مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها/ سال ۱۳۹۷/ دوره ۸/ شماره ۲/ صفحه ۹۳-۱۰۶

مجله علمی پژوهشی مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها

DOI: 10.22044/jsfm.2018.5525.2356

دانشگاه صنعتی شاهرود

بررسی ناپایداری و رفتار ارتعاشی میکروتیرژیروسکوپی با در نظر گرفتن گستردگی جرم گواه

مهدی مجاهدی[۱،*] و رسول بینا[۲]

[۱] استادیار، گروه دانشکده مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی گلپایگان

[۲] فارغ التحصیل کارشناسی ارشد، گروه دانشکده مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی گلپایگان

مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۱۲/۲۵؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۶/۱۰/۱۸؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۰۳/۰۲

چکیده

در پژوهش حاضر رفتار ارتعاشی میکروتیرژیروسکوپی با ساختار تیر بررسی می‌شود. میکروژیروسکوپ دارای یک تیر یک سرگیردار و یک جرم گواه گسترده‌ای است که توسط میدان الکتریکی تحریک می‌شود. بر مبنای گستردگی جرم گواه یک مدل و فرمولاسیون توسعه یافته برای بررسی ناپایداری و رفتار ارتعاشی میکروژیروسکوپ ارائه می‌شود. با در نظر گرفتن جرم گواه به‌صورت گسترده، توزیع نیروهای الکترو-استاتیک از حالت متمرکز به گسترده تغییر یافته و گشتاورهای ناشی از آن نیز در رفتار ژیروسکوپ تأثیرگذار خواهد بود. معادلات حاصل با کمک روش گالرکین کاهش مرتبه یافته و از طریق روش‌های تحلیلی و عددی حل می‌گردند. پارامتر بی‌بعد مهمی تحت عنوان پارامتر بی‌بعد طول، در این پژوهش معرفی می‌شود. این پارامتر عبارت از طول جرم گواه گسترده نسبت به طول میکروتیر است. اثر این پارامتر در رفتار استاتیکی، دینامیکی، ارتعاشی و فرکانس‌های طبیعی سیستم بررسی می‌شود. در طول محاسبات و نتیجه‌گیری مشخص خواهد شد که با افزایش این پارامتر بی‌بعد، اختلاف در نتایج حاصل از فرض متمرکز به گسترده بیشتر خواهد شد.

کلمات کلیدی: میکروالکترومکانیک؛ میکروژیروسکوپ؛ ناپایداری؛ پارامتر بی‌بعد طول.

Investigation of Instability and Vibration Behavior of Microbeam-Gyroscope with Considering Distribution of Proof Mass

M. Mojahedi[1,*], R. Bina[2]

[1] Assis. Prof., Mech. Eng., Golpayegan Univ. of Tech., Golpayegan, Iran.

[2] MSc., Mech. Eng., Golpayegan Univ. of Tech., Golpayegan, Iran.

Abstract

In this research, vibration behavior of a microgyroscope including beam structure is investigated. microgyroscope consists of a microcantilever beam and distributed proof mass that is actuated by electrostatic force. A developed model and formulation based on the distributed assumption for proof mass are presented to investigate the instability and vibration behavior of beam microgyroscope. Considering distributed assumption for proof mass, electrostatic force changes from concentrated force to distributed force and produces a moment that is effective on the mechanical behavior of the gyroscope.The equations of motion are reduced by Galerkin's method and solved via numerical and analytical techniques. An important nondimensional parameter named as nondimensional length parameter is presented which it is the ratio of the proof mass length to beam length. Effects of the nondimensional length parameter on the static, dynamic, vibration behaviors and natural frequency of the microsyetem are investigated. Results show that by increasing the nondimensional parameter, the differences between the results of concentration and distribution hypothesizes for proof mass increase.

Keywords: MEMS, Microgyroscopes, Pull-in Instability, Nondimensional Length Parameter.

* نویسنده مسئول؛ تلفن: ۰۳۱۵۷۲۴۳۱۶۷؛ فکس: ۰۳۱۵۷۲۴۰۰۶۷

آدرس پست الکترونیک: mojahedi@gut.ac.ir, mojahedi62@gmail.com

۱- مقدمه

یکی از مهم‌ترین و پرکاربردترین انواع میکروژیروسکوپ‌ها، نوع ارتعاشی آن است. قابلیت کوچک‌سازی، تولید انبوه در پروسه‌های سری و جایگزینی المان‌های ارتعاشی به‌جای قسمت‌های دورانی، از دلایل عمده پرکاربرد بودن این نوع از میکروژیروسکوپ‌ها است [۱, ۲]. در میکروژیروسکوپ‌های ارتعاشی جرم گواه در دو جهت عمود برهم اولیه (محرک) و ثانویه (شناسایی) نوسان می‌نماید؛ درصورتی‌که جرم گواه[1] دچار ارتعاشات شده و قاب متصل به آن شروع به دوران نماید، ارتعاشاتی در جهت عمود بر ارتعاشات اولیه ایجاد می‌شود که با اندازه‌گیری این ارتعاشات، سرعت زاویه‌ای قاب دورانی مشخص می‌شود [۳]. روش‌های مختلفی جهت تحریک و شناسایی این نوع از ژیروسکوپ‌ها وجود دارد. به‌طورکلی روش الکترواستاتیک، جهت تحریک و شناسایی حرکت به علت داشتن مکانیزم حرکتی سریع و بزرگ‌نمایی مناسب، مطلوب به نظر می‌آید [۴]. یک میکروتیر-ژیروسکوپی از یک یا چند جرم گواه متصل به یک پایه و یا قاب دورانی تشکیل شده است. علت استفاده از جرم گواه، افزایش اینرسی و نیروی کوریولیس[2] ایجاد شده به منظور افزایش حساسیت سیستم است. این ژیروسکوپ در اثر تحریک یک عامل خارجی در جهت اولیه، دچار ارتعاشات خمشی اولیه شده و با دوران قاب متصل به جرم گواه و در اثر نیروی کوریولیس، ارتعاشاتی در جهت ثانویه و عمود بر جهت اولیه ایجاد می‌شود. جهت اولیه با نام محرک و جهت ثانویه با نام شناسایی شناخته می‌شود. با اندازه‌گیری ارتعاشات جهت شناسایی توسط یک سنسور، دوران قاب اندازه‌گیری می‌شود. حرکت هر دو جهت به‌صورت خمشی است. در سازه‌هایی نظیر تیر، سختی خمشی کمتر از فشاری و کششی است و با صرف انرژی کمتری، دامنه ارتعاشی بالاتری قابل حصول بوده و حساسیت سیستم افزایش می‌یابد. در میکروژیروسکوپ-هایی که از طریق الکترواستاتیک تحریک و شناسایی می‌شود، ترکیبی از یک حسگر و یک عملگر ارتعاشی مشاهده می‌شود. قسمت عملگر این میکروژیروسکوپ، توسط میدان الکترو-استاتیک ترکیبی ثابت (ناشی از پتانسیل الکتریکی مستقیم) و متناوب (ناشی از پتانسیل الکتریکی متناوب) است که به جرم گواه اعمال شده و موجب ارتعاش آن، حول موقعیت تعادلی می‌شود. با توجه به ارتعاش اولیه و دوران سیستم، ارتعاش ثانویه در بخش حسگر فعال می‌شود. با اندازه‌گیری ارتعاش ثانویه می‌توان حرکت زاویه‌ای سیستم را با استفاده از پردازش این ارتعاش محاسبه و بررسی کرد. این اندازه‌گیری توسط میدان الکترواستاتیک و از طریق تغییرات ظرفیت خازنی[3] روی جرم گواه، قابل سنجش است. ازآنجاکه سیستم با استفاده از میدان‌های الکترواستاتیک تحریک و شناسایی می-شود و تحت ارتعاشات رزونانسی در دو جهت خمشی قرار دارد، بررسی پدیده‌های ناپایداری کششی و ارتعاشی در این سیستم ضروری است [۵-۸].

در زمینه میکروژیروسکوپ‌ها، پژوهش‌های زیادی انجام شده است. برای دست‌یابی به رزونانس و افزایش حساسیت سیستم لازم است که فرکانس‌های جهت‌های تحریک و شناسایی تنظیم شود. انصاری [۹] به بررسی یک میکرو-ژیروسکوپ با جرم گهواره‌ای[4] پرداخت. این مجموعه شامل، چهار تیر بوده که درون یک قاب قرار گرفته و جرم گواه در مرکز این قاب قرار دارد. ارتعاشات مجموعه در اثر دوران پایه و اعمال نیروی کوریولیس به‌صورت خمشی و پیچشی بوده و مکانیزم به کار رفته جهت شناسایی و تحریک حرکت از نوع پیزوالکتریک است. به علت وجود خمش و پیچش همیشگی در دو تیر، دوران‌های ثانویه به‌راحتی اندازه‌گیری می‌شود. بی‌هادبی‌هاده و همکاران [۱۰]، به بررسی ارتعاش یک میکروتیرژیروسکوپی پرداختند که از طریق محرک پیزو-الکتریک فعال و از طریق پایش ارتعاش با استفاده از یک سنسور پیزوالکتریک در جهت شناسایی، میزان دوران پایه اندازه‌گیری می‌شود. ارتعاش موجود در تیر به‌کاررفته، به صورت زوج نیروی خمشی و پیچشی است. با کمک اصل همیلتون مدل‌سازی ریاضی سیستم انجام و با کمک روش جمع مودها[5] معادلات حاکم حل می‌شود. در این پژوهش همچنین، اثراتی نظیر دوران روی فرکانس بی‌بعد بررسی گردیده است. هونگ و همکاران [۴]، حساسیت میکروژیروسکوپ‌ها را با تطبیق فرکانس‌های طبیعی در دو

[1] Proof mass
[2] Coriolis force
[3] Capacitance
[4] Rocking mass
[5] Mode summation

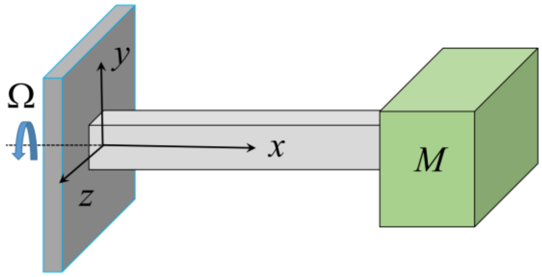
جهت تحریک و شناسایی افزایش دادند. جئونگ [۱۱] دریافت که اختلاف بین فرکانس‌های طبیعی در دو جهت تحریک و شناسایی و اثر ضریب میرایی، از مهم‌ترین عوامل در میزان حساسیت میکروژیروسکوپ‌ها است. قومم و همکاران [۸, ۱۲]، به بررسی رفتار یک میکروژیروسکوپ یک سرگیردار پرداختند. مدل ایشان شامل، یک جرم متمرکز و یک تیر یک‌سرگیردار بوده که با ولتاژ مستقیم تحریک می‌شود و ارتعاشاتی را درجهت عمود بر جهت اولیه ایجاد می‌نماید. مجاهدی و همکاران [۶, ۱۳]، به بررسی رفتار ارتعاشی یک میکروتیرژیروسکوپی با تغییر شکل اولیه پرداختند. در مدل‌سازی انجام شده، موارد غیرخطی ناشی از نیروهای الکترواستاتیک، میدان حاشیه‌ای، هندسه تغییر شکل یافته و ترم‌های اینرسی لحاظ شده است. در سیستم-های میکروالکترومکانیک، جرم گواه به‌منظور افزایش حساسیت و اعمال تحریک الکترواستاتیک روی آن مورد استفاده قرار گرفته است. در همین زمینه شریفی نسب و مجاهدی [۱۴]، ارتعاشات غیرخطی میکرورزوناتورهای دارای جرم گواه را با در نظر گرفتن تئوری کوپل تنش اصلاحی، مورد مطالعه قرار دادند. از طرفی برای میکرورزوناتورهای دارای جرم گواه با طول قابل‌توجه، بینا و مجاهدی [۱۵] نشان دادند که فرض نقطه‌ای به کار رفته برای جرم گواه، در مدل‌سازی میکرورزوناتورها، منجر به خطای قابل توجهی در محاسبه میزان دامنه ارتعاش و ولتاژ ناپایداری می‌شود، ازاین‌رو لازم است، در مدل‌سازی و به دست آوردن معادلات، جرم گواه به‌صورت گسترده در نظر گرفته شود و نیروی وارد بر آن به‌جای نقطه‌ای به‌صورت توزیع شده لحاظ گردد. در میکروژیروسکوپ‌های ارتعاشی طول جرم گواه قابل‌توجه است؛ اما با این وجود در پژوهش‌های پیشین جرم گواه متصل به میکروژیروسکوپ، به‌صورت متمرکز فرض گردیده است. در پژوهش حاضر، با فرض گستردگی جرم گواه و نیروی اعمال‌شده روی آن، یک مدل کامل‌تر برای میکروژیروسکوپ‌های ارتعاشی دارای جرم گواه معرفی می-شود و بر مبنای این مدل، رفتار ارتعاشی و ناپایداری این نوع از میکروژیروسکوپ‌های ارتعاشی، مورد مطالعه قرار گرفته و خطاهای ناشی از فرض نقطه‌ای بودن جرم گواه برای طول-های مختلف محاسبه می‌شود. بدین منظور ابتدا با در نظر گرفتن طول جرم گسترده، نیروها و گشتاورهای معادل ناشی از بار الکتریکی گسترده روی آن محاسبه می‌شود. سپس از طریق اصل همیلتون تعمیم‌یافته، معادلات حرکت به دست می‌آید. در ادامه معادلات بی‌بعد شده و پارامتر بی‌بعد مهمی معرفی می‌شود که نشان‌دهنده نسبت طول جرم گواه به طول تیر است. معادلات یک‌بار به‌صورت استاتیکی حل شده و ولتاژ ناپایداری محاسبه می‌شود و سپس از طریق حل دینامیکی معادلات و استفاده از روش تحلیلی مقیاس‌های چندگانه و عددی، پاسخ ارتعاشی محاسبه شده و در نهایت اختلاف نتایج حاصل از فرض نقطه‌ای جرم گواه با جرم گسترده، برای مقادیر مختلف پارامتر بی‌بعد طول جرم گواه، مقایسه می‌شود.
اهداف پژوهش جاری به‌صورت زیر است:

- ارائه یک مدل جدید با تکیه بر گستردگی جرم گواه، جهت بررسی عملکرد میکروژیروسکوپ‌ها.
- تحلیل استاتیکی و ناپایداری سیستم بر مبنای مدل جدید و محاسبه خطای مدل‌های پیشین.
- تعیین فرکانس طبیعی میکروژیروسکوپ بر مبنای مدل جدید و محاسبه خطای مدل‌های پیشین.
- مطالعه ارتعاش سیستم بر مبنای مدل جدید و محاسبه خطای مدل‌های پیشین.

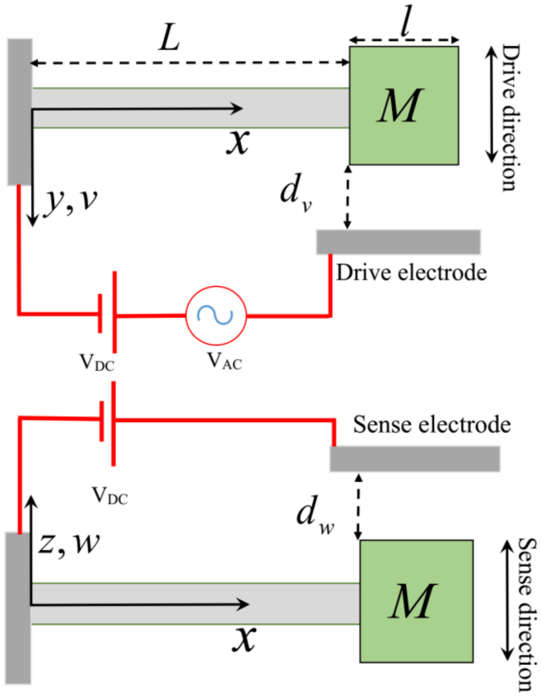
۲- الگوسازی سیستم

مدل پژوهش حاضر شامل، یک تیر یک سرگیردار با جرم گواه گسترده و صلب است. در مدل تیر از فرضیات تیر اویلر – برنولی استفاده می‌شود. در تیر اویلر – برنولی صفحات عمود بر محور طولی، پس از خمش، همچنان بر محور طولی عمود می‌مانند. از روش جنبشی کرشهف جهت تعیین بردار انحناء و محاسبه انرژی کرنشی تیر استفاده می‌شود. در تیر یک سر-گیردار کشیدگی لایه وسط وجود نداشته و ترم انرژی کرنشی ناشی از کشیدگی لایه وسط صفر است. مکانیزم تحریک سیستم به‌صورت الکترواستاتیک بوده و به علت قابل‌توجه بودن ابعاد جرم گسترده در مقایسه با فاصله بین صفحات تحریک، میدان‌های حاشیه‌ای قابل صرف‌نظر کردن است. مکانیزم شناسایی نیز از طریق یک خازن انجام می‌شود. مدل ساده سیستم به‌صورت ساده شده، در شکل ۱ نشان داده شده است. در این سیستم، مقدار جرم گواه با M، طول آن با l، جرم بر واحد طول میکروتیر m و طول آن L است؛ همچنین مقدار دوران پایه با Ω نشان داده می‌شود.

در شکل ۲، دو نما از یک میکروژیروسکوپ در دو صفحه مختلف نشان داده شده است. محور y بیانگر حرکت در راستای تحریک و محور z بیانگر، حرکت در راستای شناسایی است.



شکل ۱- نمایی از یک میکرو ژیروسکوپ با ساختار تیر



شکل ۲- نمایی از یک میکروتیرژیروسکوپی با جرم گسترده در انتها در دو جهت تحریک و شناسایی

مجموعه ژیروسکوپ در راستای تحریک با دو نیروی حاصل از ولتاژهای مستقیم و متناوب تحریک گردیده و حرکت در جهت شناسایی از طریق یک ولتاژ مستقیم مشخص می‌شود.

پس از اعمال ولتاژ مستقیم، سیستم دارای انحنای اولیه می‌گردد.

جهت به‌دست آوردن معادله‌های حاکم سیستم، به ترتیب مراحل زیر انجام می‌شود:

- بردار انحناء بر اساس آنالوگی جنبشی کرشهف[1] [۱۶] تعیین می‌شود.

- انرژی جنبشی و پتانسیل سیستم تعیین گردیده و بر اساس آن چگالی لاگرانژین [۶]، تعیین می‌شود. در محاسبه انرژی جنبشی جرم گواه به‌صورت گسترده در نظر گرفته شده و انرژی جنبشی خطی و دورانی آن در محاسبات وارد می-شود.

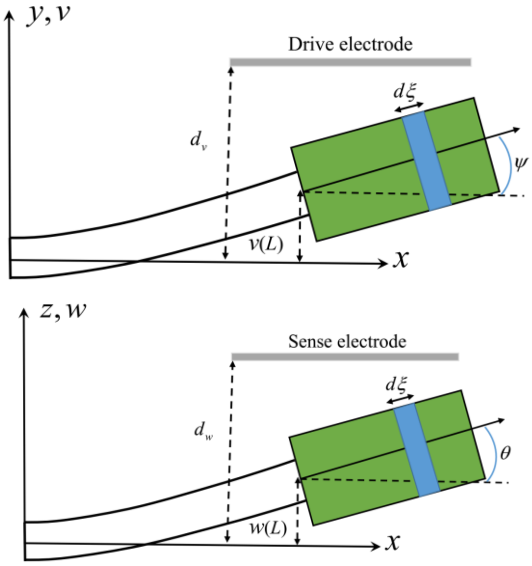
- در محاسبات مربوط به نیروهای عمومی از اصل کار مجازی استفاده می‌شود.

- نیروها و گشتاورهای موجود در سیستم با کمک انتگرال‌گیری بر روی طول جرم گواه گسترده تعیین می‌شود. به‌عبارت‌دیگر جرم گواه به بخش‌های کوچکی تقسیم شده و هر بخش به‌عنوان جرم متمرکز فرض می‌گردد. سپس نسبت به انتگرال‌گیری روی نیروی اعمال شده به جزء متمرکز [۱۷] و روی طول جرم گسترده اقدام می‌شود. برای محاسبه نیروها و گشتاورهای ناشی از آن، با در نظر گرفتن شکل ۳ نیرو و گشتاور اعمالی به یک المان محاسبه و پس از انتگرال‌گیری روی طول جرم گسترده، مقدار کل نیروها و گشتاورهای اعمالی تعیین می‌شود.

مطابق شکل ۳ نیروهای اعمالی بر المان مشخص شده به طول $d\xi$ مطابق مرجع [۱۸] به‌صورت رابطه (۱) به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
dF_2 &= \frac{\varepsilon b\left(V_{DC_v}+V_{AC_v}\right)^2}{2} \\
&\times \frac{d\xi}{(d_v - v - \xi tan\psi)^2}\delta_L \\
dF_3 &= \frac{\varepsilon h {V_{DC_w}}^2}{2}\frac{d\xi}{(d_w - w + \xi tan\theta)^2}\delta_L \\
dM_2 &= \xi dF_2 \\
dM_3 &= \xi dF_3
\end{aligned} \qquad (۱)$$

[1] Kirchhoff's Kinetic Analogy



شکل ۳- نمایی از المان بندی جرم گسترده جهت محاسبه نیرو و گشتاورهای اعمالی در جهات تحریک و شناسایی

اشاره به این نکته ضروری است که روابط گفته شده بر اساس روابط حاکم بر نیروهای الکترواستاتیک اعمال شده به جرم متمرکز نوشته شده‌اند.

در روابط فوق، b و h به ترتیب بیانگر بعد عرضی جرم گسترده در صفحه تحریک و شناسایی است. ε بیانگر ضریب تراوایی خلا[1] است. V_{DC_v} بیانگر ولتاژ مستقیم در راستای تحریک، V_{DC_w} بیانگر ولتاژ مستقیم در راستای شناسایی، V_{AC_v} بیانگر ولتاژ متناوب در راستای تحریک و δ_L دلتای دیراک است. جهت محاسبه مقادیر نهایی مربوط به نیروها و گشتاورهای الکترواستاتیک از روابط (۱) در بازه طول جرم گسترده از 0 تا l، انتگرال‌گیری می‌شود. نتیجه مطابق رابطه (۲) خواهد بود:

$$F_2 = \frac{\varepsilon A_v}{2}\frac{\left(V_{DC_v}+V_{AC_v}\right)^2}{(d_v-v)(d_v-v-lv')}\delta_L(x)$$
$$F_3 = \frac{\varepsilon A_w}{2}\frac{{V_{DC_w}}^2}{(d_w-w)(d_w-w-lw')}\delta_L(x)$$
$$M_2 = \frac{\varepsilon A_v}{2}\left(V_{DC_v}+V_{AC_v}\right)^2\left\{\frac{1}{v'(d_v-v-lv')} + \frac{1}{lv'}\ln\left(1-\frac{lv'}{d_v-v}\right)\right\}\delta_L$$
$$M_3 = \frac{\varepsilon A_w}{2}{V_{DC_w}}^2\left\{\frac{1}{w'(d_w-w-lw')} + \frac{1}{lw'}\ln\left(1-\frac{lw'}{d_w-w}\right)\right\}\delta_L \qquad (۲)$$

مقادیر A_v و A_w به ترتیب بیانگر، مساحت مقطع جرم گسترده در صفحه تحریک و شناسایی است.

با مشخص شدن مقادیر نیروهای ناپایستار سیستم، مقدار نیروهای عمومی در جهات تحریک و شناسایی مطابق رابطه (۳) تعیین می‌شود:

$$Q_v = (F_2 - c_2\dot{v}) + M_2\frac{\Delta v'}{\Delta v}$$
$$Q_w = (F_3 - c_3\dot{w}) + M_3\frac{\Delta w'}{\Delta w} \qquad (۳)$$

Q_v و Q_w نیروهای عمومی و Δv و Δw جابجایی‌های مجازی است. با توجه به انرژی جنبشی و پتانسیل و نیروهای عمومی به‌دست آمده و اصل همیلتون تعمیم یافته حذف عبارت‌های کوچک اینرسی، معادلات حرکت تعیین می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\left(m+M\delta_L(x)\right)\left(\ddot{v}-\dot{\Omega}w-2\Omega\dot{w}-\Omega^2 v\right) + c_2\dot{v} + D_3 v^{(IV)} \\
&= \frac{\varepsilon A_v}{2}\frac{\left(V_{DC_v}+V_{AC_v}\right)^2}{(d_v-v)^2 - lv'(d_v-v)}\delta_L(x) \\
&+ \frac{\varepsilon A_v}{2}\left(V_{DC_v}+V_{AC_v}\right)^2\left\{\frac{1}{v'(d_v-v-lv')} + \frac{1}{lv'^2}ln\left(1-\frac{lv'}{d_v-v}\right)\right\}\frac{\Delta v'}{\Delta v}\delta_L(x) \\
&- \frac{Ml}{2}\left\{w'\dot{\Omega}\delta_L(x) + \dot{w}\Omega\delta_L{}'(x) + w\dot{\Omega}\delta_L{}'(x) - \ddot{v}\delta_L{}'(x) - \frac{l}{2}\left(\ddot{v}'\delta_L{}'(x) + \ddot{v}''\delta_L(x)\right)\right\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left(m+M\delta_L(x)\right)\left(\ddot{w}+\dot{\Omega}v+2\Omega\dot{v}-\Omega^2 w\right) + c_3\dot{w} + D_2 w^{(IV)} \\
&+ \frac{\varepsilon A_w}{2}\frac{\left(V_{DC_w}\right)^2}{(d_w-w)^2 - lw'(d_w-w)}\delta_L(x) \\
&+ \left(V_{DC_w}\right)^2\left\{\frac{1}{w'(d_w-w-lw')} + \frac{1}{lw'^2}\ln\left(1-\frac{lw'}{d_w-w}\right)\right\}\frac{\Delta w'}{\Delta w}\delta_L(x) \\
&+ \frac{Ml}{2}\left\{v'\dot{\Omega}\delta_L(x) + \dot{v}\Omega\delta_L{}'(x) + v\dot{\Omega}\delta_L{}'(x) + \ddot{w}\delta_L{}'(x) + \frac{l}{2}\left(\ddot{w}'\delta_L{}'(x) + \ddot{w}''\delta_L(x)\right)\right\} \qquad (۴)
\end{aligned}$$

که در رابطه (۴):

D_2: گشتاور سطح حول محور y

[1] Vacuum Permittivity

D_3 : گشتاور سطح حول محورz

c_2 : میرایی در راستای تحریک

c_3 : میرایی در راستای شناسایی

v : جابه‌جایی در راستای تحریک

w : جابه‌جایی در راستای شناسایی

با کمک پارامترهای بی‌بعد مناسب، معادلات حاکم بی‌بعد می‌گردد. پارامترهای بی‌بعد مطابق رابطه (۵) است:

$$\hat{v}=\frac{v}{L},\ \ \hat{w}=\frac{w}{L},\ \ \hat{x}=\frac{x}{L},\ \hat{t}=\frac{t}{\tau},\ \Omega_r=\tau\Omega,\ M_r=\frac{M}{mL},\tau=\sqrt{\frac{mL^4}{D_2}},\ c_{r2}=\frac{c_2\tau}{m},\ c_{r3}=\frac{c_3\tau}{m},\ d=\frac{d_v}{d_w},\ \beta=\frac{D_3}{D_2},\ \hat{V}_{DC_v}=\sqrt{\alpha_v}V_{DC_v},\ \gamma=\frac{l}{L},\ \ \alpha_v=\frac{\varepsilon A_v L^3}{2D_2 d_v^3},\ \alpha_w=\frac{\varepsilon A_w L^3}{2D_2 d_w^3} \tag{۵}$$

در معادلات نهایی بی‌بعد، جهت ساده‌نویسی از نوشتن علامت " ^ " صرف‌نظر می‌شود و از بسط تیلور جهت ساده‌سازی نیروها و گشتاورها حول پارامتر بی‌بعد طول جرم گواه، استفاده می‌شود.

پس از انجام مراحل یادشده، نتیجه حاصل، مطابق معادله‌های (۶) و (۷) به ترتیب برای جهت‌های تحریک و شناسایی است:

$$\left(1+M_r\delta_1(s)\right)\left(\ddot{v}-\frac{1}{d}\dot{\Omega}_r w-\frac{2}{d}\Omega_r\dot{w}-{\Omega_r}^2 v\right)+c_{r2}\dot{v}+\beta v^{(IV)}=\left(V_{DC_v}+V_{AC_v}\right)^2\left\{\frac{1}{(1-v)^2}+\frac{\gamma v'}{(1-v)^3}+\frac{\gamma^2 {v'}^2}{(1-v)^4}+\frac{\gamma^3 {v'}^3}{(1-v)^5}\right\}\delta_1(x)+\left(V_{DC_v}+V_{AC_v}\right)^2\left\{\frac{\gamma(4\gamma v'-3v+3)}{6(1-v)^3}\right\}\frac{\Delta v'}{\Delta v}\delta_1(x)-\frac{M_r\gamma}{2}\left\{\frac{w'}{d}\dot{\Omega}_r\delta_1(x)+\frac{\dot{w}}{d}\Omega_r{\delta_1}'(x)+\frac{w}{d}\dot{\Omega}_r{\delta_1}'(x)-\ddot{v}{\delta_1}'(x)-\frac{\gamma}{2}\left(\ddot{v}'{\delta_1}'(x)+\ddot{v}''\delta_1(x)\right)\right\} \tag{۶}$$

$$\left(1+M_r\delta_1(s)\right)\left(\ddot{w}+d\dot{\Omega}_r v+2d\Omega_r\dot{v}-{\Omega_r}^2 w\right)+c_{r3}\dot{w}+w^{(IV)}={V_{DC_w}}^2\left\{\frac{1}{(1-w)^2}+\frac{\gamma w'}{(1-w)^3}+\frac{\gamma^2 {w'}^2}{(1-w)^4}+\frac{\gamma^3 {w'}^3}{(1-w)^5}\right\}\delta_1(x)+{V_{DC_w}}^2\left\{\frac{\gamma(4\gamma w'-3w+3)}{6(1-w)^3}\right\}\frac{\Delta w'}{\Delta w}\delta_1(x)+\frac{M_r\gamma}{2}\left\{d\dot{v}\Omega_r{\delta_1}'(x)+d\dot{\Omega}_r v{\delta_1}'(x)+d\dot{\Omega}_r v'\delta_1(x)+\ddot{w}{\delta_1}'(x)+\frac{\gamma}{2}\left(\ddot{w}'{\delta_1}'(x)+\ddot{w}''\delta_1(x)\right)\right\} \tag{۷}$$

حال با داشتن معادله‌های حاکم بی‌بعد به بررسی رفتار استاتیکی و ارتعاشی سیستم پرداخته می‌شود. جهت بررسی ناپایداری استاتیکی به ترتیب مطابق زیر اقدام می‌شود:

در معادلات حاکم، مقادیر وابسته به زمان برابر صفر فرض می‌شود.

جهت حل معادله حاصل‌شده، خیز استاتیکی در دو جهت تحریک و شناسایی مطابق رابطه (۸) فرض می‌شود:

$$v_s(x)=q_v\varphi(x)$$
$$w_s(x)=q_w\varphi(x) \tag{۸}$$

$\varphi(x)$ شکل مود تیر یک سرگیردار است [۱۹].

در گام بعد با کمک روش گالرکین معادله حاصل شده، کاهش مرتبه یافته و سپس حل می‌شود.

جهت بررسی ارتعاشی سیستم، مراحل زیر به ترتیب انجام می‌گیرد:

مقادیر مربوط به خیز مطابق رابطه (۸) در معادلات ارتعاشی حاکم یعنی روابط (۶) و (۷) جایگزین می‌شود:

$$v(x,t)=v_s(x)+v_d(x,t)$$
$$w(x,t)=w_s(s)+w_d(x,t) \tag{۹}$$

که در آن:

v_s : خیز استاتیکی در راستای تحریک

w_s : خیز استاتیکی در راستای شناسایی

v_d : خیز دینامیکی در راستای تحریک

w_d : خیز دینامیکی در راستای شناسایی

معادله به دست‌آمده با توجه به معادله استاتیکی حاکم، ساده‌سازی می‌گردد.

رابطه (۷) در معادله حاصل‌شده حاکم می‌شود:

$$v_d(x,t)=q_v(t)\varphi(x)$$
$$w_d(x,t)=q_w(t)\varphi(x) \tag{۱۰}$$

۱-۲-تحلیل ارتعاشات خطی

در مرحله بعد، با استفاده از روش گالرکین، معادلات حاصل شده کاهش مرتبه می‌یابند. معادلات حاصل شده در حالت خطی به صورت پارامتریک در جهت تحریک و شناسایی مطابق رابطه (۱۱) و (۱۲) خواهد بود:

$$M_v\ddot{q}_v+K_v q_v+C_{rv}\dot{q_v}-\kappa_{rv}\dot{q}_w=(V_{r1}cos^2\Omega t+V_{r2}cos\Omega t)q_v+V_{r3}cos^2\Omega t+V_{r4}cos\Omega t \tag{۱۱}$$

$$M_w\ddot{q}_w+K_w q_w+C_{rw}\dot{q_w}+\kappa_{rw}\dot{q}_v=0 \tag{۱۲}$$

که ضرایب آن مطابق رابطه (پ.۱) است.

درصورتی‌که روال ذکرشده بدون در نظر گرفتن ولتاژ متناوب تکرار گردد، معادله فرکانسی جهت تعیین فرکانس-های طبیعی سیستم به‌دست می‌آید.

ولتاژ متناوب به‌صورت $V_{AC_v} = Vcos\Omega t$ فرض می‌شود. معادلات ارتعاشی حاکم با استفاده از دو روش عددی و تحلیلی، حل می‌گردد. روش عددی، روش رانگ کوتا و روش تحلیلی، روش مقیاس‌های چندگانه است. روش مقیاس‌های چندگانه در حل معادلات دیفرانسیلی ارتعاشی کوپل و غیرکوپل مورد استفاده قرار می‌گیرد [۲۰-۲۲].

جهت حل معادلات (۱۱) و (۱۲)، فرکانس ولتاژ تحریک در محدوده رزونانس سیستم (رزونانس اولیه) فرض می‌شود. از طرفی تغییر متغیرهای (۱۳) انجام می‌شود:

$$\frac{V_{ri}}{M_v} = \varepsilon^2 V_i \quad i = 1,4$$
$$\frac{V_{ri}}{M_v} = \varepsilon V_i \quad i = 2,3$$
$$\frac{\kappa_{rj}}{M_j} = \varepsilon^2 \kappa_j \quad \frac{C_{rj}}{M_j} = 2\varepsilon^2 \mu_j \quad j = v, w$$
$$\frac{K_j}{M_j} = \omega^2 \qquad j = v, w$$ (۱۳)

که ε پارامتر کوچک در بسط اغتشاشات است؛ بنابراین معادلات حاکم در جهت‌های تحریک و شناسایی به فرم رابطه (۱۴) تبدیل می‌شود:

$$\ddot{q}_v + \omega^2 q_v + 2\varepsilon^2 \mu_v \dot{q}_v - \varepsilon^2 \kappa_v \dot{q}_w = (\varepsilon^2 V_1 cos^2\Omega t + \varepsilon V_2 cos\Omega t) q_v + \varepsilon V_3 cos^2\Omega t + \varepsilon^2 V_4 cos\Omega t$$ (۱۴)

$$\ddot{q}_w + \omega^2 q_w + 2\varepsilon^2 \mu_w \dot{q_w} + \varepsilon^2 \kappa_w \dot{q}_v = 0$$ (۱۵)

حال در مرحله بعد، فرکانس ولتاژ در محدوده فرکانس طبیعی اول قرار می‌گیرد و رزونانس اولیه بررسی می‌شود [۲۳]:

$$\Omega = \omega + \varepsilon^2 \sigma$$ (۱۶)

که σ پارامتر انحراف از رزونانس است.

در مرحله بعد، پاسخ معادلات به‌صورت رابطه (۱۸) فرض می‌گردد:

$$q_v = q_{v0} + \varepsilon q_{v1} + \varepsilon^2 q_{v2}$$
$$q_w = q_{w0} + \varepsilon q_{w1} + \varepsilon^2 q_{w2}$$ (۱۷)

با جایگزینی رابطه (۱۷) در معادلات (۱۴) و (۱۵) و استفاده از سه مقیاس زمانی T_0، T_1 و T_2، معادلات در حالت مقیاس چندگانه حاصل می‌گردند. بدین منظور ضرایب توان‌های مشابه ε جداسازی می‌شود. با دسته‌بندی ضرایب ε، سه دسته معادلات (۱۸)، (۱۹) و (۲۰) برای جابه‌جایی جهات تحریک و شناسایی به‌دست می‌آید که این معادلات دی کوپله هستند:

$$\varepsilon^0: D_0 q_{v0} + \omega^2 q_{v0} = 0$$
$$D_0 q_{w0} + \omega^2 q_{w0} = 0$$ (۱۸)

$$\varepsilon^1: \quad D_0 q_{v1} + \omega^2 q_{v1} = -2D_0 D_1 q_{v0} + V_2\left(\frac{1}{2}expi\Omega T_0 + cc\right) q_{v0} + V_3\left(\frac{1}{4}exp2i\Omega T_0 + \frac{1}{4} + cc\right)$$
$$D_0 q_{w1} + \omega^2 q_{w1} = -2D_0 D_1 q_{w0}$$ (۱۹)

$$\varepsilon^2: \quad D_0 q_{v2} + \omega^2 q_{v2} = -2D_0 D_1 q_{v1} - \left({D_1}^2 + 2D_0 D_1\right) q_{v0} + \kappa_v D_0 q_{w0} - 2\mu_v D_0 q_{v0} + V_1\left(\frac{1}{4}exp2i\Omega T_0 + \frac{1}{4} + cc\right) q_{v0} + V_2\left(\frac{1}{2}expi\Omega T_0 + cc\right) q_{v1} + V_4\left(\frac{1}{2}expi\Omega T_0 cc\right)$$
$$D_0 q_{w2} + \omega^2 q_{w2} = -2D_0 D_1 q_{w1} - \left({D_1}^2 + 2D_0 D_1\right) q_{w0} - \kappa_w D_0 q_{v0} - 2\mu_v D_0 q_{w0}$$ (۲۰)

حل مجموعه معادلات (۱۸) نتایج زیر را به دنبال دارد:

$$q_{v0} = A_v(T_1, T_2) expi\omega T_0 + cc$$
$$q_{w0} = A_w(T_1, T_2) expi\omega T_0 + cc$$ (۲۱)

روابط (۲۱) در مجموعه معادلات (۱۹) جایگزین شده و از نتیجه حذف ترم‌های دیرپای آن، روابط (۲۲) به دست خواهد آمد:

$$A_v = A_v(T_2)$$
$$A_w = A_w(T_2)$$ (۲۲)

با حذف ترم‌های دیرپای از معادلات (۱۹) و حل آن، نتایج زیر حاصل می‌شود:

$$q_{v1} = B_1 A_v(T_2) expi(\Omega + \omega) T_0 + B_2 \bar{A}_v(T_2) expi(\Omega - \omega) T_0 + B_3 exp2i\Omega T_0 + B_4 + cc$$
$$q_{w1} = 0$$ (۲۳)

با جایگزینی روابط (۲۱) تا (۲۳) در معادلات (۲۰) و حذف عبارت‌های دیرپای روابط (۲۴) حاصل می‌شود:

$$-2D_2 i\omega A_v + \kappa_v i\omega A_w - 2\mu_v i\omega A_v + \frac{V_1 \bar{A}_v}{4} exp2i\sigma T_1 + \frac{V_1 A_v}{2} + \frac{V_4}{2} expi\sigma T_1 + \frac{V_2 \bar{A}_v B_2}{2} exp2i\sigma T_1 + \frac{V_2 A_v B_2}{2} + V_2 B_4 expi\sigma T_1 + \frac{V_2 A_v B_1}{2} + \frac{V_2 B_3}{2} expi\sigma T_1 = 0$$

$$2D_2 i\omega A_w + \kappa_w i\omega A_v + 2\mu_w i\omega A_w$$ (۲۴)

ضرایب رابطه (۲۴)، مطابق رابطه (۲۵) است:

$$B_1 = -\frac{V_2}{6\omega^2} \qquad B_2 = \frac{V_2}{2\omega^2}$$
$$B_3 = -\frac{V_3}{12\omega^2} \qquad B_4 = \frac{V_3}{4\omega^2} \qquad (۲۵)$$

به‌منظور حل مجموعه معادلات (۲۴)، دامنه‌های مختلط مطابق با (۲۶) به‌صورت قطبی در نظر گرفته می‌شود:

$$A_v(T_2) = \frac{1}{2}a_v(T_2)exp[i\ (\sigma T_2 - \Phi_2)]$$
$$A_w(T_2) = \frac{1}{2}a_w(T_2)exp[i\ (\sigma T_2 - \Phi_1 - \Phi_2)]$$
(۲۶)

که a_v، a_w دامنه و Φ_1 و Φ_2 فازهای ارتعاشی هستند.

با جایگزینی رابطه (۲۶) در رابطه (۲۴) و جدا کردن بخش حقیقی و موهومی معادلات، چهار معادله (۲۷) در حالت‌پایا حاصل می‌شود:

$$\frac{\kappa_v a_v}{2}\cos\Phi_1 + \mu_w a_w = 0$$
$$a_w\sigma + \frac{\kappa_w a_v}{2}\sin\Phi_1 = 0$$
$$\frac{\kappa_v a_w \omega}{2}\cos\Phi_1 - \mu_v a_v \omega + \frac{c_1}{2}a_v sin2\Phi_2 + c_3\sin\Phi_2 = 0$$
$$\omega a_v\sigma + \frac{\kappa_v a_w\omega}{2}\sin\Phi_1 + \frac{c_1}{2}a_v cos2\Phi_2 + \frac{c_2}{2}a_v + c_3\cos\Phi_2 = 0 \qquad (۲۷)$$

حل مجموعه معادلات (۲۷)، منجر به تعیین فازها و دامنه‌های ارتعاشی جهات تحریک و شناسایی می‌شود:

$$\Phi_1 = tan^{-1}\left(\frac{\sigma}{\mu_w}\right)$$
$$a_v = na_w$$
$$tan\Phi_2 = \frac{(\kappa_v cos\Phi_1 - 2n\mu_v)\omega}{(c_2 - c_1)n + (2n\sigma + \kappa_v sin\Phi_1)\omega}$$
$$a_v = \frac{-2c_3 sin\Phi_2}{-2\mu_v\omega + c_1 sin2\Phi_2} \qquad (۲۸)$$

و در پایان، پاسخ طبق رابطه (۱۷) و با تقریب دو جمله تعیین می‌شود:

$$q_v = q_{v0} + \varepsilon q_{v1} \equiv E_1 cos\Phi_2 + E_2 cos2\Omega t + a_v\cos(\Omega t - \Phi_2) + E_3\cos(2\Omega t - \Phi_2)$$
$$q_w = q_{w0} + \varepsilon q_{w1} \equiv a_w\cos(\Omega t - \Phi_1 - \Phi_2)$$
(۲۹)

که ضرایب E_1، E_2 و E_3 از روابط (۳۰) تعیین می‌شود:

$$E_1 = -\frac{\varepsilon V_2}{6\omega^2}a_v, E_2 = -\frac{\varepsilon V_3}{6\omega^2}, E_3 = -\frac{\varepsilon V_2}{6\omega^2}a_v$$
(۳۰)

همچنین a_v و a_w دامنه‌ها و Φ_1 و Φ_2 فازهای ارتعاشی جهات تحریک و شناسایی هستند.

۲-۲- تحلیل ارتعاشات غیرخطی

در این مرحله، ارتعاشات غیرخطی مورد توجه قرار می‌گیرد. با در نظر گرفتن عبارت‌های غیرخطی، معادلات ارتعاشی غیرخطی، با استفاده از روش گالرکین، کاهش مرتبه می‌یابند. معادلات حاصل شده به‌صورت پارامتریک در جهت تحریک و شناسایی مطابق رابطه (۳۱) و (۳۲)، به‌صورت زیر به دست می‌آیند:

$$M_v\ddot{q}_v + K_v q_v + C_{rv}\dot{q}_v - \kappa_{rv}\dot{q}_w + \hat{\alpha}_{2v}q_v^2 + \hat{\alpha}_{3v}q_v^3 = (V_{r1}cos^2\Omega t + V_{r2}cos\Omega t)q_v + V_{r3}cos^2\Omega t + V_{r4}cos\Omega t \qquad (۳۱)$$

$$M_w\ddot{q}_w + K_w q_w + C_{rw}\dot{q}_w + \kappa_{rw}\dot{q}_v + \hat{\alpha}_{2w}q_w^2 + \hat{\alpha}_{3w}q_w^3 = 0 \qquad (۳۲)$$

حال معادلات فوق از طریق دو روش عددی و تحلیلی حل می‌گردند. در بررسی عددی از روش رانگ-کوتای مرتبه ۴ استفاده می‌شود و برای حل تحلیلی، از روش مقیاس‌های چندگانه مشابه با تعیین پاسخ ارتعاشی خطی استفاده می‌شود. ابتدا ضرایب رابطه (۳۱) و (۳۲)، به صوت ضرایب رابطه (۱۳) و رابطه (۳۳) در نظر گرفته می‌شود:

$$\hat{\alpha}_{2j} = \varepsilon^2\alpha_{2j}/M_j\ , j = v, w$$
$$\hat{\alpha}_{3j} = \varepsilon^2\alpha_{3j}/M_j\ , j = v, w \qquad (۳۳)$$

سپس با استفاده از سه مقیاس زمانی T_0، T_1 و T_2 و بهره‌گیری از بسط ارائه شده در رابطه (۱۷)، معادلات در حالت مقیاس چندگانه حاصل می‌گردند. بدین منظور ضرایب توان‌های مشابه ε جداسازی شده و با دسته‌بندی ضرایب ε، سه دسته معادله زیر به دست می‌آید:

$$\varepsilon^0: D_0 q_{v0} + \omega^2 q_{v0} = 0$$

$$D_0 q_{w0} + \omega^2 q_{w0} = 0 \qquad (۳۴)$$

$$\varepsilon^1:\quad D_0 q_{v1} + \omega^2 q_{v1} = \alpha_{2v}q_{v0}^2 - 2D_0D_1q_{v0} + V_2\left(\frac{1}{2}expi\Omega T_0 + cc\right)q_{v0} + V_3\left(\frac{1}{4}exp2i\Omega T_0 + \frac{1}{4} + cc\right)$$

$$D_0 q_{w1} + \omega^2 q_{w1} = \alpha_{2w} q_{w0}^2 - 2D_0 D_1 q_{w0} \quad (۳۵)$$

$$\varepsilon^2: \quad D_0 q_{v2} + \omega^2 q_{v2} = \alpha_{3v} q_{v0}^3 + 2\alpha_{2v} q_{v0} q_{v1} -2D_0 D_1 q_{v1} - \left({D_1}^2 + 2D_0 D_1\right) q_{v0} +\kappa_v D_0 q_{w0} - 2\mu_v D_0 q_{v0} +V_1 \left(\frac{1}{4} exp 2i\Omega T_0 + \frac{1}{4} + cc\right) q_{v0} +V_2 \left(\frac{1}{2} exp i\Omega T_0 + cc\right) q_{v1} +V_4 \left(\frac{1}{2} exp i\Omega T_0 cc\right)$$

$$D_0 q_{w2} + \omega^2 q_{w2} = \alpha_{3w} q_{w0}^3 + 2\alpha_{2w} q_{w0} q_{w1} -2D_0 D_1 q_{w1} - \left({D_1}^2 + 2D_0 D_1\right) q_{w0} -\kappa_w D_0 q_{v0} - 2\mu_v D_0 q_{w0} \quad (۳۶)$$

حال با حل معادلات (۳۵) تا (۳۶) به همراه حذف عبارت‌های دیرپای، مشابه با روند اشاره‌شده در بخش قبل، دامنه و فاز پاسخ ارتعاشی محاسبه می‌شود.

۳- نتایج و بحث

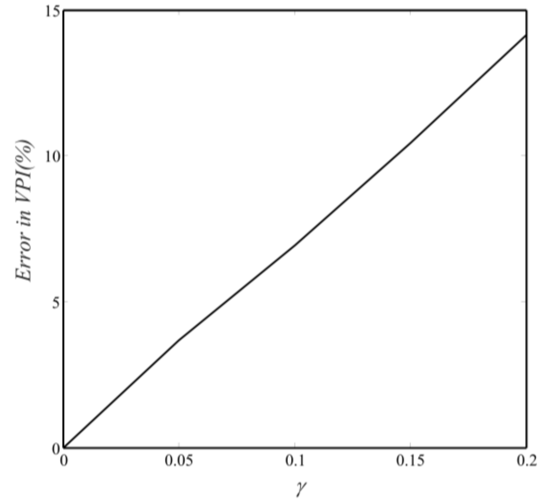
در شکل ۴ نمودار خطای ولتاژ ناپایداری استاتیکی در حالت فرض متمرکز بودن جرم برحسب پارامتر بی‌بعد طول ترسیم گردیده است.

مقدار خطای ولتاژ ناپایداری استاتیکی، مطابق رابطه (۳۷) تعیین می‌شود:

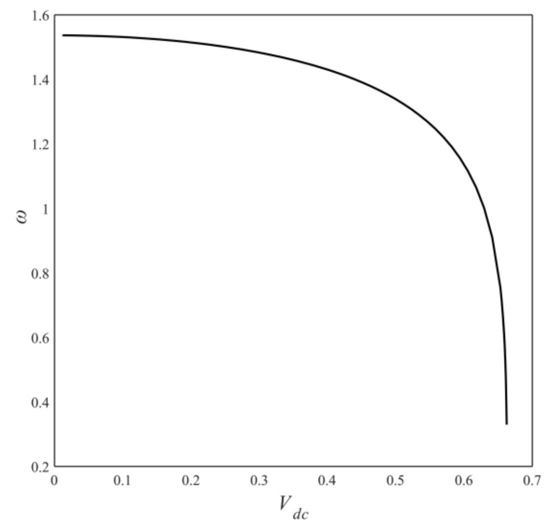
$$error\ in\ VPI = \left|\frac{VPI_{dis} - VPI_{tip}}{VPI_{dis}}\right| \quad (۳۷)$$

که در آن VPI بیانگر ولتاژ ناپایداری و علامت‌های dis و tip به ترتیب بیانگر، حالت گسترده و متمرکز جرم گواه متصل به میکروتیر است. مطابق با شکل ۴، با افزایش پارامتر بی‌بعد طول، میزان گستردگی جرم گواه نیز بیشتر شده و همان‌گونه که شکل نشان می‌دهد، خطای ناشی از فرض متمرکز گرفتن جرم گواه افزایش می‌یابد. بیشترین مقدار خطا در پارامتر بی‌بعد طول جرم گواه ۰٫۲ برابر با ۱۴٫۱۴٪ می‌باشد.

با در نظر گرفتن گستردگی جرم گواه، تغییرات فرکانس طبیعی سیستم برحسب ولتاژ در شکل ۵ به‌دست‌آمده است. مطابق با شکل مذکور، با افزایش ولتاژ، فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد. مشاهده می‌شود که در محدوده‌ای از ولتاژ اعمال‌شده، شیب کاهشی نمودار فرکانس-ولتاژ به‌شدت زیاد شده و فرکانس به سمت صفر میل می‌کند. در این محدوده، ناپایداری اتفاق افتاده و ولتاژ متناظر با این شیب زیاد، همان ولتاژ ناپایداری کششی است.

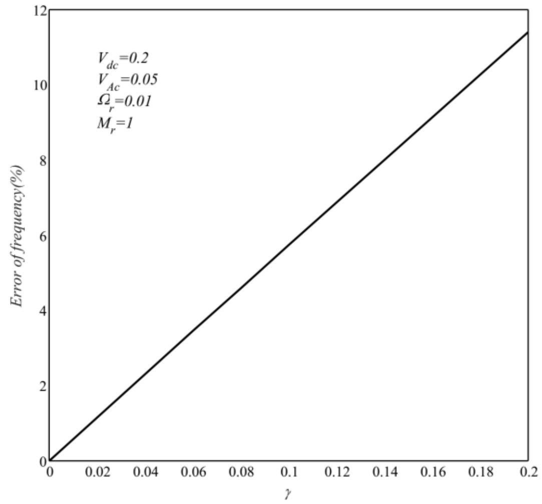


شکل ۴- نمودار خطای ولتاژ ناپایداری استاتیکی برحسب پارامتر بی‌بعد طول جرم گواه

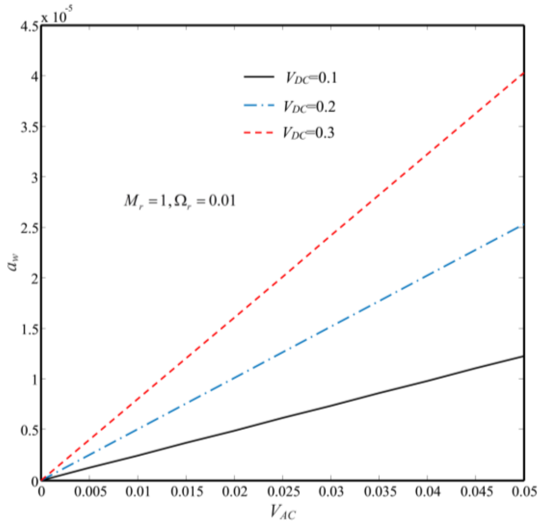


شکل ۵- نمودار فرکانس برحسب ولتاژ با در نظر گرفتن ابعاد طولی جرم گواه

در شکل ۶ خطای فرکانس در حالت فرض متمرکز بودن جرم برحسب پارامتر بی‌بعد طول ترسیم گردیده است.



شکل ۶- نمودار خطای فرکانس طبیعی برحسب پارامتر بی‌بعد طول



شکل ۷- نمودار دامنه جهت شناسایی بر حسب ولتاژ متناوب و بر اساس ولتاژ تحریک مستقیم متفاوت

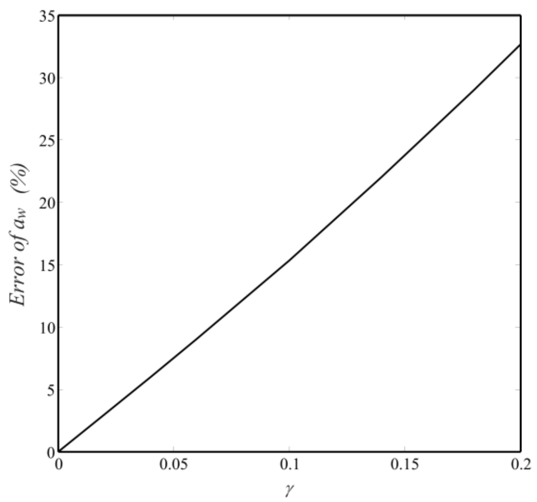
خطای فرکانسی مطابق رابطه (۳۸) تعریف می‌شود:

$$error\ in\ frequency = \left|\frac{\omega_{dis} - \omega_{tip}}{\omega_{dis}}\right| \quad (۳۸)$$

همان‌گونه که از نمودار مشخص است، با افزایش پارامتر بی‌بعد طول جرم گواه، میزان خطا افزایش می‌یابد. میزان خطا در نسبت طول بی‌بعد ۰/۲، برابر با ۱۱/۸۶٪ است؛ درصورتی‌که نسبت بی‌بعد طول جرم گواه کوچک باشد، فرض جرم متمرکز با حالت گسترده، اختلاف ناچیزی دارد.

در شکل ۷، نمودار تغییرات دامنه جهت شناسایی بر اساس ولتاژ متناوب اعمال‌شده در جهت تحریک، ترسیم شده است. همان‌گونه که در شکل نشان داده شده است، در یک سرعت دورانی مشخص، دامنه جهت شناسایی با افزایش ولتاژ متناوب، افزایش می‌یابد؛ بنابراین یکی از راه‌های افزایش حساسیت سیستم، افزایش ولتاژ متناوب و بالا بردن دامنه ارتعاشی جهت تحریک است. در همین نمودار در چند منحنی تأثیر تغییرات ولتاژ مستقیم نشان داده شده است. با افزایش ولتاژ مستقیم، دامنه جهت شناسایی افزایش می‌یابد؛ بنابراین می‌توان گفت، یکی دیگر از راه‌های افزایش حساسیت، افزایش ولتاژ مستقیم است؛ اما باید توجه داشت که افزایش ولتاژ تا جایی مجاز است که سیستم دچار ناپایداری نشود؛ همچنین مشاهده می‌شود که برای سه ولتاژ مستقیم مختلف، یک رابطه خطی بین ولتاژ متناوب و دامنه ارتعاشی جهت شناسایی وجود دارد.

با توجه به رابطه (۳۳) که بیانگر خطای دامنه ارتعاشی در فرض جرم متمرکز است، میزان خطا، در شکل ۸ ترسیم شده است. در نمودار ترسیم شده، بیشینه خطا در پارامتر بی‌بعد طول جرم گواه ۰/۲ برابر با ۳۲/۶٪ است که قابل توجه بوده و می‌تواند دقت پاسخ سیستم را به‌شدت پایین بیاورد. در پارامترهای کوچک بی‌بعد طول، این خطا ناچیز بوده و نتیجه حاصل از فرض جرم گسترده و متمرکز بر هم منطبق است.



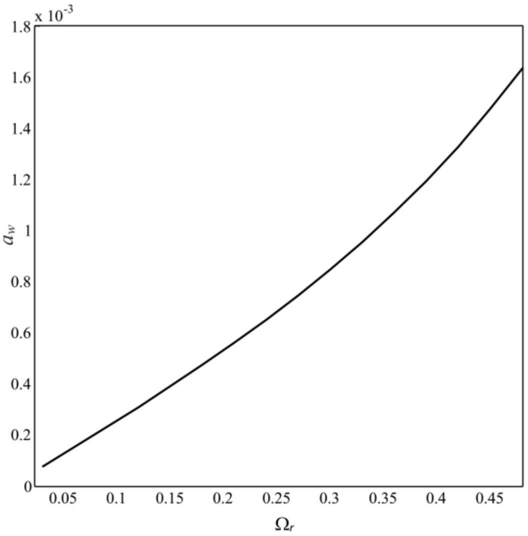
شکل ۸- نمودار خطای دامنه شناسایی در حالت فرض گسترده و متمرکز نسبت به پارامتر بی‌بعد طول

مقدار خطای دامنه مطابق رابطه (۳۹) تعریف می‌گردد:

$$error\ in\ a_w = \left| \frac{a_{w_{dis}} - a_{w_{tip}}}{a_{w_{dis}}} \right| \tag{۳۹}$$

نمودار دامنه برحسب سرعت دورانی بی‌بعد پایه، در شکل ۹ نشان داده شده است. این نمودار می‌تواند میزان دوران پایه را با اندازه‌گیری دامنه ارتعاشات ثانویه در اختیار طراح قرار دهد و رابطه بین ورودی و خروجی سیستم را نشان می‌دهد. همان‌گونه که مشخص است، با افزایش سرعت دورانی بی‌بعد میزان دامنه جهت شناسایی به دلیل افزایش نیروی کوریولیس افزایش می‌یابد؛ همچنین ملاحظه می‌شود که رابطه بین سرعت زاویه‌ای و دامنه ارتعاشی جهت شناسایی برای سرعت‌های پایین به‌صورت خطی است، اما برای سرعت‌های بالا این رابطه به‌صورت غیرخطی می‌شود.

شکل ۱۰ مقایسه جابه‌جایی دینامیکی حاصل از دو روش دقیق سری فوریه و تحلیلی مقیاس‌های چندگانه را در حالت خطی نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که دو پاسخ بر یکدیگر منطبق هستند؛ بنابراین روش تحلیلی ارائه شده، می‌تواند در بررسی عملکرد میکروژیروسکوپ‌های ذکرشده به‌خوبی مورد استفاده قرار گیرد.



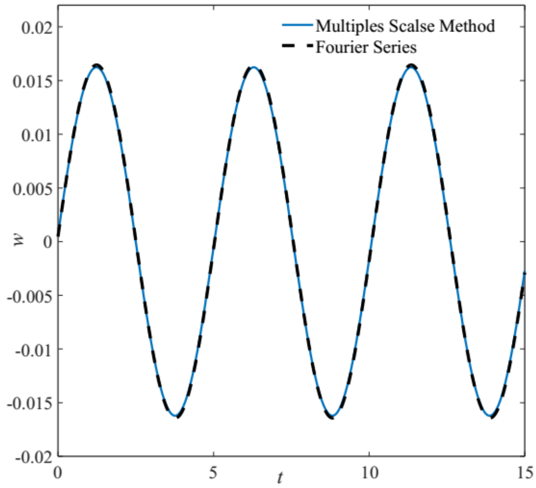
شکل ۹- نمودار دامنه بی‌بعد جهت شناسایی برحسب زاویه دوران بی‌بعد پایه

در شکل ۱۱ پاسخ ارتعاشی جهت شناسایی در دو حالت غیرخطی و خطی در نزدیکی حالت رزونانس به دست آمده است و نتایج غیرخطی آن با روش عددی مقایسه گردیده است. ملاحظه می‌شود که نتایج غیرخطی دو روش مقیاس چندگانه و عددی بعد از گذشت زمان بر هم منطبق می‌باشند. همچنین برای ضریب میرایی ۰/۰۳، نشان داده شده است که اختلاف ۷/۵ درصدی بین دامنه ارتعاشی نتایج غیرخطی و خطی مشاهده می‌شود. چنانچه ولتاژ متناوب کوچک و یا ضریب میرایی بزرگ شود، این اختلاف کمتر می‌شود و برعکس درصورتی‌که ولتاژ متناوب بزرگ و ضریب میرایی کوچک‌تر شود، این اختلاف برجسته‌تر می‌گردد.

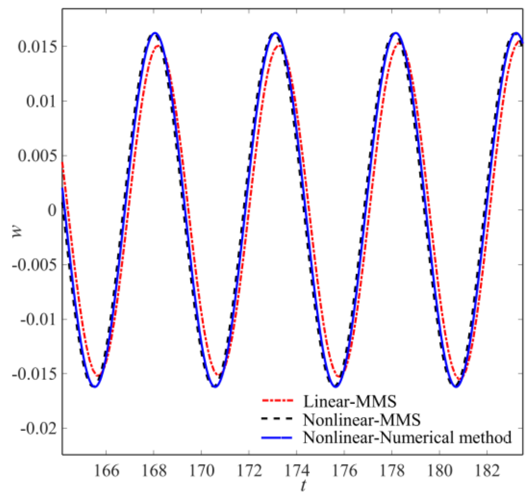
۴- نتیجه‌گیری

در پژوهش حاضر به بررسی اثرات مربوط به گستردگی جرم گواه در یک میکروژیروسکوپ ارتعاشی پرداخته شده است. نتیجه‌های مهم زیر در شبیه‌سازی‌ها مشاهده شده است:

- فرض متمرکز گرفتن جرم گواه، موجب بروز خطا در محاسبه ولتاژ ناپایداری، فرکانس طبیعی و به‌ویژه دامنه جهت شناسایی (محاسبه حساسیت) می‌شود. با افزایش عدد بی‌بعد طول (نسبت طول جرم گسترده به طول تیر)، میزان این خطاها افزایش می‌یابد.
- افزایش ولتاژ مستقیم و متناوب، باعث افزایش دامنه جهت شناسایی می‌شود. افزایش دامنه جهت شناسایی، به مفهوم افزایش حساسیت سیستم است. باید توجه داشت که افزایش ولتاژ مستقیم تا جایی امکان‌پذیر است که به ولتاژ ناپایداری نرسد. همچنین مشاهده شده است که یک رابطه خطی بین افزایش ولتاژ متناوب و افزایش دامنه ارتعاشی جهت شناسایی وجود دارد.
- نمودار بسیار مهم دامنه جهت شناسایی برحسب سرعت دورانی پایه ترسیم شد. با کمک این نمودار عملکرد میکروژیروسکوپ مشخص می‌شود. با اندازه‌گیری دامنه جهت شناسایی، میزان دوران پایه از طریق منحنی مشخص می‌شود. ملاحظه گردید که ارتباط بین سرعت زاویه‌ای و دامنه ارتعاشی جهت شناسایی برای سرعت‌های پایین، به‌صورت خطی است؛ اما برای سرعت‌های بالا این رابطه به‌صورت غیرخطی می‌شود.



شکل ۱۰- مقایسه خیز انتهایی میکروتیر به دو روش حل دقیق و مقیاس‌های چندگانه



شکل ۱۱- مقایسه پاسخ ارتعاشی جهت شناسایی در دو حالت خطی و غیرخطی برای دو روش تحلیلی و عددی

- پارامترهای مهم طراحی میکروژیروسکوپ عبارت است از: ولتاژ ناپایداری، فرکانس طبیعی و دامنه ارتعاشات در جهت شناسایی. میزان خطای هرکدام از پارامترهای ذکرشده در فرض متمرکز گرفتن جرم گواه به‌دست آمده است. مشاهده شد که فرض جرم متمرکز نمی‌تواند به‌خوبی رفتار سیستم را ارائه نماید. بیشترین میزان خطای مشاهده شده، مربوط به دامنه جهت شناسایی بوده که به علت نقش مهم آن در تعیین حساسیت، حائز اهمیت بوده و نشان می‌دهد که فرض متمرکز در نظر گرفتن جرم گواه نمی‌تواند عملکرد ارتعاشی میکرو ژیروسکوپ را پیش‌بینی نماید.

۵- پیوست

$$M_v = \int_0^1 \{(1 + M_r\delta_1(x))\varphi^2(x)\}ds + M_r\gamma\varphi'(1)\varphi(1) + \frac{M_r\gamma^2}{4}\varphi'^2(1)$$

$$K_v = \beta\int_0^1 \varphi^{(IV)}(x)\varphi(x)dx - {\Omega_r}^2\int_0^1 \{(1 + M_r\delta_1(x))\varphi^2(x)\}dx - {V_{DC_v}}^2\int_0^1 (A\varphi^2 + B\varphi\,\varphi')dx$$

$$M_w = \int_0^1 \{(1 + M_r\delta_1(x))\varphi^2(x)\}dx + M_r\gamma\varphi'(1)\varphi(1) + \frac{M_r\gamma^2}{4}\varphi'^2(1)$$

$$K_w = \int_0^1 \varphi^{(IV)}(x)\varphi(x)dx - {\Omega_r}^2\int_0^1 \{(1 + M_r\delta_1(x))\varphi^2(x)\}dx - {V_{DC_w}}^2\int_0^1 (C\varphi^2 + D\varphi\,\varphi')dx$$

$$\kappa_{rv} = \frac{2\Omega_r}{d}\int_0^1 \{(1 + M_r\delta_1(x))\varphi^2(x)\}dx + \frac{M_r\gamma}{d}\Omega_r\varphi'(1)\varphi(1)$$

$$\kappa_{rw} = 2d\Omega_r\int_0^1 \{(1 + M_r\delta_1(s))\varphi^2(x)\}dx + M_r\gamma d\Omega_r\varphi'(1)\varphi(1)$$

$$C_{rv} = \int_0^1 c_{r2}\varphi^2 dx$$

$$C_{rw} = \int_0^1 c_{r3}\varphi^2 dx$$

$$V_{r1} = V^2\int_0^1 (\tilde{A}\varphi^2 + \tilde{B}\varphi\,\varphi')\delta_1(x)dx$$

$$V_{r2} = 2VV_{DC_v}\int_0^1 (\tilde{A}\varphi^2 + \tilde{B}\varphi\,\varphi')\delta_1(x)dx$$

$$V_{r3} = V^2\int_0^1 \left(\tilde{E}\varphi + \tilde{F}\varphi'\right)\delta_1(x)dx$$

$$V_{r4} = 2VV_{DC_v}\int_0^1 \left(\tilde{E}\varphi + \tilde{F}\varphi'\right)\delta_1(x)dx$$

$$\hat{\alpha}_{2v} = \int_0^1 \frac{V_{DCv}^2}{(1-v_s)^4}\Big\{\left(3\varphi^2 + 3\gamma\varphi'\varphi + \gamma^2\varphi'^2\right)\varphi + \left(\frac{3\gamma\varphi^2}{2} + 2\gamma^2\varphi'\varphi\right)\varphi'\Big\}\delta_1(x)dx$$

$$\hat{\alpha}_{2w} = \int_0^1 \frac{V_{DCw}^2}{(1-v_s)^4}\Big\{\left(3\varphi^2 + 3\gamma\varphi'\varphi + \gamma^2\varphi'^2\right)\varphi + \left(\frac{3\gamma\varphi^2}{2} + 2\gamma^2\varphi'\varphi\right)\varphi'\Big\}\delta_1(x)dx$$

$$\hat{\alpha}_{3v} = \int_0^1 \frac{V_{DCv}^2}{(1-v_s)^5}\Big\{\left(4\varphi^3 + \gamma^3\varphi'^3 + 6\gamma\varphi^2\varphi' + \gamma^2\varphi\varphi'^2\right)\varphi + (2\gamma\varphi^3 + 4\gamma^2\varphi'\varphi^2)\varphi'\Big\}\delta_1(x)dx \qquad (\text{پ.۱})$$

۶- مراجع

[1] Acar C, Shkel A (2008) MEMS vibratory gyroscopes: structural approaches to improve robustness. Springer, US.

[2] Armenise MN (2011) Advances in Gyroscope Technologies. Springer, Berlin Heidelberg.

[3] Mohite S, Patil N, Pratap R (2006) Design, modelling and simulation of vibratory micromachined gyroscopes. J Phys Conf Ser 34: 757-763.

[4] Hong YS, Lee JH, Kim SH (2000) A laterally driven symmetric micro-resonator for gyroscopic applications. J Micromech Microengineering 10: 452.

[5] Mojahedi M, Ahmadian M, Firoozbakhsh K (2014) The influence of the intermolecular surface forces on the static deflection and pull-in instability of the micro/nano cantilever gyroscopes. Compos Part B:Eng 56: 336-343.

[6] Mojahedi M, Ahmadian MT, Firoozbakhsh K (2013) Oscillatory behavior of an electrostatically actuated microcantilever gyroscope Int J Struct Stab Dy 13: 24.

[7] Mojahedi M, Ahmadian MT, Firoozbakhsh K (2013) Dynamic pull-in instability and vibration analysis of a nonlinear microcantilever gyroscope under step voltage considering squeeze film damping. Int J Appl Mech 5: 1350032 (26 page).

[8] Ghommem M, Nayfeh AH, Choura S, Najar F, Abdel-Rahman EM (2010) Modeling and performance study of a beam microgyroscope. J Sound Vib 329: 4970-4979.

[9] Ansari M (2008) Modeling and vibration analysis of a rocking–mass gyroscope system. MASc Thesis. Canada University of Ontario Institute of Technology.

[10] Bhadbhade V, Jalili N, Nima Mahmoodi S (2008) A novel piezoelectrically actuated flexural/torsional vibrating beam gyroscope J Sound Vib 311: 1305-1324.

[11] Jeong C, Seok S, Lee B, Kim H, Chun K (2004) A study on resonant frequency and Q factor tunings for MEMS vibratory gyroscopes. J Micromech Microengineering 14: 1530.

[12] Ghommem M, Abdelkefi A (2017) Performance analysis of differential-frequency microgyroscopes made of nanocrystalline material. Int J Mech Sci 133: 495-503.

[13] Mojahedi M, Ahmadian M, Firoozbakhsh K (2014) The oscillatory behavior, static and dynamic analyses of a micro/nano gyroscope considering geometric nonlinearities and intermolecular forces. Acta Mechanica Sinica.

[14] Sharifinsab E, Mojahedi M (2018) Nonlinear Vibration of Size Dependent Microresonators with an Electrostatically Actuated Proof Mass. Int J Struct Stab Dy 1850057.

[15] Bina R, Mojahedi M (2017) Static Deflection, Pull-in Instability and Oscillatory Behavior of the Electrostatically Actuated Microresonator with a Distributed Proof Mass Considering Non-Classical Theory. Int J Appl Mech 1750023.

[16] Nayfeh AH, Pai PF (2004) Linear and nonlinear structural mechanics. Wiley-VCH, Strauss GmbH Morlenbach, Germany.

[17] Batra R, Porfiri M, Spinello D (2008) Vibrations and pull-in instabilities of microelectromechanical von Kármán elliptic plates incorporating the Casimir force. J Sound Vib 315: 939-960.

[18] Batra RC, Pofiri M, Spinello D (2007) Capacitance estimate for electrostatically actuated narrow microbeams. Micro Nano 1: 71-73.

[19] Thomson W, Dahleh M (1998) Theory of vibration with applications. Prentice Hall, New Jersey.

[20] Fazel R, Jalili MM, Abootorabi MM (2017) Determination of Stability Regions of Wheel and Workpiece in Plunge Grinding Process Using a 3-D Workpiece Model. *Journal of Solid and Fluid Mechanics* 7: 67-82.

[21] Ghazi R, Payghaneh G, Shahgholi M (2017) Resonance analysis and free nonlinear vibrations of a nanocomposite with internal damping. Modares Mechanical Engineering 17: 98-104.

[22] Pirmoradian M, Karimpour H (2017) Nonlinear Effects on Parametric Resonance of a Beam Subjected to Periodic Mass Transition. Modares Mechanical Engineering 17: 284-292.

[23] Nayfeh AH, Mook DT (2008) Nonlinear oscillations. Wiley-VCH, US.