



جریان آرام سیال غیرنیوتنی در تبدیل واگرای متقارن محوری

محمد محسن شاه مردان^۱، محمود نوروزی^۲ و سبحان مسیبهی درچه^{۳*}

^۱ استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود

^۲ استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود

^۳ کارشناس ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود

چکیده

در این تحقیق، جریان دائمی سیال غیرنیوتنی در تبدیل واگرای متقارن محوری ۱:۳ به صورت عددی مطالعه شده است. روش تفاضل محدود برای گسسته‌سازی معادلات حاکم، روی شبکه جابه‌جا شده استفاده بکار رفته است. مدل غیرنیوتنی مورد استفاده، مدل پنج ثابت کاربو-یاسودا می‌باشد که می‌توان به خوبی خواص غیرنیوتنی سیال را با آن مدل کرد. محدوده توان (n) برای این مدل $0.6 \leq n \leq 1$ در نظر گرفته شده است. نتایج این تحقیق، شامل خطوط جریان سیال در این هندسه و پروفیل‌های سرعت و لزجت می‌باشند. نتایج شبیه‌سازی عددی نشان می‌دهد که با کاهش توان n ، طول گردابه‌های ایجاد شده و ناحیه توسعه‌یافتگی افزایش و افت فشار جریان کاهش می‌یابد.

کلمات کلیدی: سیال غیرنیوتنی؛ تبدیل واگرا؛ متقارن محوری؛ شبکه جابه‌جا شده؛ مدل کاربو-یاسودا.

۱- مقدمه

کارهای تجربی در این زمینه را دارست^۱ و همکاران [۱]، انجام دادند که به نتیجه‌ای جالب دست یافتند. مشاهدات آن‌ها نشان داد که جریان سیال در تبدیلات واگرای صفحه-ای^۲ در اعداد رینولدز پایین ($Re \leq 56$) متقارن می‌باشد، اما برای اعداد رینولدز بالاتر ($Re > 56$) جریان نامتقارن می‌شود و گردابه‌های بالا و پایین از نظر اندازه با هم اختلاف پیدا می‌کنند. با افزایش بیشتر عدد رینولدز، جریان سیال، وابسته به زمان، سه بعدی و نهایتاً مغشوش می‌شود. چنین پدیده‌ای که

جریان سیالات در تبدیل واگرا از دو جهت حائز اهمیت است. از یک طرف، این نوع جریان دارای کاربردهای فراوان صنعتی مانند فرآیندهای خروجی سیال، پر شدن قالب‌های ریخته-گری، مبدل‌های حرارتی و شکل‌دهی فلزات می‌باشد و از طرف دیگر، به خاطر داشتن هندسه تقریباً ساده، برای تخمین روش‌های عددی و مطالعه ویژگی‌های جریان مانند اندازه و شدت گردابه‌های موجود استفاده می‌شود. محققان زیادی، جریان سیال نیوتنی در تبدیلات واگرا را با استفاده از روش‌های عددی و تجربی مطالعه کرده‌اند. یکی از قدیمی‌ترین

¹ Durst

² Planer sudden expansions

و غلیظ‌شونده^{۱۰} تحت جریان خزشی و رینولدز پایین $0.0001 \leq Re \leq 10$ در تبدیل واگرایی ۱:۳ توسط ترنیک [۸] بررسی شده است. در تحقیق وی تاثیرات رفتار لزجت غلیظ شونده و رقیق‌شوندگی بر مختصات گردابه و ضریب افت فشار میدان جریان گزارش شده است.

تمامی بحث‌های گذشته، در مورد تبدیلات واگرایی صفحه‌ای متقارن بود. در مورد تبدیلات واگرایی متقارن محوری^{۱۱} که دارای سطح مقطع دایره‌ای می‌باشند، کارهای نسبتاً کمتری صورت گرفته است. الیویرا^{۱۲} [۹] بیان می‌کند که در تبدیلات واگرایی متقارن محوری، پدیده دو شاخه‌ای یا همان اختلاف اندازه گردابه‌ها، اتفاق نمی‌افتد. بنابراین در حالت جریان آرام می‌توان از شرط تقارن محوری استفاده کرد و شبکه محاسباتی خود را در نیمی از هندسه قرار داد.

قبلاً، جریان سیالات نیوتنی در تبدیلات واگرایی متقارن محوری با نسبت واگرایی $1.5 \leq ER \leq 4$ و برای اعداد رینولدز $0.5 \leq Re \leq 200$ بررسی شده است [۱۰]. این تحقیق خواص هیدرودینامیکی مانند طول گردابه و مقادیر افت فشار را مورد بررسی قرار می‌دهد. پینهو^{۱۳} و همکاران [۱۱] نیز، جریان سیال توانی را در یک تبدیل واگرایی متقارن محوری با نسبت ۱/۳ حل کرده‌اند. نویسندگان در این مطالعه، پس از بررسی-های عددی، رابطه‌ای را برای ضریب افت فشار C_f به‌عنوان تابعی از عدد رینولدز تعمیم‌یافته Re_{gen} و توان نامی n ارائه داده‌اند که با نتایج عددی سازگار می‌باشد. در این تحقیق، تنها روی افت فشار سیال توان نامی در این هندسه تمرکز شده و اشاره‌ای به خواص هیدرودینامیکی جریان و خطوط جریان نشده است.

شاید تنها تحقیقی که به بررسی جریان سیال ویسکوالاستیک در تبدیل واگرایی متقارن محوری پرداخته است مطالعات آزمایشگاهی پاک^{۱۴} و همکاران [۱۲] می‌باشد. نویسندگان این مقاله تنها به بررسی خواص غیرنیوتنی و ویسکوالاستیک روی طول گردابه‌های جریان در تبدیل واگرایی متقارن محوری با نسبت‌های ۲ و ۲/۶۶۷ پرداخته‌اند. نتایج این تحقیق نشان می‌دهد که در رژیم جریان آرام، طول

جریان در تبدیلات واگرایی متقارن صفحه‌ای، تقارن خود را از دست می‌دهد را شاخه‌ای شدن^۱ می‌نامند. کار تجربی دیگری نیز توسط فرن^۲ و همکاران [۲]، برای تبدیل واگرایی با نسبت ۱:۳ انجام شد. نتایج تحقیق ایشان، پیدا کردن عدد رینولدز بحرانی برای انتقال جریان از حالت متقارن به حالت نامتقارن و همچنین ترسیم نمودار دوشاخه‌ای این جریان بود. سال-های بعد نیز چند بررسی عددی روی این موضوع انجام شد [۳ و ۴].

همانطور که می‌دانیم در بیشتر کاربردهای صنعتی، سیالات مورد استفاده، خاصیت‌های غیرنیوتنی از خود نشان می‌دهند. برای شبیه‌سازی چنین جریان‌هایی، باید از مدل-های غیرنیوتنی استفاده کرد. اخیراً، جریان نامتقارن سیالات غیرنیوتنی در تبدیل واگرایی صفحه‌ای و به‌ویژه بحث‌های مربوط به پدیده شاخه‌ای شدن مورد توجه محققان بسیاری قرار گرفته است. در جریان سیالات غیرنیوتنی، این پدیده علاوه بر عدد رینولدز، به خواص غیرنیوتنی سیال نیز وابسته است. ترنیک^۳ [۵] جریان سیال رقیق‌شونده^۴ توانی^۵ را در تبدیل واگرایی با نسبت ۱:۳ و برای مقادیر مختلف توان n ، در محدوده اعداد رینولدز $10 \leq Re \leq 150$ به‌صورت عددی حل کرده است. نتایج این بررسی نشان می‌دهد که رفتار لزجت رقیق‌شونده (کاهش لزجت با افزایش نرخ برش) باعث تاخیر در آغاز پدیده دوشاخه‌ای و افزایش عدد رینولدز بحرانی می‌شود. کارهای مشابهی در تحقیقات نوفیتو^۶ [۶] برای تعیین عدد رینولدز بحرانی برای مدل‌های توانی و کیسون^۷ انجام شده است. جریان سیال غیرنیوتنی با استفاده از مدل‌های کیسون، توانی و کومدا^۸ در تبدیلات واگرایی ۱:۲ توسط نوفیتو و دریکاکیس^۹ [۷] شبیه‌سازی شده است. حل عددی آن‌ها، حاکی از این است که طول گردابه‌ها در نقطه آغاز پدیده دوشاخه‌ای برای هر سه مدل مذکور و سیال نیوتنی برابر می‌باشد. تاثیرات خواص غیرالاستیک سیال رقیق‌شونده

¹ Bifurcation

² Fern

³ Ternik

⁴ Shear thinning

⁵ Power law

⁶ Neofytou

⁷ Casson

⁸ Quemada

⁹ Drikakis

¹⁰ Shear thickening

¹¹ Axisymmetric sudden expansion

¹² Oliveira

¹³ Pinho

¹⁴ Pak

در اکثر سیالات غیرنیوتنی (به‌ویژه در محلول‌ها و مذاب‌های پلیمری)، وابستگی لزجت به نرخ برش به‌صورت رقیق‌شونده می‌باشد (حالت غلیظ‌شوندگی لزجت بسیار نادر است). لذا اصولاً بسیاری از توابع ویسکومتریک به‌صورت رقیق‌شونده مدل شده‌اند. در این تحقیق از مدل غیرنیوتنی کاربو-یاسودا برای مدل کردن لزجت تابع نرخ برش استفاده شده است. در این مدل، تابع ویسکومتریک مربوط به لزجت به‌صورت زیر تعریف می‌شود [۱۳]:

$$\frac{\bar{\eta}(\dot{\gamma}) - \bar{\eta}_\infty}{\bar{\eta}_0 - \bar{\eta}_\infty} = \left[1 + (\lambda \dot{\gamma})^a \right]^{\frac{(n-1)}{a}} \quad (۳)$$

که در آن، $\bar{\eta}_0$ لزجت در نرخ برش صفر، $\bar{\eta}_\infty$ لزجت در نرخ برش بی‌نهایت، λ ثابت زمانی مدل، n توان نمایی و a ثابت بی‌بعدی است که معرف ناحیه انتقال بین نرخ برش صفر و ناحیه نمایی می‌باشد. مقدار a برای بسیاری از محلول‌های پلیمری برابر ۲ گزارش شده است [۱۳]. همچنین در اکثر محلول‌ها و مذاب‌های پلیمری مقدار $\bar{\eta}_\infty$ حدود 10^1 تا 10^4 بار از $\bar{\eta}_0$ کوچکتر است، لذا در برخی از کاربردهای مهندسی مقدار $\bar{\eta}_\infty$ برابر صفر در نظر گرفته می‌شود. مدل کاربو-یاسودا یک مدل پنج‌ثابت است که از انعطاف‌پذیری کافی برای برازش مناسب روی توابع ویسکومتریک بسیاری از سیالات غیرنیوتنی برخوردار است. این مدل به‌راحتی به سیال نیوتنی تبدیل می‌شود ($n=1$). اخیراً، جریان خون به‌عنوان سیال غیرنیوتنی با استفاده از همین مدل ویسکومتریک، شبیه‌سازی شده است [۱۴]. $\dot{\gamma}$ در رابطه (۳) نیز، نرخ برش تعمیم‌یافته نام دارد که به صورت مانای دوم تانسور نرخ برش تعریف می‌شود:

$$\dot{\gamma} = \sqrt{\frac{1}{2} II} = \sqrt{\frac{1}{2} tr(\dot{\gamma} \cdot \dot{\gamma})} \quad (۴)$$

در تحقیق حاضر، جریان دوبعدی دائمی سیال غیرنیوتنی تراکم‌ناپذیر در حالت آرام در تبدیل واگرای متقارن محوری در نظر گرفته شده است. شکل ۱، طرح شماتیک هندسه جریان را نشان می‌دهد. پارامترهای هندسی مسئله، شامل طول و قطر لوله بالادست جریان (L, d)، طول و قطر لوله پایین‌دست (L, D) و اختلاف شعاع دو لوله $h = \frac{(D-d)}{2}$ می‌باشد. برای مطالعه جریان در این هندسه، از پارامتر هندسی دیگری به نام طول گردابه (X_r) نیز کمک گرفته می‌شود. جریان ورودی به‌صورت یکنواخت در راستای z

گردابه‌های سیال ویسکوالاستیک کمتر از سیال نیوتنی می‌باشد و در رژیم جریان آشفته طول گردابه‌های سیال ویسکوالاستیک چند برابر سیال نیوتنی می‌باشد. عدد رینولدز در مطالعه مذکور، به صورت رینولدز تعمیم‌یافته تعریف شده است که اندیس نمایی مدل توانی، در آن منظور شده است. همانطور که اشاره شد این تحقیق فقط به بررسی خواص غیرنیوتنی و ویسکوالاستیک روی طول گردابه متمرکز شده است. در تحقیق حاضر به بررسی خواص غیرنیوتنی روی طول گردابه، توزیع لزجت، افت فشار و پروفیل‌های سرعت در مقاطع مختلف هندسه مسئله پرداخته می‌شود. تفاوت‌های اساسی تحقیق حاضر با مطالعات قبلی شامل دو مورد می‌باشد:

- استفاده از مدل غیرنیوتنی کاربو-یاسودا
- بررسی خواص غیرنیوتنی روی افت فشار و پروفیل‌های سرعت، لزجت و تنش

در بخش بعدی معادلات حاکم بر جریان سیال و همچنین هندسه مسئله به‌همراه شرایط مرزی آورده شده است. پس از آن، روش عددی به‌کار گرفته شده به‌صورت اجمالی توضیح داده شده است. برای ارزیابی صحت نتایج این تحقیق، نتایج در حالت نیوتنی با کارهایی که قبلاً صورت گرفته است مقایسه شده که مطابقت خوبی را دارا می‌باشد. در ادامه، با استفاده از ۳ نوع شبکه‌بندی، استقلال حل عددی از شبکه مورد بررسی قرار گرفته است. در انتها با ارائه نتایج برای سیال نیوتنی تعمیم یافته، تاثیرات خواص غیرنیوتنی سیال بر جریان بررسی شده است.

۲- معادلات حاکم و هندسه مسئله

معادلات حاکم بر جریان دائمی سیال تراکم‌ناپذیر شامل معادلات پیوستگی و ممنتوم می‌باشند:

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (۱)$$

$$\rho \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} = -\nabla p + \nabla \cdot \vec{\tau} \quad (۲)$$

در رابطه فوق، \vec{V} معرف بردار سرعت، ρ چگالی سیال، p فشار و $\vec{\tau}$ تانسور تنش است. در اینجا، تفاوت سیالات نیوتنی با مدل‌های سیالات غیرنیوتنی به‌دلیل اختلاف در تعریف تنش برشی (و لزجت) آن‌هاست. در سیالات نیوتنی، تنش رابطه‌ای خطی با نرخ برش دارد، ولی در سیالات غیرنیوتنی، این رابطه به‌صورت غیرخطی می‌باشد.

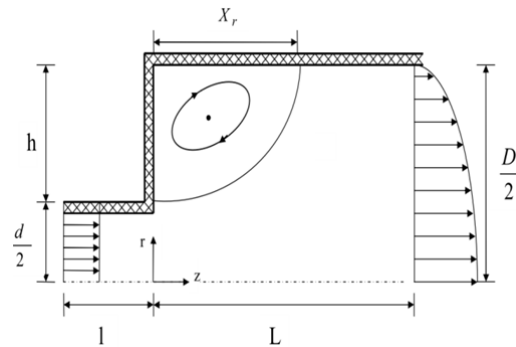
معادلات حاکم در حالت غیردائم حل می‌شوند تا جواب‌ها به سمت جواب‌های جریان دائمی همگرا شوند [۱۵]. ابتدا، باید مشکلی که در رابطه با حل معادلات حاکم بر جریان سیالات لزج، در حالت غیردائم وجود دارد را بیان کرد. با توجه به معادلات حاکم بر جریان مشاهده می‌شود که معادلات ممنوم دارای جمله تابع زمان هستند، ولی متاسفانه فشار در این معادلات دارای جمله تابع زمان نیست. یکی از روش‌های غلبه بر این مشکل، افزودن جمله فشار تابع زمان به معادله پیوستگی است که به آن روش تراکم‌پذیری مصنوعی می‌گویند. کاربرد این روش برای جریان دائمی سیالات تراکم‌ناپذیر بوده و از سوی چورین^۲ [۱۶] معرفی شده است. در این روش معادله پیوستگی با درج یک عبارت تابع زمان برای فشار به شکل زیر در می‌آید:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{\tau} \bar{\nabla} \cdot \bar{V} = 0 \quad (5)$$

در رابطه بالا، τ تراکم‌پذیری مصنوعی سیال است که در این تحقیق 0.001 در نظر گرفته شده است. گفتنی است که در حالت حدی، وقتی که حالت دائم حاصل می‌شود ($t \rightarrow \infty$)، معادله (۵) به صورت معادله پیوستگی تراکم‌ناپذیر در می‌آید. (چون در حالت دائم $\frac{\partial p}{\partial t}$ برابر صفر فرض شده است.)

استفاده از شبکه محاسباتی موسوم به جابه‌جاشده برای حل عددی گام‌به‌گام جریان سیالات متداول است. استفاده از این شبکه امکان به هم جفت شدن متغیرها را فراهم کرده و پایداری حل عددی را افزایش می‌دهد. شکل ۲، شبکه جابه‌جا شده به کار گرفته شده در روش عددی را نمایش می‌دهد. از آنجا که از دو شبکه غیرمنطبق بر هم استفاده شده، آن‌ها را شبکه‌های اولیه و ثانویه نیز نامیده‌اند. شبکه اولیه با خطوط خط‌چین و شبکه ثانویه با خطوط ممتد نشان داده شده است. همانطور که در شکل ۲ نشان داده شده است، مولفه فشار استاتیکی p ، روی شبکه اولیه و مولفه‌های سرعت v_r و v_z نیز روی موقعیت‌های خاص اتصال شبکه اولیه با شبکه ثانویه قرار دارند. مولفه سرعت شعاعی v_r ، در امتداد شعاعی (r) روی شبکه ثانویه و در امتداد عرضی (z)، روی شبکه

برابر با U در نظر فرض می‌شود. در خروجی لوله دوم نیز برای کلیه پارامترها به جز فشار شرط $\partial/\partial x \equiv 0$ قرار داده شده است [۱۱]. البته باید توجه داشت که نسبت‌های هندسی $\frac{l}{d}$ و $\frac{L}{D}$ باید به اندازه کافی بزرگ باشند تا جریان در هر دو قسمت بالادست و پایین‌دست، به حالت توسعه‌یافته تبدیل شود. برای اطمینان از این موضوع، برای حل‌های عددی انجام‌شده، نمودارهای سرعت در محور تقارن رسم شده تا توسعه‌یافتگی در انتهای هر دو لوله، از این نمودارها مشخص شود. چنین نمودارهایی در بخش نتایج آورده شده است.



شکل ۱- شکل شماتیک هندسه مسئله

۳- روش عددی

روش عددی تفاضل محدود برای تحلیل جریان در تبدیل واگرا با نسبت ۱:۳ استفاده شده است. ابتدا معادلات حاکم به صورت صریح گسسته‌سازی شده‌اند، به این صورت که تقریب مرکزی مرتبه دوم برای مشتقات مکانی و تقریب پیشروی مرتبه اول برای زمان مجازی به کار گرفته شده است. در اینجا، از شبکه جابه‌جاشده^۱ استفاده شده و پارامترهای جریان مطابق روش علامتگذاری و سلول روی گره‌های محاسباتی اختصاص یافته‌اند. همچنین برای کوپل کردن معادلات ممنوم و پیوستگی به منظور استفاده از روش پیمایش زمانی، روش تراکم‌پذیری مصنوعی اعمال شده است. تحلیل عددی مسائل جریان دائمی به صورت شبه‌گذرا صورت می‌گیرد و پس از انتخاب یک شرط اولیه مناسب،

² Chorin

¹ Staggered mesh

جدول ۱- مقایسه طول گردابه‌های حل عددی با نتایج الیویرا و همکاران [۱۰] در تبدیل واگرای ۱:۳ در اعداد رینولدز ۱۰ تا ۱۰۰

$\frac{X_r}{h}$ [۱۰]	$\frac{X_r}{h}$	Re
۱/۱۵	۱/۱۷	۱۰
۱/۳۸	۱/۳۳	۱۲/۵
۱/۸۷	۱/۸۴	۱۷/۵
۲/۶۴	۲/۵۱	۲۵
۳/۷۱	۳/۶۷	۳۵
۵/۳۳	۵/۱۸	۵۰
۱۰/۸	۱۰/۶۸	۱۰۰

۵- مطالعه استقلال حل عددی از شبکه محاسباتی

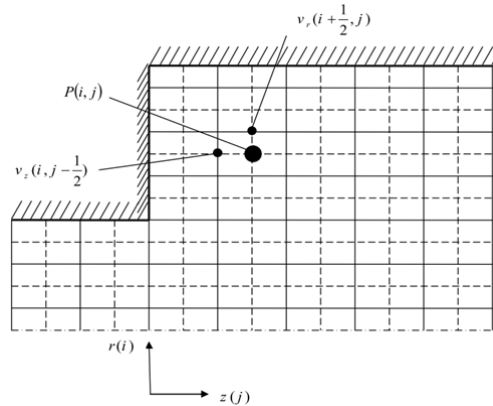
در این بخش، استقلال برنامه CFD مورد استفاده بررسی می‌شود. برای این کار، نتایج را برای سیال نیوتنی تعمیم‌یافته در $Re = 20$ و توان‌های نمایی مختلف برای ۳ نوع شبکه-بندی بررسی می‌شود. همانطور که از شکل ۱ پیداست، هندسه مسئله شامل دو قسمت می‌باشد، قسمت بالادست و قسمت پایین‌دست جریان که آن‌ها به ترتیب با بخش ۱ و بخش ۲ معرفی شده است. برای شبکه‌بندی‌های مختلف، تعداد سلول‌های متفاوتی در راستای شعاعی و طولی در نظر گرفته شده است. مشخصات این شبکه‌بندی‌ها در جدول ۲ ارائه شده است.

جدول ۲- خواص شبکه‌بندی‌های مختلف مورد استفاده

M3	M2	M1	
Nr*Nz	Nr*Nz	Nr*Nz	
۲۰*۲۴۰	۱۵*۱۸۰	۱۳*۱۵۶	بخش ۱
۶۰*۷۲۰	۴۵*۵۴۰	۳۹*۴۶۸	بخش ۲
۴۸۰۰۰	۲۷۰۰۰	۲۰۲۸۰	تعداد کل سلول

در اینجا، از برونمایی ریچاردسون به عنوان یک حالت مرجع استفاده شده است. پاسخ‌های مربوط به شبکه‌بندی‌های مختلف، با مقادیر مرجع مقایسه شده است. در جدول ۳، طول گردابه بدون بعد، $\frac{X_r}{h}$ برای سیال نیوتنی تعمیم‌یافته

اولیه قرار دارد $(V_{r(i+\frac{1}{2},j)})$ ، حال آنکه این موضوع برای مولفه سرعت عرضی v_z برعکس می‌باشد $(V_{z(i,j+\frac{1}{2})})$.



شکل ۲- شبکه عددی استفاده شده در این تحقیق و نحوه تخصیص پارامترهای جریان

۴- ارزیابی صحت نتایج

در این قسمت، صحت نتایج حاصل از حل عددی مورد بررسی قرار می‌گیرد. همانطور که ذکر شد، مدل سیال غیرنیوتنی کاربو-یاسودا در حالت $n = 1$ به سیال نیوتنی تبدیل می‌شود، به همین دلیل، نتایج حالت نیوتنی با حل‌های عددی که در گذشته انجام شده است، مقایسه می‌شود. بهترین پارامتری که می‌توان با استدلال به آن از صحت حل مسئله مطمئن شد، طول گردابه‌های ایجاد شده می‌باشد. الیویرا و همکاران [۱۰] در سال ۱۹۹۸ جریان نیوتنی در تبدیل واگرای متقارن محوری را بررسی کرده‌اند. آنها علاوه بر مطالعه روی ضریب افت فشار، طول گردابه‌ها را در اعداد رینولدز مختلف $0.5 \leq Re \leq 200$ و در نسبت‌های تبدیل $1.5 \leq ER \leq 4$ گزارش کرده‌اند. در جدول ۱، طول گردابه‌های حاصل از حل عددی تحقیق حاضر برای اعداد رینولدز مختلف برای سیال نیوتنی با نتایج الیویرا و همکاران [۱۰] مقایسه شده است. همانطور که از این جدول مشخص است، نتایج عددی با کارهای قبلی تطابق خوبی دارد و می‌توان از صحت این نتایج، اطمینان حاصل کرد.

۶- نتایج

در این بخش، جریان سیال لزج نیوتنی تعمیم‌یافته (GNF) در تبدیل واگرای متقارن محوری با نسبت ۱:۳ مورد بررسی قرار می‌گیرد تا به‌طور خاص روی اثر خاصیت توان نمایی مدل کاربو-یاسودا (n) تمرکز شود. ابتدا، لیستی از پارامترهای موجود در حل مسئله در جدول ۴ آورده شده که شامل خواص سیال و پارامترهای هندسی می‌باشد.

جدول ۴- مجموعه پارامترهای در نظر گرفته شده در این تحقیق

$\frac{l}{d}$	$\frac{L}{D}$	$\frac{\rho}{m^3}$	η_0 (pas)	η_∞ (pas)	λ a	s
20	20	800	135	5	2	0.036

مطابق کارهای قبلی که در این زمینه انجام شده است، عدد رینولدز بالادست جریان بر اساس سرعت یکنواخت ورودی (U)، قطر لوله در بالادست جریان (d) و لزجت در نرخ برش صفر η_0 تعریف می‌شود:

$$Re = Re_{up} = \frac{\rho U d}{\eta_0} \quad (6)$$

در شکل ۴، خطوط جریان به‌ازای $Re=20$ و مقادیر مختلف n ($n=1, 0.9, 0.8, 0.7, 0.6$) رسم شده است.

از شکل ۴، تاثیر خاصیت غیرنیوتنی سیال (n) روی گردابه‌ها مشخص است. هر چه انحراف n از عدد ۱ بیشتر می‌شود، گردابه‌ها بزرگتر و طول آن افزایش پیدا می‌کند. اندازه گردابه (X_r) یکی از پارامترهای مهم در تحلیل مسئله تبدیل‌های واگرا و همگرا می‌باشد.

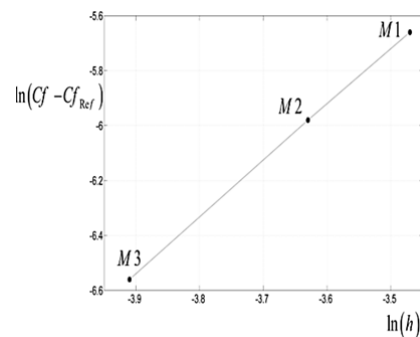
در حالت کلی، این طول برای جریان غیرنیوتنی تابع شرایط ورودی (یکنواخت، توسعه‌یافته و ...)، نسبت تبدیل ($\frac{D}{d}$)، رینولدز جریان (Re) و خواص غیرنیوتنی سیال نظیر توان نمایی، اثر اختلاف تنش‌های نرمال اول و دوم و عدد وایزنبرگ (We) می‌باشد.

در $Re = 20$ و توان‌های نمایی مختلف برای هر ۳ نوع شبکه-بندی به‌همراه خطاهای نسبی آورده شده است.

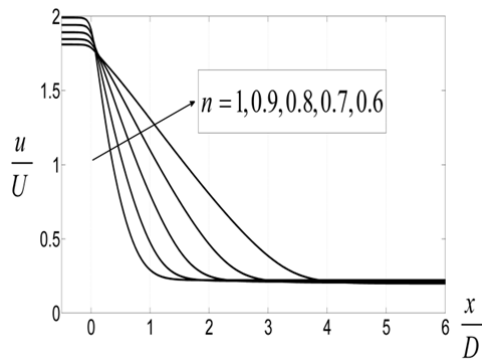
جدول ۳- طول گردابه بدون بعد برای ۳ نوع شبکه‌بندی - همراه با خطاهای نسبی در $Re=20$

E-M3 %	E-M2 %	E-M1 %	Ref.	M3	M2	M1	n
۲/۱۹	۳/۶۶	۴/۶۵	۲/۰۴	۲/۰۸	۲/۱۱	۲/۱۳	۱
۱/۰۱	۰/۳۲	۱/۰۷	۲/۸۹	۲/۸۶	۲/۸۸	۲/۹۲	۰/۹
۰/۰۰	۰/۷۶	۱/۷۶	۴/۰۱	۴/۰۱	۴/۰۴	۴/۰۸	۰/۸
۰/۱۳	۰/۲۳	۰/۷۷	۵/۵۵	۵/۵۴	۵/۵۶	۵/۵۹	۰/۷
۰/۰۱	۰/۱۷	۰/۵۷	۷/۵۴	۷/۵۳	۷/۵۵	۷/۵۸	۰/۶

برای تعیین مرتبه گسسته‌سازی در معادلات حاکم، شکل ۳ رسم شده است. محور عمودی در این شکل، نشان‌دهنده $\ln(Cf - Cf_{Ref})$ و محور افقی $\ln(h)$ می‌باشد که در آن Cf ضریب اصطکاک قسمت پایین‌دست، Cf_{Ref} ضریب اصطکاک مرجع (که از برونمایی ریچاردسون به‌دست آمده) و h اندازه متوسط یک سلول در شبکه محاسباتی می‌باشد. مرتبه گسسته‌سازی معادلات برابر با شیب نمودار مذکور می‌باشد که تقریباً برابر با ۲/۰۵۶ است.



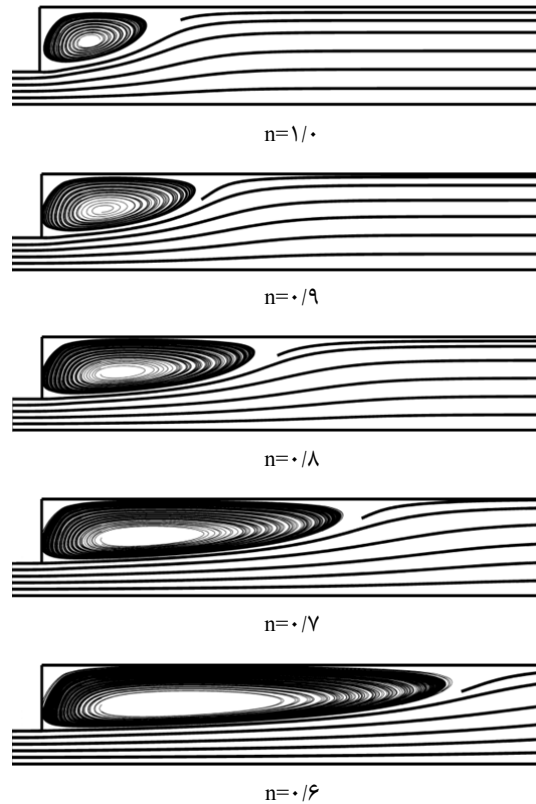
شکل ۳- تعیین مرتبه گسسته‌سازی بر اساس ضریب اصطکاک و اندازه متوسط سلول در شبکه‌های محاسباتی



شکل ۵- توزیع سرعت محوری سیال GNF در $Re=20$ و به‌ازای $(n = 1, 0.9, 0.8, 0.7, 0.6)$

سرعت در مرکز لوله برای سیال نیوتنی ($n=1$) به مقدار ۲ که برابر با حل تحلیلی است، می‌رسد. با کاهش توان نمایی n ، اولاً طول توسعه‌یافتگی افزایش پیدا می‌کند (یکی از دلایل این موضوع، افزایش طول گردابه‌هاست)، به نحوی که این طول، برای $n=0.6$ تقریباً به مقدار $\frac{x}{D} \cong 4$ می‌رسد. ثانیاً سرعت بیشینه در مرکز لوله کاهش پیدا می‌کند. می‌توان پیش‌بینی نمود که با توجه به ثابت بودن دبی، سرعت در کنار دیواره با کاهش توان نمایی n ، افزایش پیدا می‌کند. در قسمت بالادست، اختلاف سرعت‌ها به‌ازای مقادیر مختلف n مشاهده می‌شود. این اختلاف سرعت‌ها در پایین دست جریان، کمتر می‌شود. این امر، به‌خاطر افزایش سطح مقطع می‌باشد.

شکل ۶، نشان‌دهنده سرعت محوری در مقطع $\frac{x}{D} = \frac{1}{2}$ به‌ازای مقادیر مختلف عبارت نمایی $(n = 1, 0.8, 0.6)$ است. سرعت محوری در نزدیکی دیواره مقدار منفی پیدا می‌کند. با کاهش توان نمایی n ، اولاً ناحیه‌ای که دارای سرعت منفی می‌باشد، افزایش پیدا می‌کند. ثانیاً مقدار سرعت بیشینه در مرکز لوله افزایش می‌یابد. سرعت منفی کنار دیواره، نشان دهنده وجود گردابه‌ها است.



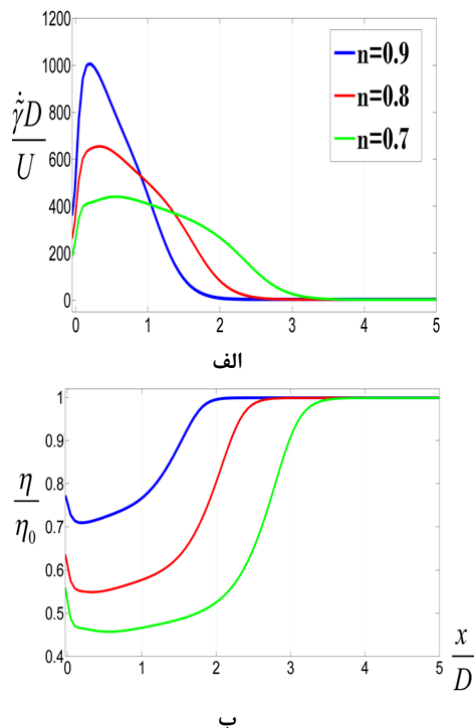
شکل ۴- خطوط جریان سیال GNF در $Re=20$ و به‌ازای $(n = 1, 0.9, 0.8, 0.7, 0.6)$

شکل ۵، سرعت محوری سیال را به‌ازای توان‌های نمایی مختلف در $Re=20$ نشان می‌دهد. بی‌بعدسازی سرعت با استفاده از سرعت یکنواخت در بالادست جریان (U) صورت گرفته است. همانطور که قبلاً اشاره شد، نسبت‌های هندسی بدون بعد $\frac{L}{D}$ و $\frac{l}{d}$ باید به‌اندازه کافی بزرگ باشد که جریان در بالادست و پایین دست به حالت توسعه‌یافته درآید. توسعه-یافتگی جریان در هر دو قسمت از نمودار شکل ۵ مشخص است.

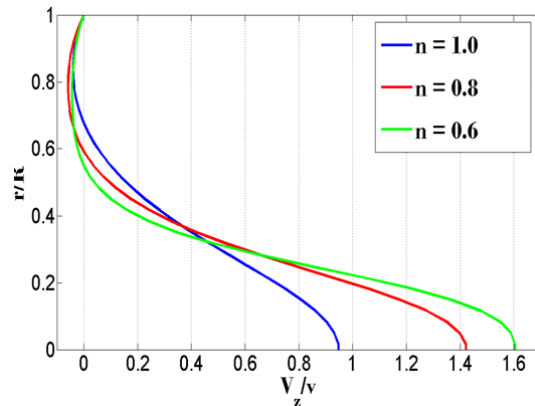
قرار داد. تانسور نرخ برش $\bar{\gamma}$ برای مسئله حاضر به شکل زیر می‌باشد.

$$\bar{\gamma} = \begin{bmatrix} 2\frac{\partial v_r}{\partial r} & 0 & \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \\ 0 & 2\frac{v_r}{r} & 0 \\ \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} & 0 & 2\frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (۸)$$

در بازنویسی ماتریس نرخ برش در رابطه (۸) از جمله‌های $\frac{\partial}{\partial \theta}$ و v_θ به‌خاطر حالت تقارن محوری مسئله صرف‌نظر شده است. در حالت جریان توسعه‌یافته، جمله‌های $\frac{\partial}{\partial z}$ و v_r برابر با صفر هستند. اکنون، تنها جمله باقی‌مانده ماتریس نرخ برش، $\frac{\partial v_z}{\partial r}$ می‌باشد که این جمله نیز در محور تقارن لوله ($r=0$) صفر می‌باشد. بنابراین ماتریس نرخ برش $\bar{\gamma}$ برابر ماتریس صفر، و به‌تبع آن نرخ برش تعمیم یافته $\dot{\gamma}$ نیز برابر با صفر به‌دست می‌آید.



شکل ۷- توزیع نرخ برش و لزجت بدون بعد سیال GNF در محور تقارن به ازای $Re=20$



شکل ۶- پروفیل سرعت سیال GNF در $Re=20$ در مقطع

$$\frac{x}{D} = \frac{1}{2}$$

شکل ۷ نشان دهنده توزیع لزجت و نرخ برش تعمیم یافته بدون بعد سیال GNF در محور تقارن می‌باشد. محور عمودی شکل ۷-الف، بیانگر نرخ برش تعمیم یافته و محور عمودی شکل ۷-ب، بیانگر لزجت می‌باشد. در این نمودار به خاطر مقایسه راحت تر لزجت و نرخ برش، هر دوی آن‌ها در کنار یکدیگر رسم شده‌اند. مدل ویسکومتریکی کاربو-یاسوا که در این تحقیق استفاده شده، یک مدل رقیق شونده برای لزجت است. این بدین معناست که با افزایش نرخ برش، لزجت سیال کاهش پیدا می‌کند. این رفتار سیال در شکل ۷ کاملاً آشکار است. همانگونه که پیش‌بینی می‌شد، برای هر سه مقدار n مقادیر بیشینه نرخ برش و کمینه لزجت هر دو در یک ناحیه اتفاق می‌افتند. لزجت و نرخ برش تعمیم یافته نیز مانند بقیه خواص جریان در ناحیه توسعه یافته ثابت می‌مانند. با توجه به این شکل می‌توان رابطه زیر را برای همه توان‌ها استخراج کرد:

$$\text{for } \begin{cases} \frac{x}{D} \geq \frac{L_{99}}{D} \\ r=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\eta}{\eta_0} \rightarrow 1 \\ \frac{\dot{\gamma} D}{U} \rightarrow 0 \end{cases} \quad (۷)$$

که در آن L_{99} نشان دهنده طول توسعه یافتگی جریان می‌باشد. رابطه (۷) بیان می‌کند که در محور تقارن لوله ($r=0$) و بعد از ناحیه توسعه یافتگی ($\frac{x}{D} \geq \frac{L_{99}}{D}$) مقدار نرخ برش سیال صفر و بنابراین لزجت به مقدار η_0 می‌رسد. البته می‌توان این مورد را به صورت تحلیلی نیز مورد بررسی

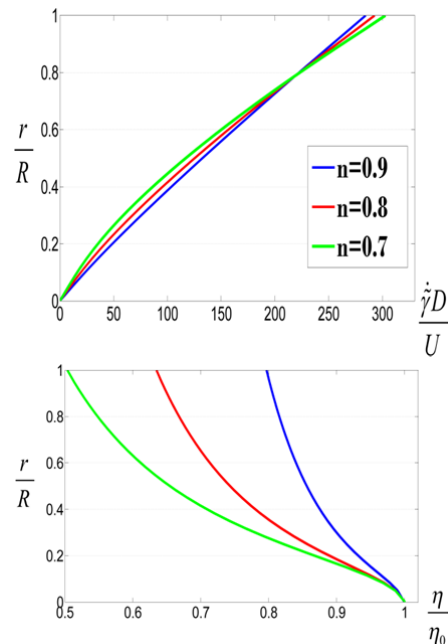
است. همانطور که پیش‌بینی می‌شد سرعت در نواحی مرکز لوله دارای بیشترین مقدار خود می‌باشد. شکل ۹-ب نشان-دهنده توزیع لزجت می‌باشد. قبلاً اشاره شد که در توابع ویسکومتریکی رقیق‌شونده، لزجت رابطه معکوس با نرخ برش دارد. بنابراین می‌توان کاهش یا افزایش لزجت را به تغییرات نرخ برش نسبت داد. پایین‌ترین مقادیر لزجت مربوط به مکانی است که سطح مقطع جریان تغییر می‌کند. این افزایش سطح مقطع منجر به تغییرات ناگهانی سرعت‌ها (همان افزایش نرخ برش) و در نهایت کاهش لزجت می‌شود. در دو منطقه نیز لزجت به بالاترین مقدار خود می‌رسد. ناحیه مرکزی لوله در قسمت توسعه‌یافته یکی از این مناطق می‌باشد که قبلاً در توضیحات شکل ۷ دلیل این موضوع بیان شد. ناحیه دیگری که لزجت آن بیشینه است، تقریباً نواحی مرکز گردابه می‌باشد. با توجه به کوچک بودن سرعت‌ها در این منطقه، نرخ برش تعمیم‌یافته $\dot{\gamma}$ در این ناحیه مقدار ناچیزی می‌شود و لزجت نیز برابر با مقدار آن در نرخ برش صفر می‌شود ($\frac{\eta}{\eta_0} \cong 1$).

شکل ۹-ج توزیع تنش برشی را نشان می‌دهد. همانطور که می‌دانیم تنش برشی رابطه مستقیمی با لزجت دارد، ولی با مقایسه شکل‌های ۹-ب و ۹-ج، این سوال پیش می‌آید که چه‌طور ممکن است ناحیه‌ای که لزجت دارای پایین‌ترین مقدار خود می‌باشد، اندازه تنش برشی بیشینه باشد! برای بیان دلیل این موضوع، ابتدا رابطه تنش برشی برای سیال نیوتنی تعمیم‌یافته ارائه می‌شود:

$$\tau_{rz} = \eta(\dot{\gamma})\gamma_{rz} = \eta(\dot{\gamma})\left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r}\right) \quad (9)$$

با توجه به معادله (۹) تنش برشی رابطه مستقیم با لزجت و نرخ برش دارد. این معادله، یک رابطه دوگانه و معکوس بین تنش و نرخ برش را بیان می‌کند. یعنی از طرفی طبق معادله (۹)، افزایش نرخ برش γ_{rz} یا همان $\left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r}\right)$ باعث افزایش اندازه تنش می‌شود و از طرف دیگر، برای سیال GNF و با توجه به خاصیت رقیق‌شوندگی سیال، افزایش نرخ برش، باعث کاهش لزجت و همچنین کاهش اندازه تنش می‌شود. برای سیال نیوتنی تنش تنها یک رابطه مستقیم با نرخ برش دارد زیرا لزجت سیال نیوتنی

در شکل ۸، توزیع لزجت و نرخ برش در مقطع $\frac{x}{D} = 20$ نشان داده شده است. محور عمودی در این شکل نشان‌دهنده شعاع از مرکز لوله می‌باشد و محورهای افقی شکل‌های ۸-الف و ۸-ب به ترتیب بیانگر نرخ برش تعمیم‌یافته و لزجت می‌باشد. مقطع $\frac{x}{D} = 20$ مکانی است که جریان به‌ازای کلیه توان‌های n توسعه‌یافته شده است و نرخ برش در مرکز لوله صفر، و در دیواره به مقدار بیشینه خود می‌رسد. لزجت نیز رفتار معکوسی با نرخ برش دارد و از مقدار η_0 در مرکز به مقدار کمینه خود در کنار دیواره می‌رسد. همانطور که از شکل ۸ پیداست، تغییرات نرخ برش با کاهش توان تغییرات چندانی ندارد ولی توزیع لزجت از تغییرات بیشتری برخوردار است. همچنین لزجت کمینه در کنار دیواره با کاهش n کمتر می‌شود.



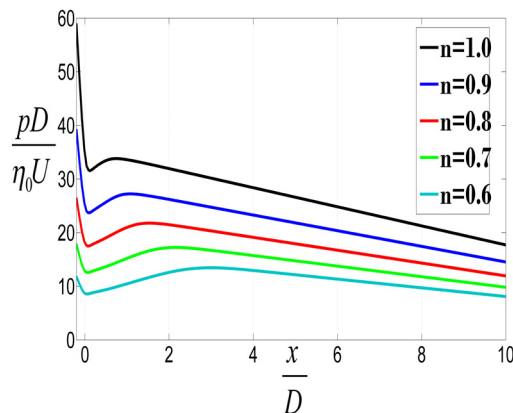
شکل ۸- پروفیل لزجت و نرخ برش بدون بعد سیال GNF

در مقطع $\frac{x}{D} = 20$ به ازای $Re=20$

توزیع سرعت محوری $\frac{v_z}{U}$ ، لزجت $\frac{\eta}{\eta_0}$ و تنش برشی

به‌ازای $Re=20$ و $n=0.6$ در شکل ۹ نشان داده شده $\frac{\tau_{rz} D}{\eta_0 U}$

نکته اینکه، افت فشار سیال نیوتنی در عبور از تبدیل واگرا بیشتر از سیال GNF می‌باشد. به عبارت دیگر، با کاهش توان سیال، افت فشار جریان نیز کاهش پیدا می‌کند. این تأثیر خاصیت غیرنیوتنی سیال به خاطر ماهیت رقیق‌شوندگی سیال GNF می‌باشد. در واقع، هر چه سیال از نظر ویسکوزیته رقیق‌تر باشد، افت فشار جریان نیز کمتر می‌شود. مهمترین دستاورد این تحقیق در کاربردهای عملی، این است که با توجه به افت فشار کمتر سیالات رقیق‌شونده، این دسته از سیالات، جایگزین مناسبی برای سیالات نیوتنی در صنعت می‌باشند که از خود تلفات کمتری را در عبور از تبدیلات نشان می‌دهند.

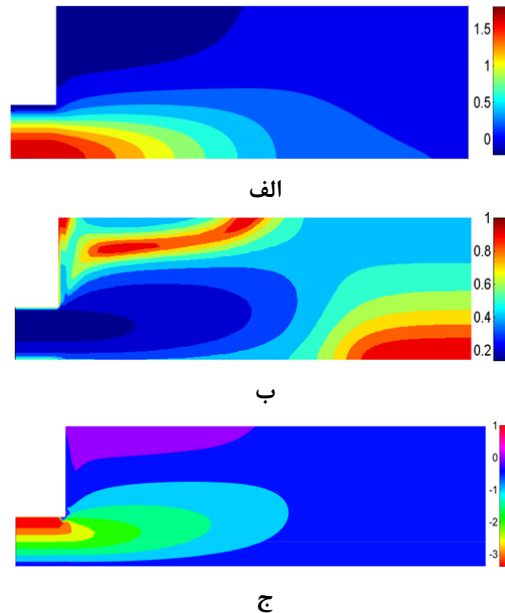


شکل ۱۰- توزیع فشار بدون بعد سیال GNF در محور تقارن به‌ازای $Re=20$

۷- جمع بندی

در این تحقیق، جریان سیال غیرنیوتنی در تبدیل واگرای متقارن محوری به‌صورت عددی حل شده است. مدل غیرنیوتنی که برای مدل کردن لزجت استفاده شده مدل پنج‌ثابته کاریو-یاسودا می‌باشد که یک مدل رقیق‌برشی است. در اینجا روش عددی که به‌کار گرفته شده، شبکه جابه‌جا شده می‌باشد و پارامترهای جریان مطابق روش علامتگذاری و سلول روی گره‌های محاسباتی اختصاص یافته‌اند. همچنین برای اصلاح فشار استاتیکی در طی گام‌های زمانی تحلیل، از روش تراکم‌پذیری مصنوعی استفاده شده است. با مقایسه نتایج (طول گردابه‌ها)، در حالت نیوتنی با مطالعات قبلی

مستقل از نرخ برش می‌باشد. بنابراین نمی‌توان تنها بر اساس توزیع لزجت در مورد تنش اظهار نظر نمود.



شکل ۹- توزیع (الف) سرعت محوری $\frac{v_x}{U}$ (ب) لزجت $\frac{\eta}{\eta_0}$ (ج) تنش برشی $\frac{\tau_{rz}}{\eta_0 U}$ به‌ازای $Re=20$ و $n=0.6$

شکل ۱۰، توزیع فشار محوری برای سیال GNF را در مرکز لوله نشان می‌دهد. توزیع فشار خطی در منطقه بالادست، نشان‌دهنده جریان توسعه‌یافته در ناحیه قبل از تغییر سطح مقطع ($\frac{x}{D} < 0$) می‌باشد. فشار محلی در منطقه پایین‌دست ($\frac{x}{D} > 0$)، در نقطه‌ای به اوج خود می‌رسد. این افزایش فشار به دلیل افزایش سطح مقطع و به‌تبع آن کاهش سرعت می‌باشد. البته گرادین فشار در منطقه توسعه‌یافته در قسمت پایین‌دست به خاطر افزایش سطح مقطع و کاهش سرعت میانگین با گرادین فشار در منطقه بالادست متفاوت است و دارای مقدار کمتری می‌باشد. محل بیشینه فشار در پایین‌دست جریان نیز تابع توان n می‌باشد و با کاهش مقدار n این نقطه به انتهای لوله نزدیکتر می‌شود. در واقع این محل آغاز منطقه توسعه‌یافتگی جریان می‌باشد. در انتها، مهمترین

- purely viscous shear-thinning fluids. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* (157): 15–25.
- [6] Neofytou P (2006) Transition to asymmetry of generalised Newtonian fluid flows through a symmetric sudden expansion. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* (133): 132–140.
- [7] Neofytou P, Drikakis D (2003) Non-Newtonian flow instability in a channel with a sudden expansion. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* (111): 127–150.
- [8] Ternik P (2010) New contributions on laminar flow of inelastic non-Newtonian fluid in the two-dimensional symmetric expansion: Creeping and slowly moving flow conditions. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* (165): 1400–1411.
- [9] Oliveira PJ (2003) Asymmetric flows of viscoelastic fluids in symmetric planar expansion geometries. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* (114): 33–63.
- [10] Oliveira PJ, Pinho FT, Schulte A (1998) A general correlation for the local loss coefficient in Newtonian axisymmetric sudden expansions. *Int J Heat Fluid Fl* (19): 655–660.
- [11] Pinho FT, Oliveira PJ, Miranda JP (2003) Pressure losses in the laminar flow of shear-thinning power-law fluids across a sudden axisymmetric expansion. *Int J Heat Fluid Fl* (24): 747–761.
- [12] Pak B, Young C, Stephen C (1990) Separation and Reattachment of Non-Newtonian Fluid Flows in a Sudden Expansion Pipe. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.* (37): 175–199.
- [13] Bird BR, Armstrong RC, Hassager O (1987) *Dynamics of Polymer Liquids*. Vol. 1, Second Edition, John Wiley & Sons.
- [14] Wang D, Bernsdorf J (2009) Lattice Boltzmann simulation of steady non-Newtonian blood flow in a 3D generic stenosis case. *Comput Math Appl.* (58): 1030–1034.
- [15] Hoffmann KA, Chiang ST (1989) *Computational fluid dynamics for engineers*. First ed., EES, Texas.
- [16] Chorin AJ (1967) A numerical method for solving incompressible viscous flow problems. *J. Comput. Phys.* (2): 12–26.
- (البویرا و همکاران [۱۰]) از صحت حل مسئله اطمینان حاصل شد. در قسمت نتایج، خطوط جریان به‌ازای مقادیر مختلف توان مدل رئولوژیک در $Re=20$ رسم شده‌اند. کاهش توان نمایشی n سیال، منجر به موارد زیر شد:
- افزایش طول گردابه‌ها
 - افزایش طول ناحیه توسعه‌یافتگی در پایین‌دست جریان
 - کاهش بیشینه سرعت جریان در مرکز لوله
 - کاهش افت فشار جریان عبوری از تبدیل واگرا
- مقادیر نرخ برش تعمیم‌یافته و لزجت در محور تقارن رسم شد و مشاهده شد که در ناحیه توسعه‌یافته در محور تقارن نرخ برش تعمیم‌یافته $(\dot{\gamma})$ و لزجت بدون بعد به ترتیب برابر با صفر و یک می‌باشد. روابط تحلیلی نیز این نکته را تایید کرد. همچنین لزجت سیال GNF به‌خاطر افزایش نرخ برش در کنار دیواره‌ها به پایین‌ترین مقدار خود می‌رسد.

مراجع

- [1] Durst F, Melling A, Whitelaw JH (1974) Low Reynolds number flow over a plane symmetrical sudden expansion. *J. Fluid Mech.* (64): 111–128.
- [2] Fearn RM, Mullin T, Cliffe KA (1990) Nonlinear flow phenomena in a symmetric sudden expansion. *J. Fluid Mech.* (211): 595–608.
- [3] Drikakis D (1997) Study of bifurcation phenomena in incompressible sudden-expansion flows. *Phys. Fluids* (9):76–87.
- [4] Battaglia F, Tavener SJ, Kulkarni AK, Merkle CL (1997) Bifurcation of Low Reynolds Number Flows in Symmetric Channels. *AIAA J.* (35): 99–105.
- [5] Ternik P (2009) Planar sudden symmetric expansion flows and bifurcation phenomena of