



## اثرات پیچش بر نیروی بحرانی کمانش و فرکانس طبیعی لوله ساخته شده از آلیاژ حافظه‌دار

رضا خرم‌آبادی<sup>۱</sup> و جلیل رضائی‌پژند<sup>۲\*</sup>

<sup>۱</sup> دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد

<sup>۲</sup> استاد، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد

مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۰۲/۱۵؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۶/۰۳/۱۷؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۰۶/۱۱

### چکیده

آلیاژهای حافظه‌دار عنوان گروهی از مواد هوشمند می‌باشند که خواص متمایز و برتری نسبت به سایر آلیاژها دارند. رفتار تنش- کرنش این مواد دو پدیده غیرخطی، اثر حافظه‌داری و اثر شبه‌الاستیک را در برمی‌گیرد. در این پژوهش اثرات پیچش و تغییر فاز اتفاق افتاده در آلیاژ حافظه‌دار بر نیروی بحرانی کمانش و همچنین فرکانس طبیعی خمشی لوله یک سر گیردار از جنس آلیاژ حافظه‌دار، مورد بررسی قرار خواهد گرفت. لازم به ذکر است که تمام تحلیل‌ها با استفاده از نرم‌افزار آباکوس صورت گرفته است. با توجه به عدم تعریف اولیه آلیاژ حافظه‌دار در نرم‌افزار آباکوس، با توسعه و استفاده از زیرروال یومت (UMAT) سه‌بعدی بر پایه سه مدل بوید و لاگوداس، لیانگ و راجرز و همچنین تاناکا در نرم‌افزار، تحلیل سه‌بعدی آلیاژهای حافظه‌دار ممکن شده است. تهیه زیرروال یومت خواص آلیاژ حافظه‌دار، امکان هرگونه استفاده از امکانات نرم‌افزار جهت تحلیل رفتار سازه‌های هوشمند ساخته شده با آلیاژ حافظه‌دار را برای طراح فراهم می‌سازد. در پایان این تحقیق، اثرات تغییر قطرهای داخلی و خارجی لوله، با شرط ثابت ماندن وزن، در تسریع و تاخیر شروع و پایان تغییر فاز و همچنین در میزان تغییر مقادیر نیروی بحرانی کمانش و فرکانس طبیعی، مورد بررسی قرار گرفته است.

**کلمات کلیدی:** پیچش؛ فرکانس طبیعی؛ نیروی بحرانی کمانش؛ آلیاژ حافظه‌دار؛ زیرروال یومت.

## Effects of Initial Twist on Critical Buckling Load and Frequency Response of SMA Tubes

R. Khorramabadi<sup>1</sup>, J. Rezaeepazhand<sup>2,\*</sup>

<sup>1</sup> Ph.D. Student, Mech. Eng., Ferdowsi Univ., Mashhad, Iran.

<sup>2</sup> Prof., Mech. Eng., Ferdowsi Univ., Mashhad, Iran.

### Abstract

Shape Memory Alloys (SMAs) are a group of alloys, which have distinct and superior properties compared to conventional alloys. They demonstrate two particular non - linear stress - strain behavior, Shape Memory Effect and Pseudoelasticity (Superelasticity). In this paper, we have studied transverse vibration and buckling of pretwisted cantilever SMA tubes subjected to the phase change. All analyzes were done using the ABAQUS finite element software. Since the modeling of SMA is not available in ABAQUS software, the UMAT subroutine in the software is used to implement the three SMA models, Boyd & Lagoudas, Liang & Rogers and Tanaka, to FE analysis. Preparing a user material subroutine enables the designer to analyze any structure that made of shape memory alloys in the software. The effect of internal and external diameter of the constant weight tube on phase change delay, critical buckling load and natural frequency is discussed.

**Keywords:** Torsion; Free Vibration; Buckling Load; Shape Memory Alloys; UMAT Subroutine.

## ۱- مقدمه

آلیاژهای حافظه دار<sup>۱</sup> عنوان گروهی از مواد هوشمند می باشند که خواص متمایزی نسبت به سایر آلیاژها دارند. رفتار تنش- کرنش این مواد، دو پدیده غیرخطی اثر حافظه داری<sup>۲</sup> و اثر شبه الاستیک<sup>۳</sup> را در برمی گیرد [۱]. توسعه روزافزون آلیاژهای حافظه دار به شکل سیم، میله و شکل های متنوع دیگر، آن ها را به مواد بسیار مهمی در ایجاد سازه های مهندسی تبدیل کرده است. دو اثر دمایی خاص آن ها که شامل، اثر حافظه داری و اثر شبه الاستیک می شود، باعث شده است که کاربردهای این مواد طیف گسترده ای را در بر گیرد.

تحقیقات زیادی در مورد آلیاژهای حافظه دار صورت گرفته است. در سال ۱۹۹۱ تابوشی و تاناکا [۲] با استفاده از مدل تاناکا، با فرض پیچش خالص، آنالیزی روی فنر پیچشی تحت بار محوری انجام داده، سخت شونده گی آن را در طی تغییر فاز مورد بررسی قرار دادند. در سال ۱۹۹۹ چوی و همکاران [۳]، با استفاده از الیاف آلیاژ حافظه دار کماتش ستون های کامپوزیتی چندلایه را کنترل کردند. در همین سال لی و همکاران [۴]، کماتش حرارتی ستون های کامپوزیتی چند لایه تقویت شده با آلیاژهای حافظه دار را مورد بررسی قرار دادند. در سال ۲۰۰۰ کانفو و همکاران [۵]، تحقیقاتی تئوری و تجربی روی تغییر شکل پیچشی لوله های جدار نازک انجام دادند که دارای سیم های آلیاژ حافظه دار بودند؛ ولی نتایج تئوری و تجربی آن ها، اختلاف زیادی با یکدیگر داشت. در سال ۲۰۰۰ کیدوی و لاگوداس [۶] و در سال ۲۰۰۵ رو و همکاران [۷]، با استفاده از معادلات ساختاری سه بعدی و زیرروال یومت<sup>۴</sup> در آباکوس، مدل هایی مدل هایی را مانند لوله تحت بار پیچشی مورد تحلیل قرار دادند. در سال ۲۰۰۸ لی و همکاران [۸]، با استفاده از یک مدل اجزا محدود، فرکانس طبیعی قبل و بعد از مدهای کماتش را اندازه گرفته، باهم مقایسه کردند. در همین سال ایکاردی و فرو [۹]، از آلیاژهای حافظه دار به عنوان محرک پیچشی در بال هوشمند یک هواپیمای بدون سرنشین استفاده کردند و به این نتیجه رسیدند که با استفاده از

محرک پیچشی می توانند به تمام بهبودهای آئرو دینامیکی که انتظار داشتند دست یابند. در سال ۲۰۰۹ کو و همکاران [۱۰]، کماتش کامپوزیت های چند لایه تقویت شده با آلیاژ حافظه دار را مورد بررسی قرار دادند. در سال ۲۰۱۰ لی و همکاران [۱۱]، ارتعاشات آزاد ورق های تقویت شده را قبل و بعد از کماتش، مورد بررسی قرار دادند. در سال ۲۰۱۱ شیائو و همکاران [۱۲]، ارتعاشات آزاد کامپوزیت های چندلایه تقویت شده با آلیاژ حافظه دار، پس از کماتش را مورد بررسی قرار دادند. در سال ۲۰۱۲ میرزائی فر و همکاران [۱۳]، میله های با مقطع دایره ای آلیاژ حافظه دار تحت پیچش خالص را آنالیز گرمایی مکانیکی کرده، ثابت نمودند که در آنالیزهایی که دما تغییر نمی کند، عمدتاً منجر به پاسخ هایی غیردقیق می شود. در سال ۲۰۱۳ تابوشی و همکاران [۱۴]، ویژگی های نوار آلیاژ حافظه دار تحت تغییر شکل پیچشی را مورد بررسی قرار داده، کاربردهای آن را به عنوان محرک دوار بررسی کردند و دریافتند که عمر خستگی این نوارها تحت بار پیچشی متناوب، کمتر از عمر خستگی آن ها تحت بار پیچشی ضربانی (پالسی) است. برزگری و همکاران [۱۵] در سال ۲۰۱۳، با استفاده از تئوری برنولی و تیموشنکو، فرکانس طبیعی یک تیر تقویت شده با آلیاژ حافظه دار را تحت شرایط مختلف بررسی کردند. در سال ۲۰۱۵ فروزش و جعفری [۱۶]، ارتعاشات اجباری پوسته استوانه ای ساخته شده از آلیاژ حافظه دار را مورد مطالعه قرار داده، اثرات فشار داخلی بر تغییر فاز و استحکام آن ها را بررسی کردند. نتیجه مهمی که در پژوهش آن ها به دست آمد، این بود که تغییر فاز آلیاژ منجر به کاهش مدول کشسانی و استحکام آلیاژ شده که این امر افزایش دامنه ارتعاشات اجباری را نتیجه خواهد داد. در سال ۲۰۱۶ شکی و ذاکرزاده [۱۷] توانستند، پدیده هسترزیس در آلیاژ حافظه دار را به روش مد لغزشی فازی، مدل سازی کنند.

در این پژوهش اثرات پیچش و تغییر فاز متعاقب اتفاق افتاده در آلیاژ حافظه دار بر فرکانس طبیعی خمشی لوله یک سر گیردار ساخته شده از آلیاژ حافظه دار و همچنین میزان تنش به وجود آمده در لوله مورد بررسی قرار خواهد گرفت. لازم به ذکر است که تمام تحلیل ها با استفاده از نرم افزار آباکوس صورت گرفته است. با توجه به عدم تعریف اولیه آلیاژ حافظه دار در نرم افزار آباکوس، از زیرروال یومت سه بعدی بر

<sup>1</sup> Shape Memory Alloys

<sup>2</sup> Shape Memory Effect

<sup>3</sup> Pseudoelasticity

<sup>4</sup> UMAT Subroutine

دماهای شروع و پایان تغییر فاز مارتنزیتی به آستونیتی بوده، زیرنگاشت‌های  $s$  و  $f$  به ترتیب نشانگر، شروع و پایان تغییر فاز مربوطه است.

موضوع مهم دیگری که دانستن آن برای ادامه روند کار بسیار مهم است، اینکه چند درصد ماده در فاز آستونیت و چند درصد آن در فاز مارتنزیت است. به همین منظور، پارامتری به نام جزء مارتنزیتی که با علامت  $\gamma$  نشان داده می‌شود، تعریف شده که نشان‌دهنده درصدی از آلیاژ است که در فاز مارتنزیتی قرار گرفته و مقدار آن بین صفر و یک متغیر خواهد بود.

## ۲-۲- اثرات شبه‌الاستیک و حافظه‌داری

اثر یاد شده با توجه به رفتار ماده تحت انواع بار از قبیل، تک محوره، خمشی یا پیچشی متمایز می‌شوند. در شکل ۱ نمودار تنش- کرنش برای اثر شبه‌الاستیک به صورت شماتیک رسم شده است. اگر نمودار به چهار قسمت تقسیم شود، ابتدا ماده در فاز آستونیتی است که با اعمال تنشی به بزرگی  $\sigma^{Ms}$ ، تغییر فاز از آستونیتی به مارتنزیتی شروع شده، این تغییر فاز تا تنشی معادل  $\sigma^{Mf}$  که ماده کاملاً مارتنزیتی شده ادامه می‌یابد. حال اگر بار از روی جسم برداشته شود، ابتدا ماده تا تنش  $\sigma^{As}$  به صورت الاستیک برگشته و پس از آن تغییر فاز از حالت مارتنزیتی به آستونیتی شروع و در تنش  $\sigma^{Af}$  این تغییر فاز پایان یافته و پس از آن جسم به شکل اولیه خود باز می‌گردد.

نمودار اثر حافظه‌داری نیز همانند نمودار اثر شبه‌الاستیک، دارای چهار ناحیه است. دو ناحیه اول دقیقاً همانند اثر شبه‌الاستیک است. تفاوت‌ها پس از باربرداری در ناحیه سوم نمایان شده، تنش جسم به صورت الاستیک کاملاً از بین رفته، ولی مقداری کرنش پسماند از آن باقی می‌ماند. ناحیه چهارم نمودار، برگشت کرنش پسماند بوده که البته نیاز به مقداری حرارت دهی به آلیاژ وجود دارد. این حرارت‌دهی در نقطه  $H$  اعمال شده و تا از بین رفتن کرنش پسماند ادامه خواهد داشت. نمودار تنش- کرنش اثر حافظه‌داری، در شکل ۲ نشان داده شده است. لازم به ذکر است که اثر شبه‌الاستیک در دماهای بالاتر از  $A_f$  و اثر حافظه‌داری در دماهای پایین‌تر از  $M_f$  اتفاق می‌افتد. دلیل این امر، پایدار بودن فاز آستونیت در دماهای بالا و فاز مارتنزیت در دماهای پایین است.

پایه سه مدل بوید و لاگوداس، لیانگ و راجرز و همچنین تاناکا برای تعریف این ماده در این نرم‌افزار استفاده شده است. تهیه زیرروال یومت خواص آلیاژ حافظه‌دار، امکان هرگونه استفاده از امکانات نرم‌افزار جهت تحلیل رفتار سازه‌های هوشمند ساخته شده با آلیاژ حافظه‌دار را برای طراح فراهم می‌سازد. تحلیل ارتعاشات و کماتش، از جمله مواردی است که در این تحقیق مورد بررسی واقع گشته‌اند.

## ۲- معادلات ساختاری آلیاژهای حافظه‌دار

در این بخش رفتار آلیاژهای حافظه‌دار توضیح داده می‌شود و معادلات سه‌بعدی و الگوریتم عددی نوشتن برنامه یومت، توضیح داده خواهد شد. یومت ابزاری است که آباکوس برای تعریف رفتار مکانیکی یک ماده در اختیار کاربر قرار می‌دهد. این ابزار بوسیله زیرروال به زبان برنامه‌نویسی فرترن در نرم‌افزار بکار گرفته می‌شود. این نوع زیرروال نویسی، مختص تحلیل‌های غیرصریح است که در تحلیل‌های استاتیکی و شبه‌استاتیکی، مورد استفاده قرار می‌گیرد [۱۸]. برای شبیه‌سازی رفتار آلیاژ حافظه‌دار نیاز به بررسی رفتار و معادلات ساختاری این مواد بوده که در بخش بعدی به آن پرداخته خواهد شد.

### ۲-۱- بررسی تغییرات فاز در آلیاژ حافظه‌دار بر پایه

#### مدل فیزیکی

بر پایه مدل فیزیکی می‌توان به چگونگی ایجاد کرنش‌ها و همچنین بازیافت آنها پی برد. مهمترین نوع آن‌ها، آلیاژی از نیکل و تیتانیوم است که نایتینول<sup>۱</sup> نامیده می‌شود. در دماهای بالاتر از دمای  $A_f$  که این دما در انتهای همین قسمت معرفی خواهد شد، آلیاژ حافظه‌دار در فاز آستونیتی قرار دارد. وقتی دمای آلیاژ کاهش می‌یابد، ماده تغییر فازی از فاز آستونیتی به فاز مارتنزیتی می‌دهد. این تغییر فاز باعث تنش‌ها و کرنش‌های بزرگی شده، هر دو اثر حافظه‌دار بودن و شبه‌الاستیک از همین تغییر فاز ناشی می‌شوند. این تغییرات فاز مرتبط با دماهای  $M_s$ ،  $M_f$ ،  $A_s$  و  $A_f$  است  $(M_f < M_s < A_s < A_f)$  که دماهای  $M$  به ترتیب، دماهای شروع و پایان تغییر فاز آستونیتی به مارتنزیتی و دماهای  $A$  به ترتیب،

<sup>۱</sup> NiTiInol

که در معادله بالا  $\sigma$ ،  $\xi$ ،  $T$  و  $T_0$  به ترتیب، تانسور تنش کوشی، تانسور کرنش انتقال فاز، جزء مارتنزیتی، دمای کنونی و دمای مرجع است. ثابت‌های ماده  $S$ ،  $\alpha$ ،  $c$ ،  $\rho$ ،  $s_0$  و  $u_0$  و  $f(\xi)$  به ترتیب نمایانگر، تانسور سفتی مؤثر، تانسور ضریب انبساط حجمی مؤثر، چگالی، گرمای ویژه مؤثر، آنتروپی مؤثر مرجع، انرژی ورودی مؤثر خاص و تابع سختی انتقال فاز یا تغییر فاز است. تابع سختی انتقال فاز برای سه مدل مذکور متفاوت بوده، در پیوست به آن اشاره شده است [۱۸]. خواص مؤثر ماده به صورت رابطه (۲) تعریف می‌شوند [۶]:

$$S = S^M + \xi(S^M - S^A) \quad (۲-الف)$$

$$\alpha = \alpha^M + \xi(\alpha^M - \alpha^A) \quad (۲-ب)$$

$$c = c^M + \xi(c^M - c^A) \quad (۲-ج)$$

$$s_0 = s_0^M + \xi(s_0^M - s_0^A) \quad (۲-د)$$

$$u_0 = u_0^M + \xi(u_0^M - u_0^A) \quad (۲-ه)$$

بالانویس‌های  $A$  و  $M$  مربوط به آستونیتی و مارتنزیتی بودن آلیاژ است. انرژی داخلی مرتبط با انرژی آزاد گیبس به صورت رابطه (۳) تعریف می‌شود [۶]:

$$u(\sigma, T, \xi, \varepsilon^t) = G + Ts + \frac{1}{\rho} \sigma : \varepsilon \quad (۳)$$

کرنش کل و انتروپی مؤثر به ترتیب در معادلات ۴ و ۵ تعریف می‌شوند [۶]:

$$\varepsilon = -\rho \frac{\partial G}{\partial \sigma} = S : \sigma + \alpha(T - T_0) + \varepsilon^t \quad (۴)$$

$$s = -\frac{\partial G}{\partial T} = \frac{1}{\rho} \sigma : \alpha + c \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + s_0 \quad (۵)$$

رابطه بین تانسور کرنش انتقال فاز و جزء مارتنزیتی، به صورت رابطه (۶) خواهد بود [۶]:

$$\xi^t = \Lambda \xi \quad (۶)$$

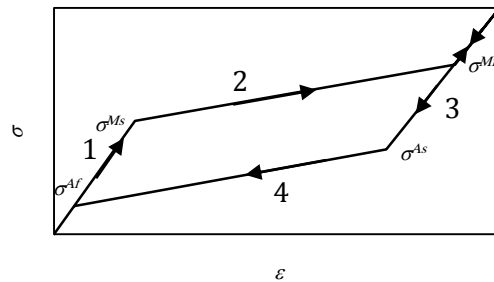
که  $\Lambda$  تانسور انتقال فاز بوده، مسیره‌های کرنش انتقال فاز را تعیین می‌کند و به صورت معادله ۷ تعریف می‌شود [۲۲]:

$$\Lambda = \begin{cases} \frac{3}{2} H \frac{\sigma'}{\bar{\sigma}} & , \xi > 0 \\ H \frac{\varepsilon^{t-r}}{\bar{\varepsilon}^{t-r}} & , \xi < 0 \end{cases} \quad (۷)$$

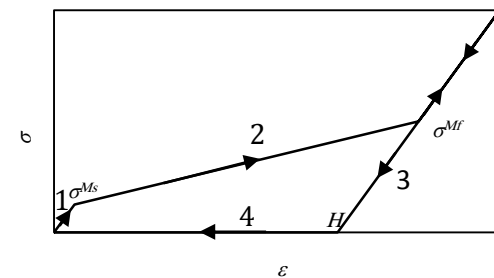
$H$  بیشترین کرنش انتقال فاز تک محوره و  $\varepsilon^{t-r}$  کرنش تغییر فاز مارتنزیت به آستونیت است [۶]:

$$\bar{\sigma}^m = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\sigma^{m'}\| \quad (۸)$$

$$\sigma^{m'} = \sigma^m - \frac{1}{3} \text{tr}(\sigma^m) \mathbf{I} \quad (۹)$$



شکل ۱- نمودار تنش - کرنش اثر شبه الاستیک [۱]



شکل ۲- نمودار تنش - کرنش اثر حافظه داری [۱]

### ۲-۳- معادلات ساختاری و الگوریتم زیرروال یومت

معادلات ساختاری اغلب مواد در طبیعت شبیه به هم بوده، فقط مقادیر ثابت آنها با یکدیگر متفاوت است که این خواص در بخش ماده آباکوس تعریف می‌شود؛ اما مواد بسیار زیادی هم در طبیعت وجود دارند که دارای معادلات ساختاری منحصر به فرد بوده، تعریف آنها در نرم‌افزارها انجام نشده است. از این رو، برای تحلیل این گونه مواد، می‌توان از زیرروال یومت استفاده کرده، معادلات ساختاری را به این نرم افزار وارد کرد. مدل‌های بنیادی یکپارچه برای آلیاژهای حافظه‌دار توسط سه گروه ساتو و تاناکا [۱۹]، لیانگ و راجرز [۲۰] و همچنین بوید و لاگوداس [۱] ارائه گشته که ابتدا به معرفی مدل بوید و لاگوداس می‌پردازیم. در این مدل انرژی آزاد گیبس به صورت رابطه (۱) ارائه شد [۱]:

$$G(\sigma, T, \xi, \varepsilon^t) = \left(-\frac{1}{2}\rho\right) \sigma : S : \sigma - \left(\frac{1}{\rho}\right) [\alpha(T - T_0)] + c \left[ (T - T_0) - T \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) \right] - s_0 T + u_0 + f(\xi) \quad (۱)$$

برای بدست آوردن نرخ کرنش غیر الاستیک، می‌توان با استفاده از قاعده زنجیری از رابطه کرنش مشتق گرفت :

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\sigma}, T, \xi) = \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{\sigma} + \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial T} \dot{T} + \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \xi} \dot{\xi} \quad (16)$$

نرخ کلی تنش غیر الاستیک می‌تواند به صورت نرخ تغییر کرنش کلی بر اثر نرخ تغییر جزء مارتنزیتی تعریف شود [۶]:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{in} = \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}{\partial \xi} \dot{\xi} \quad (17)$$

با تغییر سمت راست معادله به معادله (۱۸) می‌رسیم:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{in} = \left[ \Delta \mathbf{S} : \boldsymbol{\sigma} + \Delta \boldsymbol{\alpha} (T - T_0) + \frac{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^t}{\partial \xi} \right] \dot{\xi} \quad (18)$$

هم اکنون می‌توان مشاهده کرد که ترم آخر معادله بالا، تانسور انتقال فاز را تداعی می‌کند [۶]:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{in} = [\Delta \mathbf{S} : \boldsymbol{\sigma} + \Delta \boldsymbol{\alpha} (T - T_0) + \boldsymbol{\Lambda}] \dot{\xi} \quad (19)$$

با استفاده از معادلات ۱۱ و ۱۳ می‌توان مشتق تابع انتقال فاز نسبت به تنش را بدست آورد [۶]:

$$\frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \begin{cases} \Delta \mathbf{S} : \boldsymbol{\sigma} + \Delta \boldsymbol{\alpha} (T - T_0) + \boldsymbol{\Lambda} & , \quad \xi > 0 \\ -\Delta \mathbf{S} : \boldsymbol{\sigma} - \Delta \boldsymbol{\alpha} (T - T_0) - \boldsymbol{\Lambda} & , \quad \xi < 0 \end{cases} \quad (20)$$

بنابراین نرخ کرنش غیرالاستیک برابر است با :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{in} = \begin{cases} \xi \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} & , \quad \xi > 0 \\ -\xi \frac{\partial \phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} & , \quad \xi < 0 \end{cases} \quad (21)$$

در انتها، تانسورهای ژاکوبی مکانیکی و دما به ترتیب در معادلات ۲۲ و ۲۳ تعریف می‌شوند [۶]:

$$\mathcal{L} = \boldsymbol{\nu}_{n+1} - \mathbf{H}_{n+1} \otimes \mathbf{H}_{n+1} \quad (22)$$

$$\boldsymbol{\Theta} = -\mathcal{L} : \boldsymbol{\alpha}_{n+1} - \frac{1}{c} \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial T} \mathbf{H}_{n+1} \quad (23)$$

که در آن:

$$c = \sqrt{\frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \boldsymbol{\nu}_{n+1} : \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} - \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \xi}} \quad (24)$$

$$\mathbf{H}_{n+1} = \frac{\boldsymbol{\nu}_{n+1} : \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}}{c} \quad (25)$$

$$\boldsymbol{\nu}_{n+1} = \left[ \mathbf{S}_{n+1} + (\xi_{n+1} - \xi_n) \frac{\partial \boldsymbol{\Lambda}_{n+1}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]^{-1} \quad (26)$$

یکی از مهمترین پارامترهایی که در تحلیل آلیاژهای حافظه‌دار وجود دارد، جزء مارتنزیتی است. به منظور ایجاد زیرروال یومت آلیاژهای حافظه‌دار، دانستن میزان تغییرات جزء مارتنزیتی نیز، مورد نیاز خواهد بود که به ترتیب برای

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{t-r} = \sqrt{\frac{2}{3}} \|\boldsymbol{\varepsilon}^{t-r}\| \quad (10)$$

که طبق تعریف  $\|0\|^2 = (0:0)$  همچنین ذکر این موضوع بسیار مهم است که نرخ کرنش تغییر فاز  $\dot{\xi}^t$ ، بخشی از نرخ کرنش غیر الاستیک  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{in}$  است. ترکیب نیروی ترمودینامیکی و جزء مارتنزیتی، معادله زیر را نتیجه می‌شود [۲۱]:

$$\pi = \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\Lambda} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma} : \Delta \mathbf{S} : \boldsymbol{\sigma} + \Delta \boldsymbol{\alpha} : \boldsymbol{\sigma} (T - T_0) - \frac{\partial f}{\partial \xi} - \rho \Delta u_0 + \rho \Delta s_0 T - \rho \Delta c \left[ (T - T_0) - T \ln \left( \frac{T}{T_0} \right) \right] \quad (11)$$

که:

$$\Delta \mathbf{S} = \mathbf{S}^M - \mathbf{S}^A \quad (12-f)$$

$$\Delta \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}^M - \boldsymbol{\alpha}^A \quad (12-b)$$

$$\Delta c = c^M - c^A \quad (12-c)$$

$$\Delta s_0 = s_0^M - s_0^A \quad (12-d)$$

$$\Delta u_0 = u_0^M - u_0^A \quad (12-e)$$

تابع انتقال فاز بر اساس نیروی ترمودینامیکی در معادله ۱۳ تعریف می‌شود [۷]:

$$\phi = \begin{cases} \pi - Y^* & , \quad \xi > 0 \\ -\pi - Y^* & , \quad \xi < 0 \end{cases} \quad (13)$$

$Y^*$  نشان دهنده اتلاف انرژی در زمان تغییر فاز بوده، برابر با رابطه (۱۴) است [۶]:

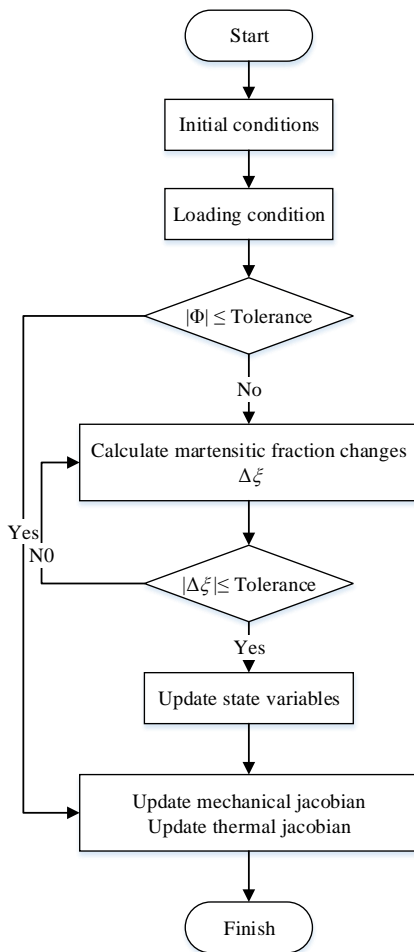
$$Y^* = -\frac{1}{2} \rho \Delta s_0 (A_f - A_s) + \frac{1}{4} (M_s - M_f - A_f + M_s) \quad (14)$$

شرایط کان-تاگر برای نرخ جزء مارتنزیتی به صورت معادله (۱۵) تعریف می‌شود [۶]:

$$\dot{\xi} \geq 0, \phi(\boldsymbol{\sigma}, T, \xi) \leq 0 \rightarrow \phi \dot{\xi} = 0 \quad (15)$$

$$\dot{\xi} \leq 0, \phi(\boldsymbol{\sigma}, T, \xi) \leq 0 \rightarrow \phi \dot{\xi} = 0$$

$\phi$  تابع انتقال فاز است که وظیفه تعریف دومین الاستیک را بر عهده دارد. در زمان اعمال نیرو، تمام معادلات باید به صورت همزمان اتفاق بیفتند. برای  $\phi \leq 0$ ، برای برقراری شرط کان-تاگر باید  $\dot{\xi} = 0$  که نشان‌دهنده قسمت الاستیک نمودار تنش-کرنش آلیاژ است. از طرف دیگر، شرط کان-تاگر برای تغییر فاز از آستونیتی به مارتنزیتی به صورت  $\phi = 0$  و  $\dot{\xi} > 0$  و مارتنزیتی به آستونیتی به صورت  $\phi = 0$  و  $\dot{\xi} < 0$  ارضا می‌شود.



شکل ۳- الگوریتم زیرروال یومت مورد استفاده برای تحلیل آلیاژهای حافظه دار در آباکوس

چرخشی به میزان ۱ رادیان قرار می‌گیرد. دمای جسم در طول تحلیل ثابت و برابر با ۵۲ درجه سانتی‌گراد بوده که بالاتر از دمای پایان آستونیتی شدن ماده است. استوانه یک‌سر گیردار در نظر گرفته شده قبل و پس از اعمال جابه‌جایی در انتهای آزاد، به ترتیب در شکل ۴ نشان داده شده است.

در شکل ۵ نیز مقایسه‌ای بین نتایج لاگوداس [۶] و نتایج مطالعه حاضر با استفاده از زیرروال یومت نوشته شده نشان داده شده است. در این اعتبارسنجی علاوه بر مدل بوید و لاگوداس، نتایج مدل ساتو و تاناکا و همچنین مدل لیانگ و راجرز نیز، مورد بررسی قرار گرفته‌اند. با توجه به انطباق داده‌ها، می‌توان به نتایج حاصل از این زیرروال اعتماد کرد. در

تغییر فاز پیش‌رونده یا آستونیت به مارتنزیت و برای تغییر فاز پس‌رونده یا مارتنزیت به آستونیت در تکرار k ام به صورت زیر تعریف می‌شود [۶]:

$$\Delta \xi_{n+1}^{(k)} = \frac{\phi_{n+1}^{(k)} - \frac{\partial \phi_{n+1}^{(k)}}{\partial \sigma} : \boldsymbol{\nu}_{n+1}^{(k)} : \mathbf{R}_{n+1}^{t(k)}}{\frac{\partial \phi_{n+1}^{(k)}}{\partial \sigma} : \boldsymbol{\nu}_{n+1}^{(k)} : \frac{\partial \phi_{n+1}^{(k)}}{\partial \sigma} - \frac{\partial \phi_{n+1}^{(k)}}{\partial \xi}} \quad (27-f)$$

$$\Delta \xi_{n+1}^{(k)} = \frac{\phi_{n+1}^{(k)} - \frac{\partial \phi_{n+1}^{(k)}}{\partial \sigma} : \boldsymbol{\nu}_{n+1}^{(k)} : \mathbf{R}_{n+1}^{t(k)}}{-\frac{\partial \phi_{n+1}^{(k)}}{\partial \sigma} : \boldsymbol{\nu}_{n+1}^{(k)} : \frac{\partial \phi_{n+1}^{(k)}}{\partial \sigma} - \frac{\partial \phi_{n+1}^{(k)}}{\partial \xi}} \quad (27-b)$$

که در آن:

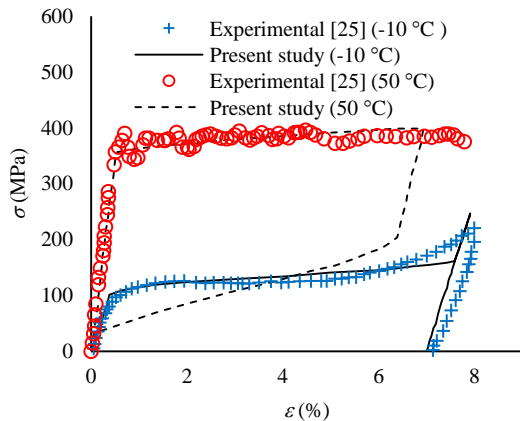
$$\mathbf{R}_{n+1}^{t(k)} = -\boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^{t(k)} + \boldsymbol{\varepsilon}_n^t + (\xi_{n+1}^{t(k)} - \xi_n) \boldsymbol{\Lambda}_{n+1}^{t(k)} \quad (28)$$

با استفاده از معادلات این بخش، الگوریتمی برای زیرروال یومت آلیاژ حافظه‌دار نوشته شده که در شکل ۳ نشان داده شده است. تلورانسی برابر با یک میکرون برای همگرایی تغییرات جزء مارتنزیتی و تغییرات تابع انتقال فاز در نظر گرفته شده است. در تلورانس‌هایی بزرگ‌تر از یک میلی، نتایج همگرا بوده، تغییر زیادی در آن‌ها مشاهده نمی‌شود.

زیرروال یومت نوشته شده برای آلیاژهای حافظه‌دار، قابلیت انجام انواع تحلیل‌ها اعم از خمش، پیچش، کشش، ارتعاشات و کمانش را در آباکوس فراهم آورده است. با توجه به در نظر گرفته شدن معادلات مربوط به هر سه مدل بوید و لاگوداس، لیانگ و راجرز و همچنین تاناکا در این زیرروال، می‌توان نتایج مربوط مدل‌ها را ارزیابی و مقایسه کرد. تحلیل پیچش و ارتعاشات و همچنین پیچش و کمانش، از مواردی هستند که در این پژوهش مورد مطالعه قرار گرفته و نتایج آن‌ها مورد بررسی قرار گرفته‌اند. این نتایج در بخش‌های بعدی، مورد بحث قرار گرفته‌اند.

### ۳- تحلیل

در این بخش استوانه‌ای از جنس آلیاژ حافظه‌دار به طول ۸۲ میلی‌متر در نظر گرفته می‌شود که دارای شعاع‌های داخلی و خارجی ۲.۵ و ۳.۱۷ میلی‌متر است. برای اعتبارسنجی زیرروال نوشته شده، همانند مدل تحلیل شده توسط لاگوداس [۶]، طول استوانه به ۲۴ قسمت و راستای محیط به ۱۸ قسمت تقسیم شده که مدل را به ۴۳۲ المان تقسیم می‌کند. یک انتهای استوانه ثابت بوده، انتهای دیگر تحت



شکل ۶- نمودارهای تنش- کرنش مقایسه نتایج تئوری و تجربی اثر شبه‌الاستیک و حافظه‌داری [۲۳]

#### ۴- نتایج

در این بخش به بررسی نتایج پرداخته خواهد شد. در جدول ۱، مشخصات آلیاژ حافظه‌دار استفاده شده در لوله ارائه شده است. تحلیل روی استوانه به‌گونه‌ای است که درجات آزادی یک طرف آن به‌صورت کامل گرفته شده، به انتهای آزاد آن چرخشی به‌اندازه  $\theta$  حول محور اعمال می‌شود. همانطور که گفته شد، با اعمال نیرو در آلیاژ حافظه‌دار تغییر فاز اتفاق خواهد افتاد.

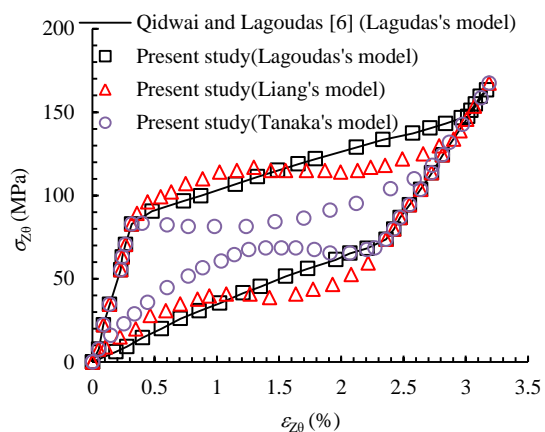
در شکل‌های ۷ و ۸ تغییرات جزء مارتنزیتی در حالت‌های بارگذاری و باربرداری برای زاویه‌های پیچش مختلف بر حسب زمان رسم شده است. در تحلیل انجام شده، فرض شده است که زاویه مورد نظر در زمان یک ثانیه به انتهای لوله اعمال شده است. با توجه به نمودار شکل ۷، استوانه ابتدا کاملاً آستونیتی بوده، پس از چرخشی حدود ۰/۳۶ رادیان، وارد قسمت پلاستیک شده و تغییر فاز از آستونیتی به مارتنزیتی آغاز می‌شود. برای اینکه تغییر فاز به‌صورت کامل انجام شود، چرخشی معادل ۱.۵۵ رادیان مورد نیاز است.

برای تشخیص میزان تاثیر تغییر فاز و زاویه پیچش بر فرکانس طبیعی استوانه، نمودار شکل ۹ رسم شده است که در آن دو محور افقی پایین و بالا به ترتیب نشان‌دهنده، زاویه چرخش و جزء مارتنزیتی بوده، محور عمودی هم فرکانس طبیعی خمشی در مود اول را نشان می‌دهد. با توجه به شکل‌های ۷ و ۸، این دو کمیت جدا از یکدیگر نیستند. با

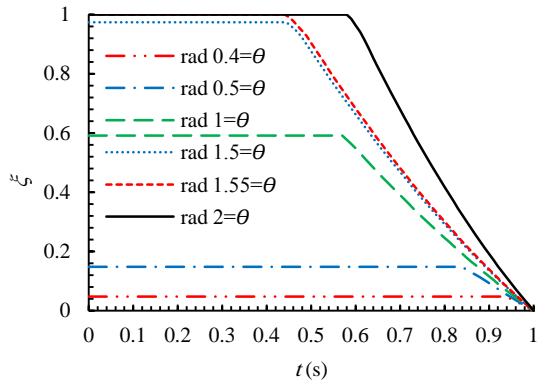
شکل ۶ نیز، صحت سنجی بین داده‌های به دست آمده در این پژوهش و همچنین داده‌های تجربی [۲۳] در دو دمای ۱۰- (اثر حافظه‌داری) و ۵۰ (اثر شبه‌الاستیک) درجه سانتی‌گراد نشان داده شده است. علت عدم تطبیق نتایج تئوری در اثر شبه‌الاستیک، آستانه‌ای بودن تنش و کرنش اعمالی به نمونه است. علاوه بر این در اعتبارسنجی زیرروال برای نیروهای کششی و همچنین تحلیل ارتعاشات، نتایج قابل‌قبولی به دست آمده است [۲۴].



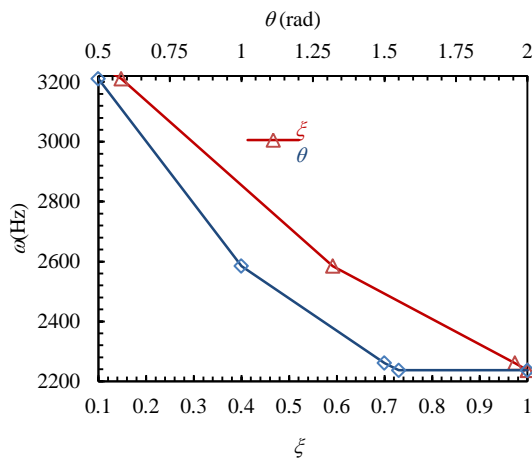
شکل ۴- نمای قبل و بعد از چرخش لوله از جنس آلیاژ حافظه‌دار



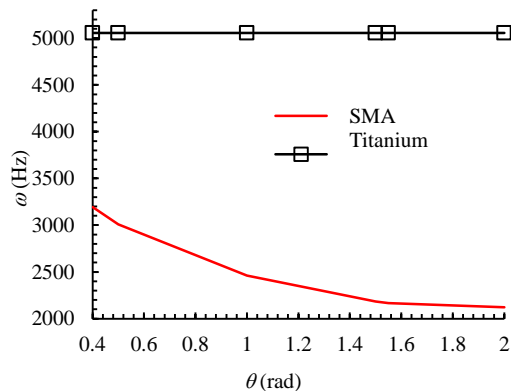
شکل ۵- نمودار تنش- کرنش مقایسه نتایج اثر شبه‌الاستیک تحت بار پیچشی [۶]



شکل ۸- تغییرات جزء مارتنزیتی برای حالت باربرداری در زوایای پیچش مختلف



شکل ۹- تغییرات اولین فرکانس طبیعی بر حسب جزء مارتنزیتی و زاویه پیچش



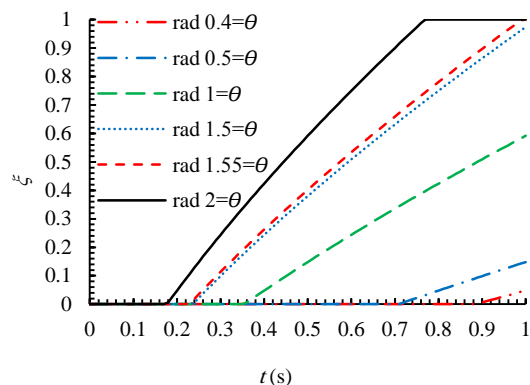
شکل ۱۰- تغییرات فرکانس طبیعی لوله با جنس آلیاژ حافظه دار و تیتانیوم در زوایای پیچش مختلف

افزایش زاویه پیچش، مقدار جزء مارتنزیتی افزایش یافته و با افزایش فاز مارتنزیتی، ضریب الاستیک کششی آلیاژ افت محسوسی داشته، همین موضوع باعث افت شدید فرکانس طبیعی می شود. با ادامه این روند و کامل شدن تغییر فاز، میزان افت فرکانس طبیعی به تدریج کاهش پیدا می کند.

با توجه به اینکه فرکانس طبیعی المان سازه ای ساخته شده از مواد متداول مهندسی تابعی از خواص الاستیک، هندسه و شرایط مرزی است، در نتیجه بارگذاری پیچشی آن عضو تاثیری در فرکانس طبیعی ندارد. به همین منظور و همچنین مقایسه این تغییرات، نمودار فرکانس طبیعی لوله ساخته شده از تیتانیوم و همچنین آلیاژ حافظه دار انجام گرفته و در شکل ۱۰ نشان داده شده است. مشخصات تیتانیوم استفاده شده برای این تحلیل، در جدول ۲ نشان داده شده است.

جدول ۱- مشخصات آلیاژ حافظه دار [۶]

مقدار	کمیت (واحد)
۷۰ GPa	ضریب الاستیک کششی فاز آستونیت
۳۰ GPa	ضریب الاستیک کششی فاز مارتنزیت
$22 \times 10^{-6} (\text{°C})^{-1}$	ضریب انبساط حرارتی
$6450 \text{ Kg/m}^3$	چگالی
۱۸ °C	دمای شروع مارتنزیتی شدن
-۲ °C	دمای پایان مارتنزیتی شدن
۲۲ °C	دمای شروع آستونیتی شدن
۳۸ °C	دمای پایان آستونیتی شدن



شکل ۷- تغییرات جزء مارتنزیتی برای حالت بارگذاری در زوایای پیچش مختلف

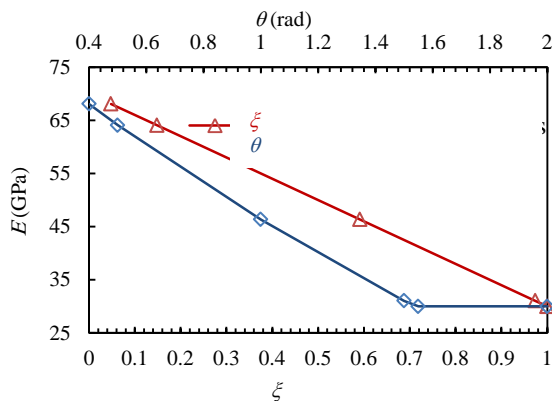


جدول ۲- مشخصات تیتانیوم

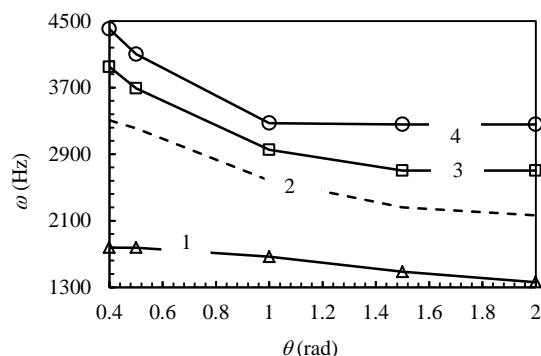
مقدار	کمیت (واحد)
۱۱۳/۸ GPa	ضریب الاستیک کششی
۰/۳۳	ضریب پواسون
۶۵۱ GPa	تنش تسلیم
۴۵۰۰ Kg/m <sup>3</sup>	چگالی
۸.۶×۱۰ <sup>-۶</sup> (°C) <sup>-۱</sup>	ضریب انبساط حرارتی

جدول ۳- قطرهای داخلی و خارجی که حجمی یکسان برای استوانه‌های با طول ثابت و مشخص می‌سازند

قطر داخلی (mm)	قطر خارجی (mm)	نمونه
۰/۴۴	۲	نمونه ۱
۲/۵	۳/۱۷	نمونه ۲ (نمونه اولیه)
۳/۴۹	۴	نمونه ۳
۴/۶	۵	نمونه ۴



شکل ۱۱- تغییرات ضریب الاستیک کششی بر حسب جزء مارتنزیتی و زاویه پیچش



شکل ۱۲- نمودار تغییرات اولین فرکانس طبیعی بر اثر تغییرات زاویه پیچش برای چهار نمونه مختلف

برای روشن‌تر شدن موضوع، رابطه بین جزء مارتنزیتی، ضریب الاستیک کششی آستونیتی و مارتنزیتی و همچنین ضریب الاستیک کششی کلی، معرفی و نمودار آن بر اثر تغییرات جزء مارتنزیتی رسم خواهد شد. ضریب الاستیک کششی کلی به صورت رابطه (۲۹) تعریف می‌شود [۱]:

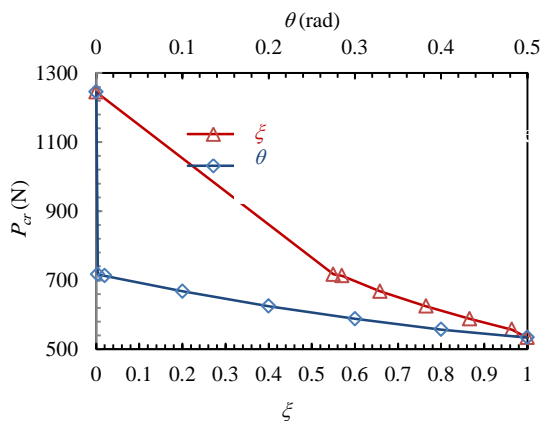
$$E = E^A + \xi(E^M - E^A) \quad (29)$$

با استفاده از نتایج تحلیل آباکوس، نمودار ضریب الاستیک کششی کلی بر اساس تغییرات زاویه پیچش و جزء مارتنزیتی در شکل ۱۱ رسم شده است. همانطور که در شکل ۱۱ نشان داده شده است، با افزایش زاویه پیچش و جزء مارتنزیتی، درصد بیشتری از ماده وارد فاز مارتنزیتی شده، در نتیجه ضریب الاستیک کششی آلیاژ حافظه‌دار کاهش یافته و همین عامل باعث کاهش فرکانس طبیعی لوله می‌شود.

چهار عاملی که تاثیر بسزایی در مقدار فرکانس طبیعی یک جسم دارد عبارت‌اند از: ضریب الاستیک، چگالی، شرایط مرزی و ابعاد جسم. با توجه به بدیهی بودن این موضوع که ضریب الاستیک کششی و چگالی به ترتیب نسبت مستقیم و عکس با فرکانس طبیعی دارند، تاثیر تغییر ابعاد بر فرکانس طبیعی و همچنین تغییر فاز بررسی خواهد شد. بررسی تغییر ابعاد در مدل به نحوی انجام خواهد شد که مساحت مقطع، حجم مدل و متعاقباً وزن مدل تغییری نکند. ایجاد این نوع تغییر، به این دلیل است که تغییر وزن، خود باعث تغییر فرکانس طبیعی شده، اگر بخواهیم صرفاً تاثیر تغییر ابعاد بر فرکانس طبیعی را بیابیم، باید از ایجاد تغییر وزن جلوگیری شود. البته افزایش قطرها، ممان دوم سطح و در نتیجه فرکانس طبیعی را افزایش خواهد داد، اما برای مطالعه چگونگی تغییر فاز، بررسی اثر تغییر قطرهای داخلی و خارجی، مورد بررسی قرار خواهد گرفت. در جدول ۳، قطرهای داخلی و خارجی تمام نمونه‌ها طوری به دست آمده است که تغییر حجمی در آن وجود نداشته باشد. در شکل ۱۲، نمودار فرکانس طبیعی بر حسب زاویه پیچش برای مدل اولیه و سه نمونه جدید با اندازه قطرهای داخلی و خارجی متفاوت، ولی حجم برابر رسم شده است. در این شکل، شماره نمونه‌ها روی منحنی مربوط نوشته شده است.

جدول ۴- شروع و پایان تغییر فاز نمونه ها در دمای ۳۸ درجه

تغییرات اولین فرکانس طبیعی (Hz)	طول بازه تغییر فاز (rad)	زاویه پایان تغییر فاز (rad)	زاویه شروع تغییر فاز (rad)	نمونه
۴۱۷	۱/۷۵	۲/۴۷	۰/۷۲	۱
۱۱۴۲	۱/۱۹	۱/۵۵	۰/۳۶	۲
۱۲۴۸	۰/۹۹	۱/۳۲	۰/۳۳	۳
۱۱۴۶	۰/۷۱	۰/۹۸	۰/۲۷	۴



شکل ۱۳- تغییرات اولین نیروی بحرانی کمانش بر حسب جزء مارتنزیتی و زاویه پیچش

### ۵- نتیجه گیری و بحث

در لوله تحت پیچش از جنس مواد متداول مهندسی، تغییرات در زاویه پیچش تاثیری بر فرکانس طبیعی نمی گذارد. برای ایجاد تغییر در فرکانس طبیعی لوله با جنس مواد متداول مهندسی، باید ابعاد و یا شرایط مرزی آن را تغییر داد.

ایجاد پیچش در لوله آلیاژ حافظه دار، تحت شرایط خاص باعث کاهش فرکانس طبیعی ارتعاشات خواهد شد. در مواقعی که میزان پیچش به حدی باشد که بتواند باعث تغییر فاز شود، فرکانس طبیعی افت می کند و دلیل آن افت در ضریب الاستیک کششی آلیاژ حافظه دار است.

اگر زاویه پیچش آن قدر کم باشد که نتواند باعث آغاز تغییر فاز شود، تغییری در فرکانس طبیعی ایجاد نخواهد شد. همچنین پس از اتمام تغییر فاز، دوباره شاهد ثبات فرکانس طبیعی به ازای تغییرات زاویه پیچش خواهیم بود. علاوه بر این افزایش قطرهای لوله، در حالتی که سطح مقطع ثابت

با توجه به نمودار شکل ۱۲ و همچنین نتایج به دست آمده، بالاتر بودن قطرها به معنی افزایش فرکانس طبیعی بوده و نسبت مستقیم این دو مورد در شکل مشخص است. همچنین با افزایش قطرهای داخلی و خارجی، تغییر فاز در زوایای کوچک تری آغاز شده، در زوایای کوچک تری پایان می یابد. برای روشن تر شدن حدود تغییرات فاز، در جدول ۴ زوایای مربوط به آغاز و پایان تغییر فاز و همچنین میزان تغییر زاویه برای تکمیل تغییر فاز برای هر چهار نمونه آورده شده است.

با توجه به جدول ۴، با بزرگ شدن قطرها، شروع و پایان تغییر فاز زودتر اتفاق افتاده، میزان تغییر زاویه برای تکمیل تغییر فاز کاهش می یابد؛ همچنین با توجه به شکل ۱۲ و جدول ۴ می توان نتیجه گرفت که زمانی که جزء مارتنزیتی تغییر نکند، فرکانس طبیعی نیز تغییر نخواهد کرد؛ یعنی در یک لوله آلیاژ حافظه دار تحت پیچش با ابعاد و شرایط مرزی مشخص، تنها پارامتری که روی فرکانس طبیعی تاثیرگذار است، جزء مارتنزیتی است. در ادامه نیروی بحرانی کمانش پس از تغییر فاز بررسی خواهد شد. به این منظور، نیروی کمانش در شرایط یک سر گیردار، به ازای زاویه پیچش اولیه رسم خواهد شد. تحلیل در این قسمت به گونه ای خواهد بود که ابتدا طرف آزاد لوله به میزان خاصی چرخانده شده، سپس رها می شود. پس از آن نیروی بحرانی کمانش اندازه گیری خواهد شد. شرط تغییر در نیروی بحرانی کمانش، قرارگیری آلیاژ حافظه دار در دماهایی است که اثر حافظه داری را از خود بروز داده، مقداری تغییر فاز و کرنش پسماند در آن باقی بماند. دلیل این ادعا، باقی ماندن آلیاژ حافظه دار در فاز مارتنزیت و عدم صفر شدن جزء مارتنزیتی پس از رها کردن انتهای لوله است. در شکل ۱۳، نمودار نیروی بحرانی کمانش فشاری لوله برای مدل اولیه به ازای میزان چرخش های مختلف در دمای ۷ درجه سانی گراد رسم شده است. لازم به ذکر است، به دلیل تغییر در دمای اولیه لوله، زمان شروع و پایان تغییر فاز در این تحلیل، با تحلیل قبلی متفاوت است.

با توجه به شکل ۱۳ می توان گفت که تغییر فاز و متعاقباً کاهش ضریب استحکام کششی، باعث کاهش نیروی بحرانی کمانش در لوله یک سر گیردار خواهد شد.

$$\mu_2^c = \frac{\pi}{4} \rho \Delta s_0 \left( \frac{1}{a_c^M} - \frac{1}{a_c^A} \right) \quad (10)$$

مدل تاناکا:

$$f(\xi) = \begin{cases} \frac{\rho \Delta s_0}{a_e^M} [(1 - \xi) \ln(1 - \xi) - \xi] \\ + (\mu_1^e + \mu_2^e) \xi, \xi > 0 \\ \frac{\rho \Delta s_0}{a_e^A} [\ln(\xi) - \xi] \\ + (\mu_1^e - \mu_2^e) \xi, \xi > 0 \end{cases} \quad (11)$$

پارامترهای کرنش سختی ماده در حین تغییر فاز عبارتند از:

$$a_e^A = - \frac{\ln(0.01)}{A_s - A_f} \quad (12)$$

$$a_e^M = \frac{\ln(0.01)}{M_s - M_f} \quad (13)$$

$$\mu_1^e = \frac{1}{2} \rho \Delta s_0 (M_s + 2A_f - A_s) - \rho \Delta u_0 \quad (14)$$

$$\mu_2^e = \frac{1}{2} \rho \Delta s_0 \left( \frac{1}{a_e^A} - \frac{1}{a_e^M} \right) \quad (15)$$

### ۷- فهرست علائم

دمای شروع مارتنزیتی شدن (°C)	$M_s$
دمای پایان مارتنزیتی شدن (°C)	$M_f$
دمای شروع آستونیتی شدن (°C)	$A_s$
دمای پایان آستونیتی شدن (°C)	$A_f$
انرژی آزاد گیبس (J)	$G$
تنش (Pa)	$\sigma$
دما (°C)	$T$
جزء مارتنزیتی	$\xi$
تانسور کرنش انتقال	$\epsilon^t$
چگالی (kg/m <sup>3</sup> )	$\rho$
تانسور نرمی	$S$
تانسور ضریب انبساط حرارتی (°C <sup>-1</sup> )	$\alpha$
گرمای ویژه (J/kg°C)	$c$
تابع سختی انتقال فاز	$f(\xi)$
انرژی داخلی ویژه در حالت مبنا	$u_0$
تانسور انتقال	$\Lambda$
ماکزیمم کرنش انتقال	$H$
اتلاف انرژی در حالت انتقال فاز	$Y^*$
تانسور ژاکوبی مکانیکی	$\mathcal{L}$

بماند، باعث افزایش فرکانس طبیعی لوله می‌شود؛ همچنین این تغییر باعث می‌شود که تغییر فاز زودتر شروع شده، زودتر پایان یابد. علاوه بر این، بازه تغییرات زاویه پیچش برای تکمیل تغییر فاز کاهش می‌یابد.

همچنین با توجه به نتایج به‌دست آمده مشاهده می‌شود که نیروی بحرانی کمانش نیز، در اثر تغییر فاز کاهش خواهد یافت. دلیل این کاهش نیز، کاهش ضریب الاستیک کششی در اثر تغییر فاز است.

### ۶- پیوست

تابع سختی انتقال برای مدل‌های مختلف به شکل زیر تعریف می‌شود [۶]:

مدل بوید و لاگوداس:

$$f(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{2} \rho b^M \xi^2 + (\mu_1 + \mu_2) \xi, \xi > 0 \\ \frac{1}{2} \rho b^A \xi^2 + (\mu_1 - \mu_2) \xi, \xi > 0 \end{cases} \quad (1)$$

در معادله ۱،  $\mu_1$ ،  $\mu_2$ ،  $\rho b^M$  و  $\rho b^A$  پارامترهای کرنش سختی ماده در حین تغییر فاز در این مدل بوده و به صورت زیر معرفی می‌شوند:

$$b^A = -\Delta s_0 (A_f - A_s) \quad (2)$$

$$b^M = -\Delta s_0 (M_s - M_f) \quad (3)$$

$$\mu_1 = \frac{1}{2} \rho \Delta s_0 (M_s + A_f) - \rho \Delta u_0 \quad (4)$$

$$\mu_2 = \frac{1}{4} (\rho b^A - \rho b^M) \quad (5)$$

مدل لیانگ و راجرز:

$$f(\xi) = \begin{cases} \int_0^\xi -\frac{\rho \Delta s_0}{a_c^M} [\pi - \cos^{-1}(2\xi - 1)] d\xi \\ + (\mu_1^e + \mu_2^e) \xi, \xi > 0 \\ \int_0^\xi -\frac{\rho \Delta s_0}{a_c^A} [\pi - \cos^{-1}(2\xi - 1)] d\xi \\ + (\mu_1^e - \mu_2^e) \xi, \xi > 0 \end{cases} \quad (6)$$

پارامترهای  $a_c^M$ ،  $a_c^A$ ،  $\mu_1^e$  و  $\mu_2^e$  پارامترهای کرنش سختی ماده در این مدل بوده و برابرند با:

$$a_c^A = \frac{\pi}{A_s - A_f} \quad (7)$$

$$a_c^M = \frac{\pi}{M_s - M_f} \quad (8)$$

$$\mu_1^e = \frac{1}{2} \rho \Delta s_0 (M_s + A_f) - \rho \Delta u_0 \quad (9)$$

[12] Shiau LC, Kuo SY, Chang SY (2011) Free vibration of buckled SMA reinforced composite laminates. *Compos Struct* 93(11): 2678-2684.

[13] Mirzaeifar R, DesRoches R, Yavari A, Gall K (2012) Coupled thermo-mechanical analysis of shape memory alloy circular bars in pure torsion, *Int. J. Non. Linear. Mech*, 47(3):118-128.

[14] Tobushi H, Pieczyska E, Miyamoto K, Mitsui K (2013) Torsional deformation characteristics of TiNi SMA tape and application to rotary actuator. *J Alloys Compd* 577: 745-748.

[15] Barzegari MM, Dardel M, Fathi A (2013) Vibration analysis of a beam with embedded shape memory alloy wires. *Acta Mech Solida Sin* 26(5): 536-550.

[16] Forouzesh F, Jafari AS (2015) Nonlinear forced vibration of pseudoelastic shape memory alloy cylindrical shell subjected to the time and space dependant internal pressure. *Scientific Research Monthly Journal of Modares Mechanical Engineering* 15(7): 353-360

[17] Shakki S, Zakerzadeh MR (2016) Modeling and control of a shape memory alloy actuator using fuzzy sliding mode controller. *Scientific Research Monthly Journal of Modares Mechanical Engineering* 16(7): 1-12

[18] ABAQUS Analysis User's Manual Materials. (2010) Other plasticity models. Concrete.

[19] Brinson LC, Huang MS (1996) Simplifications and Comparisons of shape memory alloy constitutive models. *J Intell Mater Syst Struct* 7(1): 108-114.

[20] Liang C, Rogers CA (1990) One-dimensional thermomechanical constitutive relations for shape memory materials. *J Intell Mater Syst Struct* 1(2): 207-234.

[21] Lagoudas DC, Bo Z, Qidwai MA (1996) A unified thermodynamic constitutive model for SMA and finite element analysis of active metal matrix composites. *Mech Compos Mater Struct* 3(2): 153-179.

[22] Ben Hatira F, Saidane K (2011) A Thermo-mechanical behavior simulation of a NiTi staple used for the correction of idiopathic scoliosis. *J Biomater Nanobiotechnol* 3(1): 61-69.

[23] Liang C (1990) The constitutive modeling of shape memory alloys. PhD Thesis, Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg.

[24] Khorramabadi R (2014) Modeling the shape memory alloys behavior using UMAT. M.Sc thesis, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad.

تانسور ژاکوبی گرمایی

Θ

پارامترهای مدل لاگوداس

$$\mu_2 \cdot \mu_1 \cdot b^A \cdot b^M$$

پارامترهای مدل لیانگ و راجرز

$$\mu_2^c \cdot \mu_1^c \cdot a_c^M \cdot a_c^A$$

پارامترهای مدل تاناکا

$$\mu_2^e \cdot \mu_1^e \cdot a_e^M \cdot a_e^A$$

## ۸- مراجع

[1] Lagoudas DC (2008) Shape memory alloys: Modeling and engineering applications. Springer, Texas.

[2] Tobushi H, Tanaka K (1991) Deformation of a shape memory alloy helical spring (analysis based on stress-strain-temperature relation). *JSME Int J Ser. 1, Solid Mech Strenght Mater* 34(1): 83-89.

[3] Choi SSW, Lee JJ, Lee DC, Seo DC (1999) The active buckling control of laminated composite beams with embedded shape memory alloy wires. *Compos Struct* 47(1): 679-686.

[4] Lee JJ, Choi S, Ju J (1999) Thermal buckling and postbuckling analysis of a laminated composite beam with embedded SMA actuators. *Compos Struct* 47(1): 695-703.

[5] Cunfu H, Bin W, Baoqi T, Jiang J (2000) Theoretical and experimental studies of torsion deformation of a thin-walled tube with wound and pasted shape memory alloy wires. *Smart Mater Struct* 9(5): 660-664

[6] Qidwai MA, Lagoudas DC (2000) Numerical implementation of a shape memory alloy thermomechanical constitutive model using return mapping algorithms. *Int J Numer Methods Eng* 47(6): 1123-1168.

[7] Roh JH, Han JH, Lee I (2005) Finite element analysis of adaptive inflatable structures with SMA strip actuator, *Smart Struct. Mater.*, 460-471.

[8] Li H, Liu Z, Ou L (2008) Experimental study of a simple reinforced concrete beam temporarily strengthened by SMA wires followed by permanent strengthening with CFRP plates. *Eng Struct* 30: 716-723.

[9] Icardi U, Ferrero L (2009) Preliminary study of an adaptive wing with shape memory alloy torsion actuators. *Mater Des* 30(10): 4200-4210.

[10] Kuo SY, Shiau LC, Chen KH (2009) Buckling analysis of shape memory alloy reinforced composite laminates. *Compos Struct* 90(2): 188-195.

[11] Li SR, Yu WS, Batra RC (2010) Free vibration of thermally pre/post-buckled circular thin plates embedded with shape memory alloy fibers. *J Therm Stress* 33(2): 79-96.