\frac{\partial B}{\partial y} \right) \right) = \nabla^2 B - D_a AB \quad (24)$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \left(\frac{\partial C}{\partial x} \right) - \frac{\partial \psi}{\partial x} \left(\frac{\partial C}{\partial y} \right) \right) = \nabla^2 C + D_a AB \quad (25)$$

مجموعه معادلات (۲۱-۲۵) تحت معادلات نهایی حاکم برای شبیه‌سازی مساله، مورد استفاده قرار می‌گیرد.

۲-۳- حل عددی

پیش از اینکه تن و حمصی [۱۱] برای اولین بار با استفاده از روش شبه‌طیفی و انتقال معادلات به فضای فوریه سریع، مساله ناپایداری را حل کنند، شبیه‌سازی این ناپایداری به صورت حل مستقیم صورت می‌گرفت [۳۲]؛ اما شرط استفاده از تبدیل فوریه و یا تبدیل هارتلی، با توجه به متناوب بودن این دو تبدیل، داشتن شرایط مرزی متناوب است [۳۳]؛ لذا با استفاده از راه حلی که توسط مانیکام و حمصی [۳۴] معرفی شد، غلظت به صورت جمع دو عبارت حل پایه و اغتشاشی در نظر گرفته می‌شود:

$$C(x, y, t) = \bar{C}(x, t) + \hat{C}(x, y, t) \quad (26)$$

در معادله (۲۶) \bar{C} حل دقیق است که به صورت یک بعدی و تابعی از (x, t) است و $\hat{C}(x, y, t)$ غلظت ناشی از اغتشاش در مرز مشترک است؛ لذا مساله با استفاده از ترم اغتشاشی حل شده و سپس به حل پایه اضافه می‌شود. با توجه به اینکه اغتشاش به صورت زیر به وسط صفحه و دقیقاً روی مرز وارد می‌شود، می‌توان مساله را به صورت متناوب نسبت به دیواره‌های چپ و راست (ورودی و خروجی) در نظر گرفت و از تبدیل هارتلی بهره جست.

$$\mathbf{u}^* = (u^*, v^*) = \bar{\mathbf{u}} - i \quad (12)$$

لذا معادلات حاکم به صورت (۱۳-۱۷) خواهد بود:

$$\nabla \cdot \mathbf{u}^* = 0 \quad (13)$$

$$\nabla p^* = -\mu^* (\mathbf{u}^* + i) \quad (14)$$

$$\frac{DA^*}{Dt^*} = \frac{\partial A^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla A^* = \nabla^2 A^* - D_a A^* B^* \quad (15)$$

$$\frac{DB^*}{Dt^*} = \frac{\partial B^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla B^* = \nabla^2 B^* - D_a A^* B^* \quad (16)$$

$$\frac{DC^*}{Dt^*} = \frac{\partial C^*}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla C^* = \nabla^2 C^* + D_a A^* B^* \quad (17)$$

رابطه (۷) نیز به صورت رابطه (۱۸) تبدیل خواهد شد.

$$\mu^* = e^{(R_b B^* + R_c C^*)} \quad (18)$$

در روابط بالا $D_a = kA_0 D/U^2$ است که به نام عدد دامکولر شناخته می‌شود. این عدد نسبت بین مشخصه زمانی هیدرودینامیکی و مشخصه زمانی شیمیایی را نشان می‌دهد [۲۵]. نکته قابل توجهی که می‌توان به آن اشاره کرد این است که بعد از بی‌بعد سازی طول را با عدد پکلت Pe و عرض صفحه را با Pe/A_r نشان می‌دهند که $A_r = L/H$ نسبت طول به عرض صفحه است. در ادامه علامت ستاره برای راحتی در نوشتار حذف شده است.

۲-۲- تابع جریان و گردابه

استفاده از تابع جریان و گردابه یکی از راه‌هایی است که همواره برای شبیه‌سازی مساله ناپایداری، مورد استفاده قرار می‌گیرد. با استفاده از این روش فشار از معادلات حذف شده و تعداد متغیرهای مستقل بیشتری نسبت به حالت عادی وجود خواهد داشت [۳۱]؛ لذا با استفاده از روابط موجود برای تابع جریان و گردابه که به صورت زیر است:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (19)$$

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (20)$$

با جایگذاری رابطه (۱۹) در (۲۰)، می‌توان رابطه (۲۱) نوشت:

$$\omega = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \psi \quad (21)$$

که رابطه (۲۱) همزمان شرط پیوستگی را ارضا می‌کند؛ همچنین با کرل گرفتن از رابطه (۱۴) و بکارگیری رابطه

در مسائل تک‌فرکتالی تصاویر به صورت باینری^۶ هستند. در این مقاله، مرز در مساله ناپایداری را مشابه خط ساحلی و لذا به صورت فرکتالی در نظر گرفتیم، اما به دلیل وجود طیف مختلفی از رنگ‌ها (در اینجا تصاویر ۸ بیت هستند) با یک مساله چندفرکتالی مواجه هستیم. لذا در این مساله شدت رنگ (که عددی بین صفر تا ۲۵۶ است) g در نظر گرفته می‌شود. در حقیقت یک چندفرکتالی، مجموعه‌ای از تک‌فرکتالی‌ها است، لذا می‌توان آن را با یک طیف نمایش داد.

۳-۱- محاسبه طیف چندفرکتالی

در بررسی فرکتالی عموماً از تصاویر خاکستری استفاده می‌کنند، چرا که هر سطح رنگ در تصاویر خاکستری، می‌تواند جایگزین هر سه سطح در رنگ‌های اصلی قرمز، سبز و آبی باشد و پیچیدگی مساله را کمتر می‌کند [۳۶].

در این مقاله، نتایج حاصل از ناپایداری به صورت ماتریس ذخیره می‌شوند که هر نقطه از ماتریس، در تصویر می‌تواند نشان‌دهنده یک پیکسل باشد؛ لذا اگر شدت رنگ در هر نقطه را با $g(x, y)$ نشان دهیم و تعداد پیکسل‌ها را نیز برابر $m \times n$ لحاظ کنیم، برای محاسبه پارامتر α در هر پیکسل، از رابطه (۳۰) استفاده می‌شود:

$$\alpha_i(m, n) = \frac{\ln(g_i(m, n))}{\ln(i)}, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (30)$$

که به α مولفه هولدر^۷ می‌گویند. در حقیقت پارامتر α در هر نقطه (پیکسل) بی‌نظمی‌های همان محل را نمایش می‌دهد؛ همچنین در این رابطه g_i مقدار اندازه شدت رنگ در خانه‌ای به اندازه $i = \mathcal{E}$ است. نکته‌ای که می‌توان اشاره کرد، این است که مقدار اندازه این خانه هیچ وقت نمی‌تواند کوچکتر از مقدار ۱ شود، چرا که حداقل فاصله بین دو پیکسل از واحد ۱ است؛ لذا برای محاسبه این مولفه در هر پیکسل از شکل، باید ابعاد جعبه کنار آن را افزایش داد و سپس با استفاده از ترسیم منحنی لگاریتمی تابع بالا، مقدار شیب خط را برابر مقدار α در نظر گرفت. با این فرایند، برای کل پیکسل‌های موجود در شکل می‌توان یک مقدار مولفه α

$$C(x, y, 0) = \bar{C}(x, 0) + \delta \cdot \text{rand}(y) \cdot \exp\left(-x^2/\sigma^2\right) \quad (27)$$

که δ شدت مقدار تصادفی را تعیین می‌کند، $\text{rand}(y)$ یک عدد تصادفی بین -۱ و ۱ است و σ پارامتری است که شدت نفوذ پراکندگی‌ها را از مرز جلویی نمایش می‌دهد. مزیت استفاده از این روش، تبدیل معادلات به معادلات دیفرانسیل معمولی است [۳۳]. در نهایت شرایط مرزی با توجه به استفاده از ترم اغتشاشی برای تابع جریان و گردابه به صورت روابط (۲۸-۲۹) بازنویسی می‌شود:

$$(\omega, \psi, \hat{C})(-t, y, t) = (\omega, \psi, \hat{C})(Pe - t, y, t) \quad (28)$$

$$(\omega, \psi, \hat{C})(x, 0, t) = (\omega, \psi, \hat{C})(x, Pe/A_r, t) \quad (29)$$

با داشتن شرایط اولیه غلظت توسط رابطه (۲۷) و شرایط مرزی، پیشرفت زمانی توسط رابطه آدام بشفورث^۱ صورت می‌پذیرد [۱۱ و ۱۷]. قابل توجه است که تمام توضیحات برای سیال تولیدی ذکر شد، اما برای سیال اول و دوم نیز، صادق است و در رابطه ۲۶ تا ۲۹ برای غلظت سیال A و B نیز صدق می‌کند.

۳- تحلیل فرکتالی

یکی از مهمترین پارامترهای موجود در آنالیز فرکتالی تصاویر، بعد فرکتالی آن است. همانطور که در مقدمه هم ذکر شد، بعد فرکتالی می‌تواند به صورت عدد کسری نیز باشد و با استفاده از این بعد می‌توان تا حدودی در مورد اندازه و پیچیدگی شکل صحبت کرد و به عبارت بهتر می‌توان گفت، بعد فرکتال میزان چگالی یا درهم تنیدگی هندسه فرکتالی نشان می‌دهد که فضا را اشغال کرده است. راه‌های متفاوتی برای محاسبه بعد فرکتال موجود است که از جمله آنها می‌توان به روش تشابهی^۲، هیوگچی^۳، هادزروف^۴ و جعبه‌شمارنده^۵ اشاره کرد. هر کدام از این روش‌ها، می‌تواند بنا به نوع مساله پاسخ‌های نسبتاً متفاوتی را ارائه کند. هر کدام از روش‌هایی که ذکر شد، تنها زمانی قابل استفاده هستند که هندسه به صورت تک فرکتالی باشد [۳۵].

¹ Adams-Bashforth

² Similarity Dimension

³ Higuchi methods

⁴ Hausdorff Dimension

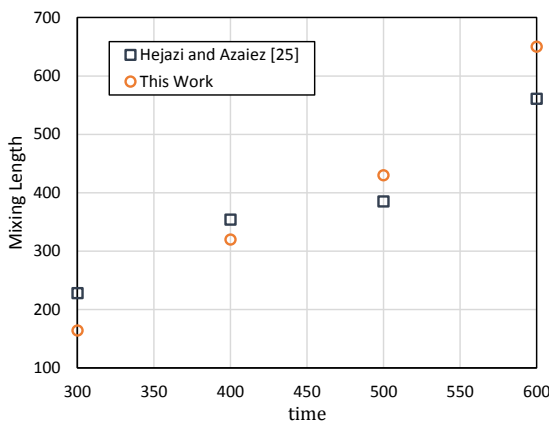
⁵ Box-counting

⁶ Binary

⁷ Holder

۴- ارائه نتایج

در این قسمت نتایج حاصل از کانتورهای غلظت هر کدام از سیال‌ها به نمایش گذاشته خواهد شد. ابتدا به صورت مختصر کانتورهای غلظت به ازای شرایط مختلف مورد بررسی قرار می‌گیرد و سپس تحلیل فرکتالی روی ناپایداری صورت می‌پذیرد. در این مقاله شبکه‌های ۱۲۸×۱۲۸ ، ۲۵۶×۲۵۶ و همچنین ۵۱۲×۲۵۶ ، مورد بررسی قرار گرفت و با بررسی تعداد و شکل انگشتی‌ها در هر حالت و با توجه به ثابت بودن نسبت ابعاد و عدد پکلت در تمامی شبیه‌سازی‌ها، از شبکه ۱۲۸×۲۵۶ استفاده شد؛ همچنین برای راستی آزمایشی نیز برای شرایط $D_a = 0.5$ ، $A_r = 2$ و $Pe = 1000$ ، $R_b = 3$ و $R_c = 5$ طول اختلاط با کار حجازی و ازایز [۲۵] مقایسه شد. شکل ۲ مقایسه نتایج حاصل از طول اختلاط را به نمایش می‌گذارد؛ همچنین لازم به ذکر است که طول اختلاط در یک زمان مشخص در حالتی که سیال سومی تولید می‌شود، برابر با فاصله بین اولین و آخرین نقطه‌ای در نظر گرفته شده است که میانگین غلظت عرضی سیال تولیدی بیشتر از 0.1 است.



شکل ۲- طول اختلاط به ازای $Pe = 1000$ ، $A_r = 2$ و $R_b = 3$ ، $R_c = 5$ و $D_a = 0.5$

۴-۱- کانتورهای غلظت

شکل ۳ کانتور غلظت را در یک شبیه‌سازی برای هر سه سیال در یک زمان به نمایش می‌گذارد. همانطور که در شکل نیز مشخص است، می‌توان گفت که این شکل‌ها مکمل یکدیگر هستند، لذا در ادامه مقاله تنها از کانتور سیال

متناظر با آن پیکسل بدست آورد؛ لذا می‌توان تصویر آلفای متناظر آن را نیز رسم کرد.

با داشتن مقدار مولفه هولدر در کل شکل، می‌توان برش‌هایی بر حسب مقدار α بین مقدار بیشینه و کمینه آن ایجاد کرد؛ لذا با استخراج مقدار کمینه و بیشینه α بدست آمده، می‌توان رابطه (۳۱) را نوشت [۳۷]:

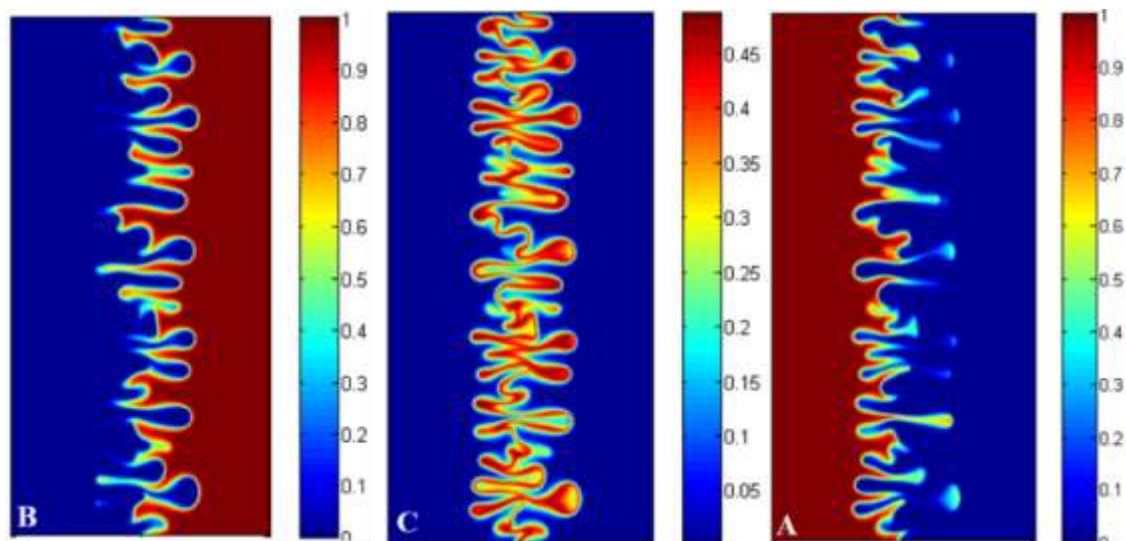
$$\alpha_i = \alpha_{min} + \left(\frac{\alpha_{max} - \alpha_{min}}{n} \right) i \quad (31)$$

در رابطه (۲۴) n عدد دلخواهی است که مولفه آلفا را به همان تعداد برش تقسیم می‌کند؛ لذا با فرض n زیربازه، می‌توان $i = 1, 2, \dots, n-1$ در نظر گرفت. هر چقدر این عدد بزرگتر باشد، یا عبارت دیگر فاصله نقاط کمتر شود، طیفی که قرار است محاسبه شود، بسیار هموارتر خواهد بود؛ اما وضوح تصاویر بدست آمده کم می‌شود [۳۶].

حال اگر هر کدام از زیربازه‌های آلفا $(\alpha_p < \alpha < (\alpha_p + \Delta\alpha_p))$ در تصویر شمارش شود، می‌توان به منحنی هیستوگرام تصویر دست یافت. به تعداد برش‌های (زیرمجموعه‌ها) آلفا، می‌توان تصویر باینری ترسیم کرد. در حقیقت با انجام فرایندهای ذکر شده، یک تصویر چندفرکتالی به تعداد n تصویر تک‌فرکتالی تبدیل شده است. لذا با استفاده از روش جعبه‌شمارنده بعد فرکتالی، هر یک از این برش‌ها محاسبه می‌شود که آن را با $f(\alpha)$ نمایش می‌دهند. $f(\alpha)$ بر خلاف α بی‌نظمی‌های کلی شکل را نمایش می‌دهد. در روش جعبه‌شمارنده اگر هر تصویر برش آلفا را به جعبه‌هایی با اندازه j تقسیم کنیم، تعداد جعبه‌هایی که حداقل یک مقدار تصویر را در خود دارند را با $N_j(\alpha_p)$ نشان می‌دهند. به ازای جعبه‌هایی با طول‌های مختلف این فرایند تکرار می‌شود و شیب $\ln(N_j(\alpha_p)) - \ln(j)$ به عنوان $f_j(\alpha_p)$ اطلاق می‌شود:

$$f_j(\alpha_p) = \frac{\ln(N_j(\alpha_p))}{\ln(j)}, \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (32)$$

به عبارت بهتر به ازای هر برش که مقدار آلفای مشخصی دارد، یک مقدار بعد یا همان $f(\alpha)$ محاسبه می‌شود که به آن منحنی $\alpha - f(\alpha)$ منحنی طیف چندفرکتالی می‌گویند؛ همچنین می‌توان با جایگذاری مقدار $f(\alpha)$ متناظر با α در ماتریس تصویر آلفا، تصویر $f(\alpha)$ آن را نیز ترسیم کرد.



شکل ۳- کانتور غلظت هر سه سیال به ازای $A_r = 0.5$, $Pe = 1000$, $R_b = 3$, $R_c = 3$ و $D_a = 0.3$ در زمان ۴۰۰

می‌تواند حالت‌های مختلفی را داشته باشد. اگر R_b بزرگ‌تر از صفر باشد، قطعا ناپایداری رخ می‌دهد، اما در صورت منفی بودن مقدار R_b ، بین دو سیال الف و ب ناپایداری رخ نخواهد داد و بسته به حالت‌های مختلف R_c بین هر کدام دو سیال واکنش‌دهنده و تولیدی می‌تواند در مرز مشترک ناپایداری رخ دهد که با رابطه (۳۳-۳۴) قابل تفکیک است [۲۵]:

$$R_{AC} = R_c/2 \quad (33)$$

$$R_{CB} = R_b - R_c/2 \quad (34)$$

به عبارت دیگر هر کدام از مقادیر بالا که مثبت باشد، مرز مشترک دو سیال (زیروند پارامتر R) ناپایدار خواهد بود.

شکل ۵ دو نوع حالت دیگر از ناپایداری را به عنوان مثال تنها در یک زمان خاص نشان می‌دهد. در این شکل شرایط ورودی طوری لحاظ شده است تا یکبار در مرز مشترک سیال B و C و بار دیگر در مرز مشترک سیال A و C ناپایداری رخ دهد. قابل توجه است که در هر دو حالت مقدار R_b منفی لحاظ شده تا هیچ ناپایداری از ابتدا قبل از تشکیل سیال تولیدی در مرز رخ ندهد، زیرا در آن حالت شاهد تاثیر ناپایداری در زمان اولیه روی سایر زمان‌ها خواهیم بود.

تولیدی استفاده می‌شود؛ همچنین شایان به ذکر است که برای تحلیل چندفرکتالی هم به دلیل تشابه هندسه سیال سوم به خط ساحلی، از همین کانتور بهره خواهیم برد. شکل ۴ نمونه‌ای از شبیه‌سازی غیر خطی را در زمان‌های مختلف نمایش می‌دهد. در این شکل مقدار نسبت ویسکوزیته طوری انتخاب شده است که ناپایداری در هر دو سمت مرز سیال رخ خواهد داد، لذا گسترش انگشتی‌ها کاملاً در شکل مشهود است. الگوی‌های مختلفی را نیز می‌توان در کانتور شکل ۴ مشاهده کرد. همانطور که در دایره سفید رنگ مشخص شده است، دایره شماره یک پدیده انتشار^۱ را به نمایش می‌گذارد، دایره شماره دو، پدیده حلقه گمشده^۲ و دایره شماره سه، علاوه بر نمایش بهم‌آمیختگی یک‌طرفه^۳، پدیده گلوبی شدن^۴ را نیز نشان می‌دهد؛ همچنین در دایره شماره چهار پدیده محو شدن^۵ مشهود است. هر کدام از این الگوها در [۲۰، ۱۹] توضیح داده شده‌اند.

نکته دیگری که باید به آن اشاره کرد، این است که سه سیال دو مرز را به وجود می‌آورند؛ لذا پایداری در مرز

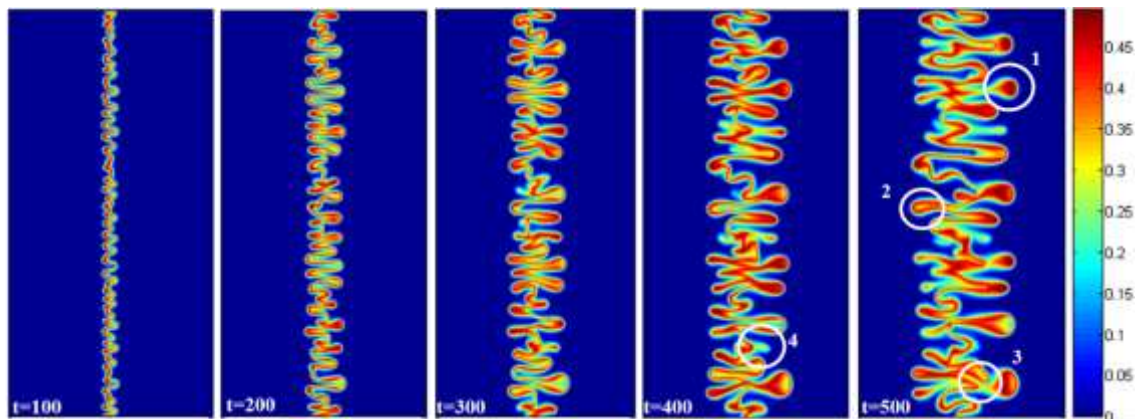
^۱ Spreading

^۲ Trailing lobe detachment

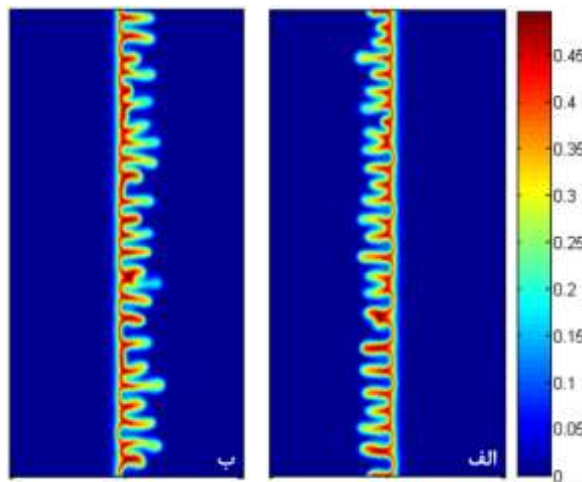
^۳ Side Merging

^۴ Necking

^۵ Fading



شکل ۴- کانتور غلظت سیال C به ازای $A_r = 0.5$, $Pe = 1000$, $R_b = 3$, $R_c = 3$ و $D_a = 0.3$



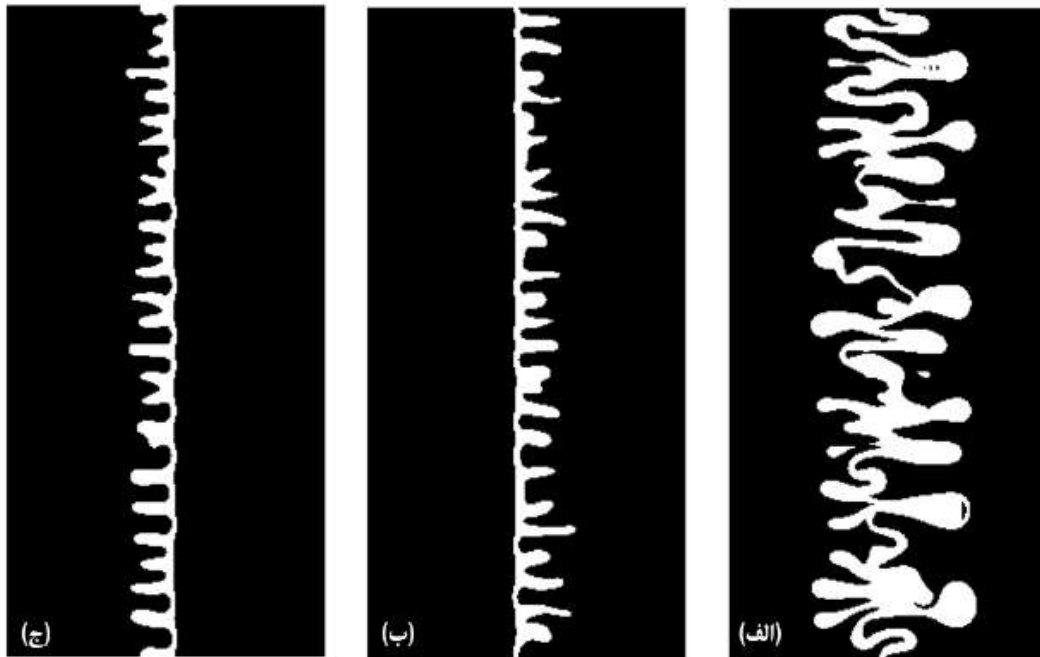
شکل ۵- کانتور غلظت سیال C به ازای شرایط $A_r = 0.5$, $Pe = 1000$, $D_a = 0.3$ در زمان ۴۰۰
و الف) $R_c = 3$, $R_b = -1.5$ و ب) $R_c = -4$, $R_b = -0.5$

۴-۲- تحلیل تک فرکتالی

همانطور که پیش تر هم گفته شد، به دلیل ویژگی‌های موجود در تصویر ناپایداری انگشتی لزج بهتر است، بجای استفاده از ویژگی‌های فرکتالی از ویژگی‌های سیستم‌های چندفرکتالی استفاده کنیم، اما در کار زاکاد و همکاران [۳۸] با تبدیل تصاویر به حالت باینری، از روش تک فرکتالی استفاده شده است. در این قسمت نیز با استفاده از همین الگو، سعی در محاسبه بعد فرکتالی جابجایی دو سیال می‌شود.

شکل ۶ تصویر باینری ناپایداری را به ازای سه حالت مختلف به نمایش می‌گذارد. در این حالت از سطوح رنگ بندی صرف نظر شده و سیال سوم، تنها حالت صفر و

یکی را دارا خواهد بود. با استفاده از شکل ۶ و روش جعبه‌شمارنده، بعد هر یک از سه حالت مختلف در طول زمان در منحنی شکل ۷ ترسیم شده است. همانطور که در شکل نیز مشخص است، با گذر زمان به علت رشد انگشتی‌ها بر بعد فرکتالی سیستم نیز افزوده شده است. در حالتی که مرز فقط از یک سو ناپایدار است، انگشتی‌ها با توجه به شکل ۵ تنها در یک سو پیشروی کرده و الگوی خاصی را ایجاد نمی‌کنند؛ لذا بعد فرکتالی آنها نیز به صورت تقریباً یکنواختی در حال افزایش است، اما در حالتی که از هر دو سو ناپایداری رخ می‌دهد، می‌توان مشاهده کرد که بعد فرکتالی ناگهان دچار کاهش شده است که علت این کاهش را می‌توان در تبدیل

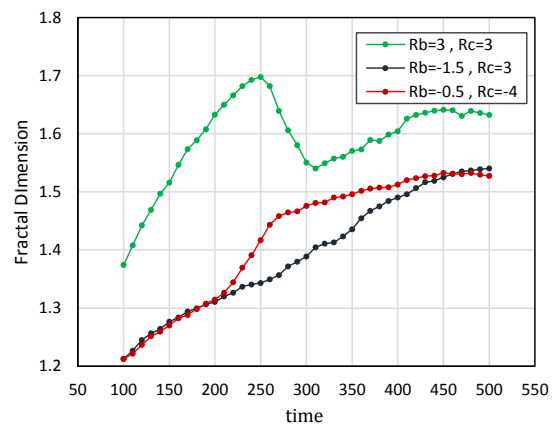


شکل ۶- تصویر باینری کانتور غلظت در زمان ۵۰۰ به ازای $A_r = 0.5$, $Pe = 1000$, $D_a = 0.3$ (الف) ناپایداری از دو سو $R_c = 3$, $R_b = 3$ (ب) ناپایداری از یک سو $R_c = -0.5$, $R_b = -4$ (ج) ناپایداری از یک سو $R_c = 3$, $R_b = -1.5$

۴-۳- تحلیل چندفرکتالی

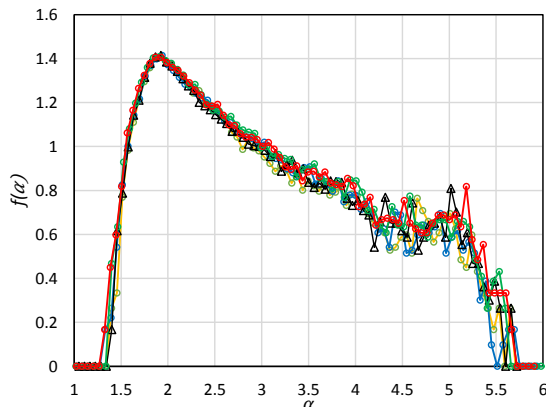
هر تصویر دارای سطوح مختلفی از رنگ است. به عنوان مثال یک تصویر هشت بیتی، دارای 2^8 سطح رنگ متغیر از صفر تا ۲۵۶ است؛ لذا هرچه قدر تصویر تعداد بیت بیشتری داشته باشد، گستره تعداد رنگ‌هایی که می‌تواند نمایش دهد نیز، به مراتب بسیار بیشتر خواهد بود. در این مقاله از تصویر زمینه خاکستری و هشت بیتی استفاده شده است. تصویر سفید با سطح رنگ ۲۵۶ و تصویر مشکی با سطح رنگ صفر در ماتریس نشان داده می‌شوند؛ همچنین تعداد پیکسل‌های عکس نیز، دقیقاً برابر مش‌های مورد استفاده است و بنا به نوع مساله می‌تواند متغیر باشد.

روش‌هایی که برای محاسبه طیف چندفرکتالی استفاده می‌شود، اصولاً دارای پاسخ برابری نیستند، هرچند که این پاسخ‌ها به لحاظ عددی به یکدیگر نزدیک می‌باشند. منحنی طیف فرکتالی، تغییرات تابع آلفا بر حسب آلفا را نشان می‌دهد. به صورت کلی می‌توان گفت که عرض منحنی (تغییرات آلفا) وابسته به شدت رنگ‌ها در تصویر است و هرچه قدر شدت رنگ‌ها بیشتر باشد، عرض منحنی نیز بیشتر می‌شود. نکته قابل توجهی که باید در مورد این منحنی گفت،

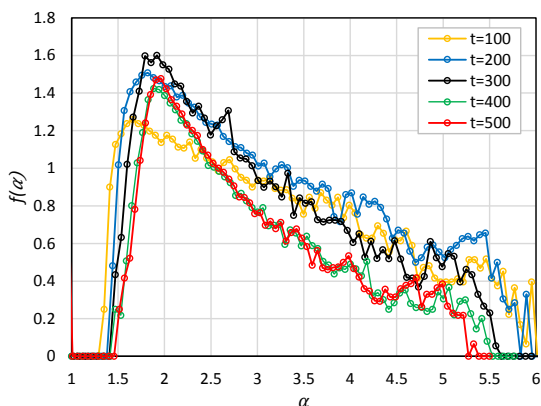


شکل ۷- منحنی بعد فرکتالی نسبت به زمان در حالت‌های مختلف

تصاویر خاکستری به باینری جستجو کرد، چرا که شکل دیگر حالت حقیقی خود را ندارد و می‌توان هر نمایی را ایجاد کند. هرچند ترکیب انگشتی‌ها به یکدیگر و ایجاد الگوهای ساده‌تر نیز می‌تواند دلیل دیگری بر این مساله باشد. در قسمت بعدی به صورت تحلیل چندفرکتالی، مساله را مورد بررسی قرار می‌دهیم.



شکل ۸- منحنی طیف فرکتالی در پنج شبیه‌سازی یکسان برای $D_a = 0.3$ و $R_c = 3$, $R_b = 3$, $Pe = 1000$, $A_r = 0.5$ در زمان $t = 400$



شکل ۹- منحنی طیف فرکتالی در زمان‌های مختلف برای $D_a = 0.3$ و $R_c = 3$, $R_b = 3$, $Pe = 1000$, $A_r = 0.5$

بیشینه بُعد با گذر زمان اندکی کاسته شده و دوباره افزایش می‌یابد. نکته قابل توجهی که می‌توان به آن توجه کرد، این است که مقدار تغییرات آلفا در تمامی زمان‌ها برای این حالت از ۱/۵ آغاز شده و تا حدود بازه ۵/۵ تا ۶ ادامه دارد و تقریباً منحنی‌ها به غیر از ناحیه پیک، دارای همپوشانی نسبی هستند.

شکل ۱۰ نیز طیف فرکتالی را به ازای زمان‌های مختلف در حالتی نشان می‌دهد که در سمت چپ مرز ناپایداری وجود دارد. در این حالت با گذر زمان بیشترین مقدار منحنی در نقطه‌ای نزدیک آلفا دو به صورت پیوسته با گذر زمان افزایش می‌یابد، اما در سایر نقاط منحنی‌ها دارای همپوشانی

این است که این منحنی شبیه یک ناقوس برعکس است که نقطه بیشینه آن معمولاً در آلفایی رخ می‌دهد که شکل مورد نظر از نظر هندسی در آن بُعد قرار دارد. به عنوان مثال از آنجایی که مساله تحت بررسی دو بعدی است، انتظار داریم که بیشینه این منحنی در همین حوالی اتفاق بیافتد. باید ذکر کرد که در حقیقت تابع آلفا، بعد فرکتالی را در هر آلفایی به ازای نوع اندازه‌گیری نمایش می‌دهد که انتخاب شده است.

مساله مهمی که باید به آن اشاره کرد، این است که فاکتورهای از جمله، طول اختلاط، سطح تماس و بازدهی جاری که برای بررسی ناپایداری انگشتی مورد استفاده قرار می‌گیرند، زمانی می‌توانند با هم مقایسه شوند که در چهارچوب یکسانی باشند، به این معنا که به عنوان مثال در بستر اعداد پکلت ثابت می‌توان فاکتور طول اختلاط به ازای نسبت ویسکوزیته مختلف با هم بررسی کرد، اما تحلیل فرکتالی کاملاً مستقل قابل محاسبه است، چرا که بعد فرکتالی یک منطقه از یک تصویر، با بعد فرکتالی کل آن تصویر یکسان است [۳]، بنابراین عدد پکلت و نسبت ابعاد نمی‌تواند در مقایسه ناپایداری در فاکتورهای مختلف با هم محدود کننده باشد؛ لذا می‌توان دو شرایط کاملاً متفاوت از هم را با این بعد اندازه‌گیری کرد.

همانطور که پیشتر نیز ذکر شد، اغتشاش‌های رندومی به عنوان شرط اولیه به سیستم وارد می‌شوند. شکل ۸ پنج شبیه‌سازی با شرایط ورودی یکسان، اما با ورودی اغتشاش تصادفی را به نمایش می‌گذارد. همانطور که در شکل نیز مشخص است، اغتشاش‌های ورودی متفاوت هرچند الگوی‌های انگشتی مختلفی را ایجاد می‌کنند، اما منحنی طیف فرکتالی آنها دقیقاً مشابه یکدیگر است، لذا اغتشاش تصادفی تأثیری در نتایج نخواهد داشت.

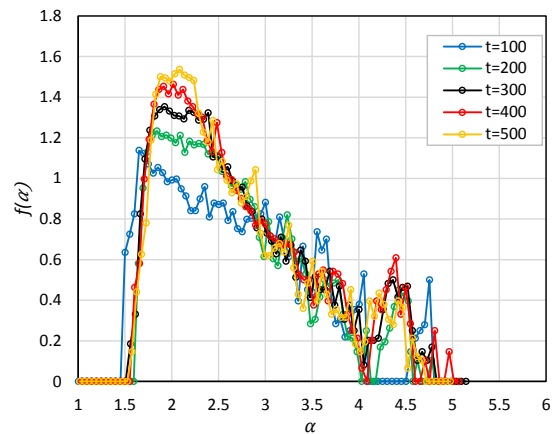
شکل ۹ طیف فرکتالی را به ازای زمان‌های مختلف نشان می‌دهد. همانطور که در حالت صفر و یک نیز به صورت نسبی مشاهده کردیم، در این حالت به دلیل پیچیدگی انگشتی‌ها و اینکه در هر لحظه الگویی را دارا هستند، نمی‌توان به سهولت به این نتیجه رسید که با گذشت زمان و گسترش انگشتی‌ها، مقدار بعد فرکتالی آن نیز افزایش می‌یابد. با توجه به شکل می‌توان گفت، افزایش زمان تا ۳۰۰ بیشینه بُعد فرکتالی را افزایش داده، اما بعد از آن از میزان

با مقایسه شکل‌های ۹ تا ۱۱ در یک زمان مشخص نیز می‌توان به تاثیر پارامتر تفاوت نسبت ویسکوزیته دو سیال پی برد. به عنوان مثال در زمان ۲۰۰ در شکل ۹ که انگشتی‌ها الگوی پیچیده‌تری را دارند، بیشترین عدد فرکتالی برابر ۱/۵۳ است؛ در حالی که در شکل‌های ۱۰ و ۱۱ که انگشتی‌ها الگوی ساده‌تری دارند، این عدد به ترتیب برابر ۱/۲۵ و ۱/۲۹ را دارد. می‌توان گفت، هر عاملی که باعث پیچیدگی انگشتی‌ها شود که خود ناشی از افزایش ناپایداری است، بعد فرکتالی بیشتری را به دنبال خواهد داشت.

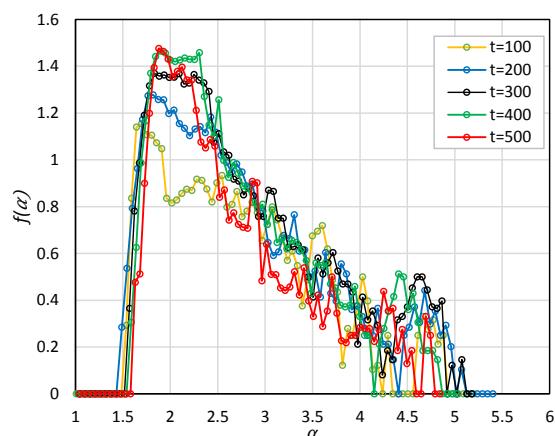
شکل ۱۲ تاثیر نسبت ویسکوزیته R_b را بر تحلیل فرکتالی نشان می‌دهد. در این حالت با ثابت فرض کردن تمامی پارامترها، مقدار R_b را از عدد $-۰/۵$ تا $-۱/۸$ تغییر داده‌ایم. در این حالت، در مقدار R_b از $۱/۵$ تا $۰/۲$ تغییر می‌کند، به عبارت دیگر میزان ناپایداری کاهش می‌یابد. همانطور که در شکل نیز مشخص است، در یک زمان ثابت ۴۰۰، بیشترین منحنی طیف فرکتالی کاهش یافته است. مساله دیگری که به آن می‌توان اشاره کرد، عرض منحنی است. با کاهش میزان نسبت ویسکوزیته، عرض منحنی نیز کم شده است که می‌تواند به این معنا باشد که گستردگی شدت رنگ کاهش یافته‌است، به عبارت دیگر، ناحیه اختلاط دو سیال هرچند انتظار داریم بزرگتر شده باشد، اما گستردگی کمتری را به علت کاهش تعداد انگشتی‌ها دارد.

با توجه به بررسی چندفرکتالی پدیده ناپایداری در محیط متخلخل، می‌توان ذکر کرد که زمانی که بعد فرکتالی از عدد یک فاصله می‌گیرد، انگشتی‌ها در حال شکل‌گیری هستند؛ چرا که سیال حاصل از واکنش، شکل خطی خود را که دارای بعد یک بوده از دست می‌دهد و شکل انگشتی به خود می‌گیرد؛ همچنین می‌توان گفت که هرچند به لحاظ ظاهری به نظر می‌آید با پیشروی در زمان، انگشتی‌ها در هم فرو رفته و به اصطلاح شکل پیچیده‌تری را به وجود می‌آورند، اما باید خاطر نشان کرد که بررسی فرکتالی نشان می‌دهد، با توجه به الگوها ممکن است، با گذر زمان از پیچیدگی شکل کاسته شود که مثال مناسبی که می‌توان برای آن در نظر گرفت، فرورفتگی انگشتی‌ها در یکدیگر و کاهش تعداد نسبی انگشتی‌ها است.

هستند. باید دقت شود که در این حالت که تنها از یک سو ناپایداری رخ می‌دهد، عرض منحنی کمتر شده و تغییرات آلفا بین ۱/۵ تا عددی بین ۴ تا ۵ است؛ همچنین برای حالتی که ناپایداری تنها در سمت راست مرز بین دو سیال رخ می‌دهد (شکل ۱۱) نیز، نتایج به نسبت مشابهی را می‌توان مشاهده کرد. کمترین مقدار در نقطه پیک طیف چندفرکتالی در زمان ۱۰۰ ثبت شده است که عدد ۱/۱۲ را نشان می‌دهد. در این حالت بیشترین مقدار طیف فرکتالی با زمان بیشتر شده و در نهایت در زمان ۵۰۰ به عدد ۱/۴۸ رسیده است که برای شکل ۹ و ۱۰ به ترتیب برابر ۱/۶۱ و ۱/۵۲ است.



شکل ۱۰- منحنی طیف فرکتالی در زمان‌های مختلف برای $R_c = 3, R_b = -1.5, Pe = 1000, A_r = 0.5$ و $D_a = 0.3$

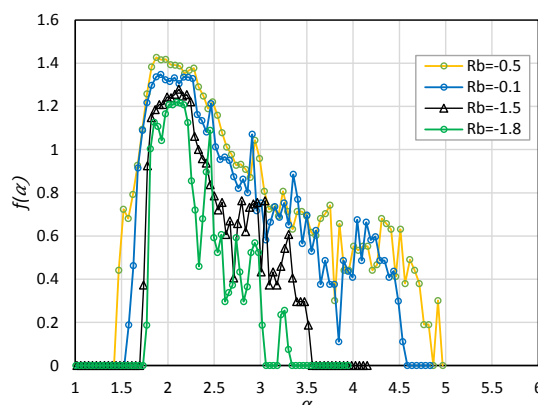


شکل ۱۱- منحنی طیف فرکتالی در زمان‌های مختلف برای $R_c = -4, R_b = -0.5, Pe = 1000, A_r = 0.5$ و $D_a = 0.3$

جارویی، طول انگشتی و میانگین غلظت عرضی، بُعد چندفرکتالی ناپایداری هم می‌تواند نشان‌دهنده شروع و میزان پیچیدگی ناپایداری باشد.

۶- منابع

- [1] Mandelbrot B (1982) The fractal geometry of nature. W. H. Freeman, San Francisco.
- [2] Falconer K (1997) Techniques in fractal geometry. John Wiley & Sons, Chichester.
- [3] Reljin IS, Reljin BD (2002) Fractal geometry and multifractals in analyzing and processing medical data and images. Arch Oncol 10(4): 283-293.
- [4] Labat D, Mangin A, Ababou R (2002) Rainfall-runoff relations for karstic springs: Multifractional analysis. J Hydrol 256: 176-195.
- [5] Homsy GM (1987) Viscous fingering in porous media. Ann Rev Fluid Mech 19: 271-311
- [6] Hill S (1952) Channeling in packed columns. Chem Eng Sci 1(6): 247-253.
- [7] Peaceman DW, Rachford JRHH (1962) Numerical calculation of multidimensional miscible displacement. SPE 2: 327-339.
- [8] Christie MA, Bond DJ (1985) Multidimensional flux corrected transport for reservoir simulation. SPE Reserv Eval Eng.
- [9] Moissis DE, Miller CA, Wheeler MFA (1988) Parametric study of viscous fingering in miscible displacement by numerical simulation. Numerical simulation in Oil recovery 227-247.
- [10] Russell TF, Wheeler MF, Chiang C (1986) Large-scale simulation of miscible displacement by mixes and characteristic finite element methods. Mathematical and computational method in seismic Exploration and Reservoir Modeling 85-107.
- [11] Tan CT, Homsy GM (1988) Simulation of nonlinear viscous fingering in miscible displacement. Phys Fluids 31: 1330.
- [12] Tan CT, Homsy GM (1992) Viscous fingering with permeability heterogeneity. Phys Fluids 4: 1099.
- [13] De Wit A, Homsy GM (1997) Viscous fingering in periodically heterogeneous porous media. I. Formulation and linear instability. J Chem Phys 107: 9609.
- [14] Dorrani S, Norouzi M (2018) Nonlinear simulation of thermo-viscous fingering instability in anisotropic porous media. Modares Mechanical Engineering 18(03): 9-18. (in Persian)
- [15] Khatibi SM, Khaleghi A, Norouzi M (2017) An experimental investigation on viscous fingering



شکل ۱۲- منحنی طیف فرکتالی در یک زمان ثابت ۴۰۰ و به ازای R_b های مختلف در $Pe = 1000$, $A_r = 0.5$, $R_c = -4$ و $D_a = 0.3$

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله تحلیل فرکتالی مساله ناپایداری انگشتی لزج در یک محیط متخلخل همگن با فرض واکنش شیمیایی بین دو سیال جابجاکنده و جابجاشونده، مورد انجام قرار گرفت. ابتدا تاثیر ویسکوزیته سیال تولیدی بر ناپایداری در حالت‌های مختلف مختصراً بررسی شد و نتایج نشان داد که در حالت واکنش شیمیایی ناپایداری می‌تواند سه حالت مختلف به خود بگیرد که از جمله آنها می‌توان به حالت ناپایداری در یکی از دو سوی مرز و یا ناپایداری همزمان در هر دو سمت مرز مشترک اشاره کرد. سپس با معرفی پارامتر بُعد فرکتالی در ناپایداری و اندازه‌گیری مقدار این پارامتر به روش تک‌فرکتالی و استفاده از تصاویر باینری، نتایج نشان دادند که همزمان با رشد انگشتی‌ها بر عدد بُعد نیز افزوده می‌شود که این به معنای پیچیدگی بیشتر در کل شکل است، هرچند که این تحلیل تک‌فرکتالی به دلیل استفاده از تصاویر باینری دقت لازم را ندارد و به همین دلیل با استفاده از روش چندفرکتالی و منحنی آلفا و تابع آلفا، به ازای حالات مختلف ناپایداری، در زمان‌های متفاوت منحنی طیف فرکتالی ترسیم شد. منحنی طیف فرکتالی برای یک حالت خاص در زمان‌های مختلف تقریباً دارای همپوشانی‌های بسیاری با یکدیگر هستند، هر چند با گذر زمان بر مقدار بیشینه منحنی افزوده می‌شود که به معنای افزایش پیچیدگی است؛ همچنین تاثیر نسبت ویسکوزیته نیز، بر منحنی طیف فرکتالی مورد بررسی قرار گرفت. می‌توان دریافت که در کنار پارامترهایی مثل بازده

- Transactions on Engineering Technologies. Springer, Dordrecht.
- [27] Zarzycki R, Modrzejewska Z, Nawrotek K (2010) Drug release from hydrogel matrices. *Ecol Chem Eng* 17(2).
- [28] Wit AD, Bertho Y, Martin M (2005) Viscous fingering of miscible slices. *Phys Fluids* 17(5): 054114.
- [29] Vasiljevic J, Pribic J, Kanjer K, Jonakowski W, Sopta J, Nikolic-Vukosavljevic D, Radulovic M (2015) Multifractal analysis of tumour microscopic images in the prediction of breast cancer chemotherapy response. *Biomed Microdevices* 17(5): 9995.
- [30] Ni H, Zhou L, Ning X, Wang L (2016) Exploring multifractal-based features for Mild Alzheimer's disease classification. *Magn Reson Med* 76: 259-269.
- [31] Zimmerman WB, Homsy GM (1991) Nonlinear viscous fingering in miscible displacements with anisotropic dispersion. *Phys Fluids* 3(8): 1859-1872.
- [32] Fayers FJ (1988) Approximate model with physically interpretable parameters for representing miscible viscous fingering. *Society of Petroleum Engineers Reservoir Engineering* 3: 5515-5558.
- [33] Bracewell RN (1984) The fast Hartley transform. *P IEEE* 72: 1010-1018.
- [34] Manickam O, Homsy GM (1995) Fingering instabilities in vertical miscible displacement flows in porous media. *J Fluid Mech* 288: 75-102.
- [35] Nilsson E (2007) Multifractal-based image analysis with applications in medical imaging. Master's Thesis in Computing Science and Mathematics, Umeå University.
- [36] Gonzalez RC, Woods RE (2002) Digital image processing. 2nd edn. Prentice-Hall.
- [37] Stojic T, Reljinb I, Reljinb B (2006) Adaptation of multifractal analysis to segmentation of microcalcifications in digital mammograms. *Physica A* 367: 494-508.
- [38] Zakade KR, Rabbani Gh, Khan AR, Shaikh YH (2015) Temporal evolution of viscous fingering in hele shaw cell: A fractal approach. *Int J Sci Res* 6(10).
- instability of Newtonian fluid in transparent porous media with compact structure consisting of glass beads. *Modares Mechanical Engineering* 17(9): 207-216. (in Persian)
- [16] Pramanik A, Mishra M (2015) Nonlinear simulations of miscible viscous fingering with gradient stresses in porous media. *Chem Eng Sci* 122: 523-532.
- [17] Norouzi M, Shoghi MR (2015) Nonlinear simulation of non-Newtonian viscous fingering instability in anisotropic porous media. *Modares Mechanical Engineering* 15(7): 415-425. (in persian).
- [18] Rogerson A, Meiburg E (1993) Numerical simulation of miscible displacement processes in porous media flows under gravity. *Phys Fluids A* 5: 2644-2660.
- [19] Islam MN, Azaiez J (2005) Fully implicit Finite difference pseudo-spectral method for simulating high mobility-ratio miscible displacements. *Int J Numer Methods Fluids* 47(2): 161-183.
- [20] Maleka I, Saberi A, Shahnazari MR (2017) Simulation and nonlinear instability investigation of viscous fingering of two miscible fluid flow in homogeneous porous media. *Journal of Petroleum Research* 12(27): 147-162. (in Persian)
- [21] Shahnazari MR, Maleka Ashtiani I, Saberi A (2018) Linear stability analysis and nonlinear simulation of the channeling effect on viscous fingering instability in miscible displacement. *Phys Fluids* 30(3): 034106.
- [22] De Wit A, Homsy GM (1999) Viscous fingering in reaction-diffusion systems. *J Chem Phys* 110(17): 8663-8675.
- [23] Mishra M, Martin M, De Wit A (2008) Differences in miscible viscous fingering of finite width slices with positive or negative log-mobility ratio. *Phys Rev E* 78(6): 066306.
- [24] Ghesmat K, Azaiez J (2009) Miscible displacements of reactive and anisotropic dispersive flows in porous media. *Transp Porous Med* 77: 489-506.
- [25] Hejazi SH, Azaiez J (2010) Non-linear interactions of dynamic reactive interfaces in porous media. *Chem Eng Sci* 65: 938-949.
- [26] Alhumade H, Azaiez J (2014) Viscous fingering of reversible reactive flows in porous media.