



## بررسی عددی خنک‌کاری بهینه مانع مربعی

محسن نظری<sup>۱\*</sup>، الهه درری<sup>۲</sup>، صادق تفکر<sup>۲</sup> و علی عباس‌نژاد<sup>۱</sup>

<sup>۱</sup>استادیار دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود

<sup>۲</sup>دانشجوی مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود

### چکیده

در این مقاله انتقال حرارت جابجایی آزاد در یک محفظه بسته با وجود یک مانع مربعی گرم دما ثابت مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج ارائه شده، توسعه مقاله‌ی منتشر شده‌ی قبل (۱۱): نظری م، رضانی س، انتقال حرارت جابجایی آزاد در یک حفره مربعی با وجود مانع گرم به روش شبکه‌بولتزمن، مجله علمی پژوهشی مهندسی مکانیک مدرس، دوره ۱۱، ص ۱۳۳-۱۱۹) بوده و اثرات هندسی مانع و محل قرارگیری آن بر روی انتقال حرارت به دقت لحاظ شده است. سیال مورد بررسی هوا و جریان سیال دو بعدی، پایا و تراکم ناپذیر است. برای شبیه‌سازی عددی از روش شبکه‌بولتزمن استفاده شده و نتایج حاصل، با نتایج روش حجم محدود نیز مقایسه شده است. علاوه بر این، برای نخستین بار یک تحلیل مقیاسی بین دو روش انجام شده است. در روش شبکه‌بولتزمن، معادلات مومنتوم با استفاده از اعمال نیروی حجمی در معادله‌بولتزمن قابل استخراج است. تاثیر تغییر نسبت طول مانع به طول محفظه و همچنین تاثیر تغییر عدد رایلی بر الگوی جریان سیال و انتقال حرارت در محفظه بررسی شده است. با افزایش عدد رایلی از  $10^2$  تا  $10^5$  انتقال حرارت افزایش می‌یابد و افزایش نسبت طول قطعه به طول حفره از  $0/1$  تا  $0/4$  نیز باعث افزایش انتقال حرارت می‌شود. تغییرات عدد ناسلت با تغییر مکان مانع و برای اعداد رایلی مختلف، نمایش داده شده و مکانی از مانع که در آن بیشترین نرخ انتقال حرارت رخ می‌دهد، مورد بررسی قرار گرفته است.

**کلمات کلیدی:** انتقال حرارت جابجایی آزاد؛ روش شبکه‌بولتزمن؛ روش حجم محدود؛ محفظه بسته.

### ۱- مقدمه

را در علوم مهندسی از جمله انتقال حرارت در کلکتورهای خورشیدی، طراحی تجهیزات خنک‌کننده، انتقال حرارت در پنجره‌های دو جداره و بهینه‌سازی مسائل مهندسی نام برد. خنک‌کاری تجهیزات الکترونیکی در یک محفظه بسته به کمک جریان هوا، از کاربردهای بسیار مهم انتقال حرارت جابجایی آزاد است که در دهه اخیر توجه زیادی به بهبود آن

انتقال حرارت جابجایی طبیعی اهمیت زیادی در پدیده‌های گوناگون طبیعی و همچنین در صنایع مختلف دارد. از جمله کاربردهای این نوع انتقال حرارت در مقیاس بزرگ می‌توان به علوم نجومی، علوم جوی و ژئوفیزیک اشاره کرد و در مقیاس‌های متوسط و کوچک می‌توان کاربردهای فراوان آن

مرزی و حل هندسه‌های پیچیده در روش شبکه بولتزمن شده است.

از جمله تحقیقاتی که با استفاده از این روش انجام شده، حل مساله انتقال حرارت جابجایی آزاد در یک محفظه بسته مایل با موانع متصل به دیوار گرم است که با کمک روش شبکه بولتزمن توسط جامیو همکاران [۱۰] مورد بررسی قرار گرفته است. مولفین از روش شبکه بولتزمن هیبرید و روش تفاضل محدود برای حل معادلات حاکم استفاده کرده‌اند و برای محفظه‌های عمودی و مایل، اثر زاویه‌ی موانع داخلی و طول موانع را بر انتقال حرارت مطالعه کردند. در تحقیق دیگر [۱۱]، مولفین همین مسئله را برای موانع داخلی روی دیوار سرد، برای طول و تعداد مختلف موانع بررسی کرده‌اند. از تحقیقات دیگر مرتبط با مساله می‌توان به استفاده از روش هیبرید در بررسی انتقال حرارت جابجایی طبیعی در داخل یک محفظه بسته با وجود موانع داخلی با در نظر گرفتن اثر تشعشع اشاره کرد [۱۲]. جامی و همکاران [۱۳] با روش شبکه بولتزمن انتقال حرارت جابجایی آزاد را در یک محفظه بسته با وجود یک استوانه داخلی تولید کننده‌ی حرارت، نیز بررسی کرده‌اند. مزرها<sup>۹</sup> و همکاران [۱۴] با ترکیب روش شبکه بولتزمن و روش تفاضل محدود، انتقال حرارت جابجایی طبیعی در یک محفظه بسته را مورد تحلیل قرار داده‌اند و در کارهای بعدی خود نیز با روش هیبرید، انتقال حرارت جابجایی آزاد به همراه تشعشع را از سطح یک استوانه گرم در داخل محفظه [۱۵] بررسی کرده‌اند. اثرات اندازه‌ی موانع، تغییر مکان و ضریب تشعشع سطح موانع، در این تحقیق لحاظ شده است.

محمود همکاران [۱۶] با استفاده از روش شبکه بولتزمن به بررسی انتقال حرارت جابجایی طبیعی در یک محفظه باز پرداختند. در کار ایشان اعمال شرط مرزی در قسمت باز محفظه، عدد ناسلت متوسط، الگوی جریان و خطوط همدمای در اعداد رایلی مختلف مورد بررسی قرار گرفته است. دیکسیت<sup>۱۰</sup> و بابو<sup>۱۱</sup> [۱۷] با استفاده از روش شبکه بولتزمن به بررسی انتقال حرارت جابجایی آزاد در یک محفظه بسته

شده است. در این پژوهش نیز تمرکز اصلی مولفین به بررسی بهبود انتقال حرارت و مکان‌یابی بهینه، برای یک مانع مربعی در یک محفظه بسته می‌باشد که مدل‌سازی عددی مساله به روش شبکه بولتزمن انجام گرفته است. هندسه ساده شده خنک کاری برخی قطعات در بوردهای الکترونیکی، مشابه هندسه انتخابی است.

مدل شبکه بولتزمن مستقیماً از مدل‌های شبکه‌ی گاز منشا گرفته است و می‌تواند به طور طبیعی مشکلات شبکه گاز را برطرف کند. روش شبکه گاز ارائه دهنده‌ی مدلی از برخورد ذرات مجازی بر روی یک شبکه‌ی منظم است. نخستین بار هاردی<sup>۱</sup> و پازیس<sup>۲</sup> در سال ۱۹۷۶ اولین مدل شبکه گاز را برای شبیه سازی جریان سیال ارائه نمودند [۲]. این مدل در سال ۱۹۸۶ توسط فریش<sup>۳</sup> و همکارانش بهبود یافت [۳]. معادله شبکه بولتزمن اولیه در سال ۱۹۸۸ توسط مک نامارا<sup>۴</sup> و زانتی<sup>۵</sup> [۴] برای پاسخگویی به مشکل اغتشاشات آماری شبکه گاز پیشنهاد شد، در سال ۱۹۸۹ توسط هیگورا<sup>۶</sup> و جیمز<sup>۷</sup> [۵] و در سال ۱۹۹۲ توسط چن<sup>۸</sup> و همکارانش گسترش و توسعه پیدا کرد [۶].

روش شبکه بولتزمن بر خلاف روش‌های مرسوم دینامیک سیالات محاسباتی که اساس آنها حل معادلات ماکروسکوپی و غیرخطی ناویراستوکس و انرژی است، بر پایه مدل میکروسکوپی بنا شده که در آن مجموعه رفتار ذرات برای شبیه‌سازی مکانیک پیوسته از یک سیستم به کار گرفته می‌شود [۷]. در معادلات شبکه بولتزمن، اپراتور انتقال خطی است، همچنین توزیع فشار در این روش با حل معادلاتی به دست می‌آید که در مقایسه با روش‌های دیگر که مستلزم حل معادلات پواسون و همانند آن می‌باشد، بسیار ساده است [۸-۹]. این اختلاف در روش حل عددی، در مقایسه با روش‌های دیگر، باعث برتری‌هایی از لحاظ محاسبات ساده‌تر، قابلیت موازی شدن، سهولت اعمال شرایط

<sup>۱</sup>Hardy

<sup>۲</sup>dePazzis

<sup>۳</sup>Frisch

<sup>۴</sup>McNamara

<sup>۵</sup>Zanetti

<sup>۶</sup>Higuera

<sup>۷</sup>Jimenez

<sup>۸</sup>Chen

<sup>۹</sup>Mezrhab

<sup>۱۰</sup>Dixit

<sup>۱۱</sup>Babu

$$f_i(\vec{x} + \vec{e}_i \Delta t, t + \Delta t) = f_i(\vec{x}, t) + \Omega_i(f) + \Delta t F_i. \quad (1)$$

این معادله شامل دو بخش جاری شدن و برخورد است. در مرحله جاری شدن (سمت چپ معادله)، توابع توزیع در جهت سرعت خود به سمت گره‌های مجاور جاری می‌شوند و بخش برخورد (سمت راست) بیانگر برخورد ذرات به یکدیگر، در محل نقاط شبکه است. برای تابع برخورد اپراتورهای مختلفی در نظر گرفته شده است. در سال ۱۹۵۴ بتینگر و همکارانش اپراتور برخورد بسیار ساده‌ای با یک زمان آرامش، به شکل زیر پیشنهاد کردند [۱۹]:

$$\Omega_i(f) = -\frac{f - f^{eq}}{\tau}. \quad (2)$$

در معادله فوق  $f^{eq}$  تابع توزیع تعادلی و  $\tau$  زمان آرامش بدون بعد، متناسب با معادله (۱) می‌باشد. به بیان دیگر ذرات سیال بعد از برخورد، نزدیک به حالت تعادلی خود می‌باشند که این اختلاف، با زمان آرامش متناسب است. عبارت  $F_i \Delta t$  در سمت راست معادله (۱) معرف نیروی خارجی است و در مساله مدلسازی انتقال حرارت جابجایی آزاد به کمک شبکه بولتزمن می‌تواند برابر  $3\rho w_i e_{yi} g \beta \Delta T$  در نظر گرفته شود [۱۶]. مدل شبکه در حالت کلی به صورت  $D_n Q_m$  بیان می‌شود که  $n$  بعد هندسی مساله و  $m$  تعداد بردارهای سرعت گسسته شده است. در این مقاله از مدل ۹ سرعته استفاده شده است ( $D_2 Q_9$ ). تابع توزیع تعادلی در این شبکه عبارتست از:

$$f_i^{eq}(\vec{x}, t) = w_i \rho \left[ 1 + \frac{1}{c_s^2} (\vec{e}_i \cdot \vec{u}) + \frac{1}{2c_s^4} (\vec{e}_i \cdot \vec{u})^2 - \frac{1}{2c_s^2} u^2 \right]. \quad (3)$$

که در آن  $w_i$  تابع وزنی است. این تابع وزنی به ازای  $\alpha=1$  برابر ۴/۹، به ازای  $\alpha=2 \sim 5$ ، برابر ۱/۹ و برای  $\alpha=6 \sim 9$  برابر ۱/۳۶ در نظر گرفته می‌شود و بردارهای سرعت ذرات در مدل ( $D_2 Q_9$ ) به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$e_x = [0, 1, 0, -1, 0, 1, -1, -1, 1]; \quad (4)$$

$$e_y = [0, 0, 1, 0, -1, 1, 1, -1, -1].$$

مقادیر ماکروسکوپیک، چگالی و سرعت نیز به صورت زیر محاسبه می‌شوند [۱۶]:

مربعی شکل در اعداد رایلی بزرگ پرداختند. مولفین از شبکه غیریکنواخت در حل عددی استفاده کرده و برای انتقال نتایج عددی از شبکه ریز محاسباتی به شبکه یکنواخت بولتزمن، از میانمایی بهره برده‌اند. کوزدیک<sup>۱</sup> و همکاران [۱۸] نیز با در نظر گرفتن شبکه غیریکنواخت در ناحیه محاسباتی به بررسی انتقال حرارت جابجایی آزاد در یک محفظه مربعی بسته پرداختند. با در نظر گرفتن شبکه غیریکنواخت، اعداد رایلی بزرگ نیز مورد تحلیل محققین قرار گرفته است.

بخش‌های این مقاله به شرح زیر است: در قسمت ۲ معادلات حاکم در روش شبکه بولتزمن بیان خواهد شد. در قسمت‌های ۳ و ۴ به تحلیل جریان و انتقال حرارت تحت شرایط مختلف، پرداخته شده و نتایج به دست آمده از روش شبکه بولتزمن با نتایج روش حجم محدود مقایسه شده است. در مقاله منتشر شده قبل، اثرات حضور صفحه‌ی گرم داخلی را با چیدمان‌های مختلف، در انتقال حرارت جابجایی طبیعی در محفظه با استفاده از روش شبکه بولتزمن بررسی کردیم [۱] و در این تحقیق انتقال حرارت در حضور یک مانع مربعی مورد بررسی قرار می‌گیرد. ضمناً محدوده‌ی مکانی مناسب مانع، برای انتقال حرارت بیشینه تعیین می‌شود. برای اولین بار یک تحلیل مقیاسی بین نتایج دو روش شبکه بولتزمن و حجم محدود ارائه خواهد شد که برای حل همزمان دو روش (مثل روش‌های هیبرید) راهگشا است.

## ۲- معادلات شبکه بولتزمن

در روش شبکه بولتزمن فرض بر این است که ذرات فقط در موقعیت‌های خاصی (نقاط شبکه) قرار داشته و مجاز به حرکت در جهات مشخصی می‌باشند و احتمال حضور ذرات در یک حجم کوچک حول نقطه  $x$  و در لحظه  $t$  با تابع  $f(x, t)$  نشان داده می‌شود.

### ۲-۱- معادله بولتزمن برای تحلیل جریان

تغییرات تابع توزیع احتمال  $f$ ، از معادله بولتزمن پیروی می‌کند که می‌توان آنرا به صورت زیر بازنویسی کرد [۱۹]:

<sup>1</sup>Kuznik

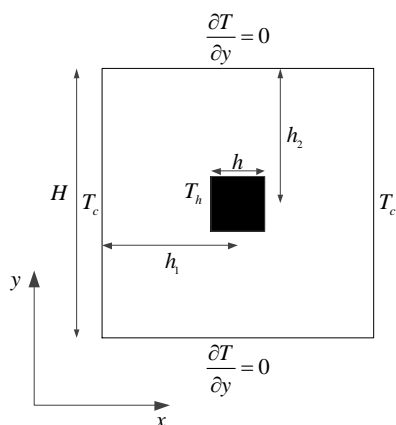
و  $\tau_h$  زمان آرامش حرارتی استکه با ضریب پخش شبکه، با رابطه (۱۳) مرتبط می‌باشد [۱۶].

$$\tau_h = 3\alpha + 0.5 \quad (10)$$

برای تعیین شرط مرزی دما ثابت و عایق می‌توان به مرجع [۱] مراجعه کرد. در مرجع [۱]، مولفین شرایط مرزی دمایی را روی یک دیوار دما ثابت و عایق ذکر کرده‌اند. به منظور خلاصه‌نویسی، از ذکر مجدد معادلات شرط مرزی اجتناب می‌شود. در استفاده از روش شبکه بولتزمن در مقایسه با روش حجم محدود، اکثر عملیات جبری است و نیاز به ملاحظات فشاری مثل حل معادله فشار، تصحیح فشار و یا کوپله شدن سرعت و فشار نیست، از این‌رو، استفاده از روش شبکه بولتزمن ساده‌تر و اعمال شرایط مرزی در آن بسیار راحت‌تر است. همچنین در این روش، تولید شبکه آسان است و نیاز به گسسته‌سازی پیچیده و جستجوی پیچیده در شبکه نیست.

### ۳- شرایط مسئله

در این مقاله، جریان سیال و انتقال حرارت در یک حفره مربعی بررسی شده است. دیواره‌های سمت چپ و راست سرد بوده و دیواره بالا و پایین محفظه عایق هستند. مانع گرم در موقعیت‌های مختلف در داخل حفره قرار گرفته است. سیال عامل، هوا انتخاب شده، عدد پرناتل در حل به روش شبکه بولتزمن برابر  $0.71$  در نظر گرفته شده و مطالعه برای اعداد رایلی مختلف از  $10^3$  تا  $10^5$  انجام شده است. نرخ انتقال حرارت در حفره، با محاسبه عدد ناسلت گزارش شده است. در شکل ۱، شرایط مرزی و هندسه مورد بررسی، نشان داده شده است.



شکل ۱- مانع مربعی همدمادرون محفظه بسته

$$\rho = \sum_{i=1}^9 f_i, \quad \rho \bar{u} = \sum_{i=1}^9 \bar{e}_i f_i \quad (5)$$

معادله استفاده شده در روش شبکه بولتزمن، و نیروی حجمی اضافه شده در معادله (۱)، قابلیت بازیابی معادلات ناویر استوکس را دارا می‌باشد [۲۰]، این کار با استفاده از بسط چاپمن-انسکاگ امکان پذیر است. در این بسط، رابطه بین زمان آرامش و لزجت شبکه بولتزمن به شکل زیر بیان می‌شود [۱۶]:

$$\tau = 3\nu + 0.5 \quad (6)$$

با توجه به رابطه فوق، برای اینکه مقدار فیزیکی مثبتی برای پارامتر  $\nu$  بدست آید و همچنین با ملاحظه شرط پایداری روش شبکه بولتزمن، مقدار  $\tau > 0.5$  انتخاب می‌شود. با ثابت در نظر گرفتن دیواره‌های محفظه و شرط عدم لغزش بر روی این دیواره‌ها، از مدل بونس‌بک<sup>۱</sup> بر روی گره در روش شبکه بولتزمن استفاده شده است [۲۱]. برای جزئیات بیشتر در مورد محاسبه توابع توزیع مجهول روی هر دیواره، می‌توان به مدل زو و هی [۲۱] مراجعه کرد.

### ۲-۲- معادله بولتزمن برای تحلیل انرژی

تابع توزیع احتمال استفاده شده برای بازیابی معادله انرژی، به صورت زیر است [۱۶]:

$$g_i(\bar{x} + \bar{e}_i \Delta t, t + \Delta t) = g_i(\bar{x}, t) - \frac{1}{\tau_h} [g_i - g_i^{eq}] \quad (7)$$

که  $g_i^{eq}$  تابع توزیع تعادلی است و به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$g_i^{eq}(\bar{x}, t) = w_i T \left[ 1 + \frac{1}{c_s^2} (\bar{e}_i \cdot \bar{u}) \right]. \quad (8)$$

که در آن  $c_s$  سرعت صوت می‌باشد و به دلیل انتخاب شبکه یکنواخت ( $\Delta x = \Delta y = \Delta t$ ) در میدان محاسباتی، برابر  $1/\sqrt{3}$  در نظر گرفته شده است. با استفاده از تابع توزیع احتمال معرفی شده، دما در هر نقطه از میدان محاسباتی، به صورت زیر قابل محاسبه است [۱۶]:

$$T = \sum_{i=1}^9 g_i \quad (9)$$

<sup>1</sup>Bounce-Back on Node

به‌گونه‌ای باید انجام شود که عدد ماخ  $Ma = u/c_s$  تا حد امکان کوچک باشد.

کوچک بودن عدد ماخ به معنی کوچک بودن خطای تراکم‌پذیری است. در این مساله، عدد ماخ کوچک‌تر از ۰/۱ در نظر گرفته شده است. قابل ذکر است که با این روش انتخاب پارامترهای شبکه بولتزمن ( $\nu$  و  $\alpha$ )، زمان آرامش حرارتی و هیدرولیکی در محدوده مجاز ذکر شده در قسمت ۲-۱، قرار خواهند گرفت. علاوه بر مطالب ذکر شده، انتخاب پارامترهای مربوط به شبکه بولتزمن باید به‌گونه‌ای باشد که مقادیر پارامترهای فیزیکی (مورد نظر در حل عددی) استخراج شوند.

در حل عددی به روش حجم محدود، لزجت واقعی سیال برابر  $0.001$  و طول محفظه برابر ۱ در نظر گرفته شده است و مقادیر  $0.02$  و  $100$  به ترتیب برای لزجت و طول در مقیاس شبکه بولتزمن در نظر گرفته شده است. در مدلسازی شبکه بولتزمن، این مقادیر دارای بعد نیستند. با این انتخاب‌ها مقدار ضریب تبدیل لزجت  $C_V$  (بین دو روش) برابر  $0.05$  و ضریب تبدیل طولی  $C_H$  بین دوروش برابر  $0.01$  است. اگر عدد رینولدز در مقیاس فیزیکی برابر  $Re$  و در مقیاس شبکه بولتزمن برابر  $Re_{lbm}$  باشد، از برابری دو عدد بی‌بعد خواهیم داشت:

$$uH/\nu = u_{lbm}H_{lbm}/\nu_{lbm}$$

$$\nu/\nu_{lbm} = (u/u_{lbm}) \cdot (H/H_{lbm})$$

با داشتن ضرایب تبدیل ویسکوزیته و طول، ضریب تبدیل سرعت  $C_V$  بین دو روش، با ضریب تبدیل لزجت متناسب بوده و با ضریب تبدیل طول، نسبت عکس دارد

$$(C_V = C_V / C_H)$$

یعنی هر سرعتی که از روش شبکه بولتزمن استخراج شود باید در این ضریب تبدیل (سرعت) ضرب شود تا سرعت فیزیکی معنی‌دار حاصل شود. همانطور که در نمودار نشان داده شده است، با ضرب کردن سرعت حاصل از شبکه بولتزمن در عدد ۵، سرعت‌های دو روش بر هم منطبق می‌شوند. این ضریب تبدیل استخراج شده، برای هر حل عددی مقایسه‌ای (مثل روش شبکه بولتزمن هیبرید) قابل کاربرد است. همچنین برابری اعداد رایلی و پرناتل (در هر دو

پارامترهای بدون بعد به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$\Pr = \frac{\nu}{\alpha}, \quad Ra = g\beta\Delta T \frac{H^3}{\nu\alpha}; \quad (12)$$

$$\theta = \frac{T - T_c}{T_h - T_c}; \quad A = \frac{h}{H}, \quad A_1 = \frac{h_1}{H}, \quad A_2 = \frac{h_2}{H}.$$

که در آن  $Pr$  عدد پرناتل و  $\theta$  دمای بی‌بعد است. پارامترهای بدون بعد  $A_1, A_2$  به ترتیب نشان‌دهنده طول بدون بعد مانع گرم، فاصله بدون بعد مرکز مانع تا دیواره عمودی و دیواره افقی است.

عدد ناسلت محلی بر روی دیواره عمودی سمت چپ حفره به صورت زیر تعریف می‌شود که در آن  $\theta(0, j)$  و  $\theta(1, j)$  به ترتیب، دمای دیواره و دمای سیال در گره مجاور دیواره است. در مخرج کسر  $1/M$  دیده می‌شود که در واقع طول بی‌بعد بین دو گره مجاور در مقیاس شبکه بولتزمن می‌باشد.  $M$  نیز طول محفظه در مقیاس شبکه بولتزمن است. در واقع در حل عددی به روش شبکه بولتزمن، از  $M$  فاصله واحد در طول محفظه استفاده شده است.

$$Nu = \frac{\theta(0, j) - \theta(1, j)}{1/M} \quad (13)$$

#### ۴- نتایج

##### ۴-۱- تحلیل مقیاسی دو روش

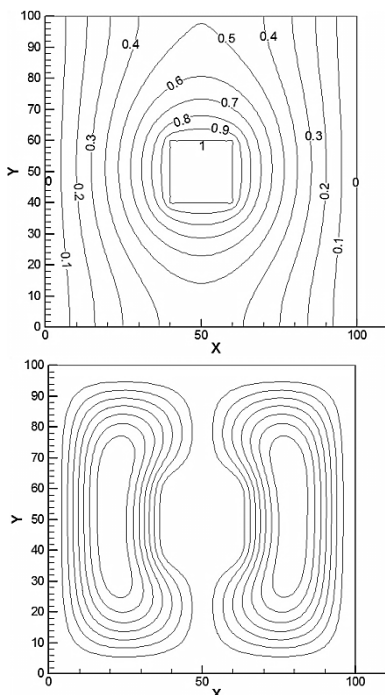
در این بخش به منظور اعتبارسنجی، مقایسه‌ای بین نتایج حاصل از روش شبکه بولتزمن و حجم محدود انجام شده است. دما و سرعت عمودی حاصل از دو روش، در امتداد خط مرکزی مانع در شکل ۲ نشان داده شده است که بیانگر انطباق نتایج حاصل از این دو روش است.

در شکل ۲-ج، این انطباق با در نظر گرفتن ضریب تبدیل سرعت بین مقادیر واقعی (نتایج فیزیکی) و نتایج شبکه بولتزمن حاصل می‌شود.

در حل به روش شبکه بولتزمن انتخاب تعداد نقاط شبکه (طول محفظه) و ویسکوزیته شبکه باید به گونه‌ای باشد که عدد ماخ شبکه بولتزمن در محدوده مجاز (عمدتاً کمتر از ۰/۱) قرار گیرد. در مساله حاضر، مقدار بزرگی سرعت ( $u$ ) در شبکه بولتزمن از مرتبه  $(g\beta\Delta TM)^{0.5}$  است که  $M$  تعداد نقاط شبکه (در راستای عمودی) می‌باشد. بنابراین انتخاب پارامترهای شبکه بولتزمن (مثل  $\nu$  و  $\alpha$ )،

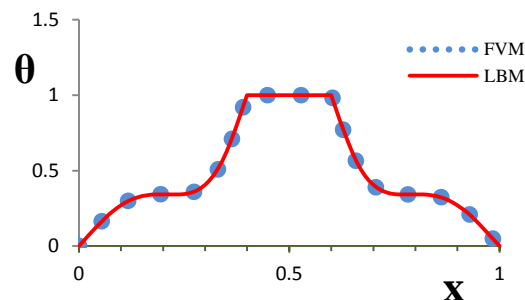
عمودی سمت چپ که معیاری از انتقال حرارت جابجایی آزاد است، تعداد نقاط شبکه‌برای همگرا شدن حل عددی، در هر دو روش گزارش شده است. معیار انتخاب شبکه مناسب در حل عددی، عدم تغییرات عدد ناسلت متوسط روی دیواره حفره می‌باشد، که در هر دو روش حل عددی برای هر هندسه با عدد رایلی مشخص تعداد شبکه مختلفی در نظر گرفته شده تا جاییکه عدد ناسلت تغییر نکند.

شکل ۳، بیانگر خطوط جریان و خطوط هم‌دما برای  $A=0.2$  در اعداد رایلی مختلف است. نتایج عددی در جدول ۱ بیانگر افزایش انتقال حرارت با افزایش عدد رایلی است که این روند در کار گذشته [۱] با مانع تیغه نیز مشاهده و به تفصیل توضیح داده شد.

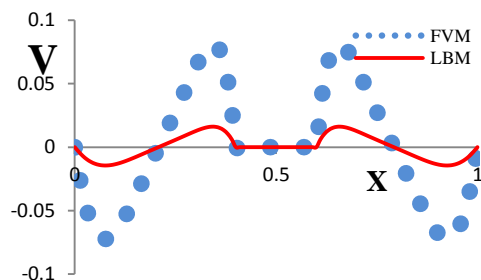


شکل ۳-الف- خطوط جریان و خطوط هم‌دما برای  $A=0.2$  ،  $A_1=0.5$  ،  $A_2=0.5$  و رایلی  $10^3$

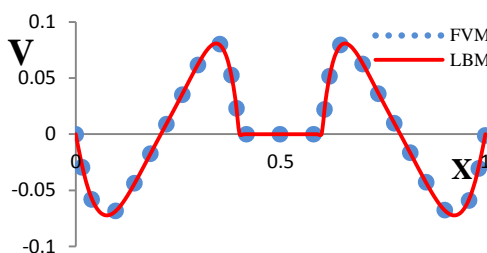
روش حل عددی) که اعداد بی‌بعد مهم در انتقال حرارت جابجایی طبیعی هستند، باید مورد توجه قرار گیرد.



شکل ۲-الف-دمای بی‌بعد در خط افقی گذرا از وسط مانع، برای  $A=0.2$  ،  $A_1=0.5$  ،  $A_2=0.5$  و رایلی  $10^5$



شکل ۲-ب- مولفه عمودی سرعت در خط افقی گذرا از وسط مانع، برای  $A=0.2$  ،  $A_1=0.5$  ،  $A_2=0.5$  و رایلی  $10^5$



شکل ۲-ج- مولفه عمودی سرعت در خط افقی گذرا از وسط مانع، با اعمال ضریب تصحیح، برای  $A=0.2$  ،  $A_1=0.5$  ،  $A_2=0.5$  و رایلی  $10^5$

۲-۴- بررسی اثرات تغییر عدد رایلی، تغییر موقعیت مانع و تغییر اندازه مانع

نتایج این بخش در جداول ۱ تا ۴ نشان داده شده است. در این جداول علاوه بر عدد ناسلت متوسط روی دیواره‌ی

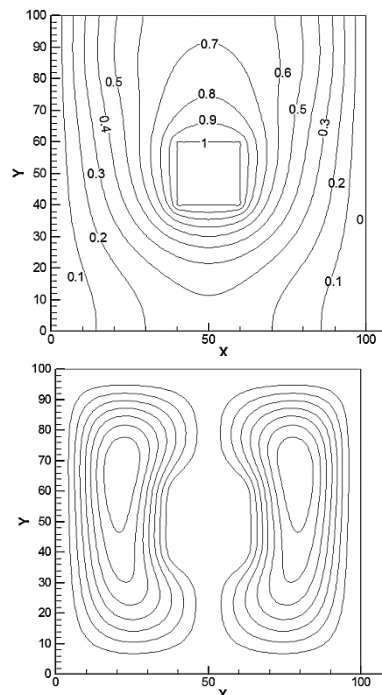
شکل ۴، خطوط جریان و خطوط هم‌دما را برای  $A=0.2$  و رایلی  $10^5$  و شکل ۵ خطوط جریان و هم‌دما را برای  $A=0.2$  و رایلی  $10^2$  با قراردادن مانع در دو موقعیت مختلف نشان می‌دهد.

نتایج حاصل از روش شبکه بولتزمن و حجم محدود برای این دو عدد رایلی به ترتیب در جداول ۲ و ۳ آمده است. با توجه به خطوط هم‌دما در شکل ۴، در عدد رایلی  $10^5$  در حالتیکه مانع گرم در موقعیت  $A_2=0.25$  قرار دارد، انتقال حرارت جابجایی ضعیف‌تر از حالت مربوط به  $A_2=0.75$  است. به بیان دیگر، هر چه مانع گرم به دیواره بالایی نزدیکتر باشد، اثرات انتقال حرارت جابجایی کمتر خواهد بود. این روند تغییرات برای یک مانع مسطح تیغه‌ای نیز صادق است. در ضمن خطوط دما ثابت (به شکل خطوط مستقیم) در زیر مانع (شکل ۴) نشان دهنده قدرت کم انتقال حرارت جابجایی در این ناحیه در مقایسه با قسمت فوقانی مانع است.

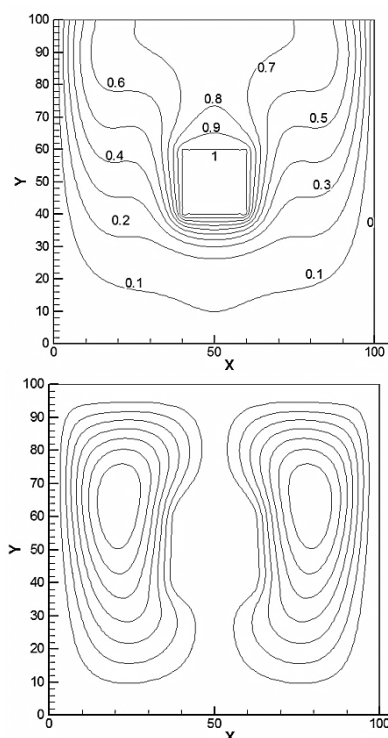
در شکل ۵، به دلیل اثر غالب انتقال حرارت هدایتی در رایلی  $10^2$ ، حالات مربوط به  $A_2=0.25$  و  $A_2=0.75$  تفاوت چندانی باهم ندارند و نزدیک بودن مانع گرم به دیواره‌ی بالا یا پایین، اثر چندانی روی خطوط دما و جریان و همچنین عدد ناسلت ندارد.

شکل ۶ خطوط جریان و خطوط هم‌دما را با تغییر ابعاد مانع (پارامتر  $A$ ) در عدد رایلی  $10^5$  نشان می‌دهد. با افزایش ابعاد مانع، میزان سطح گرم شده افزایش می‌یابد که باعث افزایش گرادیان دما شده و با توجه به الگوی خطوط جریان، چرخش سیال تحت تاثیر قرار گرفته، مقدار انتقال حرارت جابجایی افزایش می‌یابد. نتایج حاصل از دو روش در جدول ۴ نیز بیانگر تغییر صعودی عدد ناسلت (روی دیواره‌های چپ و راست) با افزایش ابعاد مانع است.

در حالتی که ابعاد مانع بزرگ‌تر شود می‌بایست تعداد نقاط شبکه برای رسیدن به حل عددی درست بازنگری شود. در ابعاد بزرگ مانع (در مقایسه با طول محفظه) سهم انتقال حرارت جابجایی در طرفین مانع (سمت چپ و راست) بسیار چشمگیر است و نقش مهمی در افزایش عدد ناسلت محلی دارد.



شکل ۳-ب- خطوط جریان و خطوط هم‌دما برای  $A=0.2$ ،  $A_1=0.5$ ،  $A_2=0.5$  و رایلی  $10^4$



شکل ۳-ج- خطوط جریان و خطوط هم‌دما برای  $A=0.2$ ،  $A_1=0.5$ ،  $A_2=0.5$  و رایلی  $10^5$

جدول ۱- مقایسه نتایج روش شبکه بولتزمن و روش حجم محدود، به ازای  $A=0/2$ ،  $A_1=0/5$  و  $A_2=0/5$

عدد رایلی	ناسلت متوسط در حجم محدود	ناسلت متوسط در شبکه بولتزمن	اندازه شبکه در روش حجم محدود	اندازه شبکه در روش بولتزمن	درصد خطا
$10^3$	۱/۶۹۸	۱/۷۱۶	$100 * 100$	$100 * 100$	۱/۰۶
$10^4$	۱/۹۴۴	۱/۹۵۱	$100 * 100$	$100 * 100$	۰/۳۶
$10^5$	۳/۵۷۶	۳/۵۴۹	$100 * 100$	$100 * 100$	۰/۷۵

جدول ۳- مقایسه نتایج به ازای  $A=0/2$  و  $A_1=0/5$  و  $Ra=10^3$

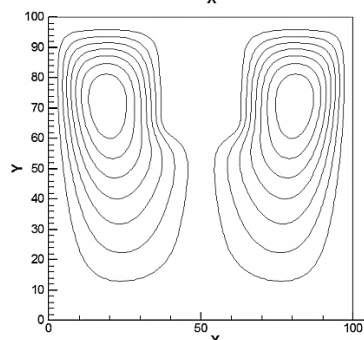
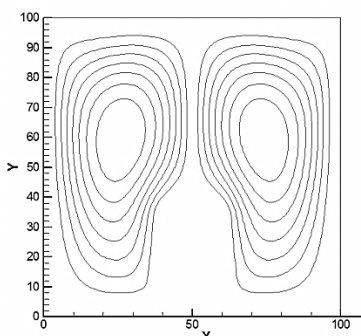
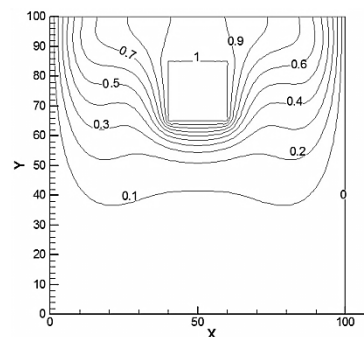
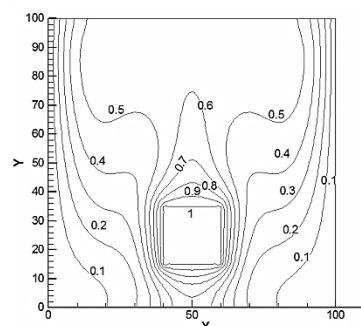
$A_2$	ناسلت متوسط در حجم محدود	ناسلت متوسط در شبکه بولتزمن	اندازه شبکه در روش حجم محدود	اندازه شبکه در روش بولتزمن
۰/۲۵	۱/۵۰	۱/۵۲۵	$100 * 100$	$100 * 100$
۰/۵	۱/۶۹۸	۱/۷۱۶	$100 * 100$	$100 * 100$
۰/۷۵	۱/۵۰	۱/۵۲۶	$100 * 100$	$100 * 100$

جدول ۲- مقایسه نتایج به ازای  $A=0/2$ ،  $Ra=10^5$  و  $A_1=0/5$

$A_2$	ناسلت متوسط در حجم محدود	ناسلت متوسط در شبکه بولتزمن	اندازه شبکه در روش حجم محدود	اندازه شبکه در روش بولتزمن	درصد خطا
۰/۲۵	۲/۸۲	۲/۸۲۵	$100 * 100$	$100 * 100$	۰/۱۸
۰/۵	۳/۵۷۵	۳/۵۴۹	$100 * 100$	$100 * 100$	۰/۷۳
۰/۷۵	۳/۵۶	۳/۵۱۸	$100 * 100$	$100 * 100$	۱/۱۸

جدول ۴- مقایسه نتایج به ازای  $A_2=0/5$ ،  $A_1=0/5$  و  $Ra=10^5$

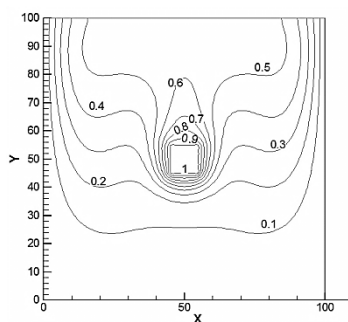
$A$	ناسلت متوسط در حجم محدود	ناسلت متوسط در شبکه بولتزمن	اندازه شبکه در روش حجم محدود	اندازه شبکه در روش بولتزمن
۰/۱	۲/۶۸۲	۲/۶۷۷	$100 * 100$	$100 * 100$
۰/۲	۳/۵۷۶	۳/۵۴۹	$100 * 100$	$100 * 100$
۰/۳	۴/۱۳۴	۴/۰۹۸	$100 * 100$	$100 * 100$
۰/۴	۴/۴۲۲	۴/۳۸۲	$100 * 100$	$100 * 100$



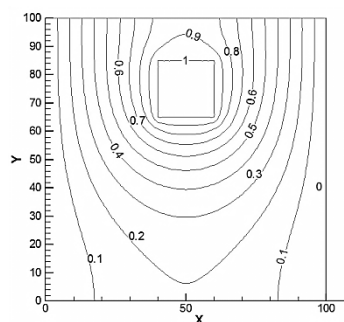
شکل ۴-ب- خطوط جریان و خطوط همدمای برای  $A=0/2$ ،  $A_2=0/75$ ،  $A_1=0/5$  و رایلی  $10^5$

شکل ۴-الف- خطوط جریان و خطوط همدمای برای  $A=0/2$ ،  $A_1=0/5$ ،  $A_2=0/25$  و رایلی  $10^5$

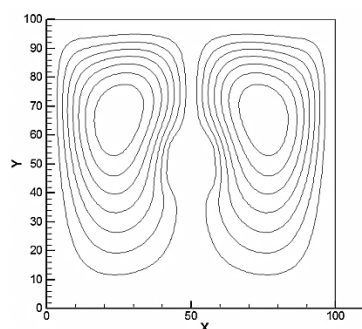




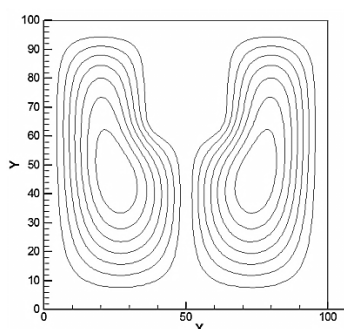
شکل ۶-الف - خطوط جریان و خطوط همدمای برای  $A=0.1$ ،  
 $A_1=0.5$ ،  $A_2=0.5$  و رایلی  $10^5$



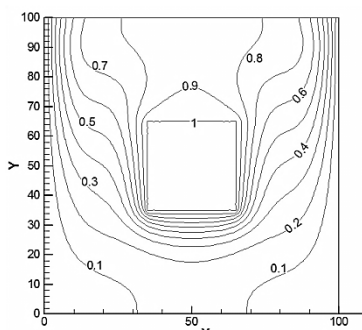
شکل ۵-الف - خطوط جریان و خطوط همدمای برای  
 $A=0.2$ ،  $A_1=0.5$ ،  $A_2=0.25$  و رایلی  $10^2$



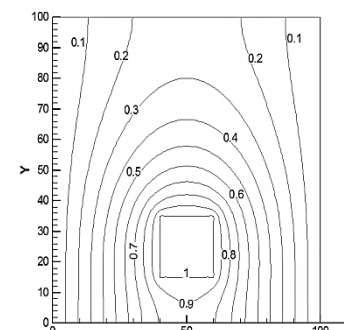
شکل ۶-ب - خطوط جریان و خطوط همدمای برای  $A=0.3$ ،  
 $A_1=0.5$  و رایلی  $10^5$



شکل ۵-ب - خطوط جریان و خطوط همدمای برای  $A=0.2$ ،  
 $A_1=0.5$  و رایلی  $10^3$

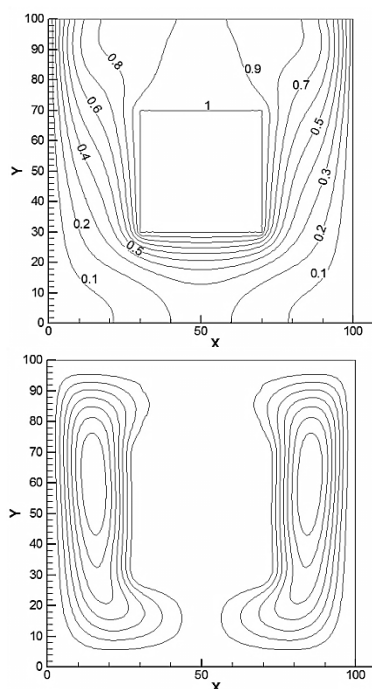


شکل ۶-ب - خطوط جریان و خطوط همدمای برای  $A=0.3$ ،  
 $A_1=0.5$  و رایلی  $10^5$

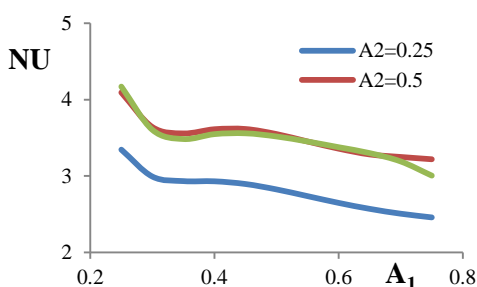


شکل ۵-ب - خطوط جریان و خطوط همدمای برای  $A=0.2$ ،  
 $A_1=0.5$  و رایلی  $10^3$

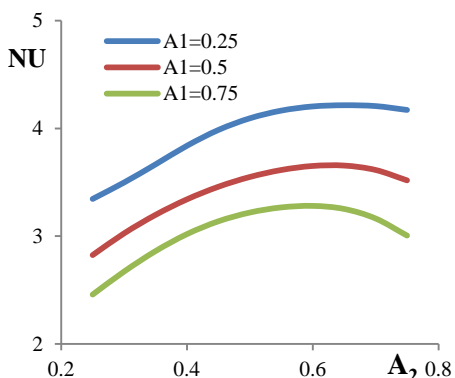
از شکل‌های ۸ و ۹ مشخص است که با افزایش نسبت طول مانع به محفظه، اختلاف عدد ناسلت (در نسبت‌های  $A_2$  مختلف) وقتی مانع به صورت افقی جابجا شود، چندان قابل ملاحظه نیست. در نسبت‌های بزرگ‌تر  $A_2$ ، وقتی مانع به صورت افقی جابجا شود، عدد ناسلت کاهش یافته و منحنی به تدریج متمایل به خط صاف می‌شود (شکل ۹-الف).



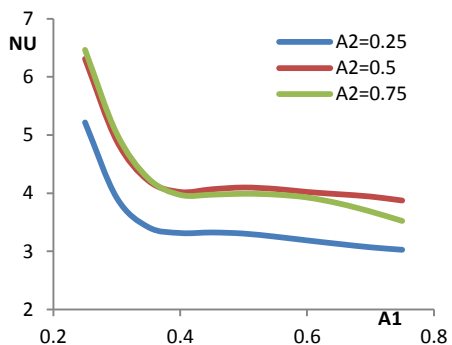
شکل ۶-ج - خطوط جریان و خطوط همدمای برای  $A_2=0.4$ ،  $A_1=0.5$  و  $A_2=0.5$  و رابلی  $10^5$



شکل ۷-الف - عدد ناسلت متوسط برای جابجایی افقی مانع در  $A_2=0.2$  و رابلی  $10^5$



شکل ۷-ب - عدد ناسلت متوسط برای جابجایی عمودی مانع در و رابلی  $10^5$



شکل ۸-الف - عدد ناسلت متوسط برای جابجایی افقی مانع در و رابلی  $10^5$

### ۴-۳- ماکزیمم نرخ انتقال حرارت

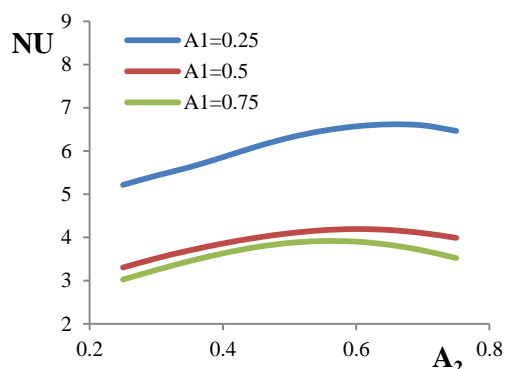
عامل اصلی در پدیده جابجایی آزاد، ایجاد گرادیان چگالی، ناشی از گرادیان دما و نیروی حجمی حاصل از گرانش است. شکل‌های ۷، ۸ و ۹ تغییرات عدد ناسلت متوسط روی دیواره‌ی سمت چپ را با جابجایی مانع در راستای افقی و عمودی، به ترتیب در نسبت‌های  $0.2/0.3$ ،  $0.4/0.3$  و  $0.4/0.3$  طول مانع به طول محفظه و برای عدد رابلی  $10^5$  نشان می‌دهند. برای هر سه نسبت، با نزدیکتر شدن مانع گرم به دیواره‌ی سمت چپ، انتقال حرارت روی دیواره افزایش می‌یابد.

در شکل ۷ با جابجایی عمودی مانع، برای  $A_1=0.25$  در بازه‌ی  $A_2=[0.5-0.75]$ ، انتقال حرارت جابجایی بیشینه است و برای  $A_1=0.5$  و  $A_1=0.75$ ، بازه‌ی  $A_2$  برای وجود انتقال حرارت بیشینه، کوچکتر از مقدار فوق الذکر است. شایان ذکر است که با جابجا کردن عمودی مانع در داخل محفظه، یک نقطه بهینه برای انتقال حرارت، به ازای هر مقدار  $A_2$  وجود دارد. همچنین با جابجایی افقی مانع، یک روند کاهشی در عدد ناسلت دیده می‌شود. باید توجه شود که در سایر اعداد رابلی نیز چنین رفتاری مشاهده خواهد شد.

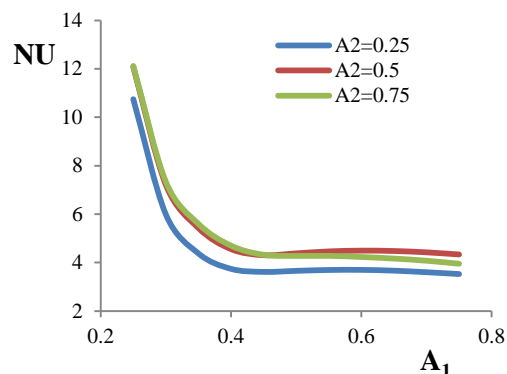
گرفت. برای حل معادلات از دو روش شبکه بولتزمن و حجم محدود استفاده شد. نرخ انتقال حرارت در محفظه، بستگی به موقعیت مانع داخلی دارد و با افزایش طول مانع، که منجر به افزایش گرادیان دما و گرادیان چگالی می‌شود، مقدار آن افزایش می‌یابد. با افزایش عدد رایلی، انتقال حرارت افزایش می‌یابد. با تغییر موقعیت مانع در راستای عمودی بازه‌ای برای نرخ انتقال حرارت بیشینه وجود دارد. با جابجایی عمودی مانع برای  $A_1=0.25$ ، در بازه  $[0.75-0.5]$  انتقال حرارت جابجایی بیشینه است و برای  $A_1=0.5$  و  $A_1=0.75$ ، نیز بازه ذکر شده قابل استفاده است. ضمناً با افزایش طول مانع، نرخ انتقال حرارت وابستگی ضعیف‌تری به جابجایی عمودی مانع دارد. همچنین با تغییر موقعیت مانع در راستای افقی، نرخ انتقال حرارت روی دیوار عمودی با فاصله‌ی مانع از دیوار نسبت عکس دارد. روش شبکه بولتزمن به خوبی الگوی جریان و انتقال حرارت را مدل‌سازی کرده است. با انجام تحلیل مقیاسی، ضریب تبدیل سرعت بین دو روش شبکه بولتزمن و حجم محدود، با ضریب تبدیل لزجت متناسب بوده و با ضریب تبدیل طول، نسبت عکس دارد. مولفین در کارهای آینده، اثرات چرخشی مانع مربعی گرم را بررسی خواهند کرد.

#### ۶- علائم و نشانه‌ها

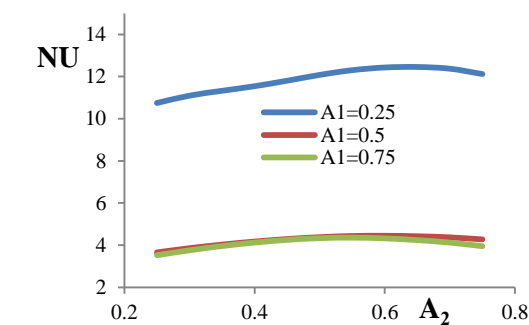
A	طول بدون بعد مانع گرم
$A_1$	فاصله بدون بعد مانع تا دیواره سمت چپ
$A_2$	فاصله بدون بعد مرکز مانع تا دیواره بالایی
$e_i$	سرعت گسسته شده شبکه بولتزمن
$f^{eq}$	تابع توزیع تعادلی چگالی
$f_i$	تابع توزیع چگالی
$g^{eq}$	تابع توزیع تعادلی انرژی درونی
$g_i$	تابع توزیع انرژی درونی
Gr	عدد گراشسف
H	طول حفره (m)
h	طول مانع (m)
$h_1$	فاصله مرکز مانع تا دیوار سمت چپ (m)
$h_2$	فاصله مرکز مانع تا دیوار بالایی (m)
Nu	عدد ناسلت محلی
Pr	عدد پرانتل
T	دما (K)



شکل ۸-ب- عدد ناسلت متوسط برای جابجایی عمودی مانع رایلی  $10^5 = Ra$



شکل ۹-الف- عدد ناسلت متوسط برای جابجایی افقی مانع در و رایلی  $10^5 = Ra$



شکل ۹-ب- عدد ناسلت متوسط برای جابجایی عمودی مانع در و رایلی  $10^5 = Ra$

#### ۵- نتیجه‌گیری

جریان سیال و انتقال حرارت جابجایی آزاد در یک محفظه بسته، با وجود مانع مربعی گرم داخلی مورد بررسی قرار

- [11] Mezrhab A, Jami M, Abid C, Bouzidi M, Lallemand P (2006) Lattice-Boltzmann modeling of natural convection in an inclined square enclosure with partitions attached to its cold wall. *Int J Heat Fluid Fl* 27: 456–465.
- [12] Mezrhab A, Jami M, Bouzidi M, Lallemand P (2007) Analysis of radiation-natural convection in a divided enclosure using the Lattice-Boltzmann method. *Comput Fluids* 36: 423–434.
- [13] Jami M, Mezrhab A, Bouzidi M, Lallemand, P (2007) Lattice Boltzmann method applied to the laminar natural convection in an enclosure with a heat-generating cylinder conducting body. *Int J ThermSci* 46: 38–47.
- [14] Mezrhab A, Bouzidi M, Lallemand P (2004) Hybrid lattice-Boltzmann finite-difference simulation of convective flows. *Comput Fluids* 33: 623–641.
- [15] Mezrhab A, Moussaoui M, Naji H (2008) Lattice-Boltzmann simulation of surface radiation and natural convection in a square cavity with an inner cylinder. *J Phys D Appl Phys* 41(11): 115502.
- [16] Mohamad AA, El-Ganaoui M, Bennacer R (2009) Lattice Boltzmann simulation of natural convection in an open ended cavity. *Int J of ThermSci* 48: 1870–1875.
- [17] Dixit HN, Babu V (2006) Simulation of high Rayleigh number natural convection in a square cavity using the lattice Boltzmann method. *Int. J. Heat Mass Tran* 49: 727–739.
- [18] Kuznik F, Vareilles J, Rusaouen G, Krauss G (2007) A double-population lattice Boltzmann method with non-uniform mesh for the simulation of natural convection in a square cavity. *Int J Heat Fluid Fl* 28 (5): 862–870.
- [19] Bhatnagar PL, Groos E.P, Krook M (1954) A model for collision processes in gases small amplitude processes in charged and neutral one-component systems. *Phys Rev A* (94): 511–525.
- [20] Luo LS, He X (1997) Lattice Boltzmann model for the incompressible Navier-Stokes equation. *J Stat Phys* 88: 927–944.
- [21] Zou Q, He X (1997) On pressure and velocity flow boundary conditions for the lattice Boltzmann BGK model. *Phys Fluids* 9(6): 1591–1599.

دمای مانع (K)  $T_h$ دمای دیواره حفره (K)  $T_c$ سرعت سیال (m/s)  $u$ ضریب نفوذپذیری شبکه بولتزمن  $\alpha$ ضریب انبساط گرمایی (1/K)  $\beta$ دمای بی‌بعد  $\theta$ 

### مراجع

- [1] Nazari M, Ramzani S (2011) Natural convection in a square cavity with a heated obstacle using Lattice Boltzmann Method. *Modares Mechanical Eng Journal*: 119–133.
- [2] Hardy J, dePazzis O (1976) Molecular dynamics of a classical lattice gas: transport properties and time correlation functions. *Physical Review A* 13: 1949–1961.
- [3] Frisch U, Hasslacher B, Pomeau Y (1986) Lattice-Gas automata for Navier-Stokes equation. *Phys Rev Lett* 56: 1505–1508.
- [4] McNamara G, Zanetti G (1988) Use of the Boltzmann equation to simulate the lattice gas automata. *Phys Rev Lett* 61: 2332–2335.
- [5] Higuera FJ, Jimenez J (1989) Boltzmann approach to lattice-gas simulation. *Euro Phys Lett* 9: 663–668.
- [6] Teixeira C, Chen H, Freed DM (2000) Multi-speed thermal lattice Boltzmann method stabilization via equilibrium under-relaxation. *Comput Phys Commun* 129 (1/3): 207–226.
- [7] Huang K (1987) *Thermodynamics and statistical mechanics*, 2<sup>nd</sup> Ed. John Wiley, New York.
- [8] Shiyi Chen, Gary D Doolen (1998) Lattice Boltzmann method for fluid flow. *Ann Rev fluid Mech* 30: 329–364.
- [9] Yan YY, Zu YQ (2008) Numerical simulation of heat transfer and fluid flow past a rotating isothermal cylinder- A LBM approach. *Int J Heat Mass Tran* 51: 2519–2536
- [10] Jami M, Mezrhab A, Bouzidi M, Lallemand P (2006) Lattice-Boltzmann computation of natural convection in a partitioned enclosure with inclined partitions attached to its hot wall. *Physica A* 368: 481–494.