



## آنالیز دینامیکی ورق‌های مرکب با اعمال آسیب جداشدگی لایه‌ها تحت بارهای حرارتی و رطوبتی به روش نوار محدود

فرشاد گودرزبان<sup>۱</sup> و حسین عموشاهی<sup>۲\*</sup>

<sup>۱</sup> دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشگاه اصفهان، اصفهان

<sup>۲</sup> استادیار، دانشگاه اصفهان، اصفهان

مقاله مستقل؛ تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۰۹/۲۹؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۵/۱۱/۱۹؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۰۱/۱۲

### چکیده

در این مقاله تأثیر تغییرات شرایط محیطی از جمله درجه حرارت و رطوبت محیط بر روی فرکانس ارتعاش آزاد ورق‌های لایه‌ای مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین تأثیر عوامل مختلفی نظیر مشخصات هندسی مدل، شرایط تکیه‌گاهی، ضخامت ورق و زاویه قرارگیری لایه‌ها بر روی فرکانس ارتعاش همزمان با اعمال شرایط مختلف حرارتی و رطوبتی مورد مطالعه قرار گرفته است. برای این منظور از روش نوار محدود استفاده شده است که دارای توابع مثلثاتی در جهت طولی و توابع چند جمله‌ای در جهت عرضی نوار می‌باشد. برای در نظر گرفتن اثر تنش‌های برشی تئوری برشی مرتبه اول به کار گرفته شده است. در ادامه اثر جداشدگی لایه‌های ورق مرکب در شرایط مختلف نیز بررسی شده و تأثیر میزان جداشدگی و محل آن بر فرکانس ارتعاش آزاد ارزیابی می‌شود. نتایج حاصله نشان می‌دهد که منظور نمودن اثرات محیطی مثل دما و رطوبت می‌تواند تغییرات قابل ملاحظه‌ای را در فرکانس طبیعی ارتعاش آزاد ورق‌های لایه‌ای ایجاد کند که این تأثیر در زمان ایجاد جدایش بین لایه‌ها اثر بیشتری دارد.

**کلمات کلیدی:** ورق‌های لایه‌ای؛ شرایط حرارتی و رطوبتی؛ آنالیز دینامیکی؛ روش نوار محدود؛ جداشدگی لایه‌های ورق مرکب.

## Dynamic Analysis of Composite Plates with Delaminations under Hygrothermal Loads Using Finite Strip Method

F. Goodarzian<sup>1</sup>, H. Amoushahi<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Master's student, , University of Isfahan, Isfahan, Iran.

<sup>2</sup> Assistant Professor, University of Isfahan, Isfahan, Iran.

### Abstract

In this paper the effect of hygrothermal conditions such as temperature and moisture on free vibration frequency of composite plate is investigated. In addition, the effect of different properties such as geometry of model, support conditions, plate thickness and orientation of layers on vibration of composite laminated plate is investigated. The finite strip method is used by trigonometric functions in longitudinal direction and polynomial functions in transverse direction. The first shear order deformation theory was used to consider the shear stress effect. Finally, the effect of delamination of composite plates is considered and the effect of the amount and place of delamination are evaluated on free vibration frequency of laminated plates. The results show that considering the changing in temperature and moisture of laminated plates is caused the big changing in natural frequency of free vibration of such plates, especially, when the delamination of layers are occurred.

**Keywords:** Composite Plates; Dynamic Analysis; Hygrothermal Condition; Finite strip Method; Delamination.

## ۱- مقدمه

ماده مرکب مخلوط فیزیکی از دو یا چند ماده مختلف است که این مواد خصوصیات فیزیکی و شیمیایی خود را حفظ کرده و مرز مشخصی را با یکدیگر تشکیل می‌دهند. این مخلوط در مجموع و با توجه به برخی معیارها، خواص بهتری از هر یک از اجزای تشکیل دهنده خود را دارا می‌باشد. در حالت کلی ماده مرکب به ماده‌ای اطلاق می‌شود که از دو فاز ماتریس و تقویت کننده تشکیل شده باشد و از فاز دوم حداقل به اندازه ۵ درصد استفاده شده باشد. فاز ماتریس یا زمینه ماده ایست که در یک سری از خواص مکانیکی نقص دارد. ماده زمینه، تقویت کننده را احاطه کرده است، به طوری که نگذارد ماده تقویت کننده پراکنده شود. این فاز همچنین محافظت از ماده تقویت کننده در برابر عوامل شیمیایی را بر عهده دارد. ورق مرکب مجموعه‌ای از لایه‌های روی هم انباشته شده بوده که در جهت بدست آمدن سختی و ضخامت مورد نظر طراحی می‌گردند، به عنوان مثال لایه‌های تک جهته می‌توانند طوری قرار گیرند که تماماً در یک جهت باشند. همچنین می‌توانند بصورت زوایای ۰ و ۹۰ درجه روی یکدیگر قرار گیرند که ورق‌های مرکب حاصله در هر حالت رفتار متفاوتی را از خود بروز می‌دهد. در حالاتی نیز برای تحمل بارهای برشی بیشتر، فیبرها می‌توانند در زوایای ۳۰ و یا ۴۵ درجه نیز قرار گیرند.

مطالعات متعددی بر روی ارتعاش ساده ورق‌های مرکب در شرایط مختلف حرارتی و رطوبتی، با استفاده از تئوری‌های مختلف مورد مطالعه قرار گرفته‌است. برت و چن در سال ۱۹۷۸ میلادی و ردی در سال ۱۹۷۹ میلادی، ارتعاش ورق‌های غیر متقارن مستطیلی را مورد بررسی قرار دادند [۱] و [۲]. چای ارتعاش آزاد ورق لایه‌ای را تحت تکیه‌گاه‌های مختلف بررسی نمود [۳] و متسونگا ورق مرکب با زوایای ۰ و ۹۰ درجه را مورد آنالیز ارتعاشی قرار داد [۴]. لی و همکاران مدلی برای خستگی ناشی از جدایش ورق‌های مرکب الاستوپلاستیک در نظر گرفتند. آن‌ها شرایط حرارتی و رطوبتی را برای تیرهای متشکل از این ورق‌های مرکب مورد مطالعه قرار دادند و در ادامه آثار تغییر شکل برشی و پیرو الکتریک را بررسی نمودند. این محققان پاسخ دینامیکی تیرهای متشکل از ورق‌های مرکب را بر اساس تغییرات ابعاد جدایش لایه‌ها و همچنین تغییرات ولتاژ لایه‌های

پیروالکترونیک، بدست آوردند [۵]. لی و کیم ورق‌های FGM را در خصوص شرایط حرارتی و رطوبتی مورد بررسی قرار دادند. موضوع مطالعه آن‌ها رفتار پس از کمانش ورق‌های اف-جی-ام تحت تاثیر شرایط حرارتی و رطوبتی بود. آن‌ها از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول برای تحلیل استفاده کرده و روش آنالیز را روش اجزاء محدود با تکنیک نیوتون راوسون برای بررسی کمانش حرارتی، در نظر گرفتند. این محققان درجه حرارت و درصد رطوبت بحرانی را برای کمانش ورق FGM متشکل از فلز و سرامیک را بدست آورده و تغییرات این نقاط را نسبت به تغییر ابعاد ورق بررسی کردند. آن‌ها همچنین ورق را از لحاظ ارتعاشی نیز مورد مطالعه قرار داده و فرکانس طبیعی ورق را در درصد رطوبت‌های متفاوت بدست آورده و با بررسی انحناء ورق مشاهده نمودند که افزایش رطوبت و حرارت باعث افزایش انحنای ورق می‌شود [۶].

زنکور و همکاران تأثیر دما و رطوبت را بر رفتار هیگروترومالی ورق‌های مرکب واقع در فنداسیون الاستیک مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها نشان دادند، ویژگی‌های ورق کامپوزیت تحت تأثیر تغییرات رطوبت و حرارت تغییر می‌نماید. تأثیرات تغییر شکل برشی و نسبت عرض به ضخامت بر روی انحناء و تنش‌های ایجاد شده در ورق مورد مطالعه آن‌ها مورد بررسی قرار گرفت [۷]. تونسوی و همکاران تأثیر ترک را بر روی ورق با زوایای ۰ و ۹۰ درجه بررسی کردند. مدول‌های ورق مورد مطالعه آن‌ها تحت تأثیر این ترک‌ها قرار می‌گرفت که منجر به کاهش خصوصیات مکانیکی ورق تحت تأثیر حرارت و رطوبت می‌شد. آن‌ها نشان دادند شرایط محیطی تأثیر بسزایی روی کاهش مدول یانگ داشته و در ترک‌های بزرگ تأثیر وسعت ترک را بر روی ورق مورد مطالعه قرار دادند [۸]. ونگ و دانگ پوسته‌های استوانه-ای را مورد بررسی قرار داده و روش انرژی، روش مورد مطالعه آن‌ها در این تحقیق بود. تمرکز مطالعه این محققان تأثیرات شرایط حرارتی و رطوبتی بر روی کمانش موضعی پوسته استوانه‌ای معطوف گردید. آن‌ها اشکال مختلف جدایش را در سطوح پوسته استوانه‌ای بررسی کرده و آسیب جدایش ورق را در تک لایه یا چند لایه مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها در ادامه از مدول‌های یانگ و ضرایب انبساطی حرارتی و رطوبتی برای بدست آوردن توابعی جهت تعریف تأثیر آثار حرارتی

بررسی قرار دادند [۱۶]. رهان مطالعات آزمایشگاهی در خصوص جداسازی ورق کربن- اپوکسی انجام داد [۱۷] و سلیمانی پور با در نظر گرفتن جداسازی موجی غیر خطی، ورق مرکب را بررسی کردند [۱۸].

بررسی مقالات موجود در تاریخچه نشان می‌دهد که تعیین میزان کاهش فرکانس طبیعی ارتعاش آزاد ورق‌های لایه‌ای همزمان با ایجاد جدایش بین لایه‌ها بدلیل کاهش سختی ورق امری ضروری است که در مقاله پیش رو به روش نوار محدود که روشی قدرتمند برای ورق‌های مستطیلی است ارزیابی شده است. در ادامه این پژوهش با در نظر گرفتن تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول به استخراج روابط کرنش و تغییرمکان پرداخته می‌شود. سپس با محاسبه نیروهای حرارتی و رطوبتی، نیروهای داخلی ایجاد شده بواسطه این شرایط در مدل اعمال شده و با ایجاد مدل جداسازی به محاسبه فرکانس ورق مرکب در هندسه‌ها و شرایط تکیه‌گاهی مختلف با استفاده از روش نوار محدود پرداخته می‌شود.

## ۲- استخراج روابط

ابتدا لازم است تا کرنش‌ها بر اساس جابجایی نقاط بیان گردد. بدین منظور در این مقاله از تئوری برشی مرتبه اول استفاده شده است.

### ۲-۱- تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول

در این تئوری فرض سوم تئوری ورق کلاسیک تغییر می‌کند، بدین منظور که خطوط نرمال عرضی پس از تغییر شکل عمود بر صفحات میانی قرار نمی‌گیرند. این موضوع منجر به منظور نمودن تغییرات کرنش‌های برشی در ضخامت ورق می‌گردد. در این تئوری مؤلفه  $w$  مستقل از ضخامت در نظر گرفته می‌شود و کشیدگی و تغییر طول در راستای ضخامت صورت نمی‌گیرد. پارامترهای جابجایی به فرم زیر می‌باشند:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) + z\phi_x(x, y, t) \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) + z\phi_y(x, y, t) \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t) \end{aligned} \quad (1)$$

که  $u_0$ ،  $v_0$  و  $w_0$  به ترتیب مؤلفه‌های جابجایی نقطه‌ای

استفاده نمودند. رابطه بین مقدار کرنش بحرانی و پارامترهای هندسی و فیزیکی در پوسته استوانه‌ای در تحقیق آن‌ها مورد بررسی قرار گرفت [۹]. زنگور آثار حرارتی و رطوبتی را بر روی خمش ورق لایه‌ای با زوایای غیر همسان مورد بررسی قرار داد. او از تئوری سینوسی تغییر شکل برشی برای مطالعه روی آثار رطوبتی بهره جست. همچنین تأثیر حرارت و رطوبت بر روی خصوصیات مواد و پاسخ‌های حرارتی- رطوبتی ورق، مورد مطالعه او قرار گرفت [۱۰].

بخولدا و همکاران تأثیر جهت قرارگیری فیبرها را روی خواص ماده بررسی کردند. آن‌ها در درجه حرارت ۳۰۰ کلون تغییرات رطوبتی را نیز در مدل خود اعمال نمودند. آنالیز این پژوهش شامل تمرکز رطوبت در لایه‌های مواد مرکب از جنس Glass-Epoxy و Carbon-Epoxy بود. این محققان طی روشی، زمان اشباع رطوبت در ورق را نیز پیش بینی کرده و نمودارهایی در خصوص رابطه ضخامت ورق نسبت به تمرکز رطوبت و همچنین پیشرفت رطوبت در گذر هفته‌ها، رسم کردند. آن‌ها همچنین کرنش‌های ناشی از ازدیاد رطوبت محیط در ورق و تأثیر جهت‌گیری فیبرها را نیز در این تحقیقات مطالعه نمودند [۱۱].

جداسازی لایه‌های ورق مرکب یکی از آسیب‌هایی بوده که ممکن است در حین ساخت و یا هنگام بهره‌برداری از ورق مرکب طی شرایط محیطی خاص و یا بارگذاری ناگهانی ایجاد شود. در سال‌های اخیر بسیاری از مطالعات ورق معطوف به آسیب جداسازی بین لایه‌های ورق گردیده، از اولین مطالعات در این خصوص، می‌توان به مطالعه دلا و شو در خصوص ارتعاش ورق اشاره نمود [۱۲]. تنک، مطالعه این آسیب را در رنج گسترده‌ای از فرکانس‌ها، بر اساس تئوری الاستیسیته سه بعدی برای ورق مرکب، به انجام رساند [۱۳]. جو در سال ۱۹۹۵ میلادی، با استفاده از روش اجزاء محدود که بر اساس تئوری میدلاین رابطه‌بندی گردیده بود، به مطالعه تأثیر این آسیب بر رفتار دینامیکی ورق، پرداخت [۱۴]. چمپنلی و همکاران، سه نوع مختلف کامپوزیت با زمینه گرافیت را با جایگذاری جدایش ورق‌ها در گوشه‌ها و لبه‌های مدل خود بررسی کردند [۱۵]. در سال‌های اخیر نیز مطالعات متعددی با مدلسازی آسیب جداسازی مورد بررسی قرار گرفته است. چن و همکاران تأثیر جداسازی را روی ورق‌های مرکب ۰ و ۹۰ درجه با روش اجزاء محدود مورد

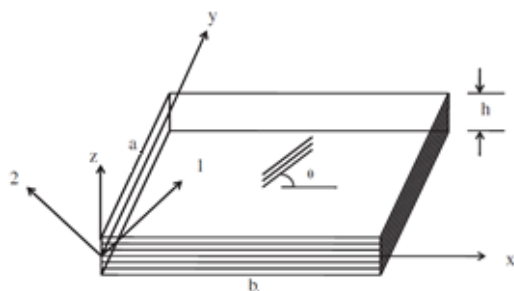
### ۲-۲- روابط نیرو-تغییر مکان ورق مرکب

ورق مرکبی به ضخامت، شامل تعداد N لایه نازک که هر لایه به زاویه دلخواه نسبت به محور قرار گرفته‌اند، در نظر گرفته می‌شود. شکل ۱، فرم کلی ورق در حالت سه بعدی را به همراه ابعاد ورق به نمایش می‌گذارد.

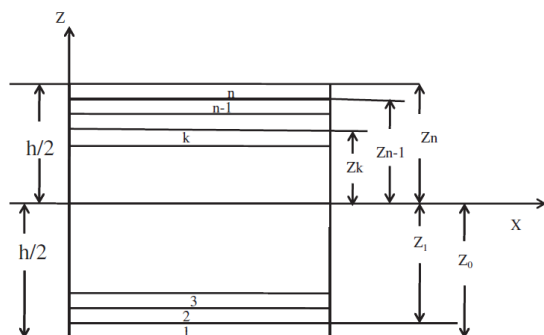
مختصات قرارگیری مدل نیز مطابق شکل x، y و z بوده که به ترتیب ابعاد طولی، عرضی و ارتفاعی مدل را مشخص می‌نماید. شکل ۲ نیز طرز قرارگیری لایه‌های ورق را نسبت به محور اصلی نشان می‌دهد. همانطور که از شکل مشخص می‌باشد، محور اصلی در تراز مرکزی ورق مرکب قرار دارد.

ضخامت ورق مرکب با پارامتر h و ابعاد طولی و عرضی مدل به ترتیب با پارامترهای a و b نشان داده می‌شوند. مطابق با شکل ۲ فاصله هر لایه از تراز مرکزی با پارامتر z نشان داده شده‌است.

در مدل فوق برای محاسبه نیروهای حاصله، رابطه‌ای بین نیروها، ماتریس تبدیل و کرنش‌ها نوشته می‌شود. رابطه کلی نیرو-کرنش برای این ورق مرکب که تحت اثر شرایط افزایش حرارت و رطوبت محیط قرار دارد، به شرح زیر می‌باشد [۱۹].



شکل ۱- سیستم مختصاتی ورق مرکب [۱۹]



شکل ۲- قرارگیری لایه‌های ورق مرکب در ارتفاع [۱۹]

روی میان‌صفحه ورق در امتداد محورهای x، y و z و  $\phi_x$  و  $\phi_y$  به ترتیب چرخش صفحات عمود بر میان‌صفحه، حول محورهای x و y هستند.

$$\phi_x = \frac{\partial u}{\partial z} ; \phi_y = \frac{\partial v}{\partial z} \quad (2)$$

برای ورق‌های نازک که نسبت عرض به ضخامت آن‌ها بیشتر از ۵۰ می‌باشند،  $\phi_x$  و  $\phi_y$  بصورت زیر نوشته می‌گردد:

$$\phi_x = -\frac{\partial w_0}{\partial x} ; \phi_y = -\frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (3)$$

کرنش‌های غیرخطی مرتبط با میدان جابجایی بصورت رابطه (۴) تعریف می‌گردند.

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{yz}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{yz}^{(1)} \\ \gamma_{xz}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{pmatrix} \quad (4)$$

با توجه به رابطه (۴)، کرنش‌های در راستای محورهای x و y در امتداد ضخامت ورق لایه‌ای بصورت خطی تغییر می‌کنند، در حالی که کرنش‌های برشی  $\gamma_{xz}$  و  $\gamma_{yz}$  در امتداد ضخامت ورق توزیع ثابتی دارند و در نتیجه تنش‌های برشی نظیر آن‌ها نیز ثابت می‌باشند. بر طبق تئوری تیرهای همگن، توزیع تنش‌های برشی  $\sigma_{zx}$  و  $\sigma_{yz}$  در امتداد ضخامت تیر به صورت سهمی می‌باشد. بنابراین در تیرها و ورق‌های کامپوزیت لایه‌ای، این تنش‌های برشی باید حداقل توابع درجه دو از مختصه Z باشند. این مغایرت بین حالت تنش واقعی و حالت تنش ثابت در نظر گرفته شده در تئوری مرتبه اول، اغلب توسط یک ضریب اصلاح برش برطرف می‌شود. این ضریب به گونه‌ای محاسبه می‌شود که انرژی کرنشی ناشی از تنش‌های برشی بدست آمده در این تئوری با انرژی کرنشی ناشی از تنش‌های برشی پیش بینی شده از تئوری الاستیسیته سه بعدی برابر شود. ضریب اصلاح برش، برای یک ورق کامپوزیت لایه‌ای به خواص و مشخصات هندسی ورق و نیز شرایط مرزی بستگی دارد.

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}) = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} (\overline{Q}_{ij})_k (1, z, z^2), \quad i, j = 1, 2, 6 \quad (10)$$

$$(S_{ij}) = \sum_{k=1}^n \alpha (\overline{Q}_{ij})_k dz, \quad i, j = 4, 5 \quad (11)$$

$$(\overline{Q}_{ij})_k = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & -2mn \\ n^2 & m^2 & 2mn \\ mn & -mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} (Q_{ij})_k \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & mn \\ n^2 & m^2 & -mn \\ -2mn & 2mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix}, \quad i, j = 1, 2, 6$$

$$(\overline{Q}_{ij})_k = \begin{bmatrix} m & -n \\ n & m \end{bmatrix} (Q_{ij})_k \begin{bmatrix} m & n \\ -n & m \end{bmatrix}, \quad i, j = 4, 5 \quad (12)$$

کمیت  $\alpha$  ضریب تصحیح برشی بوده که مقدار آن در این پژوهش  $0.83$  لحاظ می‌گردد. در روابط (۱۲)،  $m = \cos \theta_k$  و  $n = \sin \theta_k$  بوده که زاویه هر لایه از ورق مرکب با محور  $x$  می‌باشد، همچنین ماتریس  $Q_{ij}$  تحت عنوان صلبیت در جهت مختصات لایه، به شرح رابطه (۱۳) تعریف می‌گردد.

$$(Q_{ij})_k = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}, \quad i, j = 1, 2, 6$$

$$(Q_{ij})_k = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix}, \quad i, j = 4, 5 \quad (13)$$

در رابطه (۱۳)، درایه‌های ماتریس  $Q_{ij}$  بر اساس مدول الاستیسیته، مدول برشی و نسبت پواسون محاسبه می‌گردند.

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{21}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}$$

$$Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}}, \quad Q_{66} = G_{12} \quad (14)$$

در رابطه (۷)، ماتریسی تحت عنوان  $F^N$  در رابطه قرار گرفت که شامل نیروهای ناشی از تغییرات شرایط محیطی بود. درایه‌های این ماتریس شامل نیروها و لنگرهای غیر مکانیکی حاصل از شرایط رطوبتی و حرارتی بوده که بر اساس روابط زیر محاسبه می‌گردند [۱۹].

$$\{N_x^N, N_y^N, N_{xy}^N\} = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} (\overline{Q}_{ij})_k (e)_k dz \quad (15)$$

$$\{M_x^N, M_y^N, M_{xy}^N\} = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} (\overline{Q}_{ij})_k (e)_k z dz \quad (16)$$

در روابط (۱۵) و (۱۶)، بردار  $e$  به عنوان کرنش غیر مکانیکی ورق مرکب بوده و برای هر لایه با زاویه  $\theta$  به شرح زیر تعریف می‌گردد [۱۹].

$$\{F\} = [D]\{\varepsilon\} - \{F^N\} \quad (5)$$

$$\{F\} = \{N_x, N_y, N_{xy}, M_x, M_y, M_{xy}, Q_x, Q_y\}^T \quad (6)$$

در رابطه (۵)،  $F$  ماتریس نیروهای داخلی،  $F^N$  ماتریس نیروهای حاصل از حرارت و رطوبت،  $D$  ماتریس تبدیل و  $\varepsilon$  ماتریس کرنش‌های مدل بوده که در ادامه تعریف می‌شود. مقادیر ماتریس  $F$  شامل  $N_x, N_y, N_{xy}$  که نیروهای داخل صفحه‌ای در واحد عرض و  $M_x, M_y, M_{xy}$  که لنگرهای در واحد عرض هستند، می‌باشد. پارامترهای  $Q_x$  و  $Q_y$  نیز نیروهای برشی ورق مرکب در واحد عرض می‌باشند [۱۹].

$$\{F^N\} = \{N_x^N, N_y^N, N_{xy}^N, M_x^N, M_y^N, M_{xy}^N, Q_x^N, Q_y^N\}^T \quad (7)$$

کرنش‌های در نظر گرفته شده شامل کرنش‌های اصلی، انحنای مدل و چرخش‌های مدل بوده که بصورت رابطه (۸) ماتریس  $\varepsilon$  را تعریف می‌نمایند. جدول‌ها و شکل‌ها باید به ترتیب با عدد شماره‌گذاری شوند. همچنین پارامترهایی که با بالانویس  $(^N)$  مشخص گردیده‌اند، مقادیر نیروهای داخلی حاصل از تغییر درجه حرارت و درصد رطوبت محیط می‌باشند که هر کدام در ادامه تعریف می‌گردند.

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0, \kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}, \varphi_x, \varphi_y\}^T \quad (8)$$

مقادیر  $\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \gamma_{xy}^0$  کرنش‌های داخل صفحه‌ای میان ضخامت،  $\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}$  انحنای ورق می‌باشند و همچنین  $\varphi_x$  و  $\varphi_y$  چرخش‌های لبه‌ای ورق با در نظر گرفتن اثرات برشی ورق در صفحات  $x-z$  و  $y-z$  می‌باشند. در ادامه رابطه (۹)، فرم کلی ماتریس  $D$  را به نمایش می‌گذارد [۱۹].

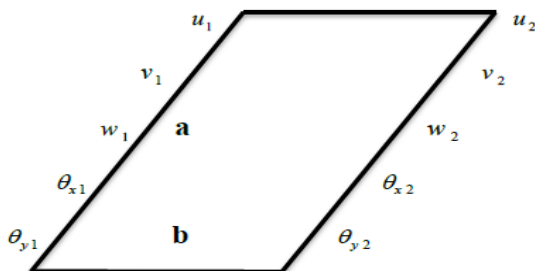
$$[D] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{44} & S_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{45} & S_{55} \end{bmatrix} \quad (9)$$

مقادیر  $u_x^0$  و  $v_y^0$  مشتقات تغییر مکان‌ها نسبت به اندیس‌های  $x$  و  $y$  و  $u$ ،  $v$  و  $w$  تغییر مکان‌ها در راستاهای  $x$ ،  $y$  و  $z$  می‌باشند. همچنین،  $\theta_x$  و  $\theta_y$  مربوط به چرخش‌های ورق در جهات عمود به محورهای  $y$  و  $x$  هستند. در ادامه با این فرض که پارامتر  $w$  در جهت  $Z$  تغییر نمی‌کند، روابط کرنش غیر خطی بر اساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، بصورت رابطه (۲۱) تعریف می‌گردند:

$$\begin{cases} \mathcal{E}_{xnl} = (u_{,x}^2 + v_{,x}^2 + w_{,x}^2) / 2 \\ \mathcal{E}_{ynl} = (u_{,y}^2 + v_{,y}^2 + w_{,y}^2) / 2 \\ \gamma_{xynl} = (u_{,x}u_{,y} + v_{,x}v_{,y} + w_{,x}w_{,y}) \\ \gamma_{xznl} = (u_{,x}u_{,z} + v_{,x}v_{,z}) \\ \gamma_{yznl} = (u_{,y}u_{,z} + v_{,y}v_{,z}) \end{cases} \quad (22)$$

#### ۲-۴- روش نوار محدود

روش نوار محدود با در نظر گرفتن رفتار هارمونیک برای مدل ورق مرکب در موده‌های متفاوت، نتایج دقیقتری نسبت به روش اجزاء محدود را برای ورق‌های مستطیلی ارائه می‌کند و با توجه به نواری در نظر گرفته شدن المان‌ها باعث کاهش درجات آزادی و اقتصادی‌تر شدن حل می‌گردد. برای هر خط از نوار تحلیلی روش نوار محدود در هر مود، پنج درجه آزادی در نظر گرفته می‌شود که در شکل ۳ به وضوح قابل مشاهده می‌باشند. با در نظر گرفتن توابع هارمونیک در جهت طولی نوار و توابع شکل خطی در جهت عرض نوار، روابط (۲۳)، برای تغییر مکان هر نوار بدست می‌آید:



شکل ۳- درجه‌های آزادی هر نوار در روش نوار محدود برای هر مود

$$\begin{aligned} \{e\}_k &= [T] \{\beta_1, \beta_2\}_k^T (C - C_0) + [T] \{\alpha_1, \alpha_2\}_k^T (T - T_0) \\ \{e\}_k &= \{e_x, e_y, e_{xy}\}_k^T \end{aligned} \quad (17)$$

در رابطه (۱۸)، ماتریس  $T$  بر اساس زاویه هر لایه بصورت جداگانه محاسبه گردیده و در محاسبه بردار  $e$ ، مطابق با رابطه فوق، برای هر لایه در نظر گرفته می‌شود. ماتریس  $T$  به فرم زیر تعریف می‌گردد [۱۹]:

$$[T] = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 \\ n^2 & m^2 \\ -2mn & 2mn \end{bmatrix}, m = \cos \theta_k, n = \sin \theta_k \quad (19)$$

در رابطه (۱۹) پارامترهای  $\beta_1$  و  $\beta_2$  ضرایب رطوبتی در جهت‌های طولی و جانبی و پارامترهای  $\alpha_1$  و  $\alpha_2$  ضرایب حرارتی در جهت‌های طولی و جانبی هستند که جهت محاسبه ماتریس کرنش غیرمکانیکی مورد استفاده قرار می‌گیرند.  $C_0$  و  $C$  در رابطه (۱۹) به ترتیب رطوبت اولیه و رطوبت ثانویه محیط بوده و  $T_0$  و  $T$  به ترتیب درجه حرارت اولیه و ثانویه محیط به کلون هستند.

#### ۲-۳- روابط کرنش و تغییر مکان

بر اساس روابط کرنش مربوط به تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و با تفکیک جملات درجه یک، درجه دو و جملاتی که بصورت ضریبی از متغیر  $z$  می‌باشند، کرنش‌های مدل به دو دسته کلی کرنش‌های خطی و غیر خطی تقسیم می‌گردند. در روابط مربوط به تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، پارامترهایی که بصورت ضریب متغیر  $z$  هستند، کاپا نامگذاری شده و نهایتاً کرنش‌های خطی بصورت کرنش‌های طولی، عرضی، چرخش‌ها و انحنای مدل، بصورت رابطه (۲۰) تقسیم بندی می‌شوند.

$$\begin{cases} \mathcal{E}_x^0 = u_{,x}^0 \\ \mathcal{E}_y^0 = v_{,y}^0 \\ \gamma_{xy}^0 = u_{,y}^0 + v_{,x}^0 \\ K_x = \theta_{y,x} \\ K_y = -\theta_{x,y} \\ K_{xy} = \theta_{y,y} - \theta_{x,x} \\ \phi_x = \theta_y + w_{,x} \\ \phi_y = -\theta_x + w_{,y} \end{cases} \quad (20)$$



$$\mathbf{[S^i]} = \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_x & M_{xy} & 0 & Q_x \\ N_{xy} & N_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_{xy} & M_y & 0 & Q_y \\ 0 & 0 & N_x & N_{xy} & 0 & 0 & -M_x & -M_{xy} & 0 & 0 & 0 & -Q_x & 0 \\ 0 & 0 & N_{xy} & N_y & 0 & 0 & -M_{xy} & -M_y & 0 & 0 & 0 & -Q_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_x & N_{xy} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_{xy} & N_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -M_x & -M_{xy} & 0 & 0 & \frac{N_x t^2}{12} & \frac{N_{xy} t^2}{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -M_{xy} & -M_y & 0 & 0 & \frac{N_{xy} t^2}{12} & \frac{N_y t^2}{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ M_x & M_{xy} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{N_x t^2}{12} & \frac{N_{xy} t^2}{12} & 0 & 0 & 0 \\ M_{xy} & M_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{N_{xy} t^2}{12} & \frac{N_y t^2}{12} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -Q_x & -Q_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Q_x & Q_y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (30)$$

$$\mathbf{S} = [\mathbf{S}^1 \mathbf{S}^2 \mathbf{S}^3 \mathbf{S}^4]$$

### ۲-۵- اثر جداشدگی لایه‌های ورق مرکب

جدایش لایه‌های ورق مرکب یکی از آسیب‌های محتمل بر ورق مرکب می‌باشد که ممکن است در فرآیند تولید یا بر اثر ضربه یا بارگذاری خاصی حاصل گردد. در این وضعیت ورق در قسمتی از سطح مقطع دچار تفکیک شده که ورق مرکب را به دو یا چند زیر لایه تبدیل می‌کند. برای تحلیل در این وضعیت برای ورق مرکب در مرز جدایش و برای هر زیر لایه یک ماتریس  $\mathbf{D}$  جداگانه و برای نواحی سالم یک ماتریس  $\mathbf{D}$  واحد در نظر گرفته می‌شود. ماتریس  $\mathbf{D}$  برای هر زیر لایه جدا شده طبق رابطه زیر بدست می‌آید [۱۹]:

$$\mathbf{[D]}_l = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{ij} & z_i^0 \mathbf{A}_{ij} + \mathbf{B}_{ij} & 0 \\ \mathbf{B}_{ij} & z_i^0 \mathbf{B}_{ij} + \mathbf{D}_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{S}_{ij} \end{bmatrix} \quad (34)$$

$$\mathbf{[A}_{ij}]_l = \int_{-\frac{h_l+z_i^0}{2}}^{\frac{h_l+z_i^0}{2}} \mathbf{[Q}_{ij}] dz$$

$$\mathbf{[B}_{ij}]_l = \int_{-\frac{h_l+z_i^0}{2}}^{\frac{h_l+z_i^0}{2}} \mathbf{[Q}_{ij}] (z - z_i^0) dz$$

$$\mathbf{[D}_{ij}]_l = \int_{-\frac{h_l+z_i^0}{2}}^{\frac{h_l+z_i^0}{2}} \mathbf{[Q}_{ij}] (z - z_i^0)^2 dz$$

$$\mathbf{[S}_{ij}]_l = \int_{-\frac{h_l+z_i^0}{2}}^{\frac{h_l+z_i^0}{2}} \mathbf{[Q}_{ij}] dz \quad (35)$$

برای محاسبه ماتریس جرم مطابق با رابطه (۳۱) عمل شده که در آن ماتریس  $\mathbf{N}$  با کنار هم قرارگیری ماتریس‌های مربوط به هر لبه نوار حاصل می‌شود.

$$\mathbf{M} = \iint \mathbf{N}^T \rho_s \mathbf{N} dx dy \quad (31)$$

که در آن،

$$\mathbf{N} = [\mathbf{N}_L \quad \mathbf{N}_R]$$

$$\mathbf{N}_L = \begin{bmatrix} N_1 N_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 N_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 N_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_1 N_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 N_4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N}_R = \begin{bmatrix} N_2 N_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_2 N_4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_2 N_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_2 N_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_2 N_4 \end{bmatrix} \quad (32)$$

بردار نیرویی نیز مطابق رابطه (۳۳)، برای هر نوار محاسبه می‌گردد.

$$\mathbf{P}_s^N = \iint \mathbf{B}_s^T \mathbf{F}^N dx dy \quad (33)$$



هستند. با افزایش درجه حرارت محیط از ۳۰۰ کلوین به ۳۷۵ کلوین، مدول الاستیسیته و مدول برشی ورق مرکب از جنس شیشه - اپوکسی مطابق با جدول ۱ تغییر می‌نماید و همچنین با تغییرات درصد رطوبت محیط نیز، ورق فوق‌الذکر دارای تغییراتی در مدول الاستیسیته و برشی به شرح جدول ۲ می‌گردد.

جدول ۱- تغییرات مدول الاستیسیته و برشی با افزایش درجه حرارت محیط در ورق شیشه- اپوکسی

Temperature (K)				
۳۷۵	۳۵۰	۳۲۵	۳۰۰	
۱۳/۲۱	۱۴/۹۳	۱۵/۳۹	۱۵/۴	$E_1$ (GPa)
۳/۴۸	۳/۵۱	۳/۵۴	۳/۵۶	$G_{12}$ (GPa)

جدول ۲- تغییرات مدول الاستیسیته و برشی با افزایش درصد رطوبت محیط در ورق شیشه- اپوکسی

Moisture (%)				
۷۵	۵۰	۲۵	۰	
۱۳/۱۷	۱۴/۶۹	۱۵/۳۸	۱۵/۴	$E_1$ (GPa)
۳/۴۷	۳/۴۹	۳/۵۳	۳/۵۶	$G_{12}$ (GPa)

جداول ۳ و ۴ مربوط به محاسبات فرکانس طبیعی، بر اساس دو روش نوار محدود و مقایسه این اعداد با نتایج حاصله از عملیات آزمایشگاهی و تئوری پندا و همکاران می-باشد [۱۹].

جداول ۳ و ۴ نشان می‌دهند که نتایج حاصل از روش نوار محدود پاسخ‌های نزدیک‌تری را نسبت به روش اجزای محدود به نتایج آزمایشگاهی مرجع [۱۹] برآورد کرده است. قابل ذکر است که در مرجع [۱۹] فرکانس طبیعی ورق بر مبنای هر دو روش اجزای محدود و نتایج آزمایشگاهی برآورد شده است.

در ادامه ورق مرکبی متشکل از چهار لایه با زوایای ۰، ۹۰، ۹۰ و ۰ درجه برای مقایسه نتایج بدست آمده با نتایج سایر محققان، مدل می‌گردد. نسبت طول به عرض ورق مورد نظر ۱ و نسبت بعد به ضخامت آن ۱۰۰ می‌باشد. پارهی و همکاران [۲۲]، سای رم و سینها [۲۱] و ویتنی و همکاران [۲۰] این مدل را که از جنس کربن- اپوکسی می‌باشد، مورد آنالیز دینامیکی قرار می‌دهند. این محققان ورق مرکب را در مرحله اول، در درجه حرارت ۳۲۵ درجه کلوین و در مرحله

## ۲-۶- روند آنالیز ورق مرکب

در این مقاله، آنالیز مدل تحت بارهای ناشی از حرارت و رطوبت شامل دو مرحله می‌باشد. در مرحله اول با استفاده از روابط مربوط به ماتریس  $F^N$  به محاسبه ماتریس  $P^N$  پرداخته می‌شود. سپس با استفاده از ماتریس سختی استاندارد و همچنین اعمال روی همگذاری ماتریس‌های بار و سختی هر نوار روی کل مدل و سپس اعمال شرایط مرزی در گره‌های مقید و آزاد، به محاسبه تغییرمکان ( $\delta$ ) در هر نوار تحلیلی پرداخته می‌شود. در ادامه با استفاده از تغییر مکان‌های هر نوار، کرنش‌های هر نوار محاسبه می‌شود. در مرحله دوم آنالیز، با استفاده از کرنش‌های هر نوار و با استفاده از رابطه (۱) که در ابتدای بخش به آن اشاره شد، به محاسبه ماتریس نیروهای داخلی ایجاد شده تحت تأثیر تغییرات درجه حرارت و رطوبت در هر نوار از مدل کلی پرداخته می‌شود.

$$[K][\delta] = [P^N] \quad (36)$$

$$[\varepsilon] = [B][\delta] \quad (37)$$

برای آنالیز دینامیکی ورق مرکب بایستی ماتریس جرم هر نوار مورد محاسبه قرار گرفته و پس از اعمال سیکل روی هم گذاری و همچنین درجات آزادی مقید و غیر مقید به همراه ماتریس‌های  $[K]$  و  $[K_g]$  برای محاسبه فرکانس طبیعی ورق مرکب بر اساس حل مقادیر ویژه مورد استفاده قرار گیرند.

$$[[K] + [K_g]] - \omega^2 [M] = 0 \quad (38)$$

در رابطه (۳۸)  $\omega$  فرکانس زاویه ای ورق،  $K$  ماتریس سختی مدل،  $K_g$  ماتریس هندسی مدل و  $M$  ماتریس جرم ورق می‌باشند.

## ۳- نتایج و بحث

در این مطالعه جنس ورق‌های مرکب از نوع الیاف شیشه بافته شده در زمینه اپوکسی می‌باشد. این ورق لایه‌ای در حالت کلی شامل ۱۶ لایه، که ضخامت هر لایه ۰/۳۷۵ میلی‌متر در نظر گرفته می‌شود. این لایه‌ها مجموعاً، ورق مرکبی به ضخامت ۶ میلی‌متر تشکیل می‌دهند. ورق مرکب اولیه بصورت مربعی در نظر گرفته شده و بعد آن ۰/۲۳۵ میلی‌متر می‌باشد. در اولین مدل بررسی شده، فیبرهای تمامی لایه‌های ورق دارای زوایای یکسان و به زاویه صفر درجه

جدول ۶- مقایسه فرکانس طبیعی (Hz) حاصله از آنالیز ورق چندلایه در حالت چهار طرف مفصل همراه با درصد جدایشی لایه‌های ۶/۲۵٪ در درجه حرارت‌های مختلف، با نتایج سایر محققان

Temperature, T(K)			
۳۵۰	۳۲۵	۳۰۰	
۲۴۴	۲۶۱	۲۸۱	Experimental [19] (D 6.25%)
۲۴۰	۲۷۵	۳۰۴	Finite Strip (D 6.25%)
٪۲	٪۸	٪۵	Error

### ۳-۱- بررسی نسبت ابعاد و فرکانس

در این بررسی به محاسبه فرکانس این ورق لایه‌ای در نسبت-های مختلف ابعاد ۱، ۱/۲۵، ۱/۵، ۲، ۲/۲۵، ۲/۵ در اثر افزایش درجه حرارت و درصد رطوبت محیط پرداخته می‌شود. در مرحله اول شرایط تکیه‌گاهی ورق لایه‌ای بصورت چهار طرف مفصلی در نظر گرفته می‌شود و درجات آزادی  $\nu_L, w_L, \theta_{xL}$  از سمت چپ ورق کلی و درجات آزادی  $\nu_R, w_R, \theta_{xR}$  از سمت راست ورق کلی برای هر مود از آنالیز بررسی شده، مقید می‌گردند در حالی که برای ارضای شرایط گیردار کلیه درجات آزادی در گره مورد نظر مقید می‌گردند. مطابق با شکل ۴-الف، با افزایش نسبت ابعاد ورق مرکب از ۱ تا ۲/۵، فرکانس مدل مورد نظر دچار کاهش می‌گردد. شیب کاهش فرکانس ورق مرکب نیز بصورت نزولی بوده و در مرحله اولیه میزان کاهش فرکانس ۱۸٪ بوده، لیکن این میزان کاهش، در نسبت ابعاد بالاتر ورق مرکب به ۳/۱۲٪ و کمتر می‌رسد. بر اثر افزایش درجه حرارت محیط نیز ورق دچار کاهش فرکانس می‌گردد. بر طبق اعداد محاسبه شده از آنالیز، بیشترین تغییرات فرکانس بر اثر افزایش درجه حرارت محیط مربوط به نسبت ابعاد ۱/۲۵ ورق مرکب به میزان ۲۱/۹۸ بوده و کمترین کاهش فرکانس بر اثر افزایش درجه حرارت مربوط به بالاترین نسبت بعد ورق بوده که به میزان ۱۹/۵۴ درصد می‌باشد، لیکن در شکل ۴-ب که مربوط به اعمال اثر تغییرات مدول الاستیسیته می‌باشد، این تغییرات به مقادیر ۱۵/۸ درصد و ۱۳/۱ درصد کاهش می‌یابد.

شکل ۵ مربوط به بررسی همین تغییرات در نسبت ابعاد ورق مرکب در اثر افزایش درصد رطوبت ۰٪، ۲۵٪، ۵۰٪ و ۷۵٪ می‌باشد. شیب تغییرات فرکانس در اثر این افزایش

دوم در درصد رطوبت ۱۰٪ مورد بررسی قرار می‌دهند. در جدول ۵، نتایج بدست آمده از آنالیز این محققان را در درجه حرارت ۳۲۵ درجه کلونین و درصد رطوبت ۱۰٪، مورد مقایسه قرار می‌گیرد.

جدول ۳- مقایسه نتایج فرکانس طبیعی (Hz) در اثر افزایش درجه حرارت محیط در حالت چهار طرف مفصل، با نتایج آزمایشگاهی و عددی سایر محققین

Temperature (K)				
۳۷۵	۳۵۰	۳۲۵	۳۰۰	
۲۶۹	۲۹۱	۳۰۴	۳۱۸	Exeprimental [19]
۲۷۰	۲۹۱	۳۰۶	۳۲۰	Numerical [19]
۲۶۱	۲۹۳	۳۱۴	۳۳۱	Finite Strip
۲/۹۷	۰/۶۸	۳/۲۸	۴/۰۸	Error of F.S(٪)

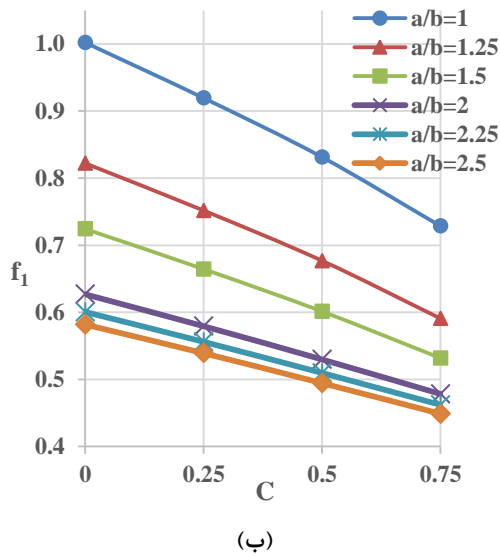
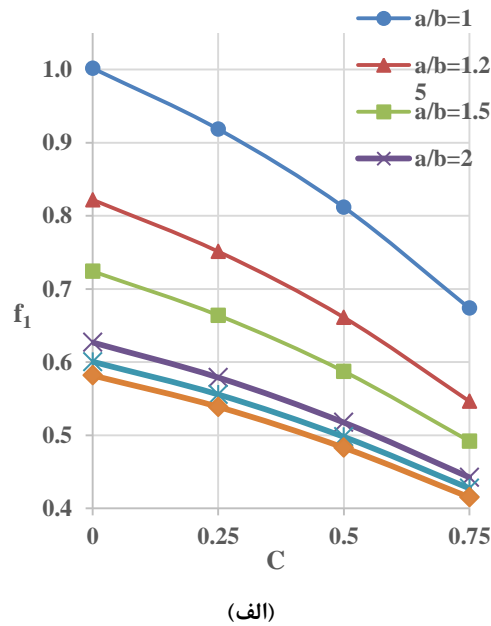
جدول ۴- مقایسه نتایج فرکانس طبیعی (Hz) در اثر افزایش درصد رطوبت محیط در حالت چهار طرف مفصل، با نتایج آزمایشگاهی و عددی سایر محققین

Moisture (%)				
۷۵	۵۰	۲۵	۰	
۲۸۰	۲۷۹	۲۹۲	۳۲۱	Exeprimental [19]
۲۶۰	۲۹۱	۳۰۰	۳۲۲	Numerical [19]
۲۲۵	۲۶۸	۳۰۴	۳۳۱	Finite Strip
۱۹/۶۴	۳/۹۴	۴/۱	۴/۰۸	Error of F.S(٪)

جدول ۵- مقایسه مقادیر بدون بعد فرکانس طبیعی حاصله از آنالیز ورق لایه‌ای با زوایای ۰/۹۰/۹۰/۰ درجه در حرارت ۳۲۵ کلونین و درصد رطوبت ۱۰٪ با نتایج سایر محققین

Present	Sai ram [21]	Parhi[22]	Whitney [20]	
۸/۸۱	۸/۰۸۸	۸/۰۴۶	۸/۰۶۸	T=325 K
۹/۸۳	۹/۴۲۹	۹/۳۹۳	۹/۴۱۱	C=10%

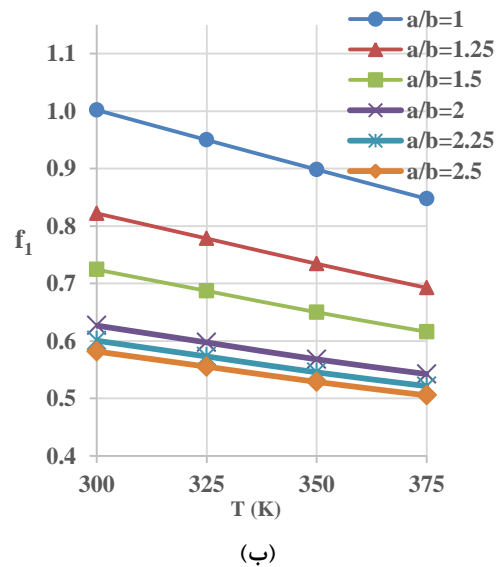
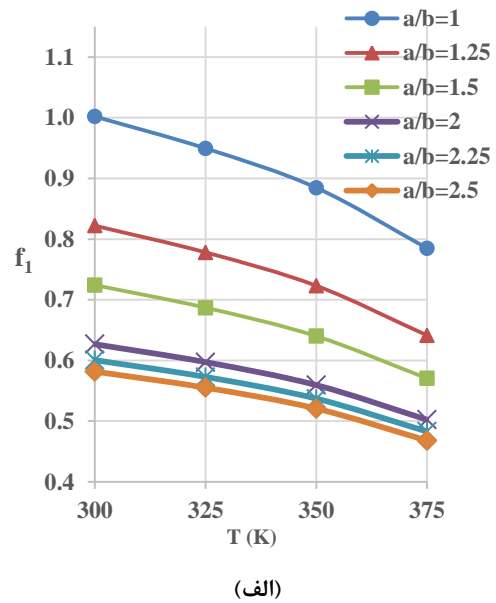
در جدول ۶ نیز مربوط به مقایسه نتایج فرکانس بدست آمده تحت تأثیر جاشدگی ۶/۲۵ درصد با نتایج حاصل از مدل‌سازی آزمایشگاه در مرجع [۱۹] پرداخته شده است که بیانگر تطبیق نتایج حاصل از روش نوار محدود با نتایج آزمایشگاهی می‌باشد.



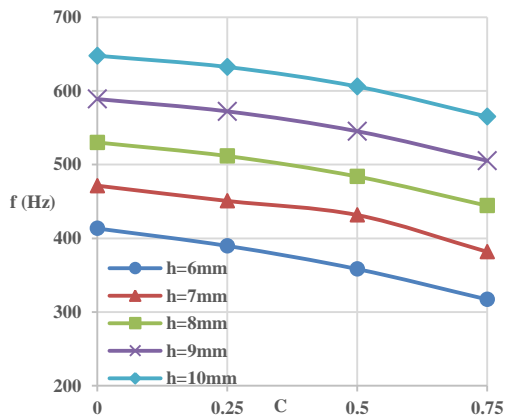
شکل ۵- بررسی تغییرات فرکانس ورق مرکب تحت نسبت ابعاد مختلف ۱، ۱/۲۵، ۱/۵، ۲، ۲/۲۵ و ۲/۵ و در اثر افزایش درصد رطوبت از ۰ درصد تا ۷۵ درصد در شرایط چهار طرف مفصل ( $f_1 = f b^2 \sqrt{\rho / E_2 h^2}$ )، الف- با اعمال  $E_2$  (T=300K) ب- با اعمال  $E_2$  (T)

۳-۲- بررسی ضخامت لایه‌ها در این قسمت به بررسی تأثیر ضخامت لایه‌ها بر روی فرکانس ورق لایه‌ای با اعمال تغییرات حرارتی و رطوبتی

رطوبت بیشتر از شکل ۴ بوده و در این حالت بیشترین تغییرات در اثر افزایش درصد رطوبت محیط مربوط به نسبت ابعاد ۱ ورق، به میزان ۳۳٪ در شکل ۵-الف و ۲۷٪ در شکل ۵-ب می‌باشد.



شکل ۴- بررسی تغییرات فرکانس ورق مرکب تحت نسبت ابعاد مختلف ۱، ۱/۲۵، ۱/۵، ۲، ۲/۲۵ و ۲/۵ و در اثر افزایش درجه حرارت محیط از ۳۰۰ کلوین تا ۳۷۵ کلوین در شرایط چهار طرف مفصل ( $f_1 = f b^2 \sqrt{\rho / E_2 h^2}$ )، الف) با اعمال  $E_2$  (T=300K) و ب) با اعمال  $E_2$  (T)



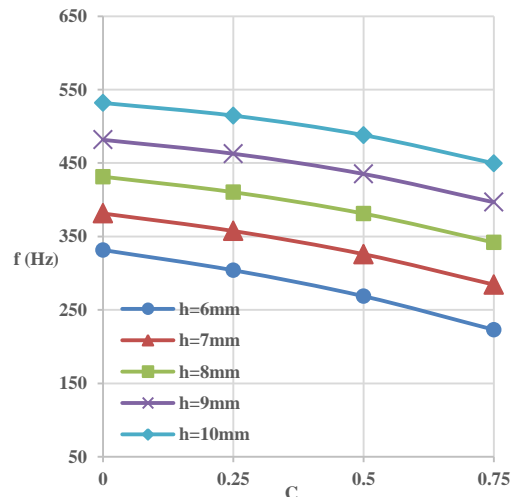
شکل ۷- بررسی تغییرات فرکانس ورق مرکب در ضخامت‌های مختلف و در اثر افزایش درصد رطوبت محیط از ۰ درصد تا ۷۵ درصد در شرایط تکیه گاهی سه طرف مفصل و یک طرف گیردار

لازم به توضیح است که شکل ۶ مربوط به بررسی تغییرات فرکانس ورق مرکب در ضخامت‌های مختلف ( $h$ ) و در اثر افزایش درصد رطوبت محیط از ۰ درصد تا ۷۵ درصد در شرایط تکیه گاهی چهار طرف مفصل می‌باشد. مطابق با شکل ۷، با افزایش ضخامت لایه‌ها در حالت سه طرف مفصل یک طرف گیردار، از مدل ۱ به مدل ۵، فرکانس طبیعی در تمامی درصد رطوبت‌ها روند افزایشی دارا می‌باشد. بیشترین تغییرات بر اثر افزایش درصد رطوبت مربوط به مدل ۱ به میزان ۲۳/۲۸ درصد و کمترین تغییرات مربوط به مدل پنج به میزان ۱۲/۷۴ درصد می‌باشد.

### ۳-۳- بررسی اثر جداشدگی لایه‌های ورق مرکب بر فرکانس

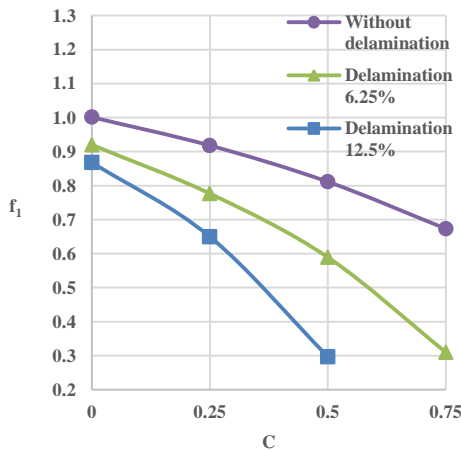
در این قسمت به بررسی اثر جداشدگی لایه‌های ورق مرکب که ممکن است بر اثر بار ناگهانی یا مونتاژ نامناسب بوجود آید، پرداخته می‌شود. در مدل بندی نوار محدود، ورق مرکب در محل دچار جداشدگی لایه‌ها، از یک ورق مرکب اصلی به دو یا چند زیر لایه تقسیم می‌گردد. برای مثال در حالت جداشدگی ۶/۲۵ درصد، دو نوار از ۳۲ نوار مدل ورق مرکب در محل خود به دو زیر لایه با مشخصات مختلف تقسیم می‌گردند. در حالت جداشدگی ۶/۲۵ درصد و در وضعیتی که جدایش در مرکز سطح رخ داده است، دو نوارهای ۱۶ و ۱۷

محیط، پرداخته می‌شود. مدل اولیه آنالیزی با مشخصات طول و عرض یکسان ۲۳۵ میلی‌متر و تعداد ۱۶ لایه، تحت تغییرات ضخامت لایه‌ها بررسی می‌گردد. ضخامت لایه‌ها در پنج حالت ۶ میلی‌متر (ضخامت هر لایه ۰/۳۷۵ میلی‌متر)، ۷ میلی‌متر (ضخامت هر لایه ۰/۴۳۷ میلی‌متر)، ۸ میلی‌متر (ضخامت هر لایه ۰/۵ میلی‌متر)، ۹ میلی‌متر (ضخامت هر لایه ۰/۵۶۲ میلی‌متر) و ۱۰ میلی‌متر (ضخامت هر لایه ۰/۶۲۵ میلی‌متر) به روش نوار محدود تحلیل می‌گردد. شکل ۶، مربوط به اعمال تغییرات رطوبتی از ۰ درصد تا ۷۵ درصد در پنج مدل ضخامتی بوده و بیشترین تغییرات فرکانسی طبق شکل ۷، مربوط به حالت ضخامت ۶ میلی‌متر بوده که به میزان ۳۲/۷۵ درصد می‌باشد.

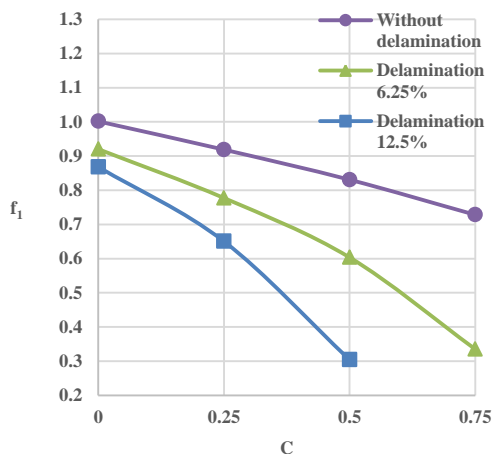


شکل ۶- بررسی تغییرات فرکانس ورق مرکب در ضخامت‌های مختلف ( $h$ ) و در اثر افزایش درصد رطوبت محیط از ۰ درصد تا ۷۵ درصد در شرایط تکیه گاهی چهار طرف مفصل

در بررسی دوم ورق لایه‌ای تحت پنج مدل مختلف ضخامتی و در شرایط تکیه گاهی سه طرف مفصل و یک طرف گیردار، مورد آنالیز قرار داده می‌شود. با بستن درجات آزادی ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ لبه راست کلی مدل و اعمال آن در ماتریس-های سختی و جرم، به محاسبه مقادیر فرکانس پرداخته می‌شود. درصد و کمترین تغییرات مربوط به مدل ۵ با تغییرات نزولی ۱۰/۰۵ درصد می‌باشد.



(الف)

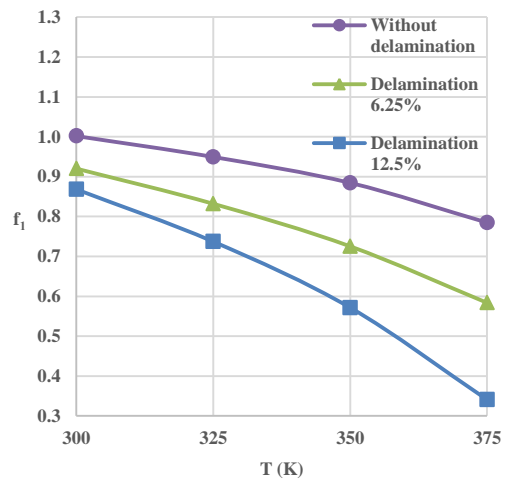


(ب)

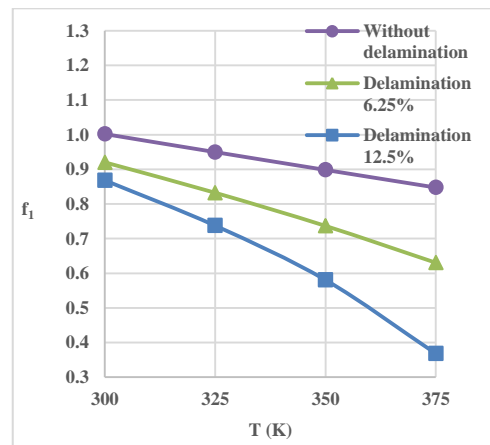
شکل ۹- تغییرات فرکانس ورق مرکب در اثر افزایش درصد رطوبت محیط از ۰ درصد تا ۷۵ درصد برای سه حالت مختلف جداشدگی لایه‌ها در شرایط تکیه‌گاهی چهار طرف مفصل (با اعمال  $E_2(T=300K)$ ) - الف - با اعمال  $E_2(T)$  - ب

وضعیت جداشدگی ۶/۲۵ درصد، نسبت به وضعیت بدون جداشدگی برای درجه حرارت ۳۰۰ کلوین، ۸/۱۶ درصد، برای درجه حرارت ۳۲۵ کلوین، ۱۲/۳۶ درصد، برای درجه حرارت ۳۵۰ کلوین، ۱۷/۹۹ درصد و برای درجه حرارت ۳۷۵ کلوین، ۲۵/۶۲ درصد کاهش فرکانس دارد. همچنین وضعیت جداشدگی ۱۲/۵ درصد، نسبت به وضعیت بدون جداشدگی برای درجه حرارت ۳۰۰ کلوین، ۱۳/۳۴ درصد، برای درجه

به دو زیر لایه تقسیم گردیده و مجموعاً تعداد نوارها به ۳۴ نوار تحلیلی تبدیل می‌گردد. نمودار شکل ۸، مربوط به تغییرات فرکانس در اثر افزایش درجه حرارت برای سه وضعیت جداشدگی در حالت چهارطرف مفصل و نمودار شکل ۹، مربوط به تغییرات فرکانس در اثر افزایش درصد رطوبت برای سه وضعیت جداشدگی در حالت چهارطرف مفصل می‌باشد.

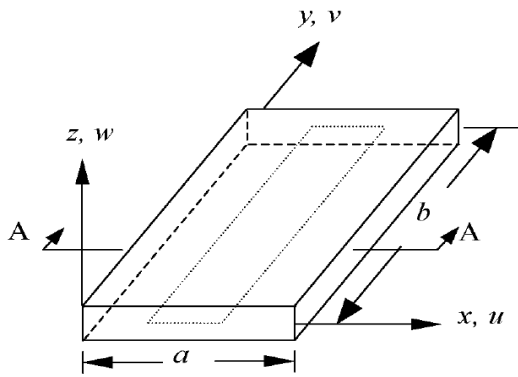


(الف)

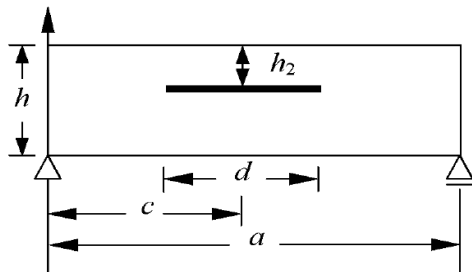


(ب)

شکل ۸- تغییرات فرکانس ورق مرکب در اثر افزایش درجه حرارت محیط از ۳۰۰ کلوین تا ۳۷۵ کلوین برای سه حالت مختلف جداشدگی لایه‌ها در شرایط تکیه‌گاهی چهار طرف مفصل (با اعمال  $E_2(T=300K)$ ) - الف - با اعمال  $E_2(T)$  - ب



شکل ۱۰- فرم کلی مدل دارای جداشدگی



Section A-A

شکل ۱۱- محل قرارگیری جداشدگی در مدل ورق مرکب

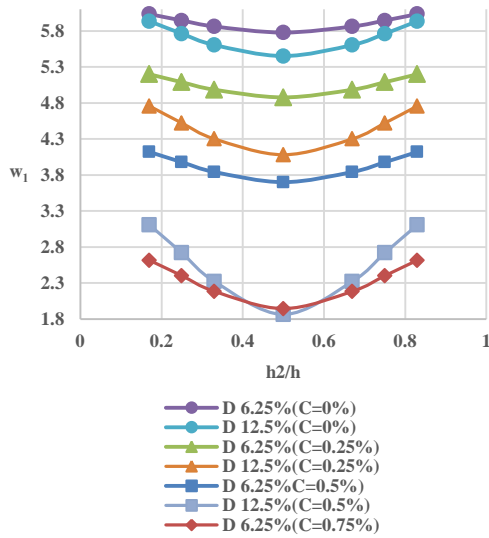
در ابتدا محل جداشدگی، در ارتفاع‌های مختلف ورق مرکب مورد بررسی قرار می‌گیرد. مطابق با شکل ۱۱،  $h_2$  فاصله محل قرارگیری جداشدگی از لبه بالایی مدل و  $h$  ارتفاع کلی مدل می‌باشد. آنالیز نوار محدود برای  $h_2/h$  به مقادیر ۰/۱۷، ۰/۲۵، ۰/۳۳، ۰/۵ و برنامه نویسی می‌گردد و مقادیر ضخامت و ارتفاع هر زیرلایه برای هر حالت در برنامه در نظر گرفته می‌شود. در هر چهار مدل، محل افقی جداشدگی در مرکز ورق در نظر گرفته می‌شود و برای هر مدل دو برنامه جداگانه جداشدگی ۶/۲۵ درصد و جداشدگی ۱۲/۵ درصد نوشته می‌گردد. در نهایت برای هر مدل چهار وضعیت تکیه گاهی مختلف مورد بررسی قرار می‌گیرد. در شکل ۱۲، مقادیر فرکانس در نسبت‌های مختلف  $h_2/h$  مورد بررسی قرار می‌گیرد. در این نمودار جداشدگی ۶/۲۵ درصد و جداشدگی ۱۲/۵ درصد در حرارت‌های مختلف ۳۰۰ کلوین، ۳۲۵ کلوین، ۳۵۰ کلوین و ۳۷۵ کلوین با یکدیگر مورد مقایسه قرار گرفته اند.

حرارت ۳۲۵ کلوین، ۲۲/۳۶ درصد، برای درجه حرارت ۳۵۰ کلوین، ۳۵/۳۷ درصد و برای درجه حرارت ۳۷۵ کلوین، ۵۶/۵۷ درصد کاهش فرکانس دارد. نمودار شکل ۹ نیز وضعیت مشابهی را در اثر افزایش درصد رطوبت از خود بروز می‌دهد. بطوریکه وضعیت جداشدگی ۶/۲۵ درصد، نسبت به وضعیت بدون جداشدگی برای درصد رطوبت ۰ درصد، کاهش ۸/۱ درصدی، برای رطوبت ۲۵ درصد، کاهش ۱۵/۴ درصدی، برای رطوبت ۵۰ درصد، کاهش ۲۷/۳۷ درصدی و برای رطوبت ۷۵ درصد، کاهش ۵۴ درصدی فرکانس را در وضعیت چهار طرف مفصل دارد. همچنین وضعیت جداشدگی ۱۲/۵ درصد، نسبت به وضعیت بدون جداشدگی برای درصد رطوبت ۰ درصد، کاهش ۱۳/۳ درصدی، برای رطوبت ۲۵ درصد، کاهش ۲۹/۲۲ درصدی و برای رطوبت ۵۰ درصد، کاهش ۶۳/۴ درصدی را دارد. بر طبق این دو نمودار، ورق مرکب در حالت جداشدگی حساسیت بیشتری در مقابل تغییرات محیطی از خود بروز می‌دهد. برای مثال تغییرات فرکانس ورق مرکب در اثر افزایش درجه حرارت از ۳۰۰ کلوین تا ۳۷۵ کلوین برای حالت بدون جداشدگی به میزان ۲۱/۶۶ درصد کاهش، برای حالت جداشدگی ۶/۲۵ درصد به میزان ۳۶/۵۶ درصد و برای حالت جداشدگی ۱۲/۵ درصد به میزان ۶۰/۷۴ درصد می‌باشد.

همانگونه که ذکر گردید با افزایش درصد رطوبت و درجه حرارت محیط مدل مشخصات مکانیکی ورق از جمله مدول الاستیسیته آن دستخوش تغییراتی می‌گردد. در شکل ۸-الف، اعمال بی بعدی مقادیر فرکانس با ثابت نگاه داشتن مقدار مدول الاستیسیته انجام گرفته‌است، بنابراین شیب تغییرات نمودار نسبت به حالت ب به مقدار بیشتری مشاهده می‌گردد.

### ۳-۴- بررسی تأثیر محل قرارگیری جداشدگی لایه‌های ورق مرکب بر فرکانس

در این قسمت به بررسی تأثیر محل قرارگیری جداشدگی بر روی فرکانس ورق مرکب پرداخته می‌شود. شکل ۱۰، فرم کلی مدل و شکل ۱۱، محل قرارگیری جداشدگی را به نمایش می‌گذارد.



شکل ۱۳- بررسی تأثیر محل عمودی قرارگیری

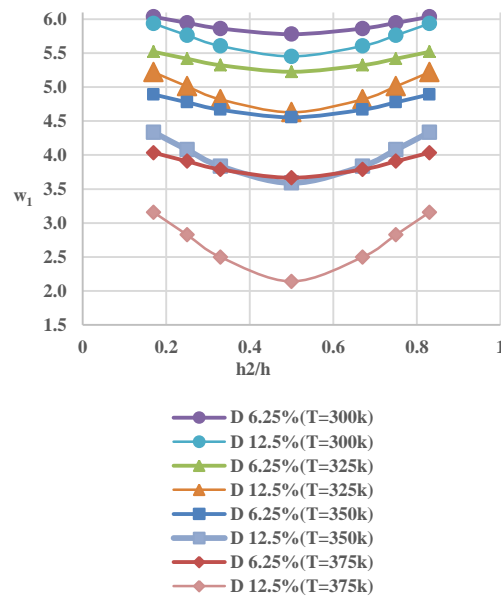
جداشدگی بر فرکانس ورق مرکب برای جداشدگی های ۶/۲۵ درصد و ۱۲/۵ درصد در درصد رطوبت های مختلف و در وضعیت تکیه گاهی چهار طرف مفصل

$$(w_1 = w b^2 \sqrt{\rho / E_2 h^2})$$

مطابق با این نمودار، ورق مرکب برای رطوبت ۲۵ درصد در اثر جابجایی جداشدگی از لبه به مرکز، برای مساحت های ۶/۲۵ درصد و ۱۲/۵ درصد به ترتیب ۶/۲ و ۱۴/۲۴ درصد کاهش فرکانس دارد. در وضعیت دو طرف مفصل، دو طرف گیردار نیز با افزایش درجه حرارت و رطوبت، تأثیر جابجایی جداشدگی به مرکز افزایش یافته است. بطور مثال در اثر این جابجایی برای ورق مرکب در درجه حرارت ۳۰۰ کلوین، برای دو جداشدگی ۶/۲۵ درصد و ۱۲/۵ درصد، کاهش های ۴/۱۵ درصدی و ۷/۳۸ درصدی، در درجه حرارت ۳۲۵ کلوین، کاهش های ۴/۶۵ درصدی و ۸/۵۶ درصدی، در درجه حرارت ۳۵۰ کلوین، کاهش های ۵/۱۶ درصدی و ۹/۹۶ درصدی و برای درجه حرارت ۳۷۵ کلوین، کاهش های ۵/۵ درصدی و ۱۱/۳۱ درصدی حاصل گردید.

#### ۴- نتیجه گیری

در این پژوهش، به بررسی ارتعاش آزاد ورق های مرکب تحت شرایط حرارتی و رطوبتی، همراه با احتمالات وجود



شکل ۱۲- بررسی تأثیر محل عمودی قرارگیری جداشدگی بر فرکانس ورق مرکب برای جداشدگی های ۶/۲۵ درصد و ۱۲/۵ درصد در درجه حرارت های مختلف و در وضعیت تکیه

گاهی چهار طرف مفصل

$$(w_1 = w b^2 \sqrt{\rho / E_2 h^2})$$

مطابق با شکل ۱۲، با حرکت جداشدگی از لبه های مدل به سمت مرکز لایه ها، میزان فرکانس ورق مرکب کاهش می یابد. ورق مرکب در درجه حرارت ۳۰۰ کلوین بر اثر حرکت جداشدگی از لبه به مرکز برای جداشدگی ۶/۲۵ درصد، ۴/۲۵ درصد کاهش فرکانس و برای جداشدگی ۱۲/۵ درصد، ۸/۱۶ درصد کاهش فرکانس دارد. این کاهش فرکانس با افزایش درجه حرارت افزایش یافته، بطوریکه در درجه حرارت ۳۲۵ کلوین بر اثر تغییر مکان جداشدگی از لبه به مرکز برای جداشدگی های ۶/۲۵ درصد و ۱۲/۵ درصد به ترتیب ۵/۳۳ و ۱۱/۳۱ درصد کاهش فرکانس دارد و به همین ترتیب این مقادیر برای درجه حرارت ۳۵۰ کلوین، ۶/۸۹ درصد و ۱۷/۲۲ درصد و برای درجه حرارت ۳۷۵ کلوین، ۹/۱۵ و ۳۲/۲۲ درصد می باشد.

شکل ۱۳ نیز در رطوبت های ۰ درصد، ۲۵ درصد، ۵۰ درصد و ۷۵ درصد، تأثیر تراز قرارگیری جداشدگی را برای جداشدگی ها با مساحت های ۶/۲۵ و ۱۲/۵ درصد را به نمایش می گذارد.

۱۲/۵ درصد، نسبت به وضعیت بدون جاشدگی برای درجه حرارت ۳۰۰ کلوین، ۱۳ درصد، برای درجه حرارت ۳۲۵ کلوین، ۲۲ درصد کاهش فرکانس دارد.

۵. با حرکت جاشدگی از لبه‌های مدل به سمت مرکز لایه‌ها، میزان فرکانس ورق مرکب کاهش می‌یابد. ورق مرکب در برای حالت چهار طرف مفصل در درجه حرارت ۳۰۰ کلوین بر اثر حرکت جاشدگی از لبه به مرکز برای جاشدگی ۶/۲۵ درصد، ۴ درصد کاهش فرکانس دارد.

۶. بر اثر اعمال آثار رطوبتی در وضعیت CSCS نیز، بیشترین کاهش بر اثر جابجایی جاشدگی از لبه ها به مرکز مربوط به درصد طوبت ۷۵ درصد بوده که برای جاشدگی ۶/۲۵ درصد، ۱۶ می‌باشد.

## ۵- مراجع

- [1] Bert C, Chen T (1978) Effect of shear deformation on vibration of anti-symmetric angle ply laminated rectangular plates. *Int J Solids Struct* 14: 465-473.
- [2] Reddy J (1979) Free vibration of anti-symmetric angle ply laminated plates including transverse shear deformation theory by finite element method. *J Sound Vibr* 66: 565-576.
- [3] Chai G (1994) Free vibration of generally laminated composite plates with various edge support conditions. *Compos Struct* 29: 249-258.
- [4] Matsunaga H (2000) Vibration and stability of cross ply laminated composite plates according to a global higher order plate theory. *Compos Struct* 48: 231-244.
- [5] Li Y, Fu Y, Mao Y (2010) Analysis of Delamination Fatigue Growth for Delaminated Piezoelectric Elasto-Plastic Laminated Beams under Hygrothermal Conditions. *Compos Struct* 93: 889-901.
- [6] Lee C, Kim J (2012) Hygrothermal Postbuckling Behavior of Functionally Graded Plates. *Compos Struct* 95: 278-282.
- [7] Zenkour A, Radwan A (2013) Effects of hygrothermal conditions on cross-ply laminated plates resting on elastic foundations. *Arch Civ Mech Eng* 14(1): 144-159.
- [8] Tounsi A, Amara K, Addabedia E (2004) Analysis of transverse cracking and stiffness loss in cross-ply laminates with hygrothermal conditions. *Compos Struct* 32: 167-174.

آسیب‌های درونی ورق پرداخته شد. در ابتدا عواملی مانند تعداد لایه‌ها، ضخامت لایه‌ها، زاویه قرارگیری لایه‌ها، ابعاد لایه و شرایط تکیه‌گاهی قرارگیری ورق مرکب مورد بررسی قرار گرفت. در ادامه با اعمال بارهای حرارتی و رطوبتی در مدل و در انواع بارگذاری‌های مختلف طولی و عرضی، فرکانس ارتعاش آزاد ورق محاسبه شد. همچنین با اعمال جاشدگی در لایه‌های ورق مرکب و همچنین اعمال همزمان شرایط حرارتی و رطوبتی در حین این آسیب، مقادیر فرکانس ورق مرکب دارای جاشدگی با ورق مرکب بدون آسیب مورد مقایسه قرار گرفت. موقعیت قرارگیری جاشدگی و فاصله قرارگیری آن از میان صفحه، از عوامل تأثیرگذار بر رفتار ورق مرکب بود که این عامل نیز مورد بررسی جامعی قرار گرفت. نتایج حاصل از این پژوهش با آنالیز نوار محدود بطور جمع بندی مطابق با بندهای ذیل ارائه می‌گردد.

۱. در بررسی روی فرکانس ورق مرکب و مقایسه مدل‌های با نسبت ابعاد ۱، تا ۲/۵، با افزایش نسبت ابعاد ورق مرکب از ۱ تا ۲/۵، فرکانس مدل مورد نظر دچار کاهش می‌گردد. شیب کاهش فرکانس ورق مرکب نیز بصورت نزولی است.
۲. افزایش درصد رطوبت محیط نیز منجر به کاهش میزان فرکانس ورق مرکب می‌گردد. در حالت چهار طرف مفصل، بیشترین تغییرات در اثر افزایش درصد رطوبت محیط مربوط به نسبت ابعاد ۱ ورق، به میزان ۳۳٪ می‌باشد
۳. با افزایش ضخامت لایه‌های ورق مرکب، فرکانس به طور قابل ملاحظه‌ای افزایش می‌یابد. درصد افزایش فرکانس در هر مرحله از افزایش ضخامت برای پنج مدل ۶ میلیمتری، ۷ میلیمتری، ۸ میلیمتری، ۹ میلیمتری و ۱۰ میلیمتری، برای درجه حرارت ۳۰۰ کلوین به ترتیب به میزان ۱۵ درصد، ۱۳ درصد، ۱۲ درصد و ۱۰ درصد می‌باشد.
۴. با اعمال جاشدگی در مرکز لایه‌های ورق مرکب در وضعیت SSSS مشخص گردید، وضعیت جاشدگی ۶/۲۵ درصد، نسبت به وضعیت بدون جاشدگی برای درجه حرارت ۳۰۰ کلوین، ۸ درصد، برای درجه حرارت ۳۲۵ کلوین، ۱۲ درصد، کاهش فرکانس دارد. همچنین وضعیت جاشدگی



- [16] Chen B, Tay T, Pinho S, Tan V (2017) Modelling delamination migration in angle-ply laminates. *Compos Sci Technol* 142: 145-155.
- [17] Rehan M, Rousseau J, Fontaine S, Gong X (2017) Experimental study of the influence of ply orientation on DCB mode-I delamination behavior by using multidirectional fully isotropic carbon/epoxy laminates. *Compos Struct* 161: 1-7.
- [18] Soleimanpour R, TaiNg Ch (2017) Locating delaminations in laminated composite beams using nonlinear guided waves. *Eng Struct* 131: 207-219
- [19] Panda H, Sahu S, Parhi P (2013) Hygrothermal effects on free vibration of delaminated woven fiber composite plates. *Compos Struct* 96: 502-513.
- [20] Whitney J, Ashton J (1971) Effect of environment on the elastic response of layered composite plates. *AIAA J* 9(9): 1708-1713.
- [21] Sairam K, Sinha P (1992) Hygrothermal effects on the free vibration of laminated composite plates. *J Sound Vib* 158: 133-148.
- [22] Parhi P, Bhattacharyya S, Sinha P (2001) Hygrothermal effects on the dynamic behavior of multiple delaminated composite plates and shells. *J Sound Vib* 248(2): 195-214.
- [9] Wang X, Dong K (2005) Local buckling for triangular and lemniscate delaminations near the surface of laminated cylindrical shells under hygrothermal effects. *Compos Struct* 79: 67-75.
- [10] Zenkour A (2012) Hygrothermal effects on the bending of angle-ply composite plates using a sinusoidal theory. *Compos Struct* 94: 3685-3696.
- [11] Boukhoulda B, Madani K (2005) The effect of fiber orientation angle in composite materials on moisture absorption and material degradation after hygrothermal ageing. *Compos Struct* 74: 408-418.
- [12] Della C, Shu D (2007) Vibration of delaminated composite plates. *Appl Mech* 60: 1-20.
- [13] Tenek L, Henneke E, Gunzburger M (2007) Vibration of delaminated composite plates and some applications to non-destructive testing. *Compos Struct* 23:253-262.
- [14] Ju F, Lee H, Lee K (1995) Finite element analysis of free vibration of delaminated composite plates. *Compos Eng* 5(2): 195-209.
- [15] Champanelli R, Engblom J (1995) The effect of delaminations in graphite/PEEK composite plates on modal dynamic characteristics. *Compos Struct* 31: 195-202.