



آنالیز پایداری جریان جابجایی آزاد با تغییر خواص فیزیکی به کمک تئوری پایداری خطی

مصطفی ورمزیار^{۱*}، مهدی میراعلم^۱، محمدرضا حبیبی^۲، مصطفی دهقانی مبارکه^۳ و آرش محمدی^۱

^۱ استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی

^۲ استادیار، پژوهشگاه صنعت نفت ایران

^۳ دانشیار، پژوهشگاه صنعت نفت ایران

مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۰۶/۰۴؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۷/۰۱/۱۹؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۰۲/۱۷

چکیده

در این مطالعه به بررسی اثر تغییرات خواص فیزیکی سیال از جمله، لزجت سینماتیکی و ضریب پخش حرارتی روی ناپایداری اولیه جریان جابه‌جایی آزاد رایلی بنارد به صورت نیمه تحلیلی پرداخته شده است. بر این اساس معادلات حاکم بر لحظه شروع جابه‌جایی آزاد با استفاده از پارامترهای اغتشاش دما و اغتشاش سرعت و با حل پایه هدایت خالص محاسبه گردیده است. با کمک تئوری پایداری خطی و شرط پایداری در فضای موج گونه، می‌توان کمینه مقدار رایلی را به‌عنوان رایلی بحرانی در دستگاه معادلات مقدار ویژه مذکور تعریف کرد. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد، تابع عدد موج بحرانی نسبت به پارامترهای مؤثر در تغییر خواص، یک تابع زوج بوده و رفتار کاملاً متقارن نسبت به مقادیر قرینه از خود نشان می‌دهد؛ همچنین وابستگی دامنه و فرکانس نوسان اغتشاشات دما و سرعت بر اساس پارامترهای مؤثر در تغییرات خواص، مورد ارزیابی قرار گرفته و نتایج تحلیل گردید. می‌توان گفت، رفتار رایلی بحرانی نسبت به تغییرات ضریب پخش حرارتی و لزجت سینماتیکی کاملاً معکوس است، لذا اثر هم‌زمان آن‌ها در حل معادلات منجر به کاهش بازه نوسان رایلی بحرانی خواهد شد.

کلمات کلیدی: تئوری پایداری خطی؛ تغییرات خواص فیزیکی؛ جریان جابجایی آزاد؛ رایلی بحرانی.

Stability Analysis of Natural Convection with Variable Physical Coefficients Using Linear Stability Theory

M. Varmazyar^{1,*}, M. Miralam¹, M.R. Habib², M. Dehghani Mobarake³, A. Mohammadi¹

¹ Assis. Prof., Mech. Eng., Shahid Rajaee Teacher Train. Univ., Tehran, Iran

² Assis. Prof., Mech. Eng., Research Inst. of Petroleum Industry, Tehran, Iran

³ Assoc. Prof., Chem. Eng., Research Inst. of Petroleum Industry, Tehran, Iran

Abstract

In this research, the effects of variation of physical transport coefficient of fluid, such as kinematic viscosity and thermal diffusivity coefficient, on the primary instability of natural convection has been investigated. Accordingly, the governing equations are calculated for the onset of free convective flow by using the perturbation theory on the variation of temperature and velocity. Using the theory of linear stability and the wave function, it can be defined the minimum Rayleigh number as critical Rayleigh number in assumed eigenvalue problem. It is assumed that the flow variables, such as the thermal diffusivity coefficient and kinematic viscosity, change exponentially relative to the location. The simulation results show that the critical-wave number function is an even function. Also, the dependence of the amplitude and frequency of oscillation of temperature and velocity disturbances on effective parameters on properties changes was evaluated and the results were analyzed. It can be said that critical Rayleigh number behavior is completely inverse in relation to the thermal emission and kinematic viscosity coefficients, and therefore their simultaneous effect in solving the equations will lead to a decrease in the critical interval of the oscillation.

Keywords: Linear Stability Theory; Variation of Physical Coefficient; Free Convection; Critical Rayleigh Number.

۱- مقدمه

بررسی تأثیر تغییرات خواص سیال در حوزه انتقال حرارت و جریان سیال، همواره از اهمیت ویژه‌ای برخوردار بوده است. در نظر گرفتن این مسئله در شرایطی که سرعت، فشار و دما به یکدیگر وابسته باشند، می‌تواند نقش به‌سزایی در دقت پاسخ مدل‌سازی داشته باشد. از جمله این موارد می‌توان به جریان جابجایی آزاد [۱-۴]، از جمله جریان رایلی بنارد اشاره نمود. الگوی این جریان در حرکت هوای داخل جو زمین، بادهای خورشیدی، جریان‌های حرارتی در هسته ستارگان و اعماق اقیانوس‌ها در کنار فرآیندهای متعدد صنعتی از جمله، سیستم‌های گرمایش از کف و مبدل‌های حرارتی مشهود است. اولین بار بنارد [۵] در سال ۱۹۰۰ میلادی، جریان جابجایی آزاد بین دو صفحه صلب گرم در زیر و سرد در بالا را مورد مطالعه قرار داد. وی ساختارهای چندوجهی متعددی را برای سلول بنارد مشاهده کرد؛ هم‌چنین وی دید که این ساختارها می‌توانند در یک زنجیره تعادلی در کنار یکدیگر و به‌صورت پایدار حضور داشته باشند. این جریان مجدداً توسط رایلی [۶] در سال ۱۹۱۶ میلادی، با فرض آنکه سطح بالا به‌صورت سطح آزاد با تنش برشی صفر باشد، مورد مطالعه قرار گرفت. البته رایلی از اثر کشش سطحی روی سطح آزاد سیال صرف‌نظر کرده بود. جریان مورد مطالعه توسط بنارد [۵] و رایلی [۶]، امروزه تحت عنوان جریان رایلی-بنارد معروف است. در سال ۱۹۵۸ میلادی پیرسون [۷]، مجدداً مسئله رایلی را با فرض حضور کشش سطحی بررسی کرد. عملاً در مطالعات فوق مشخص گردید، زمانی که اختلاف درجه حرارت بین دو صفحه از یک حد مشخصی بیشتر می‌گردد، جریان جابجایی آزاد به میدان اضافه شده و باعث افزایش ضریب انتقال حرارت نسبت به حالت هدایت خالص خواهد شد. این جریان با افزایش اختلاف دما تشدید و البته الگوی آن بسته به شرایط تغییر خواهد کرد [۸-۱۰].

مطالعات گسترده‌ای روی جریان رایلی-بنارد چه از منظر تجربی [۱۱-۱۳] و چه عددی [۱۴، ۱۵] و تحت شرایط مختلف از جمله، مدل سه‌بعدی [۱۶-۱۹]، هندسه‌های پیچیده [۲۰، ۲۱]، در حالت چرخان [۲۲، ۲۳]، تحت میدان مغناطیسی [۲۴، ۲۵] و وضعیت آشفته [۲۶-۲۸] صورت پذیرفته است و البته عملاً تاکنون پاسخ دقیقی برای جریان جابجایی آزاد رایلی-بنارد به‌صورت کلی ارائه نشده است.

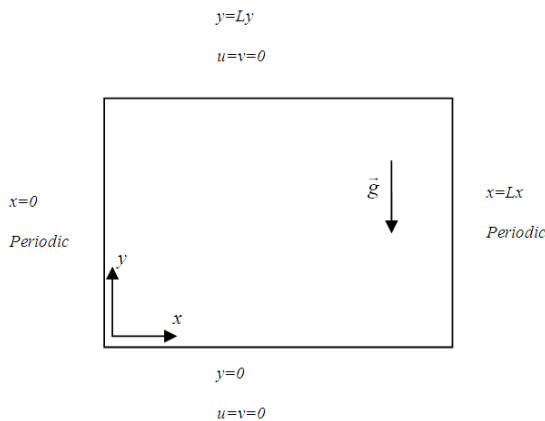
جهت مدل‌سازی این جریان می‌بایست، معادلات بقای جرم، ممنتوم و انرژی به‌صورت هم‌زمان حل شوند؛ اما در کنار توزیع سرعت، فشار و دما، لحظه شروع جریان جابجایی آزاد نیز، از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. این موضوع تحت عنوان ناپایداری اولیه در ادبیات حوزه رایلی بنارد مطرح است [۲۹]. حل عددی این معادلات علاوه بر تخمین توزیع سرعت، فشار و دما، می‌تواند لحظه شروع ناپایداری اولیه را نیز مشخص سازد [۳۰، ۳۱]. البته علاوه بر روش‌های عددی، با کمک آنالیز پایداری خطی نیز، می‌توان لحظه شروع ناپایداری را به‌صورت دقیق بررسی و استحصال کرد [۳۲-۳۴]. مطالعات اولیه نشان می‌داد که ناپایداری اولیه مستقل از عدد پرناتل است و البته به‌شدت تحت تأثیر عدد رایلی و تغییر خواص فیزیکی است [۳۵-۳۷]. چاندراسخار [۳۵] و لرما و همکاران [۳۶]، به‌طور دقیق معادلات مربوط به پایداری جریان جابجایی آزاد دوبعدی در یک محفظه مستطیلی شکل را استخراج نمودند. آن‌ها با فرض خواص فیزیکی ثابت و با کمک یک روش دقیق ریاضی، موفق به ارائه مقدار رایلی بحرانی (Rac) برای دو حالت دیواره‌های صلب و سطوح با تنش آزاد شدند.

در این میان تعداد کمی از مطالعات به بررسی تأثیر تغییر خواص فیزیکی بر ناپایداری اولیه پرداخته‌اند [۳۸-۴۱]. از آن جمله می‌توان، به مطالعه تجربی و تحلیلی باسه [۴۲]، اشاره نمود که به بررسی اثر تغییرات غیرخطی چگالی بر ناپایداری جریان پرداخته است. پالم [۴۴] اثر تغییر لزجت سینماتیکی بر جمله‌های مختلف معادلات پایداری را بررسی کرد. در ادامه تحلیل پالم، سیگل و استورات [۴۵] به استخراج راستاهای مشخصه معادلات پایداری مربوط به مرز پایداری و ناپایداری، با فرض تغییرات شدید لزجت سینماتیکی با دما، پرداخته‌اند. ریشتر [۴۶] اثر تغییر لزجت بر رایلی بحرانی و شمای سلول بنارد را به‌صورت آزمایشگاهی، مورد بررسی قرار داد. به‌علاوه استنگل و همکاران [۴۷]، کاپونه و جنتایل [۴۸]، ریچاردسون و استراکان [۵۰]، اثر تغییر لزجت سینماتیکی بر رایلی بحرانی را به کمک تئوری پایداری خطی و به‌صورت تحلیلی بررسی کردند. هم‌چنین کاپونه و جنتایل [۴۹]، با فرض جداره‌های تنش آزاد در بالا و پایین میدان، اثبات نمودند که پاسخ تئوری خطی پایداری در مسئله مورد بررسی، بر تئوری غیرخطی پایداری منطبق است، لذا نیازی

۲-۱- معادلات فیزیکی حاکم

جریان مورد بررسی حد فاصل بین سطح گرم با دمای $T = T_1$ در زیر و سطح سرد با دمای $T = T_2$ در بالا است. سطوح دارای شرط مرزی تنش آزاد بوده و جریان جابجایی آزاد با غلبه بر نیروی لزجت در رایلی بحرانی شکل می‌گیرد؛ همچنین مرزهای پایین و بالا به ترتیب در $z = 0$ و $z = d$ قرار گرفته‌اند. شمای کلی مسئله در شکل ۱ نشان داده شده است. معادلات حاکم بر جریان جابجایی آزاد و بر اساس دمای مرجع T_2 ، به صورت رابطه (۱) خواهد بود:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} p + \rho_0 g \vec{e}_3 &= 0 \\ \rho_0 \left[\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \vec{u} \right] &= -\alpha (T_1 - T_2) \vec{\nabla} P + \mu \nabla^2 \vec{u} + \\ \vec{\nabla} \mu \cdot (2\vec{\zeta}) + \rho_0 g \alpha (T - T_2) \vec{e}_3 & \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{u} &= 0 \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} T &= \kappa \nabla^2 T + \vec{\nabla} \kappa \cdot \vec{\nabla} T \end{aligned} \quad (1)$$



شکل ۱- شماتیکی از هندسه و شرایط مرزی مسئله

که در آن p فشار هیدرواستاتیک، P فشار ناشی از انبساط حرارتی، ρ_0 چگالی سیال، g شتاب گرانش زمین، \vec{u} بردار سرعت، T دما، α ضریب انبساط حرارتی، μ لزجت دینامیکی، $\vec{\zeta} = (1/2) [\vec{\nabla} \vec{u} + (\vec{\nabla} \vec{u})^T]$ ، κ ضریب پخش حرارتی و \vec{e}_i بردار یکه در راستای i است. شرایط مرزی برای فشار هیدرواستاتیک، فشار ناشی از انبساط حرارتی و دما به صورت رابطه (۲) خواهد بود:

به استفاده از تئوری غیرخطی نیست. در سال ۲۰۰۰ میلادی سورین و هروینگ [۵۱]، به مدل‌سازی ناپایداری اولیه فارغ از نوع تابعیت لزجت سینماتیکی به دما پرداختند. ایشان از تئوری اغتشاشات اندک جهت بسط متغیرها و تفکیک مرتبه معادله استفاده کردند. البته نتایج مطالعه مذکور، حاکی از آن است که دقت مدل حدی مورد استفاده، به شدت وابسته به میزان تغییرات لزجت با دما است و در بازه $\varepsilon > 0.1$ دارای خطای غیرقابل قبول است. رجاگوپول و همکاران [۵۲] در سال ۲۰۰۹ میلادی، مسئله مورد بررسی کاپونه و جنتایل [۴۸، ۴۹] را با فرض دیواره‌های صلب بازبینی و نتایج رایلی بحرانی را با کمک آنالیز پایداری خطی محاسبه کردند. آن‌ها مدلی را برای بررسی اثر تغییر لزجت سینماتیکی بر لحظه شروع ناپایداری اولیه، ارائه و اثبات نمودند که این تغییر می‌تواند تأثیر به‌سزایی در تخمین عدد رایلی بحرانی داشته باشد. تاکنون مطالعه تحلیلی ارائه نشده است که به صورت هم‌زمان تأثیر تغییر ضریب پخش حرارتی را در کنار لزجت سینماتیکی بررسی نماید و از این‌رو این مطالعه در این حوزه تعریف گردیده است.

در بخش دوم به استخراج معادلات پایداری جریان و روش حل پرداخته خواهد شد. معادلات این بخش با فرض تغییرات هم‌زمان ضریب پخش حرارتی و لزجت سینماتیکی به دست خواهد آمد. از آنالیز پایداری خطی، جهت استخراج معادلات پایداری استفاده گردیده و روش گالرکین جهت استخراج مقادیر ویژه و بررسی محدوده پایداری متغیرها به کار گرفته شده است. بخش آخر نیز، به ارائه نتایج متأثر از تغییرات ضریب پخش حرارتی در کنار لزجت سینماتیکی می‌پردازد.

۲- استخراج معادلات پایداری

جهت استخراج معادلات پایداری لازم است، تا معادلات فیزیکی حاکم بر مسئله محاسبه شوند. بر این اساس از معادلات کلاسیک بقای جرم، ممنتوم و انرژی در دستگاه مختصات کارتزین استفاده شده است؛ لذا در بخش اول به استخراج معادلات فیزیکی حاکم منطبق بر شرایط اولیه مسئله پرداخته خواهد شد. در بخش بعدی با کمک تئوری پایداری خطی، دستگاه معادلات پایداری به دست خواهد آمد.

$$\frac{\partial u'}{\partial z}(x_1, x_2, z=0, t) = 0,$$

$$\frac{\partial u'}{\partial z}(x_1, x_2, z=d, t) = 0$$

$$\frac{\partial v'}{\partial z}(x_1, x_2, z=0, t) = 0,$$

$$\frac{\partial v'}{\partial z}(x_1, x_2, z=d, t) = 0$$

$$w'(x_1, x_2, z=0, t) = 0,$$

$$w'(x_1, x_2, z=d, t) = 0$$

با کمک روابط (۶) می‌توان معادلات (۵) را بی‌بعد کرد:

$$x_{1,2}^* = x_{1,2} / d, z^* = z / d,$$

$$t^* = (\mu_0 / \rho_0 d^2) t, u^* = (\rho_0 d / \mu_0) u',$$

$$\mu^* = \mu / \mu_0, \bar{p}^* = (\bar{p} - p_0) / (\rho_0 g d),$$

$$\bar{T}^* = (\bar{T} - T_2) / (T_1 - T_2),$$

$$P^* = (\alpha(T_1 - T_2) \rho_0 d^2 / \mu_0^2) P',$$

$$T^* = (\rho_0 d / \mu_0) \sqrt{\alpha \rho_0 g d \kappa / (\mu_0 (T_1 - T_2))} T',$$

$$R^2 = \alpha(T_1 - T_2) \rho_0 g d^3 / (\mu_0 \kappa),$$

$$Pr = \mu_0 / (\rho_0 \kappa) \quad (۶)$$

با فرض $\mu = \mu_0 f(z)$ معادلات بدون بعد به صورت رابطه

(۷) تبدیل خواهند شد:

$$\frac{\partial \bar{u}^*}{\partial t^*} = -\bar{\nabla} P^* + f(z^*) \Delta \bar{u}^* +$$

$$\frac{\partial f(z^*)}{\partial z^*} \left[\left(\frac{\partial u^*}{\partial z^*} + \frac{\partial w^*}{\partial x_1^*} \right) \bar{e}_1 \right] +$$

$$\frac{\partial f(z^*)}{\partial z^*} \left[\left(\frac{\partial v^*}{\partial z^*} + \frac{\partial w^*}{\partial x_2^*} \right) \bar{e}_2 \right] +$$

$$\frac{\partial f(z^*)}{\partial z^*} \left[\left(2 \frac{\partial w^*}{\partial z^*} \right) \bar{e}_3 \right] + RT^* \bar{e}_3$$

$$\bar{\nabla} \bar{u}^* = 0$$

$$Pr \times \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \frac{\partial \bar{T}^*}{\partial z^*} R w^* =$$

$$\Delta T^* + (\bar{\nabla} g) \cdot (\bar{\nabla} T^*) \quad (۷)$$

جهت حذف فشار از روابط فوق می‌بایست از معادلات ممنوم کرل گرفت و به کمک آن جمله فشار را از معادلات حذف نمود. معادلات نهایی بدون حضور جمله فشار به صورت زیر می‌باشند:

$$p(x_1, x_2, z=d, t) = p_0$$

$$P(x_1, x_2, z=d, t) = P_0$$

$$T(x_1, x_2, z=0, t) = T_1$$

$$T(x_1, x_2, z=d, t) = T_2 \quad (۲)$$

در آن p_0 و P_0 مقادیر ثابت می‌باشند. قبل از رابلی بحرانی، جریان در حالت سکون قرار داد؛ لذا می‌توان متغیرهای جریان را با فرض $\kappa = \kappa_0 g(z)$ برای حالت سکون به صورت رابطه (۳) به دست آورد:

$$\bar{p} = -\rho_0 g(z-d) + p_0$$

$$\bar{T} = \frac{(T_2 - T_1)}{\int_0^d (1/g(z)) dz} \int_0^z (1/g(z)) dz + T_1$$

$$\bar{P} = P_0 + \rho_0 g \int_d^z \left[\frac{\int_0^z (1/g(z)) dz}{\int_0^d (1/g(z)) dz} - 1 \right] dz \quad (۳)$$

فرض می‌شود در لحظه شروع ناپایداری اغتشاشاتی در جریان به وجود آمده که نیروی لزجت قادر به از بین بردن آن نیست. بر اساس تئوری اغتشاشات اندک مقادیر پارامترهای جریان را می‌توان به دو قسمت مقدار اولیه و اغتشاش تقسیم‌بندی کرد:

$$\bar{u} = \bar{u}', P = \bar{P} + P',$$

$$p = \bar{p} + p', T = \bar{T} + T' \quad (۴)$$

با کمک روابط (۴) می‌توان معادلات (۱) را به صورت معادلات (۵) بازنویسی کرد.

$$\bar{\nabla} p' = 0$$

$$\rho_0 \left[\frac{\partial \bar{u}'}{\partial t} + \bar{u}' \cdot \bar{\nabla} \bar{u}' \right] = -\alpha(T_1 - T_2) \bar{\nabla} P' + \mu \nabla^2 \bar{u}'$$

$$+ \bar{\nabla} \mu \cdot (2 \bar{\zeta}') + \rho_0 g \alpha T' \bar{e}_3$$

$$\bar{\nabla} \bar{u}' = 0$$

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + \bar{u}' \cdot \bar{\nabla} \bar{T}' = \kappa \nabla^2 T' + \bar{\nabla} \kappa \cdot \bar{\nabla} T' \quad (۵)$$

شرایط مرزی حاکم بر معادلات اغتشاش با فرض $\bar{u}' = u' \bar{e}_1 + v' \bar{e}_2 + w' \bar{e}_3$ و تنش برشی صفر روی سطوح بالا و پایین، به صورت زیر خواهد بود:

$$p'(x_1, x_2, z=d, t) = 0$$

$$T'(x_1, x_2, z=0, t) = 0,$$

$$T'(x_1, x_2, z=d, t) = 0$$

در واقع زمانی جریان پایدار است که به صورت خودکار و با کمک جمله لزجت، امواج اغتشاش در میدان مضمحل شده و از بین بروند. به عبارت دیگر، سرعت آن‌ها به مقدار صفر برسد؛ لذا حد ناپایداری شرط $c = 0$ است. در این حد، رفتار امواج بسته به تابع موج آن‌ها (a_{x_1}, a_{x_2}) وابستگی متفاوتی به عدد رایلی پیدا می‌کند. بر این اساس و با فرض $a^2 = a_{x_1}^2 + a_{x_2}^2$ ، شرط پایداری را می‌توان بر اساس کمینه مقدار رایلی نسبت به تابع موج در میدان جریان تعیین کرد؛ لذا جهت استحصال مقدار رایلی بحرانی لازم است، دستگاه معادلات مقدار ویژه زیر برای رنج وسیعی از عدد موج حل گردیده و کمینه رایلی در این بازه، به عنوان رایلی بحرانی منظور گردد.

$$2 \frac{\partial f(z^*)}{\partial z^*} D(D^2 - a^2)\psi + f(z^*)(D^2 - a^2)^2\psi + \frac{\partial^2 f(z^*)}{\partial z^{*2}}(D^2 + a^2)\psi = Ra^2\varphi - \left[\frac{1}{\int_0^1 [1/g(z^*)] dz^*} \times \frac{1}{g(z^*)} \right] R \times \psi = g(z^*)(D^2 - a^2)\varphi + \frac{\partial g(z^*)}{\partial z^*} \times D\varphi \quad (12)$$

۳- نتایج

جهت حل معادلات (۱۲)، از روش گالرکین ارائه شده در مرجع [۵۳] و از توابع پایه سینوسی به صورت رابطه (۱۳) استفاده شده است:

$$\varphi = \sum_{i=1}^N b_i \sin(i\pi z^*), \quad \psi = \sum_{i=1}^N p_i \sin(i\pi z^*) \quad (13)$$

در مطالعه حاضر، تابعیت لزجت سینماتیکی و ضریب پخش حرارتی برحسب دما به صورت نمایی و بر اساس مطالعات [۵۴-۵۶] در نظر گرفته شده است:

$$f(z^*) = \exp(-\Gamma_1(z^* - 1)), \quad g(z^*) = \exp(-\Gamma_2(z^* - 1)) \quad (14)$$

با ضرب طرفین معادلات (۱۲) در $\sin(j\pi z)$ و اعمال انتگرال روی آن بر بازه $z^* \in [0, 1]$ ، دستگاه معادلات نهایی سری اول $(j = 1 \dots N)$ به صورت رابطه (۱۵) قابل بازنویسی می‌باشند:

$$\frac{\partial}{\partial t^*} \Delta w^* = 2 \frac{\partial f(z^*)}{\partial z^*} \frac{\partial}{\partial z^*} \Delta w^* + f(z^*) \Delta \Delta w^* + \frac{\partial^2 f(z^*)}{\partial z^{*2}} \left[\frac{\partial^2 w^*}{\partial z^{*2}} - \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_1^{*2}} - \frac{\partial^2 w^*}{\partial x_2^{*2}} \right] + R \left[\frac{\partial^2 T^*}{\partial x_1^{*2}} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial x_2^{*2}} \right] \text{Pr} \times \frac{\partial T^*}{\partial t^*} + \frac{\partial T^*}{\partial z^*} R w^* = \Delta T^* + (\vec{\nabla} g) \cdot (\vec{\nabla} T^*) \quad (8)$$

۲-۲- تئوری پایداری خطی

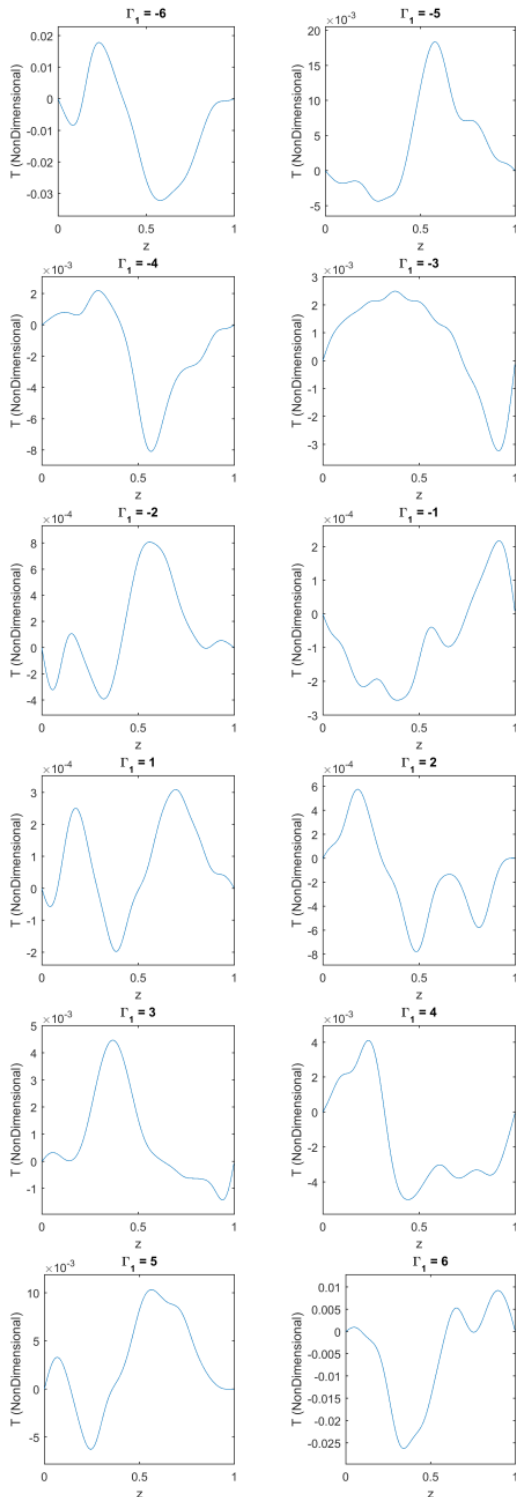
جهت بررسی پایداری لازم است، از توابع موج گونه به عنوان اغتشاشات داخل جریان استفاده شود. این امواج با سرعت c داخل میدان منتشر می‌شوند که مقدار آن کاملاً به محیط انتشار یا میدان جریان وابسته است. فرم کلی امواج اغتشاش منتشر شده به صورت رابطه (۹) خواهد بود:

$$w^*(x_1^*, x_2^*, z^*) = \psi(z^*) \exp(i(a_{x_1} x_1^* + a_{x_2} x_2^*) + c \times t^*) \\ T^*(x_1^*, x_2^*, z^*) = \varphi(z^*) \exp(i(a_{x_1} x_1^* + a_{x_2} x_2^*) + c \times t^*) \quad (9)$$

جهت اعمال شرط پایداری لازم است تا معادلات (۸)، با کمک توابع موج مندرج در روابط (۹) بازنویسی شوند که این معادلات در روابط (۱۰) نشان داده شده و همچنین شرط مرزی مورد نیاز برای حل این معادلات، به صورت سطوح آزاد و در معادله (۱۱) ارائه گردیده است.

$$-c(D^2 - a^2)\psi + 2 \frac{\partial f(z^*)}{\partial z^*} D(D^2 - a^2)\psi + f(z^*)(D^2 - a^2)^2\psi + \frac{\partial^2 f(z^*)}{\partial z^{*2}}(D^2 + a^2)\psi = Ra^2\varphi - \left[\frac{1}{\int_0^1 [1/g(z^*)] dz^*} \times \frac{1}{g(z^*)} \right] R \times \psi = c \times \text{Pr} \times \theta - \left[\frac{1}{\int_0^1 [1/g(z^*)] dz^*} \times \frac{1}{g(z^*)} \right] R \times \psi = g(z^*)(D^2 - a^2)\varphi + \frac{\partial g(z^*)}{\partial z^*} \times D\varphi \quad (10)$$

$$\psi = D^2 \psi = \varphi \quad z = 0, 1 \quad (11)$$



شکل ۳- اغتشاشات دمایی بدون بعد در لحظه شروع ناپایداری بر اساس مقادیر مختلف Γ_1

$$\sum_{i=1}^N [-2\Gamma_1(i\pi)^3 - 2\Gamma_1 a^2(i\pi)] p_i \int_0^1 \cos(i\pi z) \sin(j\pi z) dz + \sum_{i=1}^N [(i\pi)^4 + 2a^2(i\pi)^2 + a^4 - \Gamma_1(i\pi)^2 + \Gamma_1^2 a^2] p_i \int_0^1 \sin(i\pi z) \sin(j\pi z) dz = R \sum_{i=1}^N a^2 b_i \int_0^1 [\exp(-\Gamma_1(z-1)) \sin(i\pi z) \sin(j\pi z) dz] \quad (15)$$

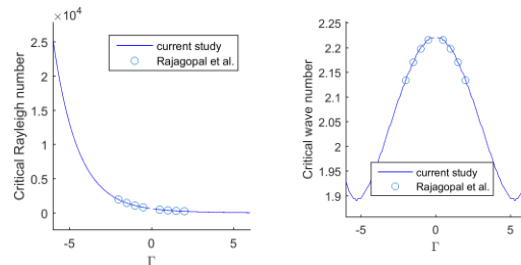
و دستگاه معادلات نهایی سری دوم ($j = N + 1 \dots 2N$) به صورت رابطه (۱۶) است:

$$\sum_{i=1}^N [-(i\pi)^2 - a^2] b_i \int_0^1 \sin(i\pi z) \sin(j\pi z) dz - \sum_{i=1}^N \Gamma_2(i\pi) b_i \int_0^1 \cos(i\pi z) \sin(j\pi z) dz = \frac{R\Gamma_2}{(\exp(-\Gamma_2) - 1)} \sum_{i=1}^N p_i \int_0^1 \exp(+2\Gamma_2(z-1)) \sin(i\pi z) \sin(j\pi z) dz \quad (16)$$

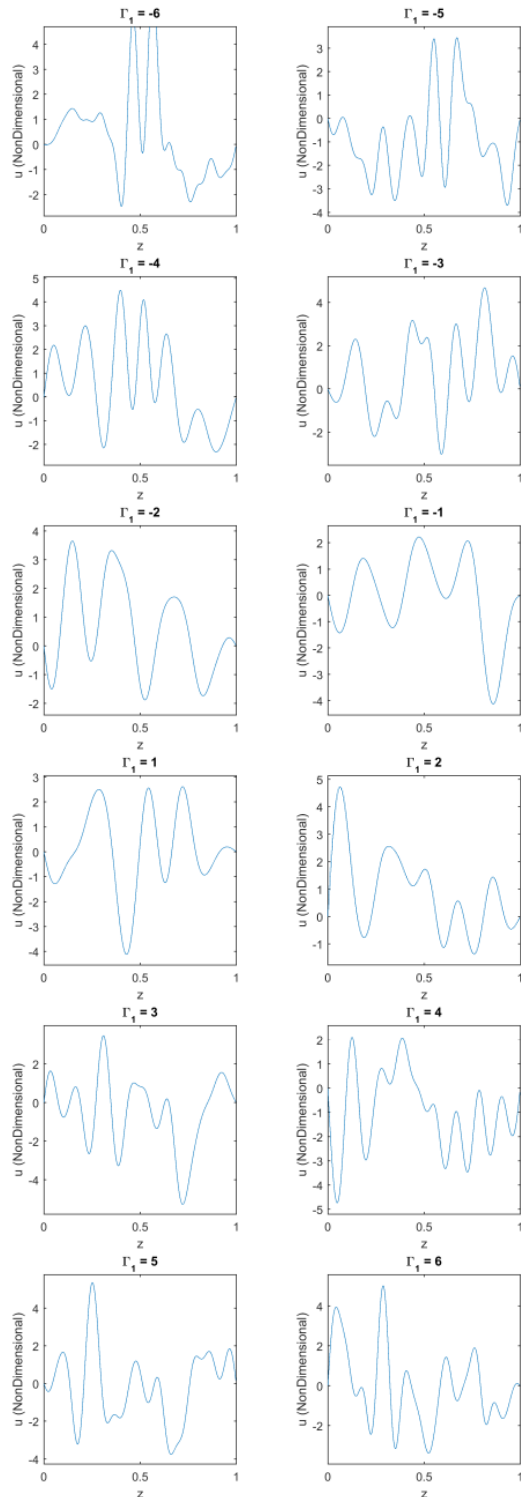
مقدار محاسبه شده با فرض خواص ثابت برای رایلی بحرانی و عدد موج بحرانی، کاملاً منطبق بر نتایج مرجع [۵۲] و به ترتیب برابر ۶۵۷/۵۱ و ۲/۲۲۱ است.

۳-۱- ضریب لزجت سینماتیکی متغیر

در این قسمت از تغییرات ضریب پخش حرارتی صرف نظر شده و صرفاً فرض می‌شود که ضریب لزجت سینماتیکی، به فرم نمایی با مکان تغییر می‌کند. شکل ۲ مقایسه نتایج مدل حاضر را با نتایج مرجع [۵۲] با فرض ضریب لزجت متغیر



شکل ۲- رایلی بحرانی (سمت چپ) و عدد موج بحرانی (سمت راست) بر اساس مقدار Γ_1 در قیاس با نتایج مرجع [۵۲]

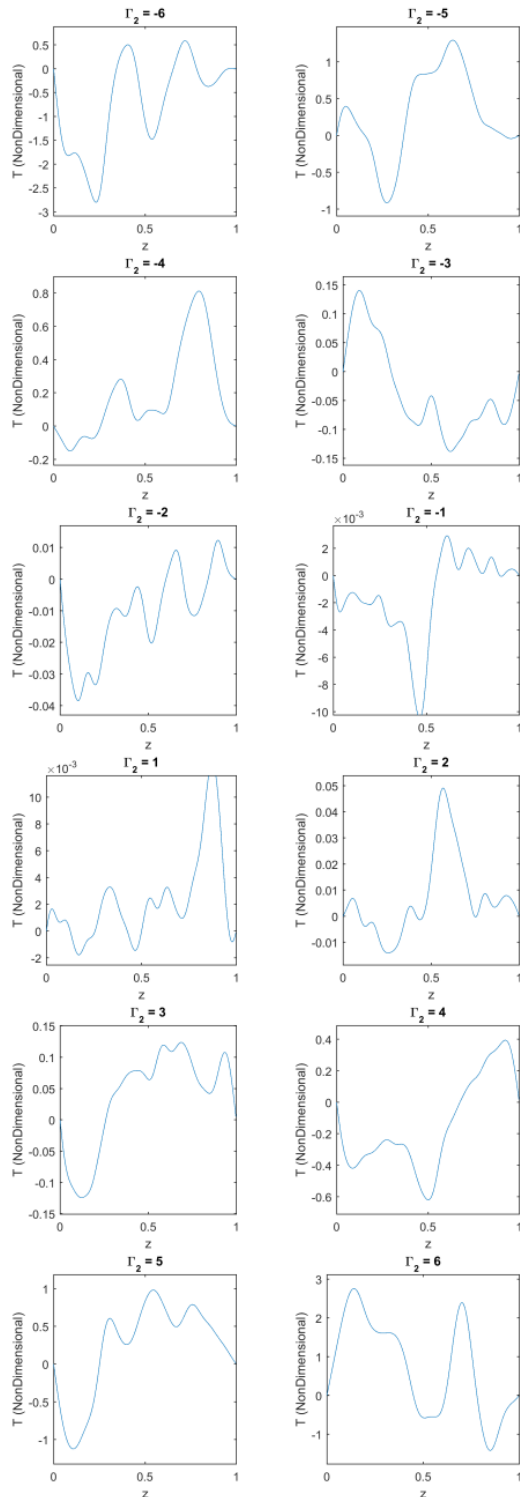


شکل ۴- اغتشاشات سرعت بدون بعد در لحظه شروع ناپایداری بر اساس مقادیر Γ_1 مختلف

نشان می‌دهد. همان‌طور که ملاحظه می‌شود، نتایج در توافق خوبی با نتایج مرجع [۵۲] می‌باشند؛ هم‌چنین دامنه موج بحرانی نسبت به محور y متقارن است. در بازه مورد بررسی، مقدار عدد موج بحرانی بین $1/89$ الی $2/2$ تغییر می‌کند. مقدار کمینه عدد موج بحرانی در $\Gamma_1 = \pm 5.3$ اتفاق می‌افتد. این مقادیر می‌تواند در تعیین ابعاد هندسه جهت شبیه‌سازی دوبعدی جریان جابجایی آزاد رایلی بنارد، مورد استفاده قرار گیرد. از طرف دیگر نتایج نشان می‌دهد، مقدار رایلی بحرانی به شدت وابسته به علامت پارامتر Γ_1 بوده و در مقادیر منفی به شدت افزایش می‌یابد تا در بازه مورد بررسی به 25285 می‌رسد. شکل ۳ مقدار اغتشاش دمایی را در لحظه شروع ناپایداری نشان می‌دهد. نتایج برای مقادیر مختلف Γ_1 نمایش داده شده است. دامنه نوسانات کاملاً وابسته به مقدار قدر مطلق Γ_1 است و با افزایش مقدار قدر مطلق Γ_1 ، دامنه نوسانات افزایش می‌یابد. شکل ۴ مقادیر اغتشاشات سرعت را تحت شرایط متناظر با شکل ۳ نشان می‌دهد. مقدار این نوسانات وابسته به مقدار Γ_1 نیست و این در حالی است که مقدار Γ_1 روی فرکانس نوسانات سرعت مؤثر است.

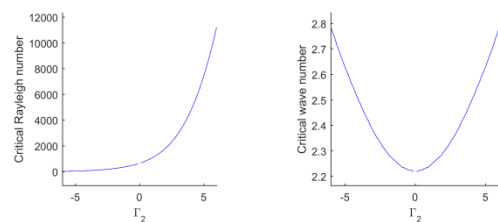
۳-۲- ضریب پخش حرارتی متغیر

در این قسمت از تغییرات ضریب لزجت سینماتیکی صرف‌نظر شده و صرفاً فرض می‌شود که ضریب پخش حرارتی به فرم نمایی با مکان تغییر می‌کند. شکل ۵ تغییرات رایلی بحرانی و عدد موج بحرانی را نسبت به مقدار Γ_2 نشان می‌دهد. همان‌طور که ملاحظه می‌شود، تابع عدد موج بحرانی یک تابع زوج بوده و رفتار کاملاً متقارن نسبت به مقادیر قرینه Γ_2 از خود نشان می‌دهد. بازه تغییرات عدد موج بحرانی بین حدوداً $2/22$ الی $2/78$ است؛ هم‌چنین نتایج نشان می‌دهد، با افزایش مقدار Γ_2 ، بازه هدایت خالص و عدد رایلی بحرانی به شدت افزایش می‌یابد و در $\Gamma_2 = +6$ به رایلی بحرانی حدود 11217 می‌رسد. مقایسه بیشینه رایلی بحرانی تحت تأثیر تغییرات ضریب پخش حرارتی در قیاس با بیشینه رایلی بحرانی تحت تأثیر تغییرات لزجت سینماتیکی تحت شرایط مشابه، حاکی از آن است که تغییرات لزجت سینماتیکی تأثیر بیشتری بر بازه هدایت خالص و پایداری می‌گذارد. شکل ۶ اغتشاشات دمایی بدون بعد در لحظه شروع ناپایداری را اساس مقادیر مختلف Γ_2 نشان می‌دهد. همان‌طور که ملاحظه



شکل ۶- اغتشاشات دمایی بدون بعد در لحظه شروع ناپایداری بر اساس مقادیر مختلف Γ_2

می‌شود، بازه نوسانی اغتشاش دمایی بدون بعد کاملاً وابسته به مقدار Γ_2 بوده و با افزایش آن افزایش می‌یابد؛ هم‌چنین کاهش قدرمطلق Γ_2 ، منجر به افزایش فرکانس نوسانات می‌شود. در ادامه شکل ۷، اغتشاشات سرعت بدون بعد در لحظه شروع ناپایداری را بر اساس مقادیر مختلف Γ_2 نشان می‌دهد. فرکانس نوسانات سرعت در مقادیر بالای قدرمطلق Γ_2 به شدت افزایش یافته و به مراتب بیشتر از فرکانس نوسانات دما در شرایط مشابه است.

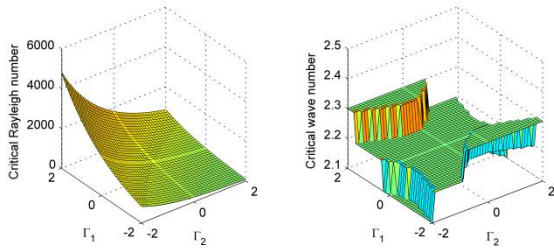


شکل ۵- رایلی بحرانی (سمت چپ) و عدد موج بحرانی (سمت راست) بر اساس مقدار Γ_2

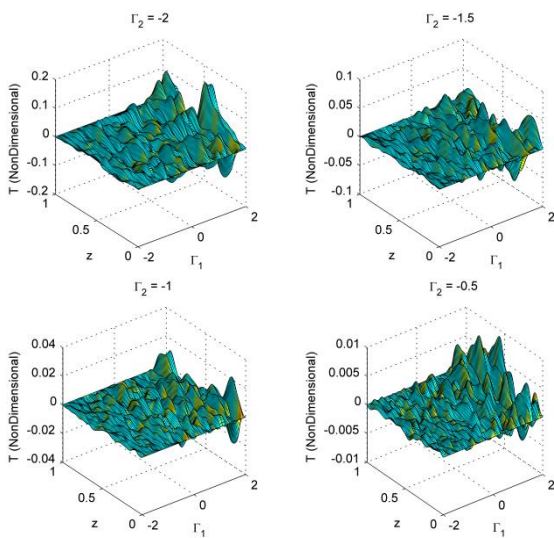
۳-۳- تغییرات هم‌زمان ضریب پخش حرارتی و لزجت سینماتیکی

شکل ۸ سطوح رایلی بحرانی (سمت چپ) و عدد موج بحرانی (سمت راست) را بر اساس مقدار Γ_1 و Γ_2 نشان می‌دهد. از آنجایی که رفتار رایلی بحرانی نسبت به ضریب پخش حرارتی متغیر کاملاً معکوس با ضریب لزجت سینماتیکی است؛ لذا تغییرات هم‌زمان این دو پارامتر به‌نوعی محدوده تغییرات رایلی بحرانی را نسبت به دو بخش قبلی کاهش می‌دهد. بر این اساس بیشینه رایلی بحرانی در بازه مورد مطالعه در $\Gamma_1 = +2$ و $\Gamma_2 = -2$ اتفاق می‌افتد که دارای مقدار ۴۸۱۲ است؛ هم‌چنین کمینه رایلی بحرانی در $\Gamma_1 = -2$ و $\Gamma_2 = +2$ اتفاق می‌افتد که دارای مقدار ۸۸ است. هم‌چنین نتایج نشان می‌دهد که عدد موج بحرانی بین بازه ۲/۱ الی ۲/۳ تغییر می‌یابد که این مقدار با فرض گام زمانی ۰/۱ در گسسته سازی ضریب عدد موج به‌دست‌آمده است. شکل ۹ و شکل ۱۰، اغتشاشات دمایی بدون بعد در لحظه شروع ناپایداری را بر اساس مقادیر مختلف Γ_1 و Γ_2 نشان می‌دهد. نتایج حاکی از آن است که دامنه نوسانات در $\Gamma_2 < 0$ نسبت به افزایش Γ_1 ، افزایش و در $\Gamma_2 > 0$ نسبت به افزایش Γ_1 ، کاهش می‌یابد. شکل ۱۱ و شکل ۱۲،

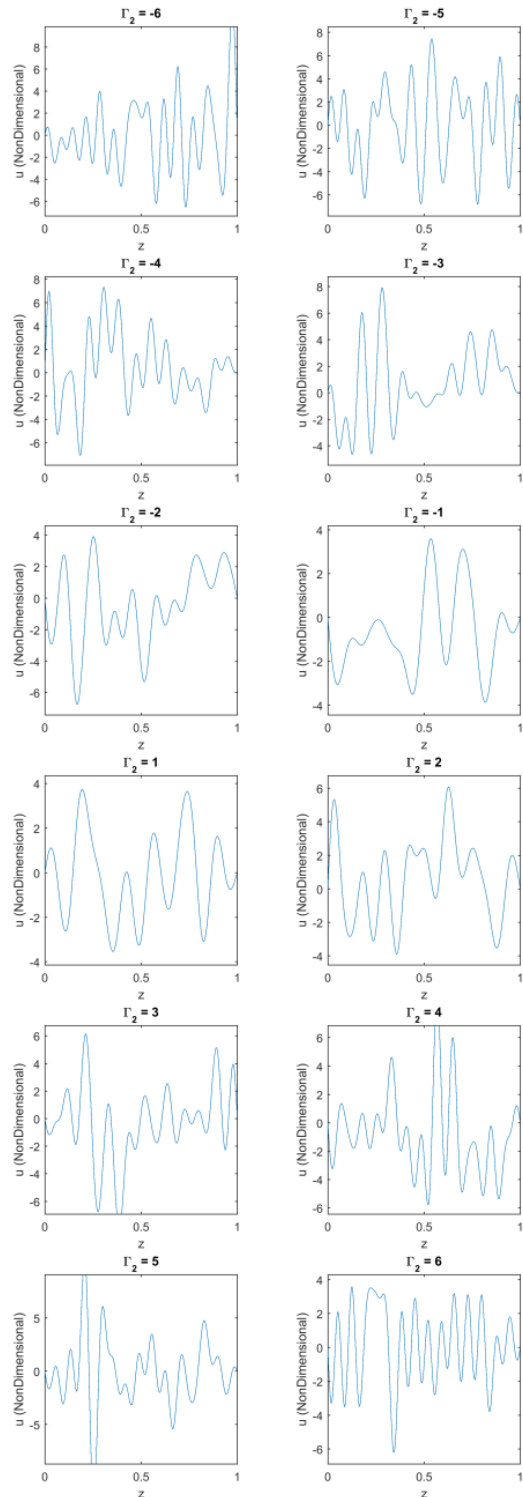
اغتشاشات سرعت بدون بعد در لحظه شروع ناپایداری را بر اساس مقادیر مختلف Γ_1 و Γ_2 نشان می‌دهد. نتایج حاکی از آن است که دامنه نوسانات در $|\Gamma_2| > 1$ نسبت به افزایش مقدار Γ_1 ، تغییر معناداری نداشته و در $-1 < \Gamma_2 < 0$ با افزایش Γ_1 افزایش Γ_1 افزایش و در $0 < \Gamma_2 < +1$ با افزایش Γ_1 کاهش می‌یابد؛ همچنین در $-1 < \Gamma_2 < 0$ با افزایش Γ_1 ، فرکانس نوسان اغتشاشات سرعت افزایش یافته و در $0 < \Gamma_2 < +1$ با افزایش Γ_1 ، فرکانس نوسان اغتشاشات سرعت کاهش می‌یابد. این در حالی است که همچون تغییرات دامنه نوسانات، در $|\Gamma_2| > 1$ تغییر مقدار Γ_1 ، نتیجه معناداری روی فرکانس نوسان اغتشاشات سرعت ندارد.



شکل ۸- سطوح رایلی بحرانی (سمت چپ) و عدد موج بحرانی (سمت راست) بر اساس مقدار Γ_1 و Γ_2

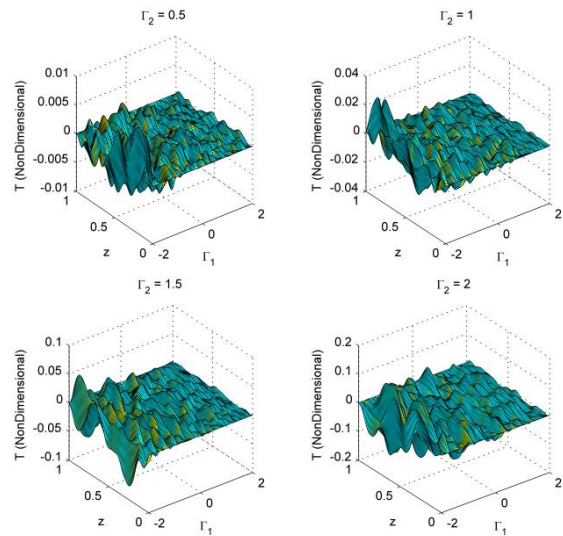


شکل ۹- اغتشاشات دمایی بدون بعد در لحظه شروع ناپایداری بر اساس مقادیر مختلف Γ_1 و $\Gamma_2 < 0$

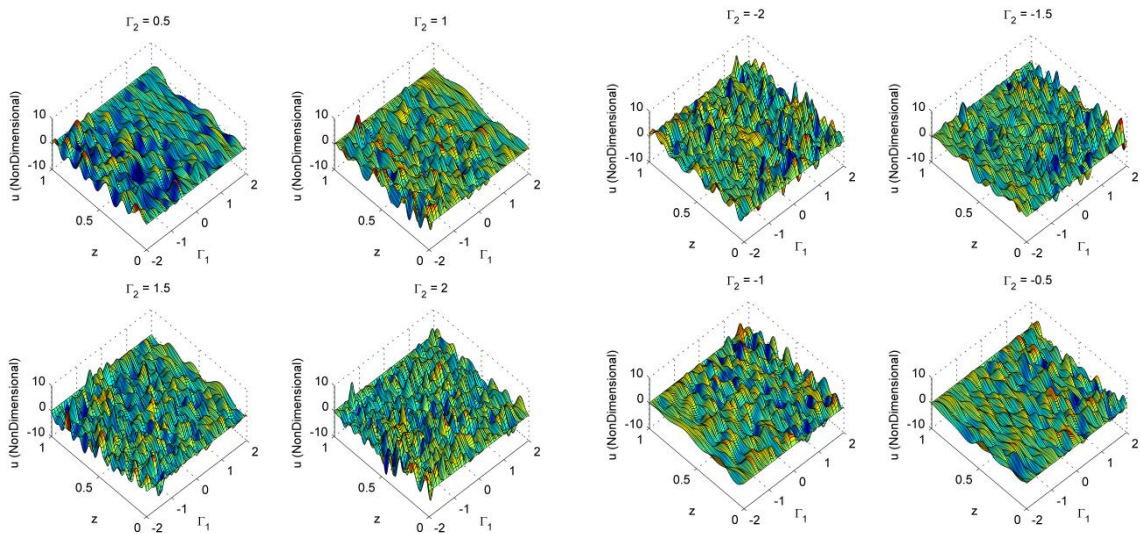


شکل ۷- اغتشاشات سرعت بدون بعد در لحظه شروع ناپایداری بر اساس مقادیر مختلف Γ_2

این معادلات از نوع دستگاه معادلات مقدار ویژه بوده؛ لذا بر اساس تئوری پایداری خطی، کمینه قدرمطلق مقدار ویژه شروع ناپایداری اولیه را نشان می‌دهد. نتایج نشان می‌دهد، تغییرات تابع عدد موج بحرانی نسبت به پارامترهای مؤثر در تغییرات خواص (Γ_1 و Γ_2)، یک تابع زوج بوده و رفتار کاملاً متقارن نسبت به مقادیر قرینه از خود نشان می‌دهد؛ همچنین وابستگی دامنه و فرکانس نوسان اغتشاشات دما و سرعت بر اساس پارامترهای مؤثر در تغییرات خواص مورد ارزیابی قرار گرفته و نتایج بررسی گردید. نتایج حاصله حکایت از آن دارد که رفتار رایلی بحرانی نسبت به تغییرات ضریب پخش حرارتی و لزجت سینماتیکی، کاملاً معکوس است؛ لذا اثر هم‌زمان آن‌ها در حل معادلات منجر به کاهش بازه نوسان رایلی بحرانی خواهد شد. در نهایت پیشنهاد می‌شود، در مطالعات آتی وابستگی مسئله پایداری رایلی بنارد به تغییرات چگالی، مورد بررسی قرار گیرد.



شکل ۱۰- اغتشاشات دمایی بدون بعد در لحظه شروع ناپایداری بر اساس مقادیر Γ_1 مختلف و $\Gamma_2 > 0$



شکل ۱۱- اغتشاشات سرعت بدون بعد در لحظه شروع ناپایداری بر اساس مقادیر Γ_1 مختلف و $\Gamma_2 < 0$

شکل ۱۲- اغتشاشات سرعت بدون بعد در لحظه شروع ناپایداری بر اساس مقادیر Γ_1 مختلف و $\Gamma_2 > 0$

۴- جمع‌بندی

در این مطالعه به بررسی اثر تغییرات خواص فیزیکی سیال از جمله لزجت سینماتیکی و ضریب پخش حرارتی روی ناپایداری اولیه جریان جابجایی آزاد رایلی بنارد پرداخته شده است. در گام اول معادلات حاکم بر پارامترهای اغتشاش دما و سرعت بر اساس تئوری پایداری خطی استخراج گردیده است.

۵- مراجع

- [1] Aghanjafi C (2013) Numerical solution of a uniform magnetic field effect on the free convection heat transfer from a vertical plate. *Journal of Solid and Fluid Mechanics* 3(2):65-75.
- [2] Alavi N, Armaghani T, Izadpanah E (2016) Natural convection heat transfer of a nanofluid in a baffle

- simulation of Rayleigh-Bénard convection. J Phys: Conference Series IOP Publishing.
- [16] Curry JH, Herring JR, Loncaric J, Orszag SA (1984) Order and disorder in two-and three-dimensional Benard convection. J Fluid Mech 147: 1-38.
- [17] Hernandez R, Frederick R (1994) Spatial and thermal features of three dimensional Rayleigh-Bénard convection. Int J Heat Mass Transf 37(3): 411-24.
- [18] Li Y-R, Zhang H, Zhang L, Wu C-M (2016) Three-dimensional numerical simulation of double-diffusive Rayleigh-Bénard convection in a cylindrical enclosure of aspect ratio 2. Int J Heat Mass Transf 98: 472-483.
- [19] Chimanski EV, Rempel EL, Chertovskih R (2016) On-off intermittency and spatiotemporal chaos in three-dimensional Rayleigh-Bénard convection. Adv Space Res 57(6): 1440-1447.
- [20] Zhang L, Li Y-R, Zhang H (2017) Onset of double-diffusive Rayleigh-Bénard convection of a moderate Prandtl number binary mixture in cylindrical enclosures. Int J Heat Mass Transf 107: 500-509.
- [21] Sakievich P, Peet Y, Adrian R (2016) Statistical convergence and the effect of large-scale motions on turbulent Rayleigh-Bénard convection in a cylindrical domain with 6.3 aspect ratio. APS Meeting Abstracts.
- [22] Cattaneo F, Hughes DW (2017) Dynamo action in rapidly rotating Rayleigh-Bénard convection at infinite Prandtl number. J Fluid Mech 825: 385-411.
- [23] Weiss S, Wei P, Ahlers G (2016) Heat-transport enhancement in rotating turbulent Rayleigh-Bénard convection. Phys Rev E 93(4): 043102.
- [24] Gotoda H, Takeuchi R, Okuno Y, Miyano T (2013) Low-dimensional dynamical system for Rayleigh-Benard convection subjected to magnetic field. J Appl Phys 113(12): 124902.
- [25] Tasaka Y, Igaki K, Yanagisawa T, Vogt T, Zuerner T, Eckert S (2016) Regular flow reversals in Rayleigh-Benard convection in a horizontal magnetic field. Phys Rev 93(4): 043109.
- [26] Ahlers G, Bodenschatz E, He X (2017) Ultimate-state transition of turbulent Rayleigh-Bénard convection. Phys Rev Fluids 2(5): 054603.
- [27] Zhang Y, Zhou Q, Sun C (2017) Statistics of kinetic and thermal energy dissipation rates in two-dimensional turbulent Rayleigh-Bénard convection. J Fluid Mech 814: 165-184.
- L-Shaped cavity. *Journal of Solid and Fluid Mechanics* 6(3): 311-21.
- [3] Sedaghat MH, Yaghoubi M, Maghrebi MJ (2013) On the natural convective heat transfer from a cold horizontal cylinder over an adiabatic surface. *Journal of Solid and Fluid Mechanics* 2(3): 19-28.
- [4] Yekani Motlagh S, Sarvari P (2017) Large Eddy Simulation of Three Dimensional Mixed Convection Flow Inside the Ventilated Cavity Containing Obstacle and Extraction of Coherent Structures using Proper Orthogonal Decomposition (POD). *Journal of Solid and Fluid Mechanics* 7(3): 199-212.
- [5] Bernard H (1900) Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide [The cellular vortices in a liquid layer]. Rev Gén Sci Pure Appl 11: 1261-1271.
- [6] RAYLEIGH L (1916) On convection currents in a horizontal layer of fluid when the. Philos Mag 32:529.
- [7] Pearson J (1958) On convection cells induced by surface tension. J Fluid Mech 4(5): 489-500.
- [8] Kao P-H, Yang R-J (2007) Simulating oscillatory flows in Rayleigh-Benard convection using the lattice Boltzmann method. Int J Heat Mass Transf 50(17): 3315-3328.
- [9] Kelly R, Hu HC (1993) The onset of Rayleigh-Bénard convection in non-planar oscillatory flows. J Fluid Mech 249: 373-390.
- [10] Yang K, Mukutmoni D (1993) Rayleigh-benard convection in a small aspect ratio enclosure: Part 1—bifurcation to oscillatory convection. J Heat Transf 115:360-366.
- [11] Valori V, Elsinga G, Rohde M, Tummers M, Westerweel J, van der Hagen T (2017) Experimental velocity study of non-Boussinesq Rayleigh-Bénard convection. Phys Rev E 95(5):053113.
- [12] Kebiche Z, Castelain C, Burghelaa T (2014) Experimental investigation of the Rayleigh-Bénard convection in a yield stress fluid. J Non-Newton Fluid Mech 203: 9-23.
- [13] Aurnou J, Olson P (2001) Experiments on Rayleigh-Bénard convection, magnetoconvection and rotating magnetoconvection in liquid gallium. J Fluid Mech 430: 283-307.
- [14] Wei Y, Wang Z, Yang J, Dou H-S, Qian Y (2015) A simple lattice Boltzmann model for turbulence Rayleigh-Bénard thermal convection. Comput Fluids 118: 167-171.
- [15] Dabbagh F, Trias F, Gorobets A, Oliva A (2016) New subgrid-scale models for large-eddy

- [41] Somerscales E, Dougherty T (1970) Observed flow patterns at the initiation of convection in a horizontal liquid layer heated from below. *J Fluid Mech* 42(4):755-768.
- [42] Busse F (1978) Non-linear properties of thermal convection. *Rep Progr Phys* 41(12): 1929.
- [43] Busse F, Frick H (1985) Square-pattern convection in fluids with strongly temperature-dependent viscosity. *J Fluid Mech* 150:451-465.
- [44] Palm E (1960) On the tendency towards hexagonal cells in steady convection. *J Fluid Mech* 8(2):183-192.
- [45] Segel LA, Stuart J (1962) On the question of the preferred mode in cellular thermal convection. *J Fluid Mech* 13(2):289-306.
- [46] Richter FM (1978) Experiments on the stability of convection rolls in fluids whose viscosity depends on temperature. *J Fluid Mech* 89(3): 553-560.
- [47] Stengel KC, Oliver DS, Booker JR (1982) Onset of convection in a variable-viscosity fluid. *J Fluid Mech* 120:411-431.
- [48] Capone F, Gentile M (1994) Nonlinear stability analysis of convection for fluids with exponentially temperature-dependent viscosity. *Acta Mech* 107(1-4): 53-64.
- [49] Capone F, Gentile M (1995) Nonlinear stability analysis of the Bénard problem for fluids with a convex nonincreasing temperature depending viscosity. *Contin Mech Thermodyn* 7(3): 297-309.
- [50] Richardson L, Straughan B (1993) A nonlinear energy stability analysis of convection with temperature dependent viscosity. *Acta Mech* 97(1-2): 41-49.
- [51] Severin J, Herwig H (1999) Onset of convection in the Rayleigh-Bénard flow with temperature dependent viscosity: An asymptotic approach. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)* 50(3): 375-386.
- [52] Rajagopal K, Saccomandi G, Vergori L (2009) Stability analysis of the Rayleigh-Bénard convection for a fluid with temperature and pressure dependent viscosity. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)* 60(4): 739-755.
- [53] Papanicolaou N, Christov C, Homsy G (2009) Galerkin technique based on beam functions in application to the parametric instability of thermal convection in a vertical slot. *Int J Numer Methods Fluids* 59(9): 945-967.
- [28] Sakievich P, Peet Y, Adrian R (2016) Large-scale thermal motions of turbulent Rayleigh-Bénard convection in a wide aspect-ratio cylindrical domain. *Int J Heat Fluid Flow* 61: 183-196.
- [29] Manneville P (2006) Rayleigh-Bénard convection: thirty years of experimental, theoretical, and modeling work. *Dynamics of Spatio-Temporal Cellular Structures: Springer* 41-65.
- [30] Gelfgat AY (1999) Different modes of Rayleigh-Bénard instability in two-and three-dimensional rectangular enclosures. *J Comput Phys* 156(2): 300-324.
- [31] Kaur P, Singh J (2017) Heat transfer in thermally modulated two-dimensional Rayleigh Bénard convection. *Int J Therm Sci* 114: 35-43.
- [32] Siddheshwar P, Meenakshi N (2017) Amplitude equation and heat transport for Rayleigh-Bénard convection in Newtonian liquids with nanoparticles. *Int J Appl Comput Math* 3(1): 271-292.
- [33] Ma X-R, Zhang L, Li Y-R (2017) Linear stability analysis of Rayleigh-Bénard convection of cold water near its density maximum in a vertically heated annular container. *J Mech Sci Tech* 31(4):1665-1672.
- [34] Yu J, Goldfaden A, Flagstad M, Scheel JD (2017) Onset of Rayleigh-Bénard convection for intermediate aspect ratio cylindrical containers. *Phys Fluids* 29(2): 024107.
- [35] Chandrasekhar S (1970) Hydrodynamic and hydromagnetic stability.
- [36] Dominguez-Lerma M, Ahlers G, Cannell DS (1984) Marginal stability curve and linear growth rate for rotating Couette-Taylor flow and Rayleigh-Bénard convection. *Phys Fluids* 27(4): 856-860.
- [37] Wazzan A, Keltner G, Okamura T, Smith A (1972) Spatial stability of stagnation water boundary layer with heat transfer. *Phys Fluids* 15(12): 2114-2118.
- [38] Busse F (1967) The stability of finite amplitude cellular convection and its relation to an extremum principle. *J Fluid Mech* 30(4):625-649.
- [39] Palm E, Ellingsen T, Gjevik B (1967) On the occurrence of cellular motion in Bénard convection. *J Fluid Mech* 30(4):651-661.
- [40] Hoard C, Robertson C, Acrivos A (1970) Experiments on the cellular structure in Bénard convection. *Int J Heat Mass Transf* 13(5): 849IN7853-852856.

- [56] Martin-Alfonso M, Martinez-Boza F, Partal P, Gallegos C (2006) Influence of pressure and temperature on the flow behaviour of heavy fluid oils. *Rheol Acta* 45: 357-365.
- [54] Laun HM (2003) Pressure dependent viscosity and dissipative heating in capillary rheometry of polymer melts. *Rheol Acta* 42(4): 295-308.
- [55] Bair S, Kottke P (2003) Pressure-viscosity relationships for elastohydrodynamics. *Tribol Trans* 46(3): 289-295.