



بررسی تاثیر پارامترها بر تنش گشودگی مثلثی در ورق‌های همسانگرد محدود

محمد حسین بیاتی چالشتری^{۱*} و محمد جعفری^۲

^۱ کارشناس ارشد، دانشکده مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود

^۲ دانشیار، دانشکده مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود

مقاله مستقل؛ تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۰۷/۲۵؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۵/۱۲/۲۳؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۰۲/۲۹

چکیده

در این مقاله، با استفاده از روش بهینه‌سازی الگوریتم سنجاچک به بهینه‌سازی پارامترهای موثر در تحلیل تنش در اطراف گشودگی مثلثی واقع در یک ورق همسانگرد محدود تحت بارگذاری درون صفحه‌ای پرداخته شده است. در تحلیل ورق همسانگرد محدود حاوی گشودگی مثلثی پارامترهایی از قبیل، انحنای گوشه‌های گشودگی، زاویه چرخش گشودگی، نسبت اضلاع ورق، نسبت اندازه گشودگی به ورق و نوع بارگذاری به‌عنوان پارامترهای مؤثر بر توزیع تنش محسوب می‌شود. انحنای گوشه‌های گشودگی و زاویه چرخش گشودگی در نسبت‌های گوناگون اندازه گشودگی به ورق و اضلاع ورق بهینه شده، مقدارهای هر پارامتر بهینه به دست آمد. در مطالعه حاضر، روش به‌کار گرفته‌شده برپایه‌ی حل تحلیلی متغیر مختلط موشخیلشویلی و نگاشت همنا با فرض تنش صفحه‌ای است. ورق محدود، همسانگرد و الاستیک خطی در نظر گرفته شده است. برای محاسبه تابع تنش مربوط به ورق محدود حاوی گشودگی مثلثی، از جمع تابع تنش یک ورق نامحدود حاوی همان گشودگی و تابع تنش یک ورق محدود بدون گشودگی استفاده شده است. ضرایب مجهول در تابع تنش، با استفاده از روش حداقل مربعات مرزی و اعمال شرایط مرزی مناسب به‌دست می‌آیند. نتایج نشان می‌دهند، با انتخاب پارامترهای بهینه می‌توان قابلیت تحمل بار سازه را افزایش داد.

کلمات کلیدی: ورق همسانگرد محدود؛ گشودگی مثلثی؛ حل تحلیلی؛ ضریب تمرکز تنش؛ الگوریتم سنجاچک.

Investigation of Effective Parameters on Triangular Cutout Stress in Finite Isotropic Plates

M. H. Bayati Chaleshtari^{1,*}, M. Jafari²

¹ MSc., Mech. Eng., Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran.

² Associate. Prof., Mech. Eng., Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran.

Abstract

This paper aims at optimizing the parameters involved in stress analysis around a triangular cutout located in a finite isotropic plate under in-plane loading using optimization technique called dragonfly algorithm. In analysis of finite isotropic plate, the effective parameters on stress distribution around triangular cutouts are include cutout bluntness, cutout orientation, plate's aspect ratio, cutout size and type of loading. The cutout bluntness and cutout orientation are optimizing in various cutout sizes and plate's aspect ratio, and then the values of each optimum parameter achieved. In this study, with the assumption of plane stress conditions, analytical solution of Muskhelishvili's complex variable method and conformal mapping is utilized. The plate is considered to be finite, isotropic and linearly elastic. To calculate the stress function of a finite plate with a triangular cutouts, the stress functions in finite plane are determined by superposition of the stress function in infinite plate containing triangular cutouts with stress function in finite plate without any cutout. Using least square boundary collocation method and applying appropriate boundary conditions, unknown coefficients of stress function are obtained. Results show that by selecting the aforementioned optimum parameters, less amounts of stress could be achieved around the cutout leading to an increase in load-bearing capacity of the structure.

Keywords: Finite Isotropic Plates; Triangular Cutout; Analytical Solution; Stress Concentration Factor; Dragonfly Algorithm.

۱- مقدمه

در سال‌های اخیر استفاده از ورق‌های محدود در ساخت سازه‌های مکانیکی، فضایی، دریایی و خودروسازی افزایش یافته است. در عین حال، در بسیاری از صنایع با ورق‌های محدود حاوی کشودگی مواجه هستند. این کشودگی‌ها در ورق‌های محدود، بیشتر برای کاهش وزن سازه و ایجاد راه‌های ورودی و خروجی در سازه ایجاد می‌شوند. تغییر هندسه ورق به دلیل وجود کشودگی، منجر به ایجاد تنش موضعی شدیدی در اطراف کشودگی می‌شود که به آن تمرکز تنش می‌گویند. تمرکز تنش، باعث کاهش استحکام، شکست‌های زودرس در سازه و تغییر شکل‌های پلاستیک در محل تمرکز تنش می‌شود. تجربه نشان داده است که بیشتر شکست‌های ایجاد شده در سازه‌های هوایی در محل بست‌ها و اتصالات سازه رخ می‌دهند که ناشی از وجود تمرکز تنش در آن نقاط است؛ بنابراین، دانستن مقادیر تمرکز تنش در دستیابی به طراحی بهینه، بسیار مهم است. تعیین ضریب تمرکز تنش در سازه‌های گوناگون برای ناپیوستگی‌های مختلف هندسی، به طور گسترده توسط افرادی همچون هوولند [۱] و هیوود [۲]، مورد بررسی قرار گرفته است. هوولند، روابطی برای صفحات نامحدود با کشودگی دایروی و عرض محدود ارائه کرد. هیوود نیز روابطی برای تصحیح ضریب تمرکز تنش در عرض محدود با استفاده از مقادیر ضریب تمرکز تنش صفحات نامحدود استخراج کرد. هیوود این روابط را با استفاده از برآیند نیروهای تعادل برای صفحات دارای کشودگی تحت بار کششی تک‌جهته ارائه کرد که در آن تأثیر عرض محدود، به تنهایی اعمال شد. استفاده از روش متغیر مختلط در حل مسائل مقدار مرزی در الاستیسیته‌ی دوبعدی، اولین بار توسط موشخلیشویلی [۳] برای مواد الاستیک همسانگرد ارائه شد. لخنیتسکی [۴]، روش متغیر مختلط موشخلیشویلی را برای مواد الاستیک غیر همسانگرد بسط داد و حل عمومی برای محاسبه مولفه‌های تنش و جابه‌جایی در حالت تنش صفحه‌ای به‌دست آورد. او از روش سری‌ها برای به دست آوردن ضرایب تابع تنش استفاده کرد و راه حل بررسی توزیع تنش اطراف کشودگی‌ها با شکل‌های مختلف را در ورق نامحدود غیرهمسانگرد ارائه کرد. ساوین [۵] با استفاده از روش متغیر مختلط، مطالعاتی در زمینه ورق‌های همسانگرد نامحدود حاوی کشودگی‌های مختلف و

ورق‌های ناهمسانگرد نامحدود فقط برای کشودگی بیضی شکل و دایره‌ای انجام داد. سپس حل ساوین برای بریدگی مثلثی، توسط دائوست و هووا [۶] بسط داده شد. به طوری که توسط آن‌ها با تعریف نسبت اضلاع به عنوان یک پارامتر، علاوه بر مثلث متساوی الاضلاع، مثلث متساوی الساقین و مواد غیر همسانگرد با در نظر گرفتن انحناى گوشه بریدگی حل شد. ابوالفتوح [۷]، رابطه واحدی برای مولفه تنش مماس بر مرز بریدگی برای هندسه‌های دایره، بیضی، مثلث و مربع در ورق نامحدود از ماده غیر همسانگرد خاص تحت کشش بیان کرد. او توانست نقاط روی هر بریدگی با شکل خاص را به دایره‌ای به شعاع واحد تبدیل کند. یودکادگائونکر و رائو [۸]، توزیع تنش اطراف کشودگی مثلثی در ورق غیرهمسانگرد نامحدود را تحت بارگذاری درون صفحه‌ای با استفاده از روش گائو و بدون استفاده از جمع آثار به دست آوردند. باتیستا [۹]، تمرکز تنش اطراف کشودگی‌های چندضلعی با هندسه‌های نسبتاً پیچیده را مورد بررسی قرارداد. او از بسط روش متغیر مختلط موشخلیشویلی [۳] و تابع نگاشت شوارتز- کریستفل استفاده کرد. لی و همکاران [۱۰]، با اعمال ضرایب تصحیح در تابع نگاشت هم‌نوا، توانستند توزیع تنش و جابه‌جایی حول کشودگی مستطیلی شکل با ابعاد دلخواه در ورق نامحدود همسانگرد و تحت بار تک محوری را به دست آورند. رضایی پژند و جعفری [۱۱]، از روش متغیر مختلط ساوین برای مطالعه تمرکز تنش حول کشودگی‌های مختلف در ورق نامحدود فلزی استفاده کردند و یک حل تحلیلی برای ورق‌های حاوی کشودگی‌های مختلف ارائه دادند. بنرجی و همکاران [۱۲]، با استفاده از روش عددی توزیع تنش اطراف کشودگی دایروی در ورق‌های همسانگرد و اورتوتروپیک نامحدود را تحت بارگذاری عرضی مطالعه کردند. آن‌ها تأثیر ضخامت ورق و قطر کشودگی و جنس مواد را در ورق‌های اورتوتروپیک بر میزان تمرکز تنش، مورد بررسی قرار دادند. شارما و همکاران [۱۳]، در مورد ورق ناهمسانگرد نامحدود نیز به بررسی توزیع تنش اطراف کشودگی مثلثی تحت بارگذاری درون صفحه‌ای پرداختند و پارامترهای زاویه‌ی بار، زاویه‌ی الیاف، جنس و انحناى گوشه کشودگی را نیز در نظر گرفتند. وو و چن [۱۴]، به منظور حل مسأله‌ی ورق همسانگرد محدود با تعداد و موقعیت دلخواه از کشودگی‌های دایروی، تابع تنش را بر اساس روش

کردند و سپس با استفاده از روش الگوریتم ژنتیک، مقادیر بهینه پارامترهای فوق برای یک ورق ارتوتروپیک نامحدود حاوی گشودگی معرفی نمودند. باربوسا و همکاران [۲۰]، به طراحی یک سازه مشبک کامپوزیتی تحت پیچش با بررسی تأثیر بسیاری از مواد و پارامترهای هندسی روی رفتار مکانیکی بهینه‌ی سازه پرداختند. در این کار تکنیک بهینه‌سازی اجتماع ذرات برای بهینه‌سازی ثابت پیچشی سازه، مورد استفاده قرار گرفته است. جعفری و محمودزاده [۲۱]، به بهینه‌سازی پارامترهای مؤثر بر ورق همسانگرد نامحدود حاوی گشودگی‌های چندضلعی منتظم با استفاده از الگوریتم اجتماع ذرات پرداختند.

در این مقاله، با تکیه بر حلّ تحلیلی متغیر مختلط موشخیلشوبلی و نگاشت همنوا و بسط حلّ پن و همکاران [۱۶]، به گشودگی مثلی واقع در مرکز ورق همسانگرد محدود سعی شده است تا برای بارگذاری درون صفحه‌ای، مقادیر بهینه پارامترهای مورد استفاده جهت دستیابی به کمترین تنش بی‌بعد معرفی شود. هدف اصلی این مقاله، بهینه‌سازی و معرفی هندسه گشودگی، تحلیل ورق‌های محدود با گشودگی مثلی، اعمال بارهای کششی تک‌محوره، دومحوره و برشی در اطراف گشودگی مثلی و در نهایت بررسی پارامترهای بهینه مؤثر هم‌چون انحنای گوشه‌های گشودگی، زاویه چرخش گشودگی، نسبت اضلاع ورق و نسبت اندازه گشودگی به ورق است که از نوآوری‌های این مقاله محسوب می‌شود و تا به حال تحلیلی جهت بهینه‌سازی پارامترهای مذکور در ورق محدود صورت نگرفته است. لازم به ذکر است که مقدار تنش بی‌بعد^۲ ($D.S.$) در اطراف گشودگی مثلی برای الگوریتم بهینه‌سازی سنجاقک به عنوان تنش بهینه در نظر گرفته شده است. تنش بی‌بعد به صورت بیشترین تنش ایجاد شده در اطراف گشودگی به تنش اعمالی تعریف می‌شود.

۲- حلّ تحلیلی

هدف اصلی در این مقاله، بهینه‌سازی تنش و پارامترهای مؤثر بر توزیع تنش ورق همسانگرد محدود حاوی گشودگی مثلی است. نسبت طول ضلع گشودگی به طول بزرگترین ضلع

متغیر مختلط موشخیلشوبلی و روش حدّ اقل مرتب‌ات مرزی پیشنهاد کردند. زو و همکاران [۱۵]، با استفاده از بسط سری فابر^۱ و روش حدّ اقل مرتب‌ات مرزی، توزیع تنش اطراف گشودگی بیضوی در چندلایه کامپوزیتی محدود را به دست آوردند. بیشتر مطالعاتی که تاکنون روی ورق‌های محدود حاوی گشودگی انجام شده است، محدود به گشودگی دایروی و بیضی‌شکل می‌شود. پن و همکاران [۱۶]، با استفاده از روش متغیر مختلط و حدّ اقل مرتب‌ات مرزی و با اصلاح تابع تنش ارائه‌شده توسط موشخیلشوبلی، به بررسی توزیع تنش ورق محدود حاوی گشودگی، تنها تحت بار کششی تک‌محوری پرداختند. آن‌ها از تابع نگاشتی استفاده کردند که توسط شارما بر اساس نگاشت شوارتز-کرسفل به دست آمده بود و یک گشودگی مثلی و دو گشودگی مستطیلی با نسبت ابعادی $3/2$ به 1 و 5 به 1 را بدون در نظر گرفتن پارامتر انحنای تحت بار کششی تک‌محوری بررسی کردند. آن‌ها همچنین پارامتر چرخش گشودگی را برای گشودگی مثلی در زوایای بسیار خاصی بررسی کردند. جعفری و اردلانی [۱۷]، به بررسی تمرکز تنش در ورق‌های محدود فلزی دارای گشودگی‌های منتظم پرداختند. آن‌ها همانند کار پن و همکاران [۱۶]، با استفاده از روش متغیر مختلط و حدّ اقل مرتب‌ات مرزی، تنها اثر بار تک محوری روی گشودگی‌های مختلف ایجاد شده روی ورق محدود را بررسی کردند.

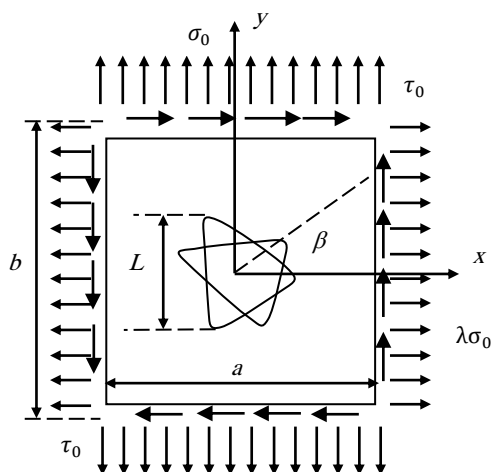
شاخه دیگری از پژوهش‌های صورت گرفته در زمینه سازه‌های مهندسی، مسائل مربوط به بهینه‌سازی و انتخاب مقادیر بهینه متغیرهای طراحی حاکم بر مسأله است. از جمله تحقیقات صورت گرفته با استفاده از الگوریتم‌های بهینه‌سازی را می‌توان به کار آلانسو و همکارش [۱۸] اشاره کرد. آن‌ها به بررسی استفاده از الگوریتم اجتماع ذرات برپایه حرکت دسته پرندگان در غالب روشی مناسب برای بهینه‌سازی سازه‌های کامپوزیتی پرداختند. جعفری و روحانی [۱۹]، به تعیین پارامترهای بهینه مؤثر بر توزیع تنش ورق‌های ارتوتروپیک نامحدود دارای گشودگی شبه مثلی با استفاده از الگوریتم ژنتیک پرداختند. آن‌ها مقادیر بهینه پارامترهای زاویه چرخش گشودگی، زاویه الیاف، زاویه بار، نرمینگی و کشیدگی گشودگی بر مقدار تنش بی‌بعد اطراف گشودگی را بررسی

² Dimensionless Stress

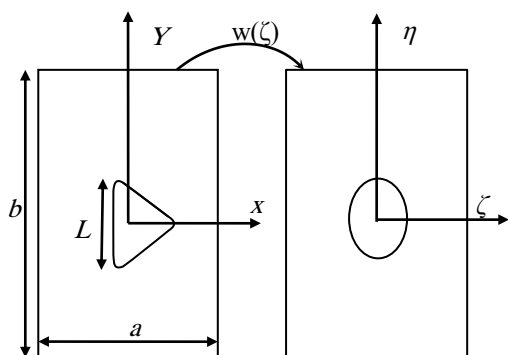
¹ Faber Series

می‌شود. در شکل ۳ برای گشودگی مثلثی تغییرات m و روند میل کردن گشودگی مثلثی به دایره نشان داده شده است. همچنین x و y نقاط در صفحه z ، برحسب ρ و θ نقاط در صفحه ζ به صورت معادلات (۳) و (۴) به دست می‌آید:

$$\tau = \rho e^{i\theta} = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \quad (2)$$



شکل ۱- ورق محدود حاوی گشودگی مثلثی تحت بارگذاری



شکل ۲- نگاشت ورق حاوی گشودگی مثلثی به ورق حاوی گشودگی دایروی [۱۷]



شکل ۳- تأثیر پارامتر m بر گوشه‌های گشودگی مثلثی

ورق، بزرگتر از $0/2$ است، بنابراین با اطمینان می‌توان ورق را محدود در نظر گرفت. مسأله با فرض تنش صفحه‌ای و در غیاب نیروهای حجمی، مورد بررسی قرار می‌گیرد؛ همچنین رفتار ورق در ناحیه الاستیک خطی بررسی می‌شود. فرض می‌شود، گشودگی در مرکز ورق قرار گرفته و گشودگی عاری از هرگونه بار خارجی است؛ یعنی در مرز گشودگی $\sigma_\rho = \sigma_{\rho\theta} = 0$.

در شکل ۱ زاویه چرخش گشودگی که نحوه قرارگیری آن نسبت به محور افقی است، با β نمایش داده شده است. ورق تحت بار کششی تک‌محوری، دو محوری و برش خالص قرار می‌گیرد. شکل گشودگی، شعاع انحنای گوشه گشودگی، زاویه چرخش گشودگی، ابعاد ورق و نوع بارگذاری درون صفحه‌ای از پارامترهایی هستند که تأثیر مقدار بهینه آن‌ها بر توزیع تنش بهینه، مورد بررسی قرار گرفته است. لازم به ذکر است که در این مقاله، در بارگذاری دو محوری $\lambda = 2$ و در تک محوری $\lambda = 0$ در نظر گرفته شده است. λ ضریب بار دو محوری نسبت بار افقی به عمودی است.

روش تحلیلی ارائه شده در این مقاله، برگرفته از روش متغیر مختلط موشخیلشویلی [۳] و نگاشت هم‌نوا است. به منظور تحلیل تنش گشودگی مثلثی، ابتدا می‌بایست ورق حاوی گشودگی مثلثی در صفحه مختلط z به ورق حاوی گشودگی دایروی به شعاع واحد در صفحه نگاشت ζ تبدیل شود. شکل ۲، این تبدیل را نشان می‌دهد. این عمل با استفاده از معادله (۱) صورت می‌پذیرد که در آن، R اندازه‌ی گشودگی، n نوع گشودگی و m مقدار انحنای گوشه‌ی گشودگی را مشخص می‌کند. در این مقاله، $R=1$ در نظر گرفته شده است.

$$z = x + iy = w(\zeta) = R\left(\zeta + \frac{m}{\zeta^n}\right) \quad (1)$$

در گشودگی‌های لبه‌دار m ، معیار تیزی یا نرمی و انحنای گشودگی است ($m \geq 0$). با تغییر این پارامتر (m) می‌توان برای هر گشودگی خاص، شعاع انحنای متفاوتی ایجاد کرد و در هر مورد تنش در جهت‌های مختلف را مورد بررسی قرار داد. برای هر گشودگی وقتی m کاهش می‌یابد، گشودگی ملایم‌تر می‌شود تا اینکه m به کمترین مقدار خود یعنی $m=0$ می‌رسد. در این حالت گشودگی به دایره تبدیل

ارضا می‌کنند. با مشخص شدن تابع تنش $U(x, y)$ برحسب توابع $\varphi(z)$ و $\psi(z) = \theta'(z)$ مؤلفه‌های تنش در حالت دوبعدی و برای ناحیه‌ی همبند ساده به صورت روابط (۱۰) و (۱۱) محاسبه می‌شوند [۳].

$$\sigma_x + \sigma_y = 4Re[\varphi'(z)] \quad (10)$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2(\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)) \quad (11)$$

که در آن $\psi(z)$ و $\varphi(z)$ توابع مختلط برحسب متغیر z می‌باشند. مؤلفه‌های تنش در سیستم مختصات قطبی و با استفاده از نگاشت همبند، برحسب متغیر ζ به صورت روابط (۱۲) و (۱۳) تعریف می‌گردند [۳].

$$\sigma_\rho + \sigma_\theta = \sigma_x + \sigma_y = 4Re\left[\frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\right] \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta - \sigma_\rho + 2i\tau_{\rho\theta} &= (\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy})e^{2i\alpha} \\ &= \frac{2\zeta^2}{\rho^2\omega'(\zeta)} \left(\overline{\omega(\zeta)}\Phi'(\zeta) + \omega'(\zeta)\Psi(\zeta) \right) \end{aligned} \quad (13)$$

که در آن،

$$e^{2i\alpha} = \frac{\zeta^2\omega'(\zeta)}{\rho^2\omega'(\zeta)}, \quad \Phi(\zeta) = \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}$$

$$\Psi(\zeta) = \frac{\psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}, \quad \Phi'(\zeta) = \varphi''(\zeta)\omega'(\zeta) \quad (14)$$

$\varphi(\zeta)$ و $\psi(\zeta)$ دو تابع تحلیلی هولومورفیک می‌باشند که شرایط مرزی مسأله را ارضا می‌کنند. با مشخص شدن $\varphi(\zeta)$ و $\psi(\zeta)$ ، مؤلفه‌های تنش محاسبه و مسأله‌ی تنش صفحه‌ای نیز حل می‌گردد. ساوین [۵]، به منظور حل مسأله توزیع تنش اطراف گشودگی‌های مختلف در ورق نامحدود تحت بارگذاری درون صفحه‌ای، از تابع نگاشت همبند استفاده کرد. او توابع $\varphi(\zeta)$ و $\psi(\zeta)$ را برحسب متغیر ζ به شکل رابطه (۱۵) و (۱۶) معرفی کرد:

$$\varphi(\zeta) = -\frac{X+iY}{2\pi(1+\chi)} \ln \zeta + a_1\omega(\zeta) + \varphi_0(\zeta) \quad (15)$$

$$\psi(\zeta) = \frac{\chi(X-iY)}{2\pi(1+\chi)} \ln \zeta + b_1\omega(\zeta) + \psi_0(\zeta) \quad (16)$$

که در آن:

$$\varphi_0(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} a'_n \zeta^{-n}, \quad \psi_0(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} b'_n \zeta^{-n} \quad (17)$$

a'_n و b'_n ثابت‌ها مجهول می‌باشند. X و Y مؤلفه‌های تنش در مرز گشودگی هستند که به دلیل آزاد بودن مرز گشودگی

$$x = Re[w(\zeta)] = R \left(\rho \cos(\theta) + \frac{m \cos(n\theta)}{\rho^n} \right) \quad (3)$$

$$y = Img[w(\zeta)] = R \left(\rho \sin(\theta) + \frac{m \sin(n\theta)}{\rho^n} \right) \quad (4)$$

مسأله حاضر بر پایه تئوری الاستیسیته صفحه‌ای، تحلیل و بررسی خواهد شد. در مسائل دوبعدی تحت بار درون صفحه‌ای، ماتریس تنش در هر نقطه از ماده‌ی الاستیک، دارای سه تنش σ_x ، σ_y و τ_{xy} است. این تنش‌ها، در غیاب نیروهای خارجی معادلات تعادل را به صورت رابطه (۵) ارضا می‌کنند:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} = 0 \quad (5)$$

همچنین معادله سازگاری برحسب مؤلفه‌های تنش به صورت رابطه (۶) است:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (\sigma_x + \sigma_y) = 0 \quad (6)$$

ساده‌سازی مسأله، با ادغام این معادلات، از طریق روابط حاکم بین آن‌ها صورت می‌گیرد. با معرفی تابع تنش $U(x, y)$ ، رابطه مؤلفه‌های تنش با تابع تنش به صورت رابطه (۷) خواهند بود:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \quad (7)$$

با ترکیب معادلات (۵)، (۶) و (۷) معادله‌ی سازگاری، برحسب تابع تنش U به شکل رابطه (۸) به دست می‌آید:

$$\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0 \quad (8)$$

حل مسائل صفحه‌ای تئوری الاستیسیته، به تعیین تابع بای‌هارمونیک^۱ $U(x, y)$ خلاصه می‌شود که شرایط مرزی معادلات را ارضا می‌کند. به این منظور موشخلیشویلی حل زیر را برای رابطه (۸) پیشنهاد کرد:

$$U(x, y) = Re[\bar{z}\varphi(z) + \theta(z)] \quad (9)$$

در معادله‌ی فوق، Re نشان‌دهنده قسمت حقیقی یک عبارت مختلط و $\varphi(z)$ و $\theta(z)$ توابعی تحلیلی از متغیر مختلط z می‌باشند؛ بنابراین حل مسائل تنش صفحه‌ای به تعیین دو تابع تحلیلی هولومورفیک $\varphi(z)$ و $\psi(z) = \theta'(z)$ محدود می‌شود که روی کانتور L شرایط مرزی تعیین شده را

^۱ Biharmonic

که در آن ضرایب A_n, B_n, C_n و D_n اعدادی مختلط هستند که به صورت رابطه (۲۰) در نظر گرفته می‌شوند:

$$A_n = a_{n1} + ia_{n2}, \quad B_n = b_{n1} + ib_{n2} \quad (20)$$

$$C_n = c_{n1} + ic_{n2}, \quad D_n = d_{n1} + id_{n2}$$

ثابت‌های $a_{n1}, a_{n2}, b_{n1}, b_{n2}, c_{n1}, c_{n2}, d_{n1}, d_{n2}$ حقیقی مجهول می‌باشند و M در آن تعداد جملات مربوط به بخش‌های مختلف سری لورنت است. محاسبه مشتقات توابع تنش به صورت روابط (۲۱) تا (۲۳) می‌باشند:

$$\varphi'(\zeta) = \sum_{n=1}^M -nA_n \zeta^{-n-1} + \sum_{n=0}^M nB_n \zeta^{n-1} \quad (21)$$

$$\varphi''(\zeta) = \sum_{n=1}^M n(n+1)A_n \zeta^{-n-2} + \sum_{n=0}^M n(n-1)B_n \zeta^{n-2} \quad (22)$$

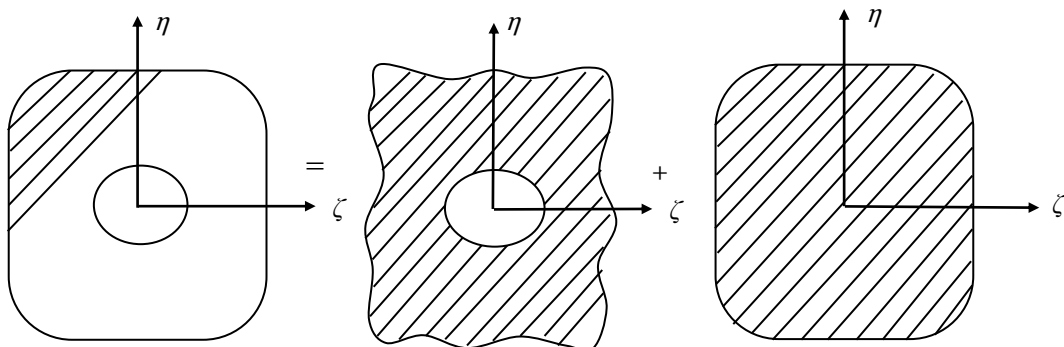
$$\psi'(\zeta) = \sum_{n=1}^M \frac{C_n(-n\zeta^{-n-1}\omega'(\zeta) - \omega''(\zeta)\zeta^{-n})}{(\omega'(\zeta))^2} + \sum_{n=0}^M nD_n \zeta^{n-1} \quad (23)$$

با جای‌گذاری معادلات فوق در معادلات (۱۸) و (۱۹) و حل دستگاه معادلات (۱۲) و (۱۳)، مؤلفه‌های تنش به شکل نهایی (۲۴-۲۶) به دست می‌آیند:

از تنش صفر می‌باشند. از معادلات (۱۵) و (۱۶) می‌توان در تحلیل تنش ورق‌های نامحدود حاوی گشودگی‌های مختلف استفاده کرد؛ اما در ورق‌های محدود علاوه بر هندسه گشودگی، شرایط مرز خارجی تأثیر بسزایی در توزیع تنش ورق دارد؛ بنابراین از معادلات (۱۵) و (۱۶) به شکلی که در بالا ارائه شده است، نمی‌توان استفاده کرد. همان‌طور که در شکل ۴ مشاهده می‌شود، تابع تنش ورق محدود حاوی گشودگی دایروی در صفحه ζ ، از جمع تابع تنش ورق نامحدود حاوی گشودگی دایروی با تابع تنش ورق محدود بدون گشودگی در صفحه ζ به دست می‌آید؛ لذا با استفاده از سری لورنت در یک ناحیه غیر ساده، جملاتی با توان‌های منفی ζ که روی مرز گشودگی دایروی و ناحیه‌ی خارج آن تحلیلی است، تابع تنش ورق نامحدود حاوی گشودگی دایروی را تشکیل می‌دهد. همچنین سری لورنت شامل، جملاتی با توان‌های مثبت ζ که روی مرز خارجی ورق تحلیلی است، تابع تنش ورق محدود بدون گشودگی را تشکیل می‌دهد؛ بنابراین با جمع جمله‌هایی با توان مثبت و منفی ζ سری لورنت، توابع تنش $\varphi(\zeta)$ و $\psi(\zeta)$ با جملات محدود مطابق روابط (۱۸) و (۱۹) به دست می‌آیند [۱۶].

$$\varphi(\zeta) = \sum_{n=1}^M A_n \zeta^{-n} + \sum_{n=0}^M B_n \zeta^n \quad (18)$$

$$\psi(\zeta) = \sum_{n=1}^M \frac{C_n \zeta^{-n}}{\omega'(\zeta)} + \sum_{n=0}^M D_n \zeta^n \quad (19)$$



شکل ۴- نمایی از روش حل پن و همکاران [۱۶]

مربعیات مرزی استفاده شده است [۱۷]. برای استفاده از روش حداقل مربعات مرزی، مطابق شکل ۵ به نقاط منتخب روی مرز داخلی و خارجی در صفحه ζ نیاز است مختصات نقاط در صفحه ζ ، به صورت (ρ, θ) و در صفحه z به صورت $z(x, y)$ می‌باشند. نقاط منتخب روی مرز داخلی دایره واحد در صفحه ζ ، به صورت رابطه (۲۷) تعریف می‌شوند:

$$\rho = 1, \quad \theta = \frac{2\pi}{N_{in}}(j-1) \quad (j = 1, \dots, N_{in}) \quad (27)$$

در معادله (۲۷)، N_{in} تعداد نقاط منتخب روی مرز داخلی دایره واحد است. با جای‌گذاری مؤلفه‌های x و y نقاط منتخب در صفحه z در سمت چپ معادلات (۳) و (۴)، با استفاده از حل عددی، مؤلفه‌های ρ و θ نقاط متناظر در صفحه ζ محاسبه می‌شوند. در استفاده از روش حداقل مربعات مرزی، برای شرایط مرزی داخلی از شرایط مرزی دایره واحد در صفحه ζ و در مختصات قطبی استفاده شده است. شرایط مرزی روی مرز گشودگی، به صورت رابطه (۲۸) است:

$$\sigma_\rho = \tau_{\rho\theta} = 0, \quad |\zeta| = 1 \quad (28)$$

این در حالی است که برای شرایط مرزی خارجی ورق از شرایط مرزی ورق در صفحه z و مختصات کارتیزین استفاده می‌شود. شرایط مرزی خارجی ورق محدود حاوی گشودگی به صورت روابط (۲۹) و (۳۰) است:

$$\sigma_x \cos^2 \gamma + \sigma_y \sin^2 \gamma + 2\tau_{xy} \sin \gamma \cos \gamma = \sigma_n \quad (29)$$

$$(\sigma_y - \sigma_x) \sin \gamma \cos \gamma + \tau_{xy}(\cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma) = \tau_n \quad (30)$$

در معادلات فوق، γ زاویه بین بردار عمود بر مرز خارجی ورق و محور x است؛ همچنین σ_n و τ_n به ترتیب، تنش نرمال و تنش برشی در مرز خارجی می‌باشند. σ_0 تنش کششی وارد شده بر مرز خارجی ورق است و در این مقاله $1MPa$ در نظر گرفته شده است؛ همچنین در بارگذاری کششی دومی $\lambda = 2$ و در بارگذاری برشی تنش τ_0 برابر $1MPa$ است. بر اساس روش حداقل مربعات مرزی، مجذور باقی‌مانده مرزی به صورت رابطه (۳۱) بیان می‌شود:

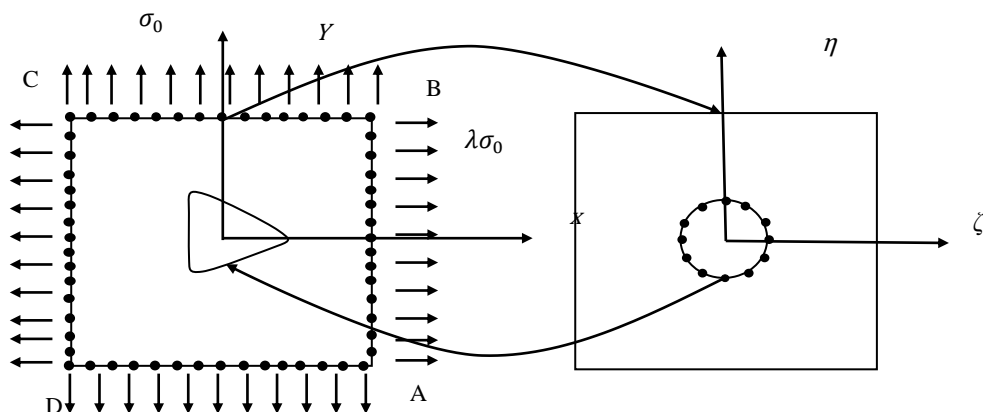
$$\Delta^2 = \sum_{j=1}^{N_{in}+N_{ot}} r^2(\rho_j, \theta_j) \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \sigma_\rho = Re \left[\left[\frac{\sum_{n=1}^M -2n\zeta^{-n-1}}{\omega'(\zeta)} \right. \right. \\ \left. \left. - \left(\frac{\overline{\omega(\zeta)}\omega'(\zeta)}{\rho^2\omega'(\zeta)} \sum_{n=1}^M n(n+1)\zeta^{-n} \right) \right] A_n \right. \\ \left. + \left[\frac{\sum_{n=0}^M 2n\zeta^{n-1}}{\omega'(\zeta)} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\overline{\omega(\zeta)}\omega'(\zeta)}{\rho^2\omega'(\zeta)} \sum_{n=0}^M n(n-1)\zeta^n \right] B_n \right. \\ \left. - \left[\sum_{n=1}^M \frac{-\omega'(\zeta)n\zeta^{-n+1} - \omega''(\zeta)\zeta^{-n+2}}{\rho^2(\omega'(\zeta))^2\omega'(\zeta)} \right] C_n \right. \\ \left. - \left[\frac{\sum_{n=0}^M n\zeta^{n+1}}{\rho^2\omega'(\zeta)} \right] D_n \right] \quad (24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta = Re \left[\left[\frac{\sum_{n=1}^M -2n\zeta^{-n-1}}{\omega'(\zeta)} \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{\overline{\omega(\zeta)}\omega'(\zeta)}{\rho^2\omega'(\zeta)} \sum_{n=1}^M n(n+1)\zeta^{-n} \right) \right] A_n \right. \\ \left. + \left[\frac{\sum_{n=0}^M 2n\zeta^{n-1}}{\omega'(\zeta)} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\overline{\omega(\zeta)}\omega'(\zeta)}{\rho^2\omega'(\zeta)} \sum_{n=0}^M n(n-1)\zeta^n \right] B_n \right. \\ \left. + \left[\sum_{n=1}^M \frac{-\omega'(\zeta)n\zeta^{-n+1} - \omega''(\zeta)\zeta^{-n+2}}{\rho^2(\omega'(\zeta))^2\omega'(\zeta)} \right] C_n \right. \\ \left. + \left[\frac{\sum_{n=0}^M n\zeta^{n+1}}{\rho^2\omega'(\zeta)} \right] D_n \right] \quad (25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{\rho\theta} = Re \left[\left[\left(\frac{\overline{\omega(\zeta)}\omega'(\zeta)}{\rho^2\omega'(\zeta)} \sum_{n=1}^M n(n+1)\zeta^{-n} \right) \right] A_n \right. \\ \left. + \left[\frac{\overline{\omega(\zeta)}\omega'(\zeta)}{\rho^2\omega'(\zeta)} \sum_{n=0}^M n(n-1)\zeta^n \right] B_n \right. \\ \left. + \left[\sum_{n=1}^M \frac{-\omega'(\zeta)n\zeta^{-n+1} - \omega''(\zeta)\zeta^{-n+2}}{\rho^2(\omega'(\zeta))^2\omega'(\zeta)} \right] C_n \right. \\ \left. + \left[\frac{\sum_{n=0}^M n\zeta^{n+1}}{\rho^2\omega'(\zeta)} \right] D_n \right] \quad (26) \end{aligned}$$

با توجه به روابط ذکر شده برای بررسی توزیع تنش اطراف گشودگی، نیاز به محاسبه ضرایب مجهول D_n و C_n ، B_n ، A_n در معادلات (۲۴) تا (۲۶) است. به این منظور از روش حداقل



شکل ۵- موقعیت نقاط منتخب بر روی مرز داخلی در صفحه ξ و مرز خارجی در صفحه z [۱۷]

۳- الگوریتم سنجاکک^۱

در سراسر دنیا تقریباً سه هزار گونه مختلف از سنجاکک‌ها در طبیعت وجود دارند. چرخه زندگی سنجاکک‌ها شامل، دو مرحله‌ی نابالغی (که بیشتر عمر خود را در آن سپری می‌کنند) و بزرگسالی است. الگوریتم سنجاکک برای اولین بار توسط میرجلیلی [۲۲] در سال ۲۰۱۶ مطرح شد. میرجلیلی با ۱۹ تابع آزمون، عملکرد و کارایی مناسب این الگوریتم را اثبات نمود. الهام‌گیری اصلی از الگوریتم سنجاکک، سرچشمه از رفتارهای استاتیکی و دینامیکی سنجاکک‌ها در طبیعت دارد. می‌توان گفت این دو رفتار بسیار مشابه دو مرحله مهم در بهینه‌سازی، یعنی جست و جوی شکار (اکتشاف) و حمله به شکار (بهره برداری) است. در رفتار استاتیکی، سنجاکک‌ها گروه‌های کوچک ایجاد می‌کنند و به منظور شکار حشرات بر فراز نواحی مختلف پرواز می‌کنند. هدف اصلی در این مرحله، جست و جوی شکار (اکتشاف) است. در رفتار دینامیکی، سنجاکک‌ها در دسته‌های بزرگ و در یک مسیر پرواز می‌کنند. هدف اصلی در این مرحله، حمله به شکار (بهره برداری) است. هدف نهایی موجودات در طبیعت، بقا است. بدین منظور برای دستیابی به منبع غذا و فرار از دشمن تلاش می‌کنند. با توجه به این دو رفتار می‌توان نتیجه گرفت که پنج عامل اصلی در به روز رسانی موقعیت نمونه در رفتار ازدحامی وجود دارد. این پنج عامل عبارتند از: استقلال (مجزا

که در آن N_{in} تعداد نقاط منتخب روی مرز داخلی دایره واحد، N_{ot} تعداد نقاط منتخب روی مرز خارجی ورق در محل اعمال بار، اندیس j نشان‌دهنده تعداد نقاط منتخب و r^2 به صورت رابطه (۳۲) تعریف می‌شود:

$$r^2(\rho_j, \theta_j) = r_1^2(\rho_j, \theta_j) + r_2^2(\rho_j, \theta_j) \quad (32)$$

تعداد نقاط منتخب روی مرز داخلی در این مقاله پس از همگرا شدن جواب‌ها، ۸۰ عدد و روی مرز خارجی، ۱۲۰ عدد است. در رابطه‌ی فوق، $r_1(\rho_j, \theta_j)$ و $r_2(\rho_j, \theta_j)$ اختلاف دو تنش، یکی تنش حاصل از شرایط مرزی و دیگری تنش حاصل از حل تحلیلی ارائه شده در نقاط منتخب روی مرزها هستند، پس از به دست آوردن Δ^2 برای هر نوع بارگذاری، به منظور کمینه کردن تابع اختلاف حاصل شده، از روابط (۳۳) و (۳۴) استفاده می‌شود:

$$\frac{\partial \Delta^2}{\partial a_{n1}} = 0, \frac{\partial \Delta^2}{\partial a_{n2}} = 0, \frac{\partial \Delta^2}{\partial b_{n1}} = 0, \frac{\partial \Delta^2}{\partial b_{n2}} = 0 \quad (33)$$

$$\frac{\partial \Delta^2}{\partial c_{n1}} = 0, \frac{\partial \Delta^2}{\partial c_{n2}} = 0, \frac{\partial \Delta^2}{\partial d_{n1}} = 0, \frac{\partial \Delta^2}{\partial d_{n2}} = 0 \quad (34)$$

از روابط فوق، دستگاه معادلاتی خطی تشکیل می‌شود که از حل آن ثابت‌ها مجهول به دست می‌آیند. با جای‌گذاری این ثابت‌ها در معادلات (۲۴) تا (۲۶)، مؤلفه‌های تنش به دست آمده و مسأله مورد نظر حل می‌شود.

^۱ Dragonfly Algorithm

$$\Delta X_{t+1} = (sS_i + aA_i + cC_i + fF_i + eE_i) + w'\Delta X_t \quad (40)$$

s نشان دهنده ضریب مجزا بودن، S_i نشان دهنده مجزا بودن i امین سنجاک، a نشان دهنده ضریب حرکت اصولی (هم‌ترازی)، A_i نشان دهنده حرکت اصولی i امین سنجاک، c نشان دهنده ضریب انسجام، C_i نشان دهنده انسجام i امین سنجاک، f نشان دهنده ضریب منبع غذا، F_i نشان دهنده منبع غذای i امین سنجاک، e نشان دهنده ضریب دشمن، E_i نشان دهنده موقعیت دشمن از i امین سنجاک، w' نشان دهنده ضریب اینرسی و t شماره تکرار است. با توجه به ضرایب معادله (۴۰)، می‌توان در طول بهینه‌سازی رفتارهای مختلف اکتشافی و بهره برداری را به دست آورد. پس از محاسبه بردار گام، بردار موقعیت نیز به صورت رابطه (۴۱) محاسبه می‌شود.

$$X_{t+1} = X_t + \Delta X_{t+1} \quad (41)$$

که t نشان دهنده شماره تکرار است. نکته مهم دیگر در این مقاله، این است که در زمان جست و جو برای شکار، ضرایب هم‌ترازی افزایش و انسجام کاهش و در زمان حمله به شکار، ضرایب هم‌ترازی کاهش و انسجام افزایش داده می‌شود. برای بهبود بیشتر رفتار تصادفی و اکتشافی سنجاک‌ها، فرض می‌شود، همسایه‌ای وجود ندارد. پس لازم است، پرواز آن‌ها در اطراف فضای جست و جو با استفاده از یک گردش تصادفی انجام گیرد. با توجه به این فرض روابط (۴۲) تا (۴۴) حاصل می‌شود [۲۲].

$$X_{t+1} = X_t + Levy(d) \times X_t \quad (42)$$

$$Levy(x) = 0.01 \times \frac{r_1 \times \sigma'}{\left| r_2 \right|^{\beta'}} \quad (43)$$

$$\sigma' = \left[\frac{\Gamma(1+\beta') \times \sin\left(\frac{\pi\beta'}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\beta'}{2}\right) \times \beta' \times 2^{\left(\frac{\beta'-1}{2}\right)}} \right]^{\frac{1}{\beta'}} \quad (44)$$

$$\Gamma(x) = (x-1)!$$

با توجه به روابط (۴۲) تا (۴۴)، t تکرار فعلی، d بعد بردار مکانی جسم، r_1, r_2 دو عدد تصادفی در بازه $[0, 1]$ و β' مقدار ثابت (که در این مقاله برابر $1/5$ است. در هر تکرار، موقعیت و گام هر سنجاک با استفاده از معادلات (۴۰)،

بودن)، حرکت اصولی (هم‌ترازی)، انسجام، دستیابی به منبع غذایی و دوری از دشمن که مدل ریاضی هریک از رفتارها ارائه شده است. مرحله استقلال به صورت معادله (۳۵) است [۲۲].

$$S_i = -\sum_{j=1}^N X - X_j \quad (35)$$

X موقعیت فعلی سنجاک و X_j موقعیت j امین همسایه سنجاک و N تعداد سنجاک‌های همسایه را نشان می‌دهد. مدل ریاضی حرکت اصولی نیز، به صورت رابطه (۳۶) است [۲۲].

$$A_i = \frac{\sum_{j=1}^N V_j}{N} \quad (36)$$

V_j نشان دهنده سرعت j امین همسایه سنجاک است. مرحله انسجام به صورت معادله (۳۷) است [۲۲].

$$C_i = \frac{\sum_{j=1}^N X_j}{N} - X \quad (37)$$

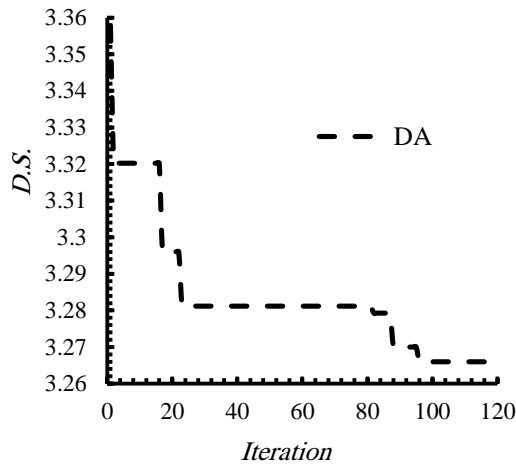
در رابطه (۳۷)، X موقعیت فعلی سنجاک و X_j موقعیت j امین همسایه سنجاک و N تعداد سنجاک‌های همسایه را نشان می‌دهد. مرحله چهارم، حرکت به سوی یک منبع غذایی است که رابطه آن به صورت (۳۸) ارائه می‌شود [۲۲].

$$F_i = X^+ - X \quad (38)$$

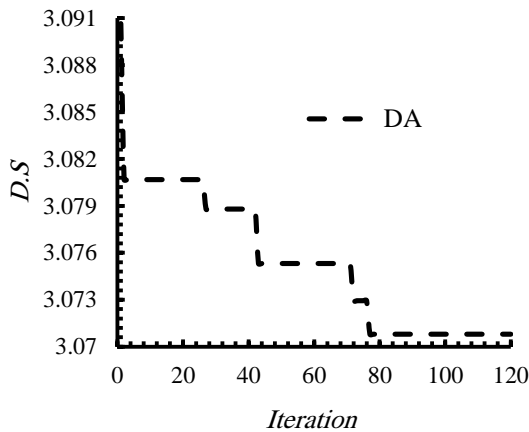
در رابطه (۳۸)، X موقعیت فعلی سنجاک و X^+ موقعیت منبع غذا را نشان می‌دهد و در نهایت مدل ریاضی دوری از دشمن، به صورت معادله (۳۹) است [۲۲].

$$E_i = X^- + X \quad (39)$$

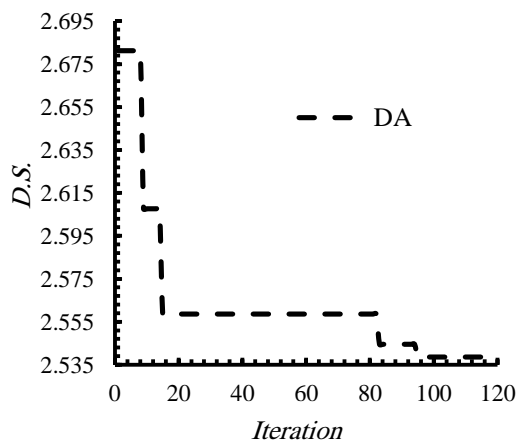
که X موقعیت فعلی سنجاک و X^- موقعیت دشمن را نشان می‌دهد. رفتار سنجاک‌ها ترکیبی از این پنج گروه است که در این مقاله به آن‌ها پرداخته شده است. برای به روز رسانی موقعیت سنجاک‌ها در یک فضای جست و جو و شبیه‌سازی حرکت‌های آن‌ها، بردار گام (ΔX) و بردار موقعیت مکانی (X) مورد نظر قرار می‌گیرد. بردار گام، مشابه بردار سرعت در الگوریتم اجتماع ذرات (PSO) است که جهت حرکت سنجاک‌ها را نشان می‌دهد و به صورت رابطه (۴۰) تعریف می‌شود [۲۲].



شکل ۶- نمودار همگرایی برای بارگذاری تک‌محوری



شکل ۷- نمودار همگرایی برای بارگذاری دو‌محوری



شکل ۸- نمودار همگرایی برای بارگذاری برشی

(۴۱) و (۴۲) به روز می‌شوند. برای به روز رسانی موقعیت X و ΔX در همسایگی هر سنجاک، با استفاده از روش فاصله اقلیدسی که فاصله بین دو نقطه را بر اساس قضیه فیثاغورس بین تمام سنجاک‌ها محاسبه و N تا از آن‌ها را انتخاب می‌نماید، روند موقعیت به روز رسانی پیوسته تا معیار نهایی ادامه می‌یابد. شایان ذکر است که تفاوت‌های اصلی بین الگوریتم DA و PSO وجود عامل استقلال، حرکت اصولی، انسجام، دستیابی به منبع غذایی، دوری از دشمن و گردش تصادفی است [۲۲]؛ همچنین مفاهیم ازدحام استاتیکی و دینامیکی در الگوریتم سنجاک، از مفاهیم جدید هستند که در این الگوریتم به کار گرفته شده‌اند.

۴- بررسی نمودارهای همگرایی

در شکل ۶ تا ۸، نمودارهای همگرایی الگوریتم سنجاک برای ورق همسانگرد محدود حاوی گشودگی مثلثی در حالت‌های بهینه تحت بارگذاری درون صفحه‌ای ($\frac{L}{a} = 0.2$ ، $\frac{b}{a} = 1$) نشان داده شده است. دیده می‌شود، به ازای حالت‌های در نظر گرفته شده، الگوریتم سنجاک در حال بررسی نقاط بهینه محلی برای بدست آوردن مقدار مناسب است.

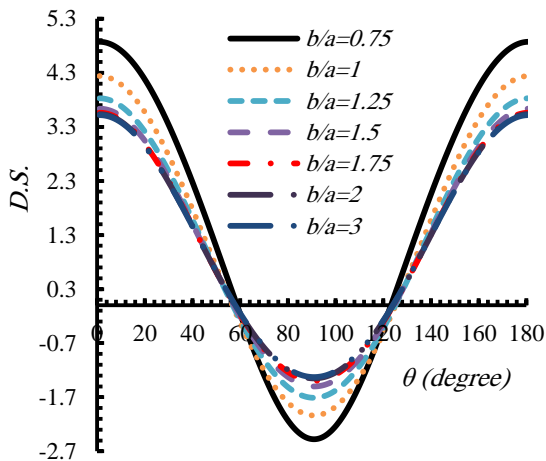
۵- نتایج

همان‌طور که می‌دانیم، تمرکز تنش در ورق‌های همسانگرد حاوی گشودگی مستقل از جنس و خواص مکانیکی ماده است؛ بنابراین نتایج این مقاله را می‌توان برای ورق‌های همسانگرد از سایر جنس‌ها نیز تعمیم داد. براین اساس، مشخصات ماده همسانگرد به کار رفته در این مقاله مطابق جدول ۱ است. در این بخش، نتایج تنش بهینه ورق همسانگرد محدود حاوی گشودگی مثلثی تحت بارگذاری تک‌محوری، دو‌محوری و برشی ارائه می‌شود. از آنجایی‌که اندازه گشودگی به ورق مقداری ثابت و برابر $\frac{L}{a} = 0.4$ در نظر گرفته شده است، کمترین نسبت $\frac{b}{a}$ می‌تواند برابر با عدد 0.4 باشد که در این صورت، دو ضلع ورق مماس بر گشودگی می‌شوند. این امر در کاربردهای عملی معقول به‌نظر نمی‌رسد، بنابراین در این مقاله نسبت $\frac{b}{a}$ های بزرگتر از 0.7 بررسی می‌گردد. در این پژوهش سعی می‌شود، با استفاده از الگوریتم بهینه‌سازی سنجاک برای یک ورق همسانگرد محدود حاوی

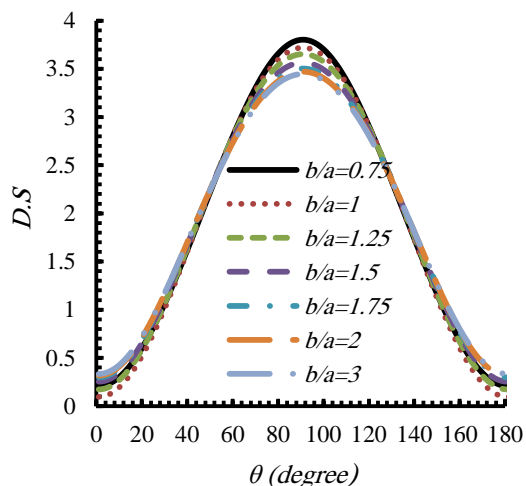
همچنین تأثیر نسبت ابعاد ورق برای دو بارگذاری برشی و تک‌محوری، بیشتر از بارگذاری دومحوری است و این کاهش مقدار تنش در این دو بارگذاری با شیب بیشتری اتفاق می‌افتد. لازم به اشاره است، به علت تقارن موجود در توزیع تنش حول گشودگی مثلثی، در همه بارگذاری‌های مورد بحث، نتایج تا $\theta = 180^\circ$ ارائه شده است.

جدول ۱- خواص مکانیکی ماده [۱۱]

ماده	ν	G(GPa)	E(GPa)
فولاد	۰٫۳	۷۹٫۳	۲۰۷



شکل ۹- روند تغییرات تنش بی‌بعد حول گشودگی مثلثی در $\frac{b}{a}$ های مختلف تحت بارکشی تک‌محوری



شکل ۱۰- روند تغییرات تنش بی‌بعد حول گشودگی مثلثی در $\frac{b}{a}$ های مختلف تحت بارکشی دومحوری

گشودگی، در هر نسبت اضلاع ورق ($\frac{b}{a}$) و هر نسبت اندازه گشودگی به ورق ($\frac{L}{a}$) مقادیر بهینه دیگر متغیرهای طراحی و کمترین مقدار توزیع تنش اطراف گشودگی، مورد بررسی قرار گیرد.

۵-۱- تأثیر نسبت ابعاد ورق

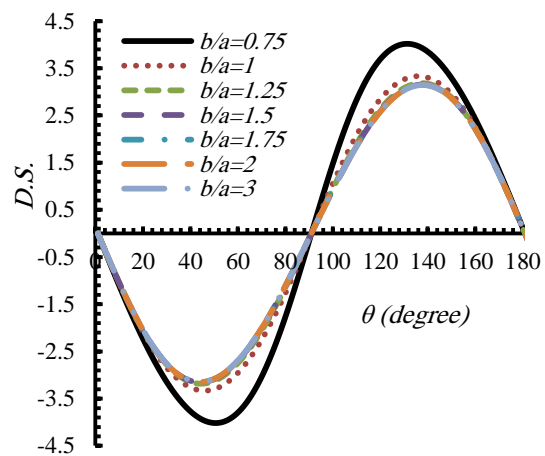
تأثیر نسبت ابعاد ورق بر مقدار تنش بی‌بعد با در نظر گرفتن همزمان زوایه چرخش گشودگی و شعاع انحنای گوشه‌ی گشودگی به عنوان متغیرهای طراحی برای ماده همسانگرد فولاد تحت بارگذاری‌های درون صفحه‌ای در شکل‌های ۹ تا ۱۱، نشان داد شده است. مقادیر بهینه چرخش گشودگی، شعاع انحنای گوشه گشودگی و تنش بی‌بعد کمینه، مقادیر بهینه حاصل از الگوریتم سنجاقک هستند. همان‌طور که مشاهده می‌گردد، با افزایش نسبت $\frac{b}{a}$ مقدار تنش بی‌بعد حول گشودگی در سه حالت بارگذاری کاهش می‌یابد و اختلاف توزیع تنش با افزایش این نسبت، کاهش پیدا می‌کند. علت این امر این است، ورق در صورتی محدود می‌باشد که نسبت طول ضلع گشودگی به طول بزرگترین ضلع ورق بزرگتر از $\frac{L}{a} = 0.4$ باشد. برای نسبت $\frac{b}{a}$ های کوچکتر از ۱، شرایط $\frac{L}{a} = 0.4$ (نسبت طول ضلع گشودگی به بزرگترین طول ورق بزرگتر از 0.4) برقرار است و با کوچک شدن ابعاد، مقدار تنش افزایش می‌یابد. برای نسبت‌های $\frac{b}{a}$ بزرگتر از یک، ضلع بزرگتر ورق می‌شود و در صورتی که شرایط ورق محدود برای آن صدق نکند، تغییر چندانی در مقدار تنش همانند ورق‌های نامحدود به‌وجود نمی‌آید. به همین خاطر مشاهده می‌شود که در نسبت $\frac{b}{a}$ برابر با $1/75$ و بیشتر از آن تغییر چندانی در مقدار تنش ایجاد نمی‌شود؛ همچنین در جدول ۲ نیز مشاهده می‌کنید، برای حالت $m = 0$ که بیان‌کننده‌ی گشودگی دایروی است، کمترین مقدار تنش بی‌بعد را به ازای تمامی حالت‌های بارگذاری خواهیم داشت. شکل ۱۲، ماکزیمم تنش بهینه را برحسب نسبت $\frac{b}{a}$ در سه نوع بارگذاری مورد بحث نشان می‌دهد. در این‌جا نیز مشاهده می‌گردد، با افزایش نسبت $\frac{b}{a}$ مقدار ماکزیمم تنش بی‌بعد در سه حالت بارگذاری کاهش می‌یابد و در نسبت‌های بزرگتر از $1/75$ مقدار تنش به حالت پایدار رسیده با افزایش این نسبت، تغییر چندانی در مقدار تنش ماکزیمم بی‌بعد ایجاد نمی‌شود.

جدول ۲- نتایج بهینه گشودگی مثلثی در نسبت ابعاد مختلف ورق (حالت بهینه $m = 0$)

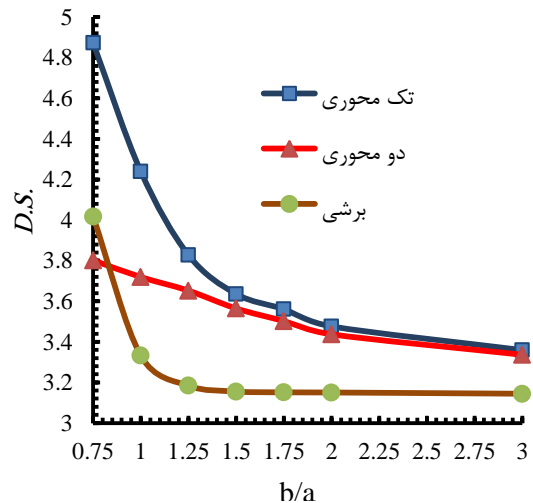
بارگذاری برشی	بارگذاری دو محوری	بارگذاری تک محوری	b/a
D.S.	D.S.	D.S.	
۴/۰۱۷۶	۳/۸۰۱۸	۴/۸۷۳۲	۰/۷۵
۳/۳۳۲۲	۳/۷۱۹۳	۴/۲۴	۱
۳/۱۸۳۹	۳/۶۵۲۲	۳/۸۲۷۹	۱/۲۵
۳/۱۵۵۴	۳/۵۶۴۴	۳/۶۳۶	۱/۵
۳/۱۵۱۱	۳/۵۰۲۴	۳/۵۶۱	۱/۷۵
۳/۱۵۰۴	۳/۴۲۷۱	۳/۴۷۶۲	۲
۳/۱۴۴۳	۳/۳۳۶۴	۳/۳۵۹۵	۳

۵-۲- تأثیر نسبت اندازه‌ی گشودگی به ورق

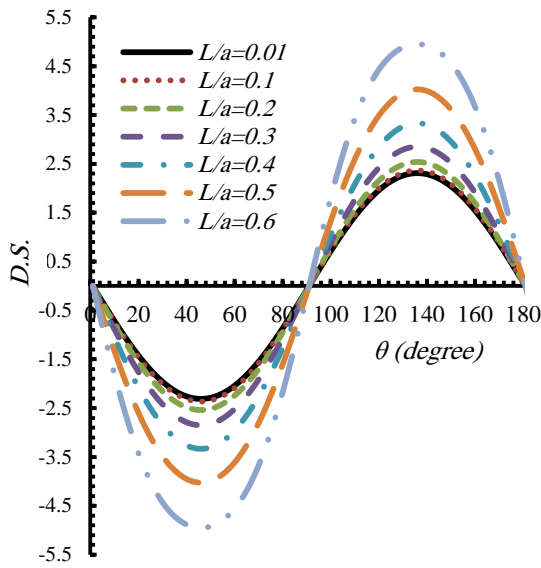
تأثیر نسبت اندازه گشودگی به ورق، بر مقدار تنش بی‌بعد با در نظر گرفتن همزمان زوایه چرخش گشودگی و شعاع انحنا ی گوشه گشودگی به عنوان متغیرهای طراحی برای ماده‌ی همسانگرد فولاد تحت بارگذاری‌های درون صفحه‌ای در شکل‌های ۱۳ تا ۱۵ نشان داده شده است. ملاحظه می‌شود، با افزایش نسبت اندازه گشودگی به ورق تنش در هر سه حالت، بارگذاری افزایش می‌یابد. در محدوده‌ی اندازه گشودگی به ورق بزرگتر از ۰/۲، این افزایش به میزان بیشتری است؛ درحالی‌که در محدوده کوچکتر از ۰/۲، افزایش مقدار تنش بهینه ناچیز و تقریباً مقدار تنش بهینه حول گشودگی ثابت است. این امر نشان‌دهنده تأثیر بسیار زیاد اندازه گشودگی به ورق در ورق‌های محدود است. جدول ۳، مقادیر بهینه پارامترهای اثرگذار، تنش بهینه و مقایسه مقادیر به دست آمده با حل ورق نامحدود ($\frac{L}{a} = 0.1$) را در سه حالت بارگذاری ($\frac{b}{a} = 1$) نشان می‌دهد. در این حالت ابتدا فرآیند بهینه‌سازی به ازای سه متغیر طراحی یعنی نسبت اندازه گشودگی به ورق، شعاع انحنا ی گوشه گشودگی و زوایه چرخش صورت می‌گیرد تا مقدار تنش بهینه بی‌بعد در انحنا ی گشودگی و زوایه چرخش بهینه مشخص شود. ملاحظه می‌شود، در نسبت‌های $\frac{L}{a}$ کوچکتر از ۰/۲، اختلاف ماکزیمم تنش از دو روش، کمتر از ۱۰٪ است، بنابراین در کاربردهای عملی مهندسی، ورق‌های محدود با نسبت $\frac{L}{a}$ کوچکتر از ۰/۲ را می‌توان نامحدود در نظر گرفت. این در حالی است که در نسبت‌های بزرگتر از ۰/۲، اختلاف توزیع تنش با حالت نامحدود تا ۱۲۹/۴۳٪ هم می‌رسد و این نشان می‌دهد که در این نسبت‌ها نمی‌توان از حل نامحدود ورق استفاده کرد. شکل ۱۶، ماکزیمم تنش بهینه حول گشودگی مثلثی



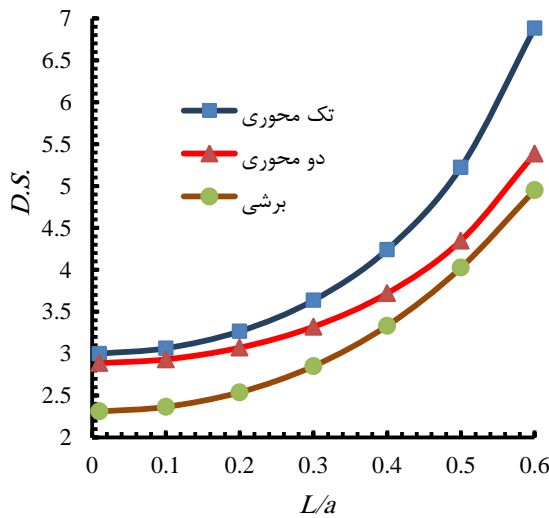
شکل ۱۱- روند تغییرات تنش بی‌بعد حول گشودگی مثلثی در $\frac{b}{a}$ های مختلف تحت بار برشی



شکل ۱۲- تنش بهینه حول گشودگی مثلثی برحسب $\frac{b}{a}$ های مختلف در سه حالت بارگذاری



شکل ۱۵- روند تغییرات تنش بی بعد حول گشودگی مثلثی در $\frac{L}{a}$ های مختلف تحت بار برشی

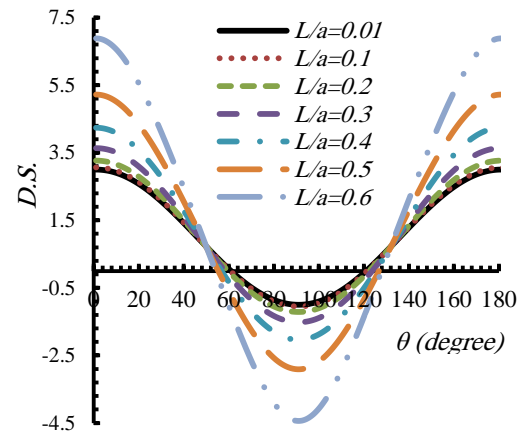


شکل ۱۶- تنش بهینه حول گشودگی مثلثی برحسب $\frac{L}{a}$ های مختلف در سه حالت بارگذاری

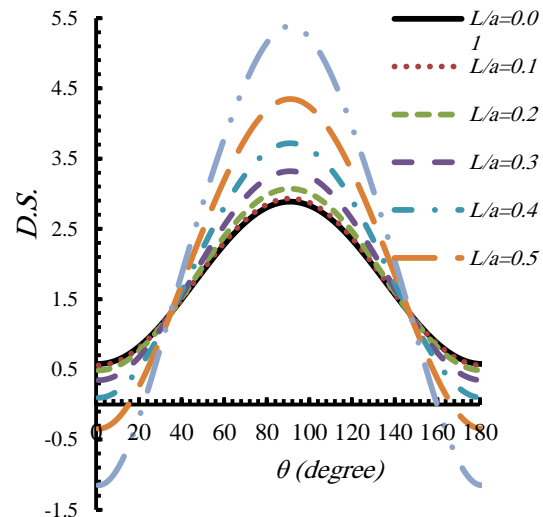
۶- نتیجه گیری

در این مقاله، با استفاده از الگوریتم سنجا فک (DA) به تعیین پارامترهای بهینه مؤثر بر تنش بی بعد اطراف گشودگی مثلثی واقع در ورق همسانگرد محدود پرداخته شد. الگوریتم سنجا فک، گونه‌ای دیگر از الگوریتم‌های فرا ابتکاری بر مبنای هوش ازدحامی (SI) است که از رفتار استاتیکی و دینامیکی

برحسب نسبت‌های مختلف $\frac{L}{a}$ را در سه حالت بارگذاری نشان می‌دهد. با افزایش نسبت اندازه گشودگی به ورق، در محدوده اندازه گشودگی به ورق کمتر از ۰/۲، مقدار تنش تقریباً ثابت و در محدوده بزرگتر از ۰/۲، با افزایش این نسبت مقدار تنش در هر سه حالت بارگذاری افزایش می‌یابد و در بارگذاری تک‌محوری، بیشتر از دو بارگذاری دیگر است و این افزایش مقدار تنش بهینه در بارگذاری اشاره شده با شیب بیشتری اتفاق می‌افتد.



شکل ۱۷- روند تغییرات تنش بی بعد حول گشودگی مثلثی در $\frac{L}{a}$ های مختلف تحت بار تک‌محوری



شکل ۱۸- روند تغییرات تنش بی بعد حول گشودگی مثلثی در $\frac{L}{a}$ های مختلف تحت بار دو محوری

جدول ۳- نتایج بهینه گشودگی مثلی در نسبت‌های مختلف اندازه گشودگی به ورق (حالت بهینه $m = 0$)

بارگذاری برشی		بارگذاری دو محوری		بارگذاری تک محوری		L/a
درصد اختلاف	$D.S.$	درصد اختلاف	$D.S.$	درصد اختلاف	$D.S.$	
.	۲/۳۰۹۹	.	۲/۸۸۷۱	.	۳/۰۰۰۶	۰/۰۱
۲/۳۸	۲/۳۶۵	۱/۵۴	۲/۹۳۱۶	۲/۱۲	۳/۰۶۴۳	۰/۱
۹/۹	۲/۵۲۸۶	۶/۳۶	۳/۰۷۰۸	۸/۸۴	۳/۲۶۶	۰/۲
۲۳/۴	۲/۸۵۰۲	۱۵/۰۲	۳/۳۲۰۷	۲۱/۱۵	۳/۶۳۵۴	۰/۳
۴۴/۲۵	۳/۳۳۲۲	۲۸/۸۲	۳/۷۱۹۳	۴۱/۳۰	۴/۲۴	۰/۴
۷۴/۲۲	۴/۰۲۴۴	۵۰/۶۱	۴/۳۴۸۵	۷۴/۰۱	۵/۲۲۱۴	۰/۵
۱۱۴/۳۱	۴/۹۵۰۴	۸۶/۵۵	۵/۳۸۵۹	۱۲۹/۴۳	۶/۸۸۴۳	۰/۶

طول ضلع افقی ورق، (m)	a	سنجاقک‌ها به منظور جست و جوی شکار (اکتشاف) و حمله
ثابت‌های حقیقی مجهول	a_n, a'_n	به شکار (بهره برداری) در فضای جست و جو استفاده می‌کند.
ثابت مختلط مجهول در محاسبه $\varphi(\zeta)$ و $\psi(\zeta)$	B_n	این الگوریتم به پنج عامل، انسجام، استقلال، حرکت اصولی، دستیابی به منبع غذایی و دوری از دشمن مجهز شده است.
ثابت‌های حقیقی مجهول در محاسبه $\varphi(\zeta)$ و $\psi(\zeta)$	b_{n1} و b_{n2}	فرآیند اکتشاف و بهره‌برداری، از دیگر مزایای الگوریتم سنجاقک است. همچنین اجتناب از بهینه محلی و نتایج رقابتی این الگوریتم دلالت بر مناسب بودن این الگوریتم در
طول ضلع عمودی ورق، (m)	b	بهینه‌سازی ورق‌های محدود دارای گشودگی دارد. انحنای گوشه‌های گشودگی، زاویه چرخش گشودگی، نسبت اضلاع ورق، نسبت اندازه‌ی گشودگی به ورق و نوع بارگذاری
ثابت‌های حقیقی مجهول	b_n و $'_n$	متغیرهای طراحی در این مقاله می‌باشند. تنش بی‌بعد مورد نظر این مقاله، بر پایه‌ی حلّ تحلیلی متغیر مختلط موشخیلشویلی و نگاشت هم‌نوا با فرض تنش صفحه‌ای است.
ثابت مختلط مجهول در محاسبه $\varphi(\zeta)$ و $\psi(\zeta)$	C_n	برای محاسبه تابع تنش مربوط به ورق محدود حاوی گشودگی مثلی، از جمع تابع تنش یک ورق نامحدود حاوی همان گشودگی و تابع تنش یک ورق محدود بدون گشودگی استفاده شده است. ضرایب مجهول در تابع تنش، با استفاده از روش حداقل مرتعات مرزی و اعمال شرایط مرزی مناسب به دست می‌آیند. نتایج نشان داد که انحنای گوشه‌های گشودگی تنها پارامتر موثر بر کاهش تمرکز تنش نیست، بلکه زاویه‌ی چرخش گشودگی، نسبت اضلاع ورق و نسبت اندازه‌ی گشودگی به ورق، سهم به‌سزایی در کاهش مقدار تنش دارد.
ثابت‌های حقیقی دلخواه	c_2 و c_1	
ثابت مختلط مجهول در محاسبه $\varphi(\zeta)$ و $\psi(\zeta)$	D_n	
ثابت‌های حقیقی مجهول در محاسبه $\varphi(\zeta)$ و $\psi(\zeta)$	d_{n1} و d_{n2}	
اندیس نشان‌دهنده تعداد نقاط منتخب	j	
طول ضلع گشودگی مرتعی و مثلی و طول قطر دایره محیط بر Π ضلعی‌ها، (m)	L	
کانتور محدود کننده ناحیه‌ی S	L'	
تعداد جملات مربوط به سری لورنت	M	
پارامتر تعیین‌کننده انحنای گوشه‌ی گشودگی	m	
تعداد نقاط منتخب روی مرز داخلی ورق	N_{in}	
تعداد نقاط منتخب روی مرز خارجی ورق	N_{ot}	
پارامتر تعیین‌کننده هندسه گشودگی	n	
پارامتر تعیین‌کننده اندازه گشودگی	R	
اختلاف تنش حاصل از شرایط مرزی و تنش حاصل از حلّ تحلیلی روی مرز ورق و گشودگی	$r_1(\rho_j, \theta_j)$ و $r_2(\rho_j, \theta_j)$	

۷- علائم و نشانه‌ها

ثابت مختلط مجهول در محاسبه‌ی $\varphi(\zeta)$ و $\psi(\zeta)$	A_n
ثابت‌های حقیقی مجهول در محاسبه‌ی $\varphi(\zeta)$ و $\psi(\zeta)$	a_{n1} و a_{n2}

ضریب منبع غذا	f	تابع تنش	$U(x, y)$
نشان دهنده منبع غذای i امین سنجاقک	F_i	تابعی از نسبت پواسون	χ
ضریب دشمن	e	نیروهای خارجی وارد بر مرز گشودگی، (N)	Y و X
نشان دهنده موقعیت دشمن از i امین	E_i	متغیر مختلط	z
سنجاقک		زاویه بین افق و عمود بر مرز گشودگی، (θ°)	α
ضریب اینرسی	w	زاویه چرخش گشودگی، (θ°)	β
شماره تکرار	t	زاویه بین بردار عمود بر مرز خارجی ورق و	γ
بعد بردار مکانی، (m)	d	محور X ، (θ°)	
عدد تصادفی	r_1, r_2	باقی مانده مرزی	Δ

۸- مراجع

[1] Howland RCJ (1929) On the stresses in the neighborhood of circular hole in a strip under tension. Philos Trans Roy Soci 229: 49-86.	مختصات عمودی و افقی در صفحه ζ	η, ζ
[2] Heywood RB (1952) Designing by Photoelasticity. Chapman and Hall, London.	زاویه‌ی حول گشودگی، (θ°)	θ
[3] Muskhelishvili NI (1962) Some basic problems of mathematical theory of elasticity. 2nd edn. Netherlands, Noordhooff.	تابع تحلیلی از متغیر مختلط z	$\Theta(z)$
[4] Lekhnitskii SG (1968) Anisotropic plates. 2nd edn. Gordon and Breach Science Publishers, NewYork.	ضریب بار دومی	λ
[5] Savin GN (1961) Stress concentration around holes. Pergamon Press, NewYork.	عدد پی ۳/۱۴۱۵	π
[6] Daoust J, Hoa SV (1991) An analytical solution for anisotropic plates containing triangular holes. Com Str 19:107-130.	مختصات شعاعی	ρ
[7] Abuefoutouh NM (1993) Preliminary design of unstiffend composite shells. Symposium of 7th technical Conference of ASC 693-786.	تنش عمودی در صفحه z ، (Pa)	σ_x و σ_y
[8] Ukadgaonker VG, Rao DKN (1999) Stress distribution around triangular holes in anisotropic plates. Com Str 45:171-183.	تنش عمودی در صفحه ζ ، (Pa)	σ_ρ و σ_θ
[9] Batista M (2011) On the stress concentration around hole in an infinite plate subject to uniform load at infinity. Int J Mech Sci 53:254-261.	تنش نرمال در مرز خارجی ورق، (Pa)	σ_n
[10] Lei GH, Ng CWW, Rigby DB (2001) Stress and displacement around an elastic artificial rectangular hole. J Eng Mech 127: 880-890.	تنش برشی در صفحه z ، (Pa)	τ_{xy}
[11] Rezaeepazhand J, Jafari M (2010) Stress concentration in metallic plates with special shaped cutout. Int J Mech Sci 96-102.	تنش برشی در صفحه ζ ، (Pa)	$\tau_{\rho\theta}$
[12] Banerjee M, Jain NK, Sanyal S (2013) Stress concentration in isotropic and orthotropic composite plates with center circular hole subjected to transverse static loading. Int J Mech Ind Eng 3: 109-113.	تنش برشی نرمال در مرز خارجی ورق، (Pa)	τ_n
[13] Sharma DS, Patel NP, Panchal KC (2010) Stress distribution around triangular holes in orthotropic plate. Nirm Uun J ENG TECH 1:56-63.	تابع تحلیلی از متغیر مختلط z	$\varphi(z)$
	تابع تحلیلی از متغیر مختلط ζ	$\varphi(\zeta)$
	تابع تحلیلی از متغیر مختلط z	$\psi(z)$
	تابع تحلیلی از متغیر مختلط ζ	$\psi(\zeta)$
	تابع نگاشت	$\omega(\zeta)$
	موقعیت هدف	X^\pm
	موقعیت زامین همسایه سنجاقک	X_j
	بردار گام، (m)	ΔX
	مقدار ثابت	β'
	ضریب استقلال (مجزا بودن)	s
	نشان دهنده مجزا بودن i امین سنجاقک	S_i
	ضریب حرکت اصولی (هم‌ترازی)	a
	نشان دهنده حرکت اصولی i امین سنجاقک	A_i
	ضریب انسجام	c
	نشان دهنده‌ی انسجام i امین سنجاقک	C_i

- [19] Jafari M, Rohani A (2014) Stress distribution parameters optimization of orthotropic plates quasi-square cut out using genetic algorithm. *J So Flu Mech* 4(4): 87-99. (In Persian)
- [20] Ines Barbosa CJ, Maria Amélia R (2014) Design of a laminated composite multi-c structure subjected to torsion. 29th Congress of the International Council of the Aeronautical Sciences, St. Petersburg, Russia, September 7-12.
- [21] Mahmoodzade SA, Jafari M (2015) Optimization of Influence parameter on isotropic plates regular polygonal cutouts using particle swarm algorithm. *Modares Mech Eng* 15(12):243-253. (in Persian)
- [22] Mirjalili S (2016) Dragonfly algorithm: a new meta-heuristic optimization technique for solving single-objective, discrete, and multi-objective problems. *Neural Comput Appl*.27(4):1053-1073.
- [14] Woo CW, Chan LW (1992) Boundary collocation method for analyzing perforated plate problems. *Eng Fract Mech* 43(5):757-768.
- [15] Xu X, Sun L, Fan X (1995) Stress concentration of finite composite laminates with elliptical hole. *Comput Struct* 57(1):29-35
- [16] Pan Z, Cheng Y, Liu J (2013) Stress analysis of finite plate with a rectangular hole subjected to uniaxial tension using modified stress functions. *Int J Mech Sci* 75:265-277.
- [17] Jafari M, Ardalani E (2016) Stress concentration in finite metallic plates with regular holes. *Int J Mech Sci* 106:220-230.
- [18] Alonso MG, Duysinx p (2013) Particle swarm optimization (PSO): An alternative method for composite optimization, 10th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization. Orlando. Florida. USA. May 19-24.