



مطالعه عددی عوامل موثر بر جریان نیوتنی در کانال با انبساط تدریجی

محمد محسن شاه مردان^{۱*}، محمود نوروزی^۲ و امین شهبانی ظهیری^۳

^۱ استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود

^۲ استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود

^۳ دانشجوی ارشد مکانیک، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود

چکیده

هدف مطالعه حاضر بررسی مشخصات گردابه‌های ایجاد شده در مجاور دیواره‌های کانال واگرای تدریجی در حالت دو بعدی و با نسبت انبساط ۱:۳ می‌باشد. در این تحقیق، جریان آرام سیال نیوتنی در داخل کانال، برای چهار زاویه ۳۰، ۴۵، ۶۰ و ۹۰ درجه مورد بررسی قرار گرفته است. گسسته سازی معادلات حاکم با استفاده از روش حجم محدود صورت گرفته و برای کوپل متغیرهای سرعت و فشار از الگوریتم پیزو بر روی شبکه جابجا شده استفاده شده است. در تمام تحقیقات پیشین فقط طول گردابه‌ها برای حالت انبساط ناگهانی (زاویه ۹۰ درجه) مورد بررسی قرار گرفته است. از نوآوری تحقیق حاضر این است که برای هر گردابه مشخصات طول، بیشترین ارتفاع و طول بیشترین ارتفاع، نقطه شروع و خاتمه گردابه از ابتدای بخش انبساطی به ازای زوایای ۳۰، ۴۵ و ۶۰ درجه در محدوده اعداد رینولدز $130 < Re < 20$ مورد بررسی قرار گرفته و نتایج به صورت منظم و طبقه بندی شده در جداول گزارش شده است. همچنین در هر زاویه خطوط جریان و کانتورهای سرعت در محدوده اعداد رینولدز مختلف مورد بررسی قرار گرفته و ترسیم شده است.

کلمات کلیدی: سیال نیوتنی؛ طول گردابه؛ ارتفاع گردابه؛ بخش انبساطی؛ زاویه انبساطی.

۱- مقدمه

در بسیاری از نیروگاه‌ها، پالایشگاه‌ها، کارخانجات و دیگر صنایع، برای تأمین انرژی، تولید و انتقال محصولات نیاز به کانال‌هایی با ابعاد و سطح مقطع‌های مختلف می‌باشد. معمولاً جابجایی مواد اولیه و محصولات بسیار لزج تحت شرایط جریان آرام انجام می‌پذیرد. از آنجایی که این کانال‌ها بسته به شرایط محیطی و نوع کاربرد، دارای تغییر سطح مقطع به صورت ناگهانی یا تدریجی هستند، محققین

بسیاری به بررسی تجربی، تحلیلی و عددی این جریان‌ها در چند دهه اخیر پرداخته‌اند.

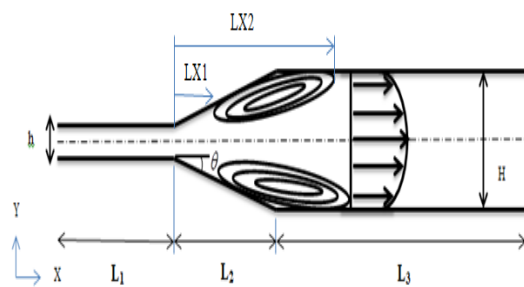
همانطور که در شکل ۱ مشاهده می‌کنید، تغییرات سرعت جریان به دلیل افزایش در سطح مقطع و افزایش فشار استاتیکی منجر به شکل‌گیری گردابه‌هایی در بخش واگرای کانال می‌شود. با افزایش سرعت جریان، طول و ارتفاع گردابه‌ها تغییر می‌کند، که این تغییرات عامل‌های گردابه تا یک عدد رینولدز مشخص برای هر دو گردابه

تبدیل واگرای صفحه‌ای و متقارن محوری با رفتاری مشابه هم، به صورت خطی با رینولدز تغییر می‌کند.

الیویرا^۶ [۴] بیان می‌کند که در تبدیلات واگرای متقارن محوری، اختلاف اندازه طول گردابه‌ها، اتفاق نمی‌افتد. همچنین الیویرا و همکاران [۵] با حل عددی جریان سیال نیوتنی در تبدیل واگرای متقارن صفحه‌ای برای نسبت‌های انبساط $1/5 \leq ER \leq 4$ و در محدوده اعداد رینولدز $200 \leq Re \leq 100$ ، طول گردابه‌ها و ضریب افت فشار را در حالت‌های مختلف بدست آوردند. همانطور که از تحقیق آنها مشاهده می‌شود، طول گردابه رابطه مستقیم با عدد رینولدز دارد و در تمام نسبت‌های واگرایی، با افزایش عدد رینولدز طول گردابه افزایش پیدا می‌کند. همچنین در اعداد رینولدز پایین، افزایش نسبت تبدیل باعث کاهش طول گردابه و در اعداد رینولدز بالا، افزایش نسبت تبدیل باعث افزایش طول گردابه می‌شود. بتاگلیا^۷ و همکارانش [۶] نیز در تحقیقات خود، با بررسی عددی سیال نیوتنی در انبساط ناگهانی، افزایش طول گردابه در نسبت‌های انبساط بزرگ را مورد مطالعه قرار دادند. همچنین چرک^۸ و چافر^۹ [۷] نیز میدان جریان در انبساط ناگهانی را با استفاده از روش حجم محدود مطالعه کردند و تأثیر نسبت انبساط‌های مختلف بر روی طول گردابه‌ها را مورد بررسی قرار دادند.

شاپیرا^{۱۰} و همکارانش [۸] با تحلیل پایداری خطی برای جریان متقارن در انبساط ناگهانی صفحه‌ای، پدیده اتفاق افتاده در طول گردابه را مورد بررسی قرار دادند. دیورست و همکارانش [۹] نیز با مطالعه تجربی و عددی برای انبساط ناگهانی با نسبت انبساط ۱:۲، طول گردابه‌ها و اختلاف طول آنها مورد بررسی قرار دادند. همچنین بل^{۱۱} و سورانا^{۱۲} [۱۰] نیز جریان همدما سیال غیر نیوتنی (قانون توانی^{۱۳}) را در انبساط ناگهانی متقارن با نسبت انبساط ۱:۲ برای عدد رینولدز ۱۰ مطالعه کردند. آن‌ها در تحقیق خود میزان

یکسان و متقارن می‌باشد؛ ولی با افزایش بیشتر عدد رینولدز گردابه‌ها از حالت متقارن به حالت نامتقارن تبدیل می‌شوند و دیگر تغییرات طول و ارتفاع در هر دو گردابه یکسان نمی‌باشند. با افزایش بیشتر عدد رینولدز گردابه سومی هم ظاهر می‌شود، که تغییرات طول و ارتفاع برای این گردابه نیز با دو گردابه دیگر متفاوت می‌باشد.



شکل ۱- نمایه شماتیک هندسه مسئله

جریان سیال نیوتنی داخل هندسه انبساط ناگهانی در حالت متقارن دوبعدی توسط دیورست^۱ و همکارانش [۱] در قالب کار تجربی، مورد بررسی و ارزیابی قرار گرفت. آنها نشان دادند که برای مقادیر اعداد رینولدز کم، جریان متقارن باقی می‌ماند اما برای مقادیر اعداد رینولدز بالاتر ($Re > 56$) به دلیل ایجاد جریان نامتقارن، گردابه‌هایی با اندازه‌های مختلف تشکیل می‌شود. تحقیقات گسترده‌ای توسط داگتکین^۲ و اونسال^۳ [۲] در زمینه سیالات نیوتنی برای تبدیلات ناگهانی واگرا در رنج وسیعی از اعداد رینولدز و نسبت واگرایی ($0.1 \leq Re \leq 500$) و ($1/5 \leq ER \leq 500$) انجام شده است. در این تحقیق، گردابه‌ها در هر دو حالت صفحه‌ای و متقارن محوری مورد بررسی قرار گرفته است. اسکات^۴ و میرزا^۵ [۳] نیز در تحقیقات خود جریان آرام سیال نیوتنی در تبدیل ناگهانی واگرای صفحه‌ای و متقارن محوری را مورد بررسی قرار دادند. آنها با حل معادلات ناویر-استوکس دو بعدی با استفاده از روش المان محدود نشان دادند که گردابه‌ها در

⁶ Oliveira

⁷ Battaglia

⁸ Schreck

⁹ Schafer

¹⁰ Shapira

¹¹ Bell

¹² Surana

¹³ Power law

¹ Durst

² Dagtekin

³ Unsal

⁴ Scott

⁵ Mirza

هم، می‌توان طول هر گردابه (DV_i) را در مجاور دیوار بالا و پایین بدست آورد. البته باید توجه داشت که نسبت‌های هندسی L_1/h و L_3/h باید به اندازه کافی بزرگ باشند تا جریان در هر دو بخش بالادست و پایین دست کانال (بخش اول و سوم)، به حالت توسعه‌یافتگی برسد. که در تحقیق حاضر برای اطمینان از این موضوع، طول بخش اول ۲۰ برابر و طول بخش سوم ۶۰ برابر ارتفاع بخش اول در نظر گرفته شده است.

در ادامه تحقیق، معادلات حاکم بر جریان به همراه شرایط مرزی و روش حل عددی به کار گرفته شده، به صورت اجمالی توضیح داده شده است. برای ارزیابی صحت نتایج این تحقیق، نتایج طول گردابه در حالت ۹۰ درجه با تحقیقات قبلی مقایسه شده و استقلال حل عددی از شبکه محاسباتی با استفاده از ۳ نوع شبکه‌بندی در زاویه ۴۵ درجه، مورد بررسی قرار گرفته است. در انتها، برای هر زاویه نمودارهای خطوط جریان و کانتورهای سرعت ترسیم و اثر طول گردابه بر روی میدان جریان بحث شده است.

۲- معادلات حاکم و شرایط مرزی

در تحقیق حاضر جریان سیال نیوتنی به صورت تراکم ناپذیر و پایدار در نظر گرفته شده است. معادلات حاکم بر جریان، معادلات بقای جرم و بقای اندازه حرکت هستند که شکل برداری آن‌ها در مختصات کارتزین به صورت زیر قابل بیان می‌باشند:

$$\frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1-1)$$

$$\rho \tilde{v}_j \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial \tilde{x}_j} = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_i} + \eta \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_j} \left[\frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial \tilde{x}_j} \right] \quad (2-1)$$

همچنان که رایج است، \tilde{v}_j معرف بردار سرعت، \tilde{x}_j مختصات کارتزین، ρ چگالی، \tilde{P} فشار و η ویسکوزیته دینامیکی می‌باشد.

متغیرهای مورد استفاده در تحقیق حاضر را می‌توان به صورت زیر بی بعد کرد:

$$Re = \frac{U_{in} \cdot h}{\nu} \quad (1-2)$$

وابستگی اندازه و طول گردابه به مقدار شاخص توانی را مورد بررسی قرار دادند.

فلتچر^۱ و همکارانش [۱۱] در تحقیقات خود با بررسی جریان در انبساط ناگهانی متقارن، تأثیر نوع پروفیل سرعت ورودی بر روی عامل‌های مؤثر بر جریان را مورد مطالعه قرار دادند. پینهو^۲ و الیویرا [۱۲] نیز در تحقیقات خود با بررسی جریان در انبساط ناگهانی صفحه‌ای نشان دادند که برای اعداد رینولدز پایین، توزیع سرعت در سطح بخش انبساطی از پروفیل سهموی خود کمی منحرف می‌شود. همچنین هاوا^۳ و روساک^۴ [۱۳] نیز تأثیر عدم تقارن هندسه کانال را بر روی رفتار این جریان‌ها مورد مطالعه قرار دادند. همچنین در تحقیق شاه‌مردان و همکاران [۱۴] برای زوایای انبساطی ۳۰، ۴۵، ۶۰ و ۹۰ درجه و با نسبت انبساط ۱:۳، ناپایداری جریان سیال نیوتنی از حالت متقارن به نامتقارن مورد مطالعه قرار گرفته و اعداد رینولدز بحرانی اول و دوم برای جریان استخراج و بررسی گردیده است.

در تمام کارهای صورت گرفته قبلی، طول گردابه‌ها برای تبدیلات واگرای ناگهانی صفحه‌ای (زاویه ۹۰ درجه) در حالت دوبعدی و سه بعدی بررسی شده و در بیشتر این تحقیقات نسبت انبساط ۱:۳ در نظر گرفته شده است.

هدف مطالعه حاضر بررسی مشخصات گردابه‌ها در کانال دارای انبساط تدریجی می‌باشد و زوایای انبساط ۳۰، ۴۵، ۶۰ و ۹۰ درجه در نظر گرفته شده است. گسسته سازی معادلات حاکم با استفاده از روش حجم محدود براساس الگوریتم پیزو روی یک شبکه جابجا شده انجام شده است. اثر زاویه انبساط و عدد رینولدز بر طول و ارتفاع گردابه‌ها مطالعه شده و جداولی برای آنها تنظیم شده است.

مطابق شکل ۱ مشخصات هندسی مسئله، شامل طول و ارتفاع بخش بالادست جریان یا بخش اول (L_1, h)، طول و ارتفاع بخش پایین دست جریان یا بخش سوم (L_3, h)، طول و زاویه انبساطی بخش دوم (L_2, θ)، طول ابتدا و انتهای هر گردابه از ابتدای بخش انبساطی (LV_i) می‌باشد. با داشتن مقادیر ابتدا و انتهای هر گردابه و تفاضل آن‌ها از

¹ Fletcher

² Pinho

³ Hawa

⁴ Rusak

می‌باشد، استفاده شده است. استفاده از این شبکه امکان به هم جفت شدن متغیرها را فراهم کرده و پایداری حل عددی را افزایش می‌دهد [۱۶].

برای تولید شبکه از نرم افزار گمبیت^۳ استفاده شده و در این نرم افزار برای سلول‌ها از نوع چهارگوش^۴ استفاده شده است و برای افزایش سرعت اجرای برنامه، شبکه در انتهای بخش اول و ابتدای بخش سوم به دلیل حساسیت این نواحی در ایجاد گردابه، دارای تراکم می‌باشد، تا با تعداد سلول‌های کمتر دقت موردنظر حاصل گردد. معادلات جریان در ناحیه فیزیکی روی خود حجم کنترل گسسته می‌شود و برای حل این مسئله از نرم افزار منبع باز آپن فوم^۵ استفاده شده و شبکه تولید شده در نرم افزار گمبیت به این نرم افزار انتقال داده شده است و در نرم افزار آپن فوم نیز گسسته سازی با استفاده از شبکه جابجا شده صورت گرفته است.

الگوریتم پیزو در واقع بسط روش سیمپل^۶ با یک مرحله تصحیح اضافه می‌باشد و روند حل به این صورت است که ابتدا یک سرعت و فشار حدسی در نظر گرفته می‌شود و بعد معادله مومنوم به صورت ضمنی برای هر یک از مولفه‌های بردار سرعت حل می‌گردد و میدان سرعت U^* جدید تخمین زده می‌شود. با جایگذاری سرعت‌های تصحیح شده در معادله پیوستگی میدان فشار p^* تخمین زده می‌شود و سرعت و فشار جدید بدست آمده تصحیح می‌شود (U^{**}, P^{**}) و از آنجایی که معادله تصحیح فشار تمایل به واگرایی دارد؛ برای افزایش همگرایی معادله مومنوم، در معادلات تصحیح سرعت و فشار از ضرایب مادون رهایی استفاده می‌شود (تا اینجا مشابه الگوریتم سیمپل است) و با جایگذاری این سرعت‌های جدید در معادله گسسته پیوستگی معادله تصحیح فشار دوم حاصل می‌شود تا فشار جدید p^{***} به وجود آید و با حل دوباره معادلات اندازه حرکت و این فشار جدید p^{***} دوبار تصحیح شده، میدان سرعت جدید (که دوبار تصحیح شده

$$x_j = \frac{\tilde{x}_j}{h} \quad (۲-۲)$$

$$V_i = \frac{\tilde{V}_i}{U_{in}} \quad (۳-۲)$$

$$P = \frac{\tilde{P}}{\rho \cdot U_{in}^2} \quad (۴-۲)$$

با استفاده از شکل بی بعد متغیرهای روابط (۲)، می‌توان صورت بی بعد معادلات (۱) را به صورت زیر بدست آورد.

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (۱-۳)$$

$$v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right] \quad (۲-۳)$$

شرایط مرزی حاکم بر مسئله به صورت زیر می‌باشد [۱۵].

$$V_{in} = U_{in} \quad (۱-۴)$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_{out} = 0 \quad (۲-۴)$$

$$V_{Wall} = 0 \quad (۳-۴)$$

۳- الگوریتم حل

در این تحقیق معادلات حاکم با به کارگیری روش عددی حجم محدود حل شده است و از تقریب مرکزی مرتبه دوم برای مشتقات مکانی و تقریب پیشروی مرتبه اول برای مشتق زمانی استفاده شده است.

با معلوم بودن شیب فشار، فرآیند بدست آوردن معادلات گسسته برای سرعت‌ها از معادلات اندازه حرکت، شبیه به فرآیند مربوط به مقادیر اسکالری می‌باشد و از آنجایی که این شیب نامشخص است برای کوپل معادلات سرعت و فشار نیاز به معادله‌ای غیر از معادله مومنوم داریم؛ تا شیب فشار توسط آن معادله تعیین گردد. در این تحقیق برای ترکیب متغیرهای سرعت و فشار از الگوریتم پیزو^۱ و از شبکه محاسباتی موسوم به شبکه جابه‌جاشده^۲ که برای حل عددی گام‌به‌گام جریان سیال متداول

^۳ Gambit software

^۴ Quad

^۵ OpenFoam software

^۶ SIMPLE algorithm

^۱ PISO algorithm

^۲ Staggered mesh

بدیهی است که افزایش تعداد سلول‌های شبکه، باعث افزایش دقت و کاهش خطای کل می‌شود، ولی باید توجه داشت که این امر باعث افزایش شدید حجم و زمان محاسبات می‌شود. با توجه به اطلاعات جدول ۲، می‌توان با تقریب خوبی از شبکه M2 استفاده نمود. در مطالعه حاضر نیز برای بررسی مشخصات گردابه‌ها از شبکه M2 استفاده شده است.

جدول ۲- مقایسه طول گردابه‌ها در ۳ نوع شبکه همراه با درصد خطای نسبی

دیواره کانال	M1	M2	M3	%ERM1	%ERM2
پایین	۶/۷۰۶۵	۶/۶۶۱۷	۶/۶۲۶۸	۱/۲۰	۰/۵۳
بالا	۴/۸۴۴۱	۴/۸۷۷۷	۴/۹۱۱۵	۱/۳۷	۰/۶۹

۴- ارزیابی صحت نتایج

همانطور که قبلاً ذکر شد، هندسه انبساط ناگهانی (زاویه ۹۰ درجه) برای حالت دوبعدی توسط محققین زیادی مورد بررسی قرار گرفته است.

جدول ۳- مقایسه طول گردابه‌ها با نتایج الیویرا [۴]

عدد Re	تحقیق حاضر		تحقیق الیویرا [۴]		خطای مطلق	
	DX_1	DX_2	DX_1	DX_2	Er1	Er2
۲۰	۲/۰۹۴	۲/۰۹۴	۲/۱۱۱	۲/۱۱۱	۰/۰۱۷	۰/۰۱۷
۴۰	۴/۰۴۵	۴/۰۴۵	۴/۰۷۵	۴/۰۷۵	۰/۰۳۰	۰/۰۳۰
۵۰	۵/۰۶۶	۵/۰۶۶	۵/۰۸۰	۵/۰۸۰	۰/۰۱۴	۰/۰۱۴
۶۰	۴/۰۱۰	۷/۵۱۰	۳/۹۴۰	۷/۵۱۰	۰/۰۷	۰/۱
۸۰	۳/۶۷۰	۱۰/۰۴	۳/۶۵۸	۱۰/۰۴	۰/۰۱۲	۰/۰۲
۱۰۰	۳/۷۷۰	۱۱/۶۳	۳/۷۸۱	۱۱/۶۳	۰/۰۱۱	۰/۰۳۰

در تحقیق حاضر برای مقایسه با تحقیقات قبلی، کانال با زاویه ۹۰ درجه مورد بررسی قرار گرفته است. بهترین عاملی که می‌توان با استدلال به آن از صحت حل مسئله مطمئن شد، طول گردابه‌های ایجاد شده به صورت بی بعد (DX_1 و DX_2) می‌باشد. الیویرا [۴] در سال ۲۰۰۲ جریان

است) بدست می‌آید (U^{***}) و فشار جدید نهایی با استفاده از فشارهای قبلی و ضریب مادون رهایی تصحیح می‌شود. تمام این مراحل به صورت بازگشتی در هر گام زمانی حل به منظور ایجاد دقت بیشتر در حل، تکرار می‌گردد تا به حالت پایداری برسیم و دیگر اختلاف متغیرها در گام‌های زمانی بعدی نسبت به گام‌های زمانی قبلی بسیار کم باشد.

۵- بررسی استقلال حل از شبکه محاسباتی

در این بخش، استقلال برنامه عددی مورد استفاده در حل عددی مورد بررسی قرار می‌گیرد که برای این امر، طول گردابه‌های مجاور دیوار بالا و پایین ($LX_p = LV_p/h$) در عدد رینولدز ۶۰ برای زاویه ۴۵ درجه در ۳ نوع شبکه‌بندی مختلف بررسی شده است. نامگذاری این سه نوع شبکه به ترتیب بر اساس M1، M2 و M3 می‌باشد و برای این ۳ نوع شبکه مختلف، تعداد سلول‌های متفاوتی در راستای طولی و عرضی برای هر سه بخش کانال در نظر گرفته شده که مشخصات این شبکه‌ها در جدول ۱ ارائه شده است.

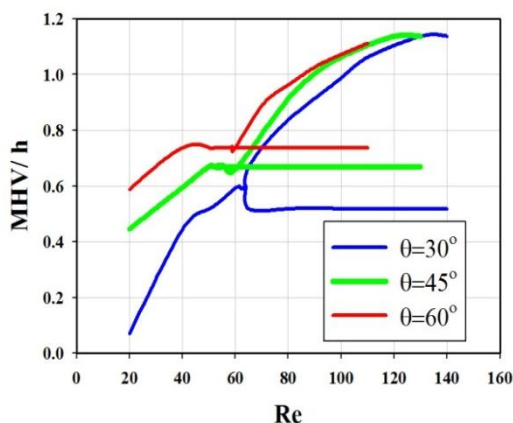
جدول ۱- تعداد سلول سه نوع شبکه بندی

نوع شبکه- بندی	تعداد سلول بخش اول	تعداد سلول بخش دوم	تعداد سلول بخش سوم	تعداد کل سلول‌ها
M1	۳۰۰۰	۳۹۰	۹۰۰۰	۱۲۳۹۰
M2	۶۰۰۰	۸۰۰	۱۸۰۰۰	۲۴۸۰۰
M3	۱۰۰۰۰	۲۰۰۰	۳۰۰۰۰	۴۲۰۰۰

حال برای آنکه بتوانیم استقلال حل عددی را از شبکه نشان دهیم، نیاز به یک مقدار مرجع برای طول گردابه داریم. از آنجایی که هرچه تراکم شبکه بیشتر باشد، دقت آن شبکه نیز بالاتر است. پس در این تحقیق شبکه M3 به عنوان شبکه مرجع در نظر گرفته شده و طول گردابه مربوط به شبکه M1 و M2 با شبکه مرجع مورد مقایسه قرار گرفته است. نتایج این مقایسه و درصد خطای نسبی ناشی از این مقایسه (ERM) در جدول ۲ آورده شده است و خطای نسبی برای شبکه‌های M1 و M2 به ترتیب با ERM1 و ERM2 نامگذاری شده است.

یافته و به دلیل غلبه نیروی فشاری بر نیروی اینرسی و ویسکوز در مجاورت دیوار، ارتفاع هر دو گردابه زیاد می‌شود.

اما بعد از عدد رینولدز بحرانی اول، به دلیل کاهش سطح مقطع عبور جریان توسط هر دو گردابه، نیروی اینرسی بسیار افزایش می‌یابد و دیگر نیروی فشاری قادر به غلبه بر آن نخواهد بود؛ در نتیجه برای ایجاد حالت تعادلی جدید جریان نامتقارن می‌شود. این تعادل جدید نیروهای فشاری و ویسکوز، باعث می‌شود که با افزایش عدد رینولدز اندازه MHV برای گردابه کوچکتر که در مجاورت دیواره بالا کانال تشکیل می‌شود به دلیل وجود نواحی چرخشی در پایین کانال ثابت بماند، در حالیکه اندازه MHV برای گردابه بزرگتر بدلیل عدم نواحی چرخشی در بالای این گردابه، افزایش می‌یابد. با بیشتر شدن عدد رینولدز از مقدار ۱۴۰، دیگر اندازه MHV برای گردابه بزرگتر به مقدار زاویه انبساطی بستگی ندارد. همچنین برای بررسی جزئیات مشخصات عرضی گردابه‌ها به صورت دقیق نیاز به بررسی داده‌های مربوط به آن در جداول ۴-۱۵ می‌باشد که نتایج حاصل از این بررسی به طور خلاصه در ادامه آورده شده است.



شکل ۲- مقایسه نمودار دوشاخه‌ای برای ارتفاع در زوایای مختلف

در زوایای ۳۰ و ۴۵ درجه، بیشینه ارتفاع برای گردابه اول در مجاورت دیوار پایین تا بعد از عدد رینولدز بحرانی اول و در مجاورت دیوار بالا در تمام محدوده اعداد رینولدز بدون طول می‌باشد، یعنی فقط یک نقطه است. اما برای

سیال نامتقارن غیرنیوتنی را برای تبدیل واگرای ناگهانی متقارن صفحه‌ای مورد بررسی قرار داد. او در تحقیق خود قبل از بررسی جریان سیال غیرنیوتنی به بررسی جریان سیال نیوتنی پرداخته و طول گردابه‌ها را در اعداد رینولدز مختلف $0.1 \leq Re \leq 100$ و در نسبت تبدیل ۱:۳ گزارش کرده است.

در جدول ۳، طول گردابه‌های حاصل از حل عددی تحقیق حاضر برای اعداد رینولدز مختلف در زاویه ۹۰ درجه به صورت بی‌بعد $DX_1 = DV_1/h$ ، $DX_2 = DV_2/h$ با نتایج الیویرا [۴] مقایسه شده و خطای مطلق این مقایسه (Er) نیز آورده شده است. همانطور که از جدول ۳ مشخص است، بیشترین اختلاف با تحقیق الیویرا [۴] به صورت مطلق برابر ۰/۱ است و این به دلیل یکسان نبودن شبکه‌بندی به کار برده شده و طول گام شبکه در راستای مختصات x و y می‌باشد.

۶- نتایج

در جداول ۴-۱۵ برای هر گردابه مشخصات طول، بیشترین ارتفاع و طول بیشترین ارتفاع، نقطه شروع و خاتمه گردابه از ابتدای بخش انبساطی به ازای زوایای ۳۰، ۴۵ و ۶۰ درجه در محدوده اعداد رینولدز $130 < Re < 200$ به صورت منظم و طبقه بندی شده ارائه شده است.

در شکل ۲ نمودار دوشاخه‌ای ماکزیمم ارتفاع گردابه^۱ (MHV) در مجاورت دیوار بالا و پایین کانال بر حسب عدد رینولدز نشان داده شده است. با افزایش زاویه انبساطی، به دلیل افزایش نیروی فشاری، اندازه MHV برای هر دو گردابه بالا و پایین بیشتر می‌شود (یعنی بیشینه ارتفاع افزایش می‌یابد). هر چه زاویه انبساطی بزرگتر باشد میزان افزایش ارتفاع گردابه نیز بیشتر شده و در نتیجه فاصله بین دو شاخه MHV کمتر می‌شود. با افزایش عدد رینولدز تا عدد رینولدز بحرانی اول، اندازه MHV برای هر دو گردابه مجاور دیوار بالا و پایین کانال به دلیل تقارن جریان، یکسان می‌باشد.

در هر زاویه انبساطی با افزایش عدد رینولدز تا قبل از مقدار بحرانی اول، نیروی اینرسی و فشاری نیز افزایش

¹ Maximum Height Vortex

انبساطی، با افزایش زاویه تا قبل از عدد رینولدز بحرانی اول بیشتر شده و در محدوده بین عدد رینولدز بحرانی اول تا عدد رینولدز بحرانی دوم کم می‌شود. همچنین این فاصله بعد از عدد رینولدز بحرانی دوم در تمام زوایا به صورت افزایشی می‌باشد. برای گردابه دوم در مجاورت دیوار بالا، با زیاد شدن اندازه زاویه انبساطی، کاهش فاصله ابتدایی و افزایش فاصله انتهایی گردابه از ابتدای بخش انبساطی را شاهد هستیم، که منجر به افزایش طول گردابه‌ها می‌شود.

۳- در زاویه ۳۰ درجه، با افزایش عدد رینولدز، فاصله ابتدایی گردابه اول مجاور دیوار پایین و دیوار بالا از ابتدای بخش انبساطی کاهش می‌یابد و هرچه عدد رینولدز بیشتر باشد، نرخ این کاهش فاصله، کمتر می‌شود؛ ولی برای زوایای ۴۵ و ۶۰ درجه این فاصله برای گردابه اول در مجاورت دیوار پایین و دیوار بالا، در تمام محدوده اعداد رینولدز ثابت می‌ماند. همچنین تغییرات فاصله انتهایی گردابه اول در مجاورت دیوار بالا با تغییرات فاصله انتهایی گردابه اول در مجاورت دیوار پایین با افزایش عدد رینولدز یکسان نمی‌باشد.

فاصله انتهایی گردابه اول در مجاورت دیوار پایین برای هر سه زاویه با افزایش عدد رینولدز افزایش می‌یابد و بیشترین تغییرات آن در عدد رینولدز بحرانی ظاهر می‌شود. با زیاد شدن عدد رینولدز، فاصله انتهایی گردابه اول در مجاورت دیوار بالا تا قبل از مقدار بحرانی اول به صورت افزایشی و از مقدار بحرانی اول تا مقدار بحرانی دوم به صورت کاهشی و بعد از مقدار بحرانی دوم دوباره به صورت افزایشی ولی با نرخ تغییرات کمتر ظاهر می‌شود. این توصیفات در شکل ۴ نیز قابل مشاهده می‌باشد.

۴- برای گردابه دوم در مجاورت دیوار بالا که بعد از رینولدز بحرانی دوم ظاهر می‌شود، با افزایش عدد رینولدز تغییرات فاصله ابتدایی و انتهایی، از ابتدای بخش انبساطی به ترتیب به صورت کاهشی و افزایشی می‌باشد و این زیاد شدن عدد رینولدز، منجر به افزایش طول گردابه می‌شود.

زاویه ۶۰ درجه، بیشینه ارتفاع برای گردابه‌های اول در مجاور دیوار بالا و دیوار پایین دارای طول می‌باشد. همچنین بعد از عدد رینولدز بحرانی دوم که گردابه دوم در مجاور دیوار بالا تشکیل می‌شود؛ برای هر سه زاویه بیشینه ارتفاع دارای طول می‌باشد. به عبارت دیگر در اعداد رینولدز کوچک، با افزایش مقدار زاویه انبساطی، بیشینه ارتفاع گردابه‌های اول در مجاور دیوار بالا و پایین از حالت یک نقطه تبدیل به یک خط می‌شود و با افزایش زاویه انبساطی برای گردابه دوم در مجاور دیوار بالا (بعد از عدد رینولدز بحرانی دوم)، طول بیشینه ارتفاع نیز افزایش می‌یابد.

لازم به توضیح می‌باشد که برای بهتر نشان دادن تغییرات سرعت و خطوط جریان در کانتور خطوط جریان شکل ۳ و کانتور سرعت شکل ۴ مقدار مولفه‌های سرعت در عدد $6/5$ ضرب شده است.

برای بررسی طول گردابه، نقطه شروع و خاتمه در هر گردابه، علاوه بر ذکر مشخصات طولی در جداول، نمودارهای خطوط جریان و کانتور سرعت نیز ترسیم شده است که نتایج حاصل از این بررسی داده‌ها و نمودارها در ادامه آورده شده است.

۱- با افزایش عدد رینولدز، بعد از عدد رینولدز بحرانی اول به دلیل تغییر حالت رژیم جریان، یک تغییر ناگهانی در طول گردابه بزرگتر به وقوع می‌پیوندد و هرچه زاویه انبساطی بزرگتر باشد، این تغییر طول ناگهانی برای گردابه مجاور دیوار پایین (گردابه بزرگتر) بیشتر است. با افزایش زاویه انبساطی، نیروی فشاری افزایش یافته و فاصله ابتدای گردابه اول در مجاورت دیوار بالا و پایین، از ابتدای بخش انبساطی کاهش می‌یابد.

۲- با افزایش اندازه زاویه تا قبل از عدد رینولدز بحرانی دوم، فاصله انتهایی گردابه اول در مجاورت دیوار پایین از ابتدای بخش انبساطی افزایش می‌یابد ولی در رینولدزهای بالاتر مقدار این فاصله کاهش می‌یابد.

همانطور که از شکل ۳ نیز مشاهده می‌شود، فاصله انتهایی گردابه اول در مجاورت دیوار بالا از ابتدای بخش

جدول ۴- مشخصات طولی گردابه‌ها در مجاورت دیوار پایین کانال برای زاویه ۳۰ درجه

طول گردابه‌ها				فاصله ابتدا و انتهای هر گردابه از ورودی بخش انبساطی				$\theta = 30^\circ$
DX_4	DX_3	DX_2	DX_1	LX_4	LX_3	LX_2	LX_1	Re
-	-	-	۳۶۱۱۰	-	-	۱/۸۳۳۳	۱/۴۷۲۲	۲۰
-	-	-	۳/۲۴۵	-	-	۳/۶۷۸	۰/۴۳۳	۴۰
-	-	-	۴/۲۸۵۴	-	-	۴/۶۳۱۸	۰/۳۴۶۴	۵۰
-	-	-	۵/۳۲۰۴	-	-	۵/۵۸۰۲	۰/۲۵۹۸	۶۰
-	-	-	۵/۵۱۶۶	-	-	۵/۷۷۶۴	۰/۲۵۹۸	۶۲
-	-	-	۵/۶۴۸۷	-	-	۵/۹۰۸۵	۰/۲۵۹۸	۶۳
-	-	-	۶/۲۵۵۷	-	-	۶/۵۱۵۵	۰/۲۵۹۸	۶۴
-	-	-	۶/۸۱۲۷	-	-	۷/۰۷۲۵	۰/۲۵۹۸	۶۵
-	-	-	۸/۰۲۲۳	-	-	۸/۲۳۸۸	۰/۲۱۶۵	۷۰
-	-	-	۹/۳۸۴۸	-	-	۹/۵۵۸	۰/۱۷۳۲	۸۰
-	-	-	۱۱/۳۵۳۸	-	-	۱۱/۴۸۳۷	۰/۱۲۹۹	۱۰۰
-	-	-	۱۲/۰۶۴	-	-	۱۲/۱۹۳۹	۰/۱۲۹۹	۱۱۰
-	-	-	۱۲/۱۵۴۴	-	-	۱۲/۲۸۴۳	۰/۱۲۹۹	۱۱۱
-	-	-	۱۲/۲۴۴۹	-	-	۱۲/۳۷۴۸	۰/۱۲۹۹	۱۱۲
-	-	-	۱۲/۷۰۳۴	-	-	۱۲/۸۳۳۳	۰/۱۲۹۹	۱۲۰
-	-	-	۱۳/۱۷۰۶	-	-	۱۳/۳۰۰۵	۰/۱۲۹۹	۱۳۰

جدول ۵- مشخصات طولی گردابه‌ها در مجاورت دیوار بالای کانال برای زاویه ۳۰ درجه

طول گردابه‌ها				فاصله ابتدا و انتهای هر گردابه از ورودی بخش انبساطی				$\theta = 30^\circ$
DX_4	DX_3	DX_2	DX_1	LX_4	LX_3	LX_2	LX_1	Re
-	-	-	۰/۳۶۱۱	-	-	۱/۸۳۳۳	۱/۴۷۲۲	۲۰
-	-	-	۳/۲۴۵	-	-	۳/۶۷۸	۰/۴۳۳	۴۰
-	-	-	۴/۲۸۵۴	-	-	۴/۶۳۱۸	۰/۳۴۶۴	۵۰
-	-	-	۵/۳۲۰۴	-	-	۵/۵۸۰۲	۰/۲۵۹۸	۶۰
-	-	-	۵/۵۱۶۶	-	-	۵/۷۷۶۴	۰/۲۵۹۸	۶۲
-	-	-	۵/۶۴۸۷	-	-	۵/۹۰۸۵	۰/۲۵۹۸	۶۳
-	-	-	۵/۱۲۶۴	-	-	۵/۳۸۶۲	۰/۲۵۹۸	۶۴
-	-	-	۴/۶۱۹۷	-	-	۴/۸۷۹۵	۰/۲۵۹۸	۶۵
-	-	-	۳/۸۸۷۹	-	-	۴/۱۴۷۷	۰/۲۵۹۸	۷۰
-	-	-	۳/۵۹۲۶	-	-	۳/۸۵۲۴	۰/۲۵۹۸	۸۰
-	-	-	۳/۶۳۵۹	-	-	۳/۸۵۲۴	۰/۲۱۶۵	۱۰۰
-	-	-	۳/۶۹۴۵	-	-	۳/۹۱۱	۰/۲۱۶۵	۱۱۰
-	-	-	۳/۶۹۴۵	-	-	۳/۹۱۱	۰/۲۱۶۵	۱۱۱
-	۱۳/۲۷۳۳	۱۲/۳۴۰۷	۳/۶۹۴۵	۱۳/۴۸۹۸	۱۲/۵۵۷۲	۳/۹۱۱	۰/۲۱۶۵	۱۱۲
-	۱۵/۳۹۴۱	۱۱/۶۶۳	۳/۷۹۶۶	۱۵/۵۶۷۳	۱۱/۸۳۶۲	۳/۹۶۹۸	۰/۱۷۳۲	۱۲۰
-	۱۷/۱۷۱۴	۱۱/۵۷۴۴	۳/۸۵۵۷	۱۷/۳۴۴۶	۱۱/۷۴۷۶	۴/۰۲۸۹	۰/۱۷۳۲	۱۳۰

جدول ۶- مشخصات عرضی گردابه‌ها در مجاورت دیوار پایین کانال برای زاویه ۳۰ درجه

طول ماکزیمم ارتفاع گردابه‌ها		فاصله ماکزیمم ارتفاع گردابه از ورودی بخش انبساطی				ماکزیمم ارتفاع گردابه‌ها		$\theta = 30^\circ$
$LMHX_2$	$LMHX_1$	$DMHX_4$	$DMHX_3$	$DMHX_2$	$DMHX_1$	MHX_2	MHX_1	Re
—	۰	—	—	۱/۷۱۷۶	۱/۷۱۷۶	—	۰/۰۷۰۶	۲۰
—	۰	—	—	۱/۷۱۷۶	۱/۷۱۷۶	—	۰/۴۴۳۵	۴۰
—	۰	—	—	۱/۷۱۷۶	۱/۷۱۷۶	—	۰/۵۱۸۱	۵۰
—	۰	—	—	۱/۷۱۷۶	۱/۷۱۷۶	—	۰/۵۹۲۷	۶۰
—	۰	—	—	۱/۷۱۷۶	۱/۷۱۷۶	—	۰/۵۹۲۷	۶۲
—	۰	—	—	۱/۷۱۷۶	۱/۷۱۷۶	—	۰/۵۹۲۷	۶۳
—	۰	—	—	۱/۷۱۷۶	۱/۷۱۷۶	—	۰/۵۹۲۷	۶۴
—	۰	—	—	۱/۷۱۷۶	۱/۷۱۷۶	—	۰/۶۶۷۳	۶۵
—	۰	—	—	۱/۷۱۷۶	۱/۷۱۷۶	—	۰/۶۶۷۳	۷۰
—	۲/۹۰۱۵	—	—	۵/۷۵۴۵	۲/۸۵۳	—	۰/۸۳۷۵	۸۰
—	۲/۷۱۶۷	—	—	۶/۳۵۶۱	۳/۶۳۹۴	—	۰/۹۸۷۵	۱۰۰
—	۱/۸۶۶	—	—	۶/۱۵۳۳	۴/۲۸۷۳	—	۱/۰۶۲۵	۱۱۰
—	۲/۰۶۰۹	—	—	۶/۲۸۸۲	۴/۲۲۷۳	—	۱/۰۶۲۵	۱۱۱
—	۲/۱۸۸۶	—	—	۶/۳۵۶۱	۴/۱۶۷۵	—	۱/۰۶۲۵	۱۱۲
—	۳/۱۷۷۱	—	—	۷/۰۴۹	۳/۸۷۱۹	—	۱/۰۶۲۵	۱۲۰
—	۱/۹۰۱۷	—	—	۶/۴۹۲۶	۴/۵۹۰۹	—	۱/۱۳۷۵	۱۳۰

جدول ۷- مشخصات عرضی گردابه‌ها در مجاورت دیوار بالای کانال برای زاویه ۳۰ درجه

طول ماکزیمم ارتفاع گردابه‌ها		فاصله ماکزیمم ارتفاع گردابه از ورودی بخش انبساطی				ماکزیمم ارتفاع گردابه‌ها		$\theta = 30^\circ$
$LMHX_2$	$LMHX_1$	$DMHX_4$	$DMHX_3$	$DMHX_2$	$DMHX_1$	MHX_2	MHX_1	Re
—	۰	—	—	۱/۷۱۷۶	۱/۷۱۷۶	—	۰/۰۷۰۶	۲۰
—	۰	—	—	۱/۷۱۷۶	۱/۷۱۷۶	—	۰/۴۴۳۵	۴۰
—	۰	—	—	۱/۷۱۷۶	۱/۷۱۷۶	—	۰/۵۱۸۱	۵۰
—	۰	—	—	۱/۷۱۷۶	۱/۷۱۷۶	—	۰/۵۹۲۷	۶۰
—	۰	—	—	۱/۷۱۷۶	۱/۷۱۷۶	—	۰/۵۹۲۷	۶۲
—	۰	—	—	۱/۷۱۷۶	۱/۷۱۷۶	—	۰/۵۹۲۷	۶۳
—	۰	—	—	۱/۷۱۷۶	۱/۷۱۷۶	—	۰/۵۹۲۷	۶۴
—	۰	—	—	۱/۷۱۷۶	۱/۷۱۷۶	—	۰/۵۱۸۱	۶۵
—	۰	—	—	۱/۷۱۷۶	۱/۷۱۷۶	—	۰/۵۱۸۱	۷۰
—	۰	—	—	۱/۷۱۷۶	۱/۷۱۷۶	—	۰/۵۱۸۱	۸۰
—	۰	—	—	۱/۷۱۷۶	۱/۷۱۷۶	—	۰/۵۱۸۱	۱۰۰
—	۰	—	—	۱/۷۱۷۶	۱/۷۱۷۶	—	۰/۵۱۸۱	۱۱۰
—	۰	—	—	۱/۷۱۷۶	۱/۷۱۷۶	—	۰/۵۱۸۱	۱۱۱
۰/۸۷۰۴	۰	۱۳/۴۵۸۱	۱۲/۵۸۷۷	۱/۷۱۷۶	۱/۷۱۷۶	۰/۰۷۵	۰/۵۱۸۱	۱۱۲
۱/۸۵۸۹	۰	۱۴/۷۲۳	۱۲/۸۶۴۱	۱/۷۱۷۶	۱/۷۱۷۶	۰/۱۶۲۵	۰/۵۱۸۱	۱۲۰
۱/۴۲۸۶	۰	۱۵/۴۳۰۴	۱۴/۰۰۱۸	۱/۷۱۷۶	۱/۷۱۷۶	۰/۳۱۲۵	۰/۵۱۸۱	۱۳۰

جدول ۸- مشخصات طولی گردابه‌ها در مجاورت دیوار پایین کانال برای زاویه ۴۵ درجه

طول گردابه‌ها				فاصله ابتدا و انتهای هر گردابه از ورودی بخش انبساطی				$\theta = 45^\circ$
DX_4	DX_3	DX_2	DX_1	LX_4	LX_3	LX_2	LX_1	Re
-	-	-	۱/۷۲۵۵	-	-	۱/۹۳۹۸	۰/۲۱۴۲	۲۰
-	-	-	۳/۸۶۴۱	-	-	۳/۸۹۹۸	۰/۰۳۵۷	۴۰
-	-	-	۴/۸۷۷۷	-	-	۴/۹۱۳۴	۰/۰۳۵۷	۵۰
-	-	-	۵/۶۷۹۳	-	-	۵/۷۱۵	۰/۰۳۵۷	۵۸
-	-	-	۵/۷۴۷۸	-	-	۵/۷۸۳۵	۰/۰۳۵۷	۵۹
-	-	-	۶/۶۶۱۷	-	-	۶/۶۹۷۴	۰/۰۳۵۷	۶۰
-	-	-	۶/۶۶۱۷	-	-	۶/۶۹۷۴	۰/۰۳۵۷	۶۱
-	-	-	۸/۷۱۰۳	-	-	۸/۷۴۶	۰/۰۳۵۷	۷۰
-	-	-	۹/۸۵۸	-	-	۹/۸۹۳۷	۰/۰۳۵۷	۸۰
-	-	-	۱۱/۶۰۷۱	-	-	۱۱/۶۴۲۸	۰/۰۳۵۷	۱۰۰
-	-	-	۱۱/۶۹۸۱	-	-	۱۱/۷۳۳۸	۰/۰۳۵۷	۱۰۲
-	-	-	۱۱/۸۸۱۱	-	-	۱۱/۹۱۶۸	۰/۰۳۵۷	۱۰۴
-	-	-	۱۱/۸۸۱۱	-	-	۱۱/۹۱۶۸	۰/۰۳۵۷	۱۰۵
-	-	-	۱۲/۲۵۱۴	-	-	۱۲/۲۸۷۱	۰/۰۳۵۷	۱۱۰
-	-	-	۱۲/۷۲۲۱	-	-	۱۲/۷۵۷۸	۰/۰۳۵۷	۱۲۰
-	-	-	۱۳/۲۰۱۹	-	-	۱۳/۲۳۷۶	۰/۰۳۵۷	۱۳۰

جدول ۹- مشخصات طولی گردابه‌ها در مجاورت دیوار بالای کانال برای زاویه ۴۵ درجه

طول گردابه‌ها				فاصله ابتدا و انتهای هر گردابه از ورودی بخش انبساطی				$\theta = 45^\circ$
DX_4	DX_3	DX_2	DX_1	LX_4	LX_3	LX_2	LX_1	Re
-	-	-	۱/۷۲۵۵	-	-	۱/۹۳۹۸	۰/۲۱۴۲	۲۰
-	-	-	۳/۸۶۴۱	-	-	۳/۸۹۹۸	۰/۰۳۵۷	۴۰
-	-	-	۴/۸۷۷۷	-	-	۴/۹۱۳۴	۰/۰۳۵۷	۵۰
-	-	-	۵/۶۷۹۳	-	-	۵/۷۱۵	۰/۰۳۵۷	۵۸
-	-	-	۵/۷۴۷۸	-	-	۵/۷۸۳۵	۰/۰۳۵۷	۵۹
-	-	-	۴/۸۷۷۷	-	-	۴/۹۱۳۴	۰/۰۳۵۷	۶۰
-	-	-	۵/۰۷۴۷	-	-	۵/۱۱۰۴	۰/۰۳۵۷	۶۱
-	-	-	۳/۸۶۴۱	-	-	۳/۸۹۹۸	۰/۰۳۵۷	۷۰
-	-	-	۳/۷۴۱۷	-	-	۳/۷۷۷۴	۰/۰۳۵۷	۸۰
-	-	-	۳/۸۰۲۸	-	-	۳/۸۳۸۵	۰/۰۳۵۷	۱۰۰
-	-	-	۳/۸۰۲۸	-	-	۳/۸۳۸۵	۰/۰۳۵۷	۱۰۲
-	-	-	۳/۸۶۴۱	-	-	۳/۸۹۹۸	۰/۰۳۵۷	۱۰۴
-	۱۳/۱۰۵۱	۱۱/۹۷۳۲	۳/۸۶۴۱	۱۳/۱۴۰۸	۱۲/۰۰۸۹	۳/۸۹۹۸	۰/۰۳۵۷	۱۰۵
-	۱۴/۵۹۴۶	۱۱/۵۱۶۶	۳/۸۶۴۱	۱۴/۶۳۰۳	۱۱/۵۵۲۳	۳/۸۹۹۸	۰/۰۳۵۷	۱۱۰
-	۱۶/۴۹۷۳	۱۱/۲۴۶۷	۳/۹۸۷۵	۱۶/۵۳۳	۱۱/۲۸۲۴	۴/۰۲۳۲	۰/۰۳۵۷	۱۲۰
-	۱۸/۰۶۹۸	۱۱/۳۳۶۳	۴/۰۴۹۵	۱۸/۱۰۵۵	۱۱/۳۷۲	۴/۰۸۵۲	۰/۰۳۵۷	۱۳۰

جدول ۱۰- مشخصات عرضی گردابه‌ها در مجاورت دیوار پایین کانال برای زاویه ۴۵ درجه

طول ماکزیمم ارتفاع گردابه‌ها		فاصله ماکزیمم ارتفاع گردابه از ورودی بخش انبساطی				ماکزیمم ارتفاع گردابه‌ها		$\theta = 45^\circ$
$LMHX_2$	$LMHX_1$	$DMHX_4$	$DMHX_3$	$DMHX_2$	$DMHX_1$	MHX_2	MHX_1	Re
-	۰	-	-	۰/۹۸۸۱	۰/۹۸۸۱	-	۰/۴۴۶۱	۲۰
-	۰	-	-	۰/۹۸۸۱	۰/۹۸۸۱	-	۰/۵۹۴۹	۴۰
-	۰	-	-	۰/۹۸۸۱	۰/۹۸۸۱	-	۰/۶۶۹۳	۵۰
-	۰	-	-	۰/۹۸۸۱	۰/۹۸۸۱	-	۰/۶۶۹۳	۵۸
-	۰	-	-	۰/۹۸۸۱	۰/۹۸۸۱	-	۰/۶۶۹۳	۵۹
-	۰	-	-	۰/۹۸۸۱	۰/۹۸۸۱	-	۰/۶۶۹۳	۶۰
-	۰	-	-	۰/۹۸۸۱	۰/۹۸۸۱	-	۰/۶۶۹۳	۶۱
-	۱/۳۲۱۲	-	-	۴/۶۹۷۱	۳/۳۷۵۹	-	۰/۸۳۷۵	۷۰
-	۲/۵۰۳۱	-	-	۵/۷۶۰۶	۳/۲۵۷۵	-	۰/۹۱۲۵	۸۰
-	۱/۷۹۸۹	-	-	۵/۹۶۷۲	۴/۱۶۸۳	-	۱/۰۶۲۵	۱۰۰
-	۲/۱۳۲۵	-	-	۶/۱۷۶۳	۴/۰۴۳۸	-	۱/۰۶۲۵	۱۰۲
-	۲/۴۰۵۸	-	-	۶/۳۸۷۷	۳/۹۸۱۹	-	۱/۰۶۲۵	۱۰۴
-	۲/۵۳۸۴	-	-	۶/۴۵۸۷	۳/۹۲۰۳	-	۱/۰۶۲۵	۱۰۵
-	۳/۰۲۰۲	-	-	۶/۸۱۷۹	۳/۷۹۷۷	-	۱/۰۶۲۵	۱۱۰
-	۲/۰۳۸۷	-	-	۶/۴۵۸۷	۴/۴۲	-	۱/۱۳۷۵	۱۲۰
-	۲/۹۴۱۸	-	-	۷/۱۱۰۱	۴/۱۶۸۳	-	۱/۱۳۷۵	۱۳۰

جدول ۱۱- مشخصات عرضی گردابه‌ها در مجاورت دیوار بالای کانال برای زاویه ۴۵ درجه

طول ماکزیمم ارتفاع گردابه‌ها		فاصله ماکزیمم ارتفاع گردابه از ورودی بخش انبساطی				ماکزیمم ارتفاع گردابه‌ها		$\theta = 45^\circ$
$LMHX_2$	$LMHX_1$	$DMHX_4$	$DMHX_3$	$DMHX_2$	$DMHX_1$	MHX_2	MHX_1	Re
-	۰	-	-	۰/۹۸۸۱	۰/۹۸۸۱	-	۰/۴۴۶۱	۲۰
-	۰	-	-	۰/۹۸۸۱	۰/۹۸۸۱	-	۰/۵۹۴۹	۴۰
-	۰	-	-	۰/۹۸۸۱	۰/۹۸۸۱	-	۰/۶۶۹۳	۵۰
-	۰	-	-	۰/۹۸۸۱	۰/۹۸۸۱	-	۰/۶۶۹۳	۵۸
-	۰	-	-	۰/۹۸۸۱	۰/۹۸۸۱	-	۰/۶۶۹۳	۵۹
-	۰	-	-	۰/۹۸۸۱	۰/۹۸۸۱	-	۰/۶۶۹۳	۶۰
-	۰	-	-	۰/۹۸۸۱	۰/۹۸۸۱	-	۰/۶۶۹۳	۶۱
-	۰	-	-	۰/۹۸۸۱	۰/۹۸۸۱	-	۰/۶۶۹۳	۷۰
-	۰	-	-	۰/۹۸۸۱	۰/۹۸۸۱	-	۰/۶۶۹۳	۸۰
-	۰	-	-	۰/۹۸۸۱	۰/۹۸۸۱	-	۰/۶۶۹۳	۱۰۰
-	۰	-	-	۰/۹۸۸۱	۰/۹۸۸۱	-	۰/۶۶۹۳	۱۰۲
-	۰	-	-	۰/۹۸۸۱	۰/۹۸۸۱	-	۰/۶۶۹۳	۱۰۴
۱/۰۶۹۱	۰	۱۳/۱۰۸۷	۱۲/۰۳۹۶	۰/۹۸۸۱	۰/۹۸۸۱	۰/۰۷۵	۰/۶۶۹۳	۱۰۵
۰/۵۱۴۷	۰	۱۳/۳۹۹۵	۱۲/۸۸۴۸	۰/۹۸۸۱	۰/۹۸۸۱	۰/۱۶۲۵	۰/۶۶۹۳	۱۱۰
۲/۷۳۰۳	۰	۱۵/۴۲۴۸	۱۲/۶۹۴۵	۰/۹۸۸۱	۰/۹۸۸۱	۰/۲۳۷۵	۰/۶۶۹۳	۱۲۰
۲/۴۰۲۳	۰	۱۶/۰۶۳	۱۳/۶۶۰۷	۰/۹۸۸۱	۰/۹۸۸۱	۰/۳۸۷۵	۰/۶۶۹۳	۱۳۰

جدول ۱۲- مشخصات طولی گردابه‌ها در مجاورت دیوار پایین کانال برای زاویه ۶۰ درجه

طول گردابه‌ها				فاصله ابتدا و انتهای هر گردابه از ورودی بخش انبساطی				$\theta = 60^\circ$
DX_4	DX_3	DX_2	DX_1	LX_4	LX_3	LX_2	LX_1	Re
-	-	-	۲/۰۹۸۴	-	-	۲/۱۲۳۵	۰/۰۲۵۱	۲۰
-	-	-	۴/۰۷۸	-	-	۴/۱۰۳۱	۰/۰۲۵۱	۴۰
-	-	-	۵/۰۶۳	-	-	۵/۰۸۸۱	۰/۰۲۵۱	۵۰
-	-	-	۵/۶۸۱۵	-	-	۵/۷۰۶۶	۰/۰۲۵۱	۵۶
-	-	-	۵/۸۲۱۸	-	-	۵/۸۴۶۹	۰/۰۲۵۱	۵۷
-	-	-	۷/۰۵۸۷	-	-	۷/۰۸۳۸	۰/۰۲۵۱	۵۸
-	-	-	۷/۵۱۴۶	-	-	۷/۵۳۹۷	۰/۰۲۵۱	۶۰
-	-	-	۹/۰۲۸۷	-	-	۹/۰۵۳۸	۰/۰۲۵۱	۷۰
-	-	-	۱۰/۰۴۲۸	-	-	۱۰/۰۶۷۹	۰/۰۲۵۱	۸۰
-	-	-	۱۱/۳۷۷۱	-	-	۱۱/۴۰۲۲	۰/۰۲۵۱	۹۶
-	-	-	۱۱/۴۶۸۷	-	-	۱۱/۴۹۳۸	۰/۰۲۵۱	۹۸
-	-	-	۱۱/۵۶۰۸	-	-	۱۱/۵۸۵۹	۰/۰۲۵۱	۹۹
-	-	-	۱۱/۶۵۳۲	-	-	۱۱/۶۷۸۳	۰/۰۲۵۱	۱۰۰
-	-	-	۱۲/۲۱۴۸	-	-	۱۲/۲۳۹۹	۰/۰۲۵۱	۱۱۰
-	-	-	۱۲/۶۹۲۷	-	-	۱۲/۷۱۷۸	۰/۰۲۵۱	۱۲۰
-	-	-	۱۳/۰۸۱۶	-	-	۱۳/۱۰۶۷	۰/۰۲۵۱	۱۳۰

جدول ۱۳- مشخصات طولی گردابه‌ها در مجاورت دیوار بالای کانال برای زاویه ۶۰ درجه

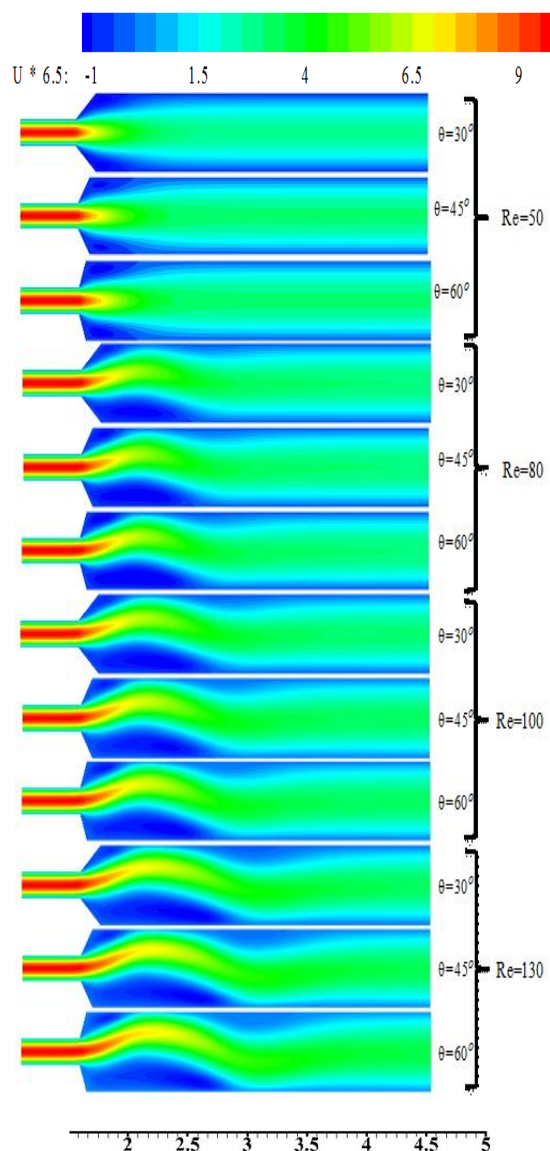
طول گردابه‌ها				فاصله ابتدا و انتهای هر گردابه از ورودی بخش انبساطی				$\theta = 60^\circ$
DX_4	DX_3	DX_2	DX_1	LX_4	LX_3	LX_2	LX_1	Re
-	-	-	۲/۰۹۸۴	-	-	۲/۱۲۳۵	۰/۰۲۵۱	۲۰
-	-	-	۴/۰۷۸	-	-	۴/۱۰۳۱	۰/۰۲۵۱	۴۰
-	-	-	۵/۰۶۳	-	-	۵/۰۸۸۱	۰/۰۲۵۱	۵۰
-	-	-	۵/۶۸۱۵	-	-	۵/۷۰۶۶	۰/۰۲۵۱	۵۶
-	-	-	۵/۸۲۱۸	-	-	۵/۸۴۶۹	۰/۰۲۵۱	۵۷
-	-	-	۴/۳۳۵۲	-	-	۴/۳۶۰۳	۰/۰۲۵۱	۵۸
-	-	-	۴/۰۷۸	-	-	۴/۱۰۳۱	۰/۰۲۵۱	۶۰
-	-	-	۳/۶۹۹۴	-	-	۳/۷۲۴۵	۰/۰۲۵۱	۷۰
-	-	-	۳/۶۹۹۴	-	-	۳/۷۲۴۵	۰/۰۲۵۱	۸۰
-	-	-	۳/۷۶۱۹	-	-	۳/۷۸۷	۰/۰۲۵۱	۹۶
-	-	-	۳/۷۶۱۹	-	-	۳/۷۸۷	۰/۰۲۵۱	۹۸
-	۱۲/۶۹۲۷	۱۱/۷۴۵۹	۳/۸۲۴۶	۱۲/۷۱۷۸	۱۱/۷۷۱	۳/۸۴۹۷	۰/۰۲۵۱	۹۹
-	۱۳/۱۷۹۹	۱۱/۴۶۸۷	۳/۸۲۴۶	۱۳/۲۰۵	۱۱/۴۹۳۸	۳/۸۴۹۷	۰/۰۲۵۱	۱۰۰
-	۱۵/۴۳۶۲	۱۱/۰۱۳۹	۳/۸۸۷۶	۱۵/۴۶۱۳	۱۱/۰۳۹	۳/۹۱۲۷	۰/۰۲۵۱	۱۱۰
-	۱۷/۰۸۶۲	۱۱/۰۱۳۹	۳/۹۵۰۸	۱۷/۱۱۱۳	۱۱/۰۳۹	۳/۹۷۵۹	۰/۰۲۵۱	۱۲۰
-	۱۸/۷۱۳۲	۱۱/۱۰۴۲	۴/۰۱۴۳	۱۸/۷۳۸۳	۱۱/۱۲۹۳	۴/۰۳۹۴	۰/۰۲۵۱	۱۳۰

جدول ۱۴- مشخصات عرضی گردابه‌ها در مجاورت دیوار پایین کانال برای زاویه ۶۰ درجه

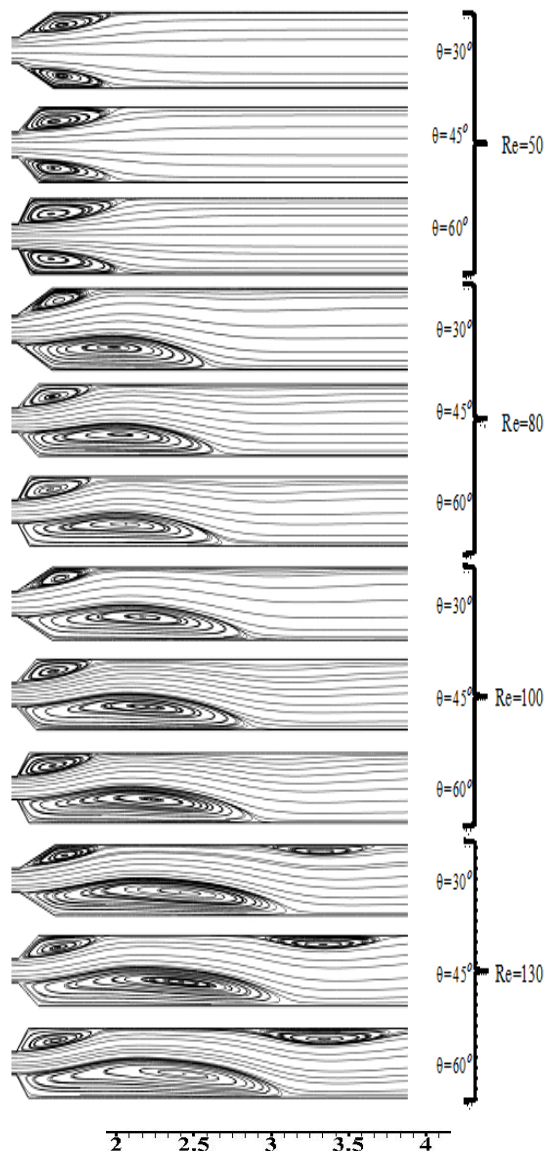
طول ماکزیمم ارتفاع گردابه‌ها		فاصله ماکزیمم ارتفاع گردابه از ورودی بخش انبساطی				ماکزیمم ارتفاع گردابه‌ها		$\theta = 60^\circ$
$LMHX_2$	$LMHX_1$	$DMHX_4$	$DMHX_3$	$DMHX_2$	$DMHX_1$	MHX_2	MHX_1	Re
-	۰/۱۶۹۵	-	-	۰/۷۶۳۳	۰/۵۹۳۸	-	۰/۵۸۷۵	۲۰
-	۰/۰۱۶۹	-	-	۰/۶۱۰۷	۰/۵۹۳۸	-	۰/۷۳۷۵	۴۰
-	۰/۱۱۸۴	-	-	۰/۷۱۲۲	۰/۵۹۳۸	-	۰/۷۳۷۵	۵۰
-	۰/۱۶۹۵	-	-	۰/۷۶۳۳	۰/۵۹۳۸	-	۰/۷۳۷۵	۵۶
-	۰/۱۶۹۵	-	-	۰/۷۶۳۳	۰/۵۹۳۸	-	۰/۷۳۷۵	۵۷
-	۰/۳۳۳۸	-	-	۰/۹۱۷۶	۰/۵۹۳۸	-	۰/۷۳۷۵	۵۸
-	۰/۴۷۹۹	-	-	۱/۰۷۳۷	۰/۵۹۳۸	-	۰/۷۳۷۵	۶۰
-	۰/۷۲۸۸	-	-	۴/۵۹۹۵	۳/۸۷۰۷	-	۰/۸۸۷۵	۷۰
-	۱/۵۹۸۴	-	-	۵/۴۰۶۲	۳/۸۰۷۸	-	۰/۹۶۲۵	۸۰
-	۲/۳۰۷۹	-	-	۶/۱۷۸۶	۳/۸۷۰۷	-	۱/۰۳۷۵	۹۶
-	۲/۵۱۴۷	-	-	۶/۳۲۲۵	۳/۸۰۷۸	-	۱/۰۳۷۵	۹۸
-	۲/۶۴۹۶	-	-	۶/۳۹۴۹	۳/۷۴۵۳	-	۱/۰۳۷۵	۹۹
-	۲/۸۵۷۶	-	-	۶/۵۴۰۵	۳/۶۸۲۹	-	۱/۰۳۷۵	۱۰۰
-	۱/۹۳۳۳	-	-	۶/۲۵۰۴	۴/۳۱۷۱	-	۱/۱۱۲۵	۱۱۰
-	۲/۸۴۸۷	-	-	۶/۹۰۹۳	۴/۰۶۰۶	-	۱/۱۱۲۵	۱۲۰
-	۱/۴۷۴۸	-	-	۶/۲۵۰۴	۴/۷۷۵۶	-	۱/۱۸۷۵	۱۳۰

جدول ۱۵- مشخصات عرضی گردابه‌ها در مجاورت دیوار بالای کانال برای زاویه ۶۰ درجه

طول ماکزیمم ارتفاع گردابه‌ها		فاصله ماکزیمم ارتفاع گردابه از ورودی بخش انبساطی				ماکزیمم ارتفاع گردابه‌ها		$\theta = 60^\circ$
$LMHX_2$	$LMHX_1$	$DMHX_4$	$DMHX_3$	$DMHX_2$	$DMHX_1$	MHX_2	MHX_1	Re
-	۰/۱۶۹۵	-	-	۰/۷۶۳۳	۰/۵۹۳۸	-	۰/۵۸۷۵	۲۰
-	۰/۰۱۶۹	-	-	۰/۶۱۰۷	۰/۵۹۳۸	-	۰/۷۳۷۵	۴۰
-	۰/۱۱۸۴	-	-	۰/۷۱۲۲	۰/۵۹۳۸	-	۰/۷۳۷۵	۵۰
-	۰/۱۶۹۵	-	-	۰/۷۶۳۳	۰/۵۹۳۸	-	۰/۷۳۷۵	۵۶
-	۰/۱۶۹۵	-	-	۰/۷۶۳۳	۰/۵۹۳۸	-	۰/۷۳۷۵	۵۷
-	۰/۰۶۷۶	-	-	۰/۶۶۱۴	۰/۵۹۳۸	-	۰/۷۳۷۵	۵۸
-	۰/۰۶۷۶	-	-	۰/۶۶۱۴	۰/۵۹۳۸	-	۰/۷۳۷۵	۶۰
-	۰/۰۶۷۶	-	-	۰/۶۶۱۴	۰/۵۹۳۸	-	۰/۷۳۷۵	۷۰
-	۰/۰۶۷۶	-	-	۰/۶۶۱۴	۰/۵۹۳۸	-	۰/۷۳۷۵	۸۰
-	۰/۱۱۸۴	-	-	۰/۷۱۲۲	۰/۵۹۳۸	-	۰/۷۳۷۵	۹۶
-	۰/۱۱۸۴	-	-	۰/۷۱۲۲	۰/۵۹۳۸	-	۰/۷۳۷۵	۹۸
۰/۸۸۳۷	۰/۱۱۸۴	۱۲/۶۸۵۷	۱۱/۸۰۲	۰/۷۱۲۲	۰/۵۹۳۸	۰/۰۶۲۵	۰/۷۳۷۵	۹۹
۱/۶۴۷۷	۰/۱۱۸۴	۱۳/۱۷۲۲	۱۱/۵۲۴۵	۰/۷۱۲۲	۰/۵۹۳۸	۰/۰۶۲۵	۰/۷۳۷۵	۱۰۰
۱/۶۱۵۷	۰/۱۶۹۵	۱۴/۱۷۳۲	۱۲/۵۵۷۵	۰/۷۶۳۳	۰/۵۹۳۸	۰/۲۱۲۵	۰/۷۳۷۵	۱۱۰
۱/۱۵۷۷	۰/۱۶۹۵	۱۴/۷۹۲۳	۱۳/۶۳۴۶	۰/۷۶۳۳	۰/۵۹۳۸	۰/۳۶۲۵	۰/۷۳۷۵	۱۲۰
۲/۵۴۸۴	۰/۲۲۰۷	۱۶/۱۸۳	۱۳/۶۳۴۶	۰/۸۱۴۵	۰/۵۹۳۸	۰/۴۳۷۵	۰/۷۳۷۵	۱۳۰



شکل ۴- کانتور سرعت برای اعداد رینولدز مختلف در سه زاویه ۳۰، ۴۵ و ۶۰ درجه



شکل ۳- کانتور خطوط جریان برای اعداد رینولدز مختلف در سه زاویه ۳۰، ۴۵ و ۶۰ درجه

۸- نتیجه گیری

مقدار طول گردابه به همراه بیشترین ارتفاع آن و طول بیشترین ارتفاع در سه زاویه ۳۰، ۴۵ و ۶۰ بررسی شده است و تمام نتایج محاسباتی به صورت منظم در جداول ۴-۱۵ ارائه شده است که داده‌های موجود در جداول و نمودارهای منتج از آن مبین نتایج زیر می‌باشد:

- ۱- با افزایش اندازه زاویه انبساطی، نرخ افزایش بیشینه ارتفاع کاهش می‌یابد، به طوری که اختلاف ارتفاع ماکزیمم در هر دو گردابه مجاور دیوار بالا و پایین کم می‌شود.
- ۲- با بیشتر شدن عدد رینولدز از مقدار ۱۴۰، دیگر اندازه MHV برای گردابه بزرگتر به مقدار زاویه انبساطی بستگی ندارد.

$M3$	شبکه نوع سوم
$Lv1, Lv3$	فاصله ابتدای گردابه از ورودی بخش انبساطی m
$Lv2, Lv4$	فاصله انتهای گردابه از ورودی بخش انبساطی m
$Lx1, Lx3$	فاصله بی بعد ابتدای گردابه‌ها از ورودی بخش انبساطی
$Lx2, Lx4$	فاصله بی بعد انتهای گردابه‌ها از ورودی بخش انبساطی
DV	طول گردابه‌ها m
DX	طول بی بعد گردابه‌ها
MHV	بیشینه ارتفاع گردابه‌ها m
MHX	بیشینه ارتفاع بی بعد گردابه‌ها
$LMHX$	طول بی بعد بیشینه ارتفاع گردابه
$DMHX$	فاصله بی بعد بیشینه ارتفاع گردابه از ورودی بخش انبساطی
Re	عدد بی بعد رینولدز

نمادهای یونانی

θ	زاویه بخش انبساطی
ρ	چگالی، kg/m^3
ν	ویسکوزیته سینماتیکی m^2/s
η	ویسکوزیته دینامیکی $N.s/m^2$

زیرنویس‌ها

i, j	شمارنده مولفه‌های بردار
r	شمارنده گردابه‌ها
in	ورودی کانال
out	خروجی کانال
$wall$	مجاورت دیواره کانال

مراجع

- [1] Durst F, Melling A, Whitelaw JH (1974) Low Reynolds number flow over a plane symmetric sudden expansion. J Fluid Mech 64: 111–128.
- [2] Dagtekin I, Unsal M (2011) Numerical analysis of axisymmetric and planar sudden expansion flows for laminar regime. Int J Numer Meth Fluids 65: 1133–1144.
- [3] Scott PS, Mirza FA (1986) A finite element analysis of laminar flows through planer and axisymmetric abrupt expansions. Computers & Fluids 14(4): 423–432.

۳- اندازه MHV برای هر دو گردابه مجاور دیوار بالا و پایین کانال تا قبل از عدد رینولدز بحرانی اول، یکسان می‌باشد و بعد از آن اندازه MHV برای گردابه کوچکتر ثابت می‌ماند.

۴- در اعداد رینولدز کوچک با افزایش مقدار زاویه انبساطی، بیشینه ارتفاع گردابه‌های اول در مجاور دیوار بالا و پایین از حالت یک نقطه تبدیل به یک خط می‌شود و در اعداد رینولدز بزرگ (بیشتر از عدد رینولدز بحرانی دوم)، بیشتر شدن زاویه انبساطی سبب افزایش طول این خط می‌شود.

۵- گردابه مجاور دیوار بالا و پایین کانال تا قبل از عدد رینولدز بحرانی اول کاملاً متقارن می‌باشد و با افزایش اندازه زاویه، طول گردابه هم از ابتدا و هم از انتهای آن گسترش می‌یابد؛ به عبارت دیگر با افزایش زاویه طول گردابه از دو طرف زیاد می‌شود. همچنین رشد انتهای گردابه سریعتر و بیشتر از ابتدای گردابه می‌باشد.

۶- با افزایش عدد رینولدز تا قبل از عدد رینولدز بحرانی دوم طول گردابه بزرگتر افزایش و طول گردابه کوچکتر کاهش (گردابه اول مجاور دیوار بالا) می‌یابد و بعد عدد رینولدز بحرانی دوم که منجر به ایجاد گردابه دوم در مجاور دیوار بالا می‌شود، طول گردابه بزرگتر کاهش و طول گردابه‌های کوچکتر (گردابه‌های اول و دوم مجاور دیوار بالا) افزایش می‌یابد.

۹- علایم و نشانه‌ها

V, U	سرعت سیال m/s
x, y	مختصات کارتزین m
h	ارتفاع کانال در بخش اول کانال m
H	ارتفاع کانال در بخش سوم کانال m
P	فشار N/m^2
ER	نسبت انبساطی در تبدیل واگرا
Er	خطای مطلق برای مقایسه طول گردابه‌ها m
$ERM1$	خطای نسبی برای شبکه نوع اول
$ERM2$	خطای نسبی برای شبکه نوع دوم
$L1$	طول بخش اول کانال m
$L2$	طول بخش دوم کانال m
$L3$	طول بخش سوم کانال m
$M1$	شبکه نوع اول
$M2$	شبکه نوع دوم

- [11] Fletcher DF, S.J. Maskell SJ, Patrick MA (1985) Heat and mass transfer computations for laminar flow in an axisymmetric sudden expansion. *Comp Fluids* 13: 207–221.
- [12] Pinho FT, Oliveira PJ, Miranda JP (2003) Pressure losses in the laminar flow of shear-thinning power-law fluids across a sudden axisymmetric expansion. *Int J of Heat and Fluid Flow* 24: 747–761.
- [13] Hawa T, Rusak Z (2000) Viscous flow in a slight asymmetric channel with a sudden expansion. *Phys Fluids* 12: 22–57.
- [۱۴] شاه‌مردان محمدمحسن، نوروزی محمود و شهبانی ظهیری امین (۱۳۹۱)، بررسی ناپایداری جریان نیوتنی در تبدیل تدریجی واگرایی صفحه‌ای. *مجله تربیت مدرس، تهران، تحت چاپ.*
- [15] Oliveira PJ, Pinho FT (1997) Pressure drop coefficient of laminar Newtonian flow in axisymmetric sudden expansions. *Int J Heat and Fluid Flow* 18: 518–529.
- [16] Neofytou P (2005) A 3rd order upwind finite volume method for generalized Newtonian fluid flows. *Adv Eng Softw* 36 (664).
- [4] Oliveira PJ (2003) Asymmetric flows of viscoelastic fluids in symmetric planar expansion geometries. *J Non-Newtonian Fluid Mechanics* 114: 33–63.
- [5] Oliveira PJ, Pinho FT, Schulte A (1998) A general correlation for the local loss coefficient in Newtonian axisymmetric sudden expansions. *Int J of Heat and Fluid Flow* 19: 655–660.
- [6] Battaglia F, Tavener SJ, Kulkarni AK, Merkle CL (1997) Bifurcation of low Reynolds number flows in symmetric channels. *J AIAA* 35: 99–105.
- [7] Schreck E, Schafer M (2000) Numerical study of bifurcation in three-dimensional sudden channel expansions. *Comput. Fluids* 29(583).
- [8] Shapira M, Degani D, Weihs D (1990) Stability and existence of multiple solutions for viscous flow in suddenly enlarged channels. *Comp. Fluids* 18: 239–258.
- [9] Durst F, Pereira JCF, C. Tropea (1993) The plane symmetric sudden expansion flow at low Reynolds numbers. *J Fluid Mech* 248(567).
- [10] Bell BC, Surana KS (1994) p-Version least squares finite element formulation for two-dimensional incompressible non-Newtonian isothermal and nonisothermal fluid flow. *Int J Numer Methods Fluids* 18: 127–162.