



## تأثیر نسبت ابعاد مدل به نمونه اصلی در بار وارد بر سیلندر در مسائل جریان با سطح آزاد

هژبر ادهمی<sup>۱\*</sup>، نادر پور محمود<sup>۲</sup> و مسعود رشیدزاده<sup>۳</sup><sup>۱</sup> دانشجوی دکترای تخصصی، مهندسی مکانیک، دانشگاه ارومیه، ارومیه، ایران<sup>۲</sup> دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه ارومیه، ارومیه، ایران<sup>۳</sup> دانشجوی دکترای تخصصی، مهندسی مکانیک، دانشگاه ارومیه، ارومیه، ایران

تاریخ دریافت: ۱۳۹۴/۰۲/۲۸؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۴/۰۸/۳۰؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۵/۰۵/۰۲

## چکیده

جهت بررسی تجربی و عددی مسائل با سطح آزاد، باید در ابتدا مسأله آنالیز ابعادی شود. این آنالیز بدان علت انجام می‌گیرد تا اعداد بدون بعد مسأله تعیین شوند. پس از تعیین این اعداد در بررسی تجربی پدیده، مجموعه آزمایشگاهی و نمونه باید به گونه‌ای انتخاب شوند که اعداد بدون بعد پدیده اصلی در ابعاد واقعی، با اعداد بدون بعد نمونه آزمایشگاهی یکی باشند. در مسائل سطح آزاد، متأسفانه در بررسی‌های تجربی تنها به یکی از این اعداد توجه می‌شود. باید توجه داشت، در صورتی که در مطالعه تجربی همه اعداد بی‌بعد مد نظر قرار نگیرند، خود نتایج تجربی در ابعاد کوچک یا بزرگ نسبت به نمونه اصلی اختلاف زیادی دارند و این اختلاف، به ابعاد مدل بستگی دارد. با توجه به این که در سالیان اخیر مسئله سیلندر قائم قرار گرفته در جریان سطح آزاد مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته است، لذا در این تحقیق، به بررسی تأثیر ابعاد مدل در نتایج نیروی وارد بر مدل در مقایسه با نیروی وارد بر نمونه اصلی پرداخته شده است تا میزان وابستگی خطای مدل‌سازی روش آزمایشگاهی بر حسب مقیاس مدل مشخص شود. این تحقیق نشان می‌دهد که نتایج عددی مدل در صورت برقراری تشابه کامل بین نمونه اصلی و مدل در هر مقیاسی با نتایج نمونه اصلی هم خوانی دارد، در صورتی که نتایج روش آزمایشگاهی که از تشابه غیر کامل برخوردار است، بسیار وابسته به ابعاد مدل است.

**کلمات کلیدی:** سیلندر؛ مدل؛ نمونه اصلی؛ نیروی درگ.

## The Effect of Aspect Ratio of Model to Prototype in Free Surface Problems

H. Adhami<sup>1,\*</sup>, N. Pourmahommd<sup>2</sup>, M. Rashidzadeh<sup>3</sup><sup>1</sup> Ph.D. Student, Mech. Eng., Urmia Univ., Urmia, Iran.<sup>2</sup> Assoc. Prof., Mech. Eng., Urmia Univ., Urmia, Iran.<sup>3</sup> Ph.D. Student, Mech. Eng., Urmia Univ., Urmia, Iran.

## Abstract

The problem first must be dimensional analyzed for considering analytic and dimensional problems with free surface. The reason for doing this study is that, nondimensional numbers to be determined. After determining these numbers in analitic considering, the collection of model and prototype must be choosen in a way that nondimensional numbers of prototype with nondimensional numbers of model be the same. In free surface problems, liquid is in touch with air and there are two fluids with different parameters, so there are many nondimensionoal numbers in two phases. Unfortunately in analitic considering the attention is paid only to one of these numbers. It must take into consideration if in analitic study all nondimensional numbers are not considering, it may the analitic results itself in small or big scale in ratio to the original sample have much diffrents with real amounts and the difference is depend on the scale of model. While a lot of scientistst have focused on the vertical surface-piercing circular cylinder in free surface flow, Therefore this research has paid attention to consider the effect of models scale on the results. This research shows that experimental results depend on scale of model.

**Key words:** Cylinder; Model; Prototype; Drag Force.

## ۱- مقدمه

تحلیل ابعادی روشی است که با استفاده از آن، بدون نیاز به تحلیل‌های پیچیده نظری یا آزمایش‌های زیاد می‌توان به اطلاعات مفیدی درباره اغلب پدیده‌های فنی و عملی دست یافت [۱]. اگر در یک پدیده فیزیکی، متغیرهایی که در آن پدیده وارد می‌شوند معلوم باشند، در حالتی که رابطه بین متغیرها معلوم نباشد، به کمک تحلیل ابعادی می‌توان پدیده را به صورت رابطه‌ای از چندین گروه بی‌بعد از متغیرها فرمول بندی کرد [۲]. تعداد گروه‌های بدون بعد معمولاً برابر با کمترین تعداد ابعاد مستقلی هستند که برای مشخص کردن تمام ابعاد پارامترهای موجود در مسأله مورد نیاز است. باید به این نکته توجه کرد که در تمام موارد، تعداد اعداد مستقل بدون بعد برابر با کمترین تعداد ابعاد مستقل نیست و در حالت کلی، تعداد گروه‌های بی‌بعد را می‌توان به صورت مرتبه ماتریس ابعادی تعریف کرد. مزیت بارز این روش، در آن است که تعداد آزمایش‌های لازم برای تعیین رابطه بین متغیرها در یک گستره معین به نحو چشم‌گیری کاهش می‌یابد. به علاوه ماهیت آزمایش اغلب ساده می‌شود و زمان نیز به میزان قابل توجهی کاهش می‌یابد. در این روش به کمک آزمایش می‌توان منحنی‌هایی را بدست آورد که رابطه بین گروه‌های بی‌بعد را نشان می‌دهند. در مسائل مکانیک سیالات برای دستیابی به چنین منحنی مفیدی از تونل باد یا تانک آب استفاده می‌شود. در این تجهیزات، می‌توان با تغییر دادن پارامترهایی مثل، سرعت جریان، منحنی‌های مربوطه را بدست آورد. به این ترتیب، با صرفه هزینه و زمانی بسیار کمتر، منحنی‌های مفیدی برحسب گروه‌های بی‌بعد بدست می‌آید.

## ۲- بی‌بعد کردن معادلات دیفرانسیل حاکم

اگر معادلات دیفرانسیل حاکم بر پدیده مشخص باشند، از آن‌ها می‌توان استفاده کرد و گروه‌های بدون بعد مؤثر در پدیده را استخراج کرد. جریان پایای تراکم‌ناپذیر یک سیال نیوتنی با لزجت ثابت را در نظر بگیرید. این معادلات شامل، معادلات پایستگی جرم و معادلات ناویر استوکس می‌باشند. معادلات به شرح روابط (۱-۲) هستند:

$$\vec{\nabla}_r \cdot \vec{V} = 0 \quad (1)$$

$$\rho \left( \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla}_r) \vec{V} \right) = -\rho \vec{g} - \vec{\nabla}_r P + \mu (\nabla_r^2 \vec{V}) \quad (2)$$

در معادلات (۱) و (۲)،  $\rho$  چگالی،  $\mu$  لزجت دینامیکی،  $p$  فشار ترمودینامیکی و  $\vec{V}$  بردار سرعت است. معادله پیوستگی دارای بعد  $\frac{1}{\text{زمان}}$  و معادلات ممنتوم دارای بعد  $\frac{\text{جرم}}{(\text{مجدور زمان} \times \text{مجدور طول})}$  می‌باشند. با در نظر گرفتن یک طول مشخصه  $L$  و یک سرعت مشخصه  $V_{\infty}$ ، و با تعریف بردار سرعت بی‌بعد  $(\vec{U} = \frac{\vec{V}}{V_{\infty}})$  و بردار مکان بی‌بعد  $(\vec{R} = \frac{\vec{r}}{L})$ ، می‌توان معادلات حاکم را به شکل بی‌بعد نوشت.

$$(\vec{U} \cdot \vec{\nabla}_R) \vec{U} = \frac{1}{Fr^2} \cdot \frac{\vec{g}}{|\vec{g}|} - \vec{\nabla}_R P + \frac{1}{Re} \nabla_R^2 \vec{U} \quad (3)$$

که در آن اعداد رینولدز و فرود به ترتیب عبارتند از:

$$Re = \frac{\rho V_{\infty} l}{\mu} \quad \text{و} \quad Fr = \frac{V_{\infty}}{\sqrt{gl}}$$

این دو گروه بدون بعد، رفتار فیزیکی جریان را در حالت کلی توصیف می‌کنند. گفتنی است که حل معادلات فوق، بستگی زیادی به مقادیر بدون بعد مذکور دارند. به عنوان مثال، چنانچه عدد رینولدز بزرگ باشد، دیفرانسیل‌های مرتبه دومی که نیروهای ویسکوز را نشان می‌دهند، قابل صرف نظر هستند و به معادله اوایلر می‌رسیم. البته در قسمت بیشتر جریان یک لایه‌ی مرزی وجود دارد که در آن لزجت قابل توجه است و به علاوه همواره نمی‌توان از مشتق‌های مرتبه دوم صرف نظر کرد؛ زیرا این به معنای حذف یکی از شرایط مرزی مسأله است. از روی عدد فرود نیز می‌توان به میزان قابل توجه بودن نیروهای ثقلی پی برد. پس از بی‌بعد کردن معادلات، باید شرایط مرزی مسأله را نیز بی‌بعد کرد. به هنگام بی‌بعد نمودن شرایط مرزی نیز ممکن است، گروه‌های بی‌بعد دیگری حاصل شوند که حتی مهم‌تر از گروه‌های بی‌بعد موجود در معادلات حاکم باشند. با نوشتن معادلات حاکم و شرایط مرزی به صورت بی‌بعد، اطلاعاتی درباره پدیده فیزیکی بدست می‌آیند و کمیت‌های مهم را می‌توان تشخیص داد. حل معادلات و شرایط مرزی آن به صورت بی‌بعد نتایجی را از جزئیات میدان جریان بدست می‌دهد که مستقل از ابعاد میدان جریان هستند؛ لذا می‌توان با بعددار کردن نتایج بی‌بعد حاصل شده از آنها برای میدان جریان واقعی و در ابعاد واقعی استفاده کرد.

## ۳- تشابه غیر کامل

مواردی وجود دارد که تشابه کامل دینامیکی بین مدل و نمونه اصلی امکان پذیر نمی‌باشد؛ مانند محاسبه نیروی درگ وارد بر کشتی یا شمع‌های دریایی با استفاده از مدل آن. در این مورد نیروی درگ وارد بر شمع دریایی، مجموعی از نیروی درگ موج و نیروی درگ اصطکاکی و فشاری است. درگ موج از نیروی گرانشی، درگ اصطکاکی از نیروهای لزجت و درگ فشاری از اختلاف فشار بین نقاط بدنه ناشی می‌شوند. از تحلیل ابعادی نتیجه می‌شود که در این مسأله دو گروه از اعداد بی‌بعد رینولدز و فرود نقش دارند. برای ایجاد تشابه کامل بین نمونه و مدل، اعداد بدون-بعد رینولدز و فرود نمونه و مدل باید دارای مقادیر یکسانی باشند.

$$\left(\frac{Vl}{\vartheta}\right)_m = \left(\frac{Vl}{\vartheta}\right)_p \quad (10)$$

$$\left(\frac{V}{\sqrt{gl}}\right)_m = \left(\frac{V}{\sqrt{gl}}\right)_p \quad (11)$$

که  $m$ ، نشان دهنده مدل و  $p$  نشان دهنده نمونه اصلی هستند. از معادله (۱۱) نتیجه می‌شود که:

$$\frac{V_m}{V_p} = \frac{\sqrt{l_m}}{\sqrt{l_p}} \quad (12)$$

با جایگذاری معادله (۱۲) در معادله (۱۰) نتیجه می‌شود:

$$\frac{\vartheta_m}{\vartheta_p} = \left(\frac{l_m}{l_p}\right)^{\frac{3}{2}} \quad (13)$$

از آن جایی که نمونه واقعی شمع در آب و هوا قرار دارد، لذا به عنوان مثال برای مدلی که دارای مقیاس ۰/۰۱ نسبت به نمونه اصلی باشد، نسبت لزجت سینماتیکی سیال مدل به سیال نمونه اصلی باید ۰/۰۰۱ باشد. چنین سیالی در طبیعت وجود ندارد. بهترین سیال موجود در طبیعت که با انتخاب آن می‌توان مدلهایی با مقیاس حدود ۰/۱ را آزمایش کرد، جیوه است که لزجت سینماتیکی آن حدود ۰/۱ لزجت سینماتیکی آب است؛ لذا سیالی که بتواند تشابه کامل را بین مدل و نمونه اصلی برای مقیاس‌های کوچکتر ایجاد نماید، وجود ندارد و لذا به ناچار از همان سیالات نمونه اصلی (آب و هوا) در آزمایش مدل استفاده می‌شود که این مسئله، باعث ایجاد خطا در نتایج آزمایش مدل می‌شود. با توجه به مطالب فوق و آنچه که از محدودیت سیالات موجود در طبیعت جهت برقراری تشابه

شرایط مرزی به دو دسته شرط مرزی سینماتیکی و شرط مرزی دینامیکی تقسیم می‌شوند. شرط مرزی سینماتیکی روی مرزی که از آن گذر جرم وجود ندارد، تساوی سرعت سیال و سرعت مرز است که به صورت معادله (۴) است.

$$\vec{V}_s \cdot \hat{n} = \vec{V}_s \cdot \hat{n} \quad (4)$$

در معادله (۴) سرعت سیال،  $\vec{V}_s$  سرعت بدنه و  $\hat{n}$  بردار یکه‌ی عمود بر سطح جسم هستند. در صورتیکه  $f(t, \vec{r}) = 0$  معادله مرز را معرفی کند، بردار یکه‌ی  $\hat{n}$  به صورت معادله (۵) تعریف می‌شود.

$$\hat{n} = \frac{\vec{\nabla} f}{|\vec{\nabla} f|} \quad (5)$$

با توجه به تعریف مشتق مادی و معادله مرز، رابطه (۶) را داریم:

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} f = 0 \quad (6)$$

چنانچه جریان دائم باشد:

$$\vec{V}_s \cdot \vec{\nabla} f = 0 \quad (7)$$

برای جریان دو فازی دائم در سطح آزاد مشترک دو سیال با توجه به اینکه در هر دو فاز رابطه (۴) برقرار است داریم:

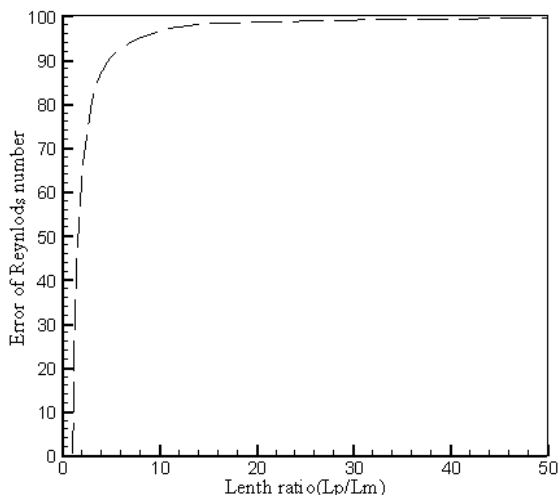
$$\vec{V}_1 \cdot \vec{\nabla} f = \vec{V}_2 \cdot \vec{\nabla} f$$

که شرط مرزی سینماتیکی روی مرز مشترک است. علاوه بر شرط مرزی سینماتیکی در سطح مشترک دو سیال باید شرط مرزی دینامیکی نیز ارضا شود. شرط مرزی دینامیکی در سطح مشترک دو سیال، حکایت از تعادل نیروهای وارد بر این سطح را دارد. تعادل نیروها در دو راستای عمود بر سطح مشترک و مماس بر آن باید برقرار شود. نیروهای عمود بر سطح مشترک، نیروهای فشاری هستند و نیروهای مماسی، ناشی از تنش‌های برشی و کشش سطحی مایع می‌باشند. نیروهای کشش سطحی، به انحای سطح مایع وابسته هستند و نسبت به نیروهای برشی ناشی از تنش برشی بسیار کوچک هستند؛ لذا با صرف نظر کردن از سهم کشش سطحی، شرط تعادل نیروها در امتداد مماس بر سطح مشترک دو سیال تساوی تنش‌های برشی در دو سیال را در این سطح ایجاد می‌کند:

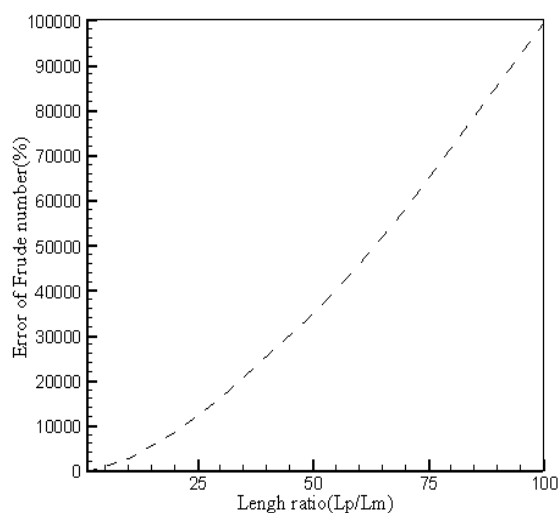
$$\tau_l = -\tau_g \quad (8)$$

و تعادل نیروهای عمود بر سطح مشترک، تساوی فشار دو سیال در طرفین این سطح را بیان می‌کند:

$$p_l = p_g \quad (9)$$



شکل ۱- نمودار درصد خطای رینولدز بر حسب نسبت طول



شکل ۲- نمودار درصد خطای فرود بر حسب نسبت طول

با توجه به شکل‌های ۱ و ۲ این‌گونه به نظر می‌رسد که خطای روش آزمایشگاهی در تعیین نیرو و سایر پارامترهای موثر به نسبت ابعادی وابسته است و چنانچه ابعاد مدل نسبت به نمونه اصلی خیلی کوچک باشد، نتایج مدل با نتایج نمونه اصلی بسیار متفاوت خواهند بود. در این تحقیق، به بررسی عددی خطای موجود در روش آزمایشگاهی برحسب نسبت ابعادی برای یک سیلندر (شمع) پرداخته شده است که در جریان پایا و با سطح آزاد قرار دارد.

کامل وجود دارد، این‌گونه به نظر می‌رسد که هرچه قدر مقیاس مدل کوچکتر شود، خطای روش آزمایشگاهی در محاسبه نیروی درگ وارد بر سازه بیشتر می‌شود. شکل‌های ۱ و ۲، نشان‌دهنده خطاهای نسبی موجود در اعداد فرود و رینولدز نمونه اصلی و مدل هستند، وقتی که جنس سیالات مدل و نمونه اصلی یکسان انتخاب شوند. چنانچه در آزمایش مدل تنها عدد فرود بین مدل آزمایشگاهی و نمونه اصلی یکسان باشد، نسبت سرعت‌ها و طول مشخصه‌ها طبق رابطه (۱۲) خواهد بود. در این صورت، درصد خطای نسبی عدد رینولدز نمونه اصلی و مدل برابر با رابطه (۱۴) است:

$$e_R = \frac{Re_p - Re_m}{Re_p} \quad (14)$$

با جایگذاری معادله (۱۲) در معادله (۱۴)، درصد خطای نسبی عدد رینولدز برحسب نسبت ابعادی در سیالات نمونه اصلی بدست می‌آید.

$$e_R = \left(1 - \left(\frac{L_m}{L_p}\right)^{3/2}\right) \times 100 \quad (15)$$

درصد خطای نسبی بین رینولدز مدل و نمونه اصلی در سیالات یکسان و عدد فرود یکسان برحسب نسبت ابعادی به صورت شکل ۱ است. چنانچه در آزمایش مدل تنها عدد رینولدز مدل و نمونه را در سیال یکسان، برابر در نظر بگیریم، درصد خطای نسبی برای عدد فرود به صورت رابطه (۱۶) است.

$$e_f = \left| \frac{Fr_p - Fr_m}{Fr_p} \right| \times 100 = \left| 1 - \frac{\left(\frac{v}{\sqrt{gL}}\right)_m}{\left(\frac{v}{\sqrt{gL}}\right)_p} \right| \times 100 \quad (16)$$

از آنجا که عدد رینولدز و جنس سیالات نمونه اصلی و مدل برابرند پس:

$$e_f = \left| 1 - \left(\frac{L_p}{L_m}\right)^{3/2} \right| \times 100 \quad (17)$$

در رابطه (۱۷)،  $e_f$  درصد خطای نسبی بین عدد فرود مدل و نمونه اصلی است. از برابر بودن عدد رینولدز بین نمونه و مدل، خطای نسبی در عدد فرود برحسب نسبت ابعادی به صورت شکل ۲ است.

#### ۴- شمع‌ها و کاربرد آن‌ها و مروری بر کارهای گذشته

در این تحقیق، جهت بررسی خطای روش تجربی در آنالیز ابعادی مسائل جریان با سطح آزاد از یک سیلندر و مدل آن استفاده شده است. سوپرانا و همکارانش [۳]، به روش آزمایشگاهی نیروهای وارد بر سیلندر را در جریان پایا و موج بررسی کرده‌اند. چاپلین و تیگن [۴] به صورت آزمایشگاهی به بررسی تأثیرات سطح آزاد بر نیروهای وارد بر سیلندر پرداخته، ریزش گردابه را بررسی کرده‌اند. کو و سو [۵]، به بررسی ریزش گردابه در عمق‌های مختلف از سطح آزاد پرداختند و دریافته‌اند که ریزش گردابه در سطح آزاد نسبت به عمق جریان، از شدت کمتری برخوردار است. یو و همکارانش [۶] به بررسی عددی جریان سطح آزاد حول سیلندر با استفاده از مدل اغتشاشی *LES* پرداختند و تأثیرات اعداد رینولدز و فرود را بر ریزش گردابه در عمق‌های مختلف از سطح آزاد بررسی کرده‌اند. نمونه‌های زیادی از شمع‌های دریایی وجود دارند که در معرض جریان‌های مختلف قرار دارند؛ از جمله شمع‌هایی که در خلیج مکزیک قرار دارند. بیش از ۱۰۰۰ شمع در خلیج مکزیک وجود دارد که قطر آن‌ها از ۳۰-۴۲ اینچ و عمق آب در محل قرارگیری شمع ۳۵-۹۰ فوت است و برخی از آن‌ها در معرض موج‌های بلندی قرار می‌گیرند. کاربرد این شمع‌ها را می‌توان در ساخت سکوها نفتی و یا ابزاریمشاهده کرد که امواج سهمگین دریا را دفع می‌نمایند. برای بررسی نیروهای وارد بر این شمع‌ها، مدل این شمع‌ها در تانک، مورد آزمایش قرار گرفته‌اند. شمع می‌تواند در معرض جریان یکنواخت و پایا قرار گیرد. همچنین می‌تواند در معرض موج‌های شکسته یا غیر شکسته قرار گیرد که در هر حالت، شمع نیروهای مختلفی را تحمل می‌کند.

#### ۴-۱- خصوصیات مدل و تانک آزمایشگاه

نمونه اصلی، شمعی است از فولاد به قطر ۳۶ اینچ که در خلیج مکزیک وجود دارد و مدل آن دارای مقیاس یک به بیست است و توسط سوپرانا و همکارانش [۳] در تانک آب، مورد بررسی قرار گرفته، نیروهای وارد بر مدل اندازه‌گیری شده‌اند. مدل تانک آزمایش، دارای طول ۲۵۰ فوت، عرض ۳۳ فوت و عمق ۱۸ فوت است که کف آن از ۹ قطعه

متحرک ساخته شده است. این قطعات دارای طول ۳۳ فوت، عرض ۲۰ فوت و ارتفاع ۲ فوت است و دارای وزن ۴۰ تن در هوا است که بوسیله پین به کف تانک متصل شده‌اند. از آنجایی که این تانک برای بررسی جریان‌های موج نیز به کار می‌رود، دو عدد موج‌ساز در آن تعبیه شده‌اند. سیال توسط دو پروانه به حرکت درمی‌آید که با تنظیم سرعت چرخش پروانه‌ها، سرعت جریان در تانک تنظیم می‌شود. جریان نیز از یک طرف از بالای کف عبور نموده، با شمع برخورد می‌کند و در جهت معکوس از زیر صفحات کف به جای اول برمی‌گردد. بسته به عمق آب، بیشترین سرعتی که در تانک می‌توان ایجاد کرد، متفاوت است. نمونه اصلی در جریانی با عمق ۵۰ فوت قرار دارد؛ لذا مدل با مقیاس یک به بیست نمونه اصلی در عمق ۲/۵ فوت آزمایش می‌شود و در این حالت، می‌توان به سرعت ۱ فوت بر ثانیه دست یافت. پنج تیغه اول، دارای شیب یک به پنجاه به طرف بالا هستند. سپس دو تیغه به صورت افقی قرار گرفته‌اند که عمق آب روی این دو قطعه، به ۲/۵ فوت می‌رسد و در نهایت دو تیغه شیب‌دار به سمت پایین قرار دارند. شیب‌دار بودن صفحات تانک بدین علت است که از شکسته شدن موج در حالتی جلوگیری شود که شمع در جریان موج قرار دارد. شماتیک تانک آزمایش و شمع آزمایش شده در شکل ۳ نشان داده شده‌اند. در این آزمایش، از کرنش‌سنج‌هایی برای تعیین بارها و گشتاورهای وارد بر شمع، استفاده شده است.

#### ۵- شبیه‌سازی عددی مدل آزمایشگاهی

در این تحقیق، شمعی که مشخصات آن در بخش (۳) ذکر شد، به روش عددی و به صورت ناپایا توسط نرم افزار فلونت شبیه‌سازی شده است. ناپایا بودن حل عددی از این لحاظ است که گرچه شرایط میدان جریان در بالادست پایاست، ولی به علت پدیده‌هایی از جمله، ریزش گردابه، تحلیل عددی باید به صورت ناپایا صورت گیرد. از آنجایی که جریان از نوع مسائل با سطح آزاد است، از روش کسر حجمی جهت تحلیل مسئله استفاده شده است. در روش کسر حجمی، علاوه بر معادلات بقای جرم و بقای اندازه حرکت، معادله انتقالی کسر حجمی برای هر سلول باید لحاظ شود.

گرفته شده‌اند و جهت دستیابی به لزجت سینماتیکی که تشابه کامل بین نمونه و مدل را برقرار نماید، لزجت دینامیکی به عنوان متغیر لحاظ شده است. با این فرض، نسبت شدت اغتشاش مدل به نمونه اصلی مطابق رابطه (۲۰) است که در آن  $D_H$ ، قطر هیدرولیکی کانال است.

$$\frac{I_m}{I_p} = \frac{(VD_H/\mu)_m^{-1/8}}{(VD_H/\mu)_p^{-1/8}} \quad (20)$$

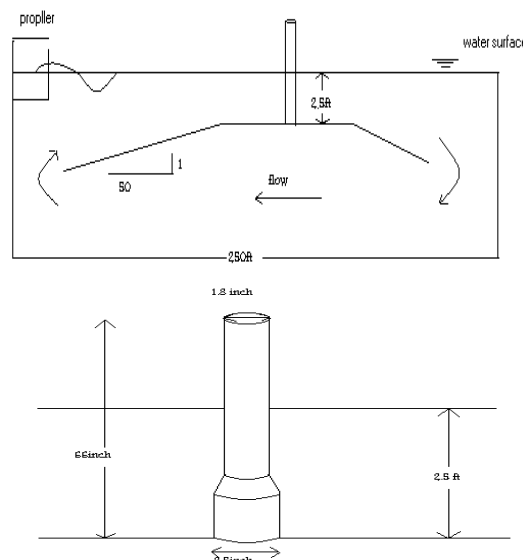
### ۱-۵- شبکه بندی

در این مسأله، از شبکه‌های سازمان‌یافته جهت تحلیل مدل استفاده شده است. روش کسر حجمی، از جمله روش‌های تسخیر فصل مشترک محسوب می‌شود؛ لذا جهت دست‌یابی به دقت بالاتر در معادلات ممنوم و پیوستگی، شبکه بندی در کنار کف و سیلندر ریزتر شده است و برای دست‌یابی به دقت بالاتر در معادله کسر حجمی، در سطح آزاد نیز شبکه‌بندی ریزتر شده است. از آنجایی که سطح مقطع شمع در طول شمع تغییر می‌کند، لذا در ناحیه‌ای از شمع که تغییر سطح مقطع وجود دارد نیز، شبکه‌بندی ریزتر شده است. چگونگی ریزشدن شبکه در شکل ۴ نمایش داده شده است.

شرط تشابه ایجاد می‌کند که حتی شبکه‌بندی مدل با نمونه اصلی در تشابه باشد؛ لذا فاصله دو گره متوالی در مدل هر مقدار باشد، فاصله دو گره متناظر در نمونه به اندازه نسبت ابعادی بزرگتر از آن است. دامنه حل عددی جریان نیز، با توجه به کار کو و سو [۵] استوانه‌ای با شعاع ۲۰ برابر قطر شمع بوده که این موضوع در شکل ۴ قابل مشاهده است.

### ۲-۵- مطالعه شبکه

پس از انجام سایر تنظیمات و اعمال پارامترهای ورودی به برنامه، شبکه مربوطه باید مورد مطالعه قرار گیرد تا بهترین شبکه از لحاظ تعداد و نحوه قرارگیری مشخص شود. با توجه به تقارن هندسه، جهت مطالعه شبکه از سه شبکه-بندی با تعداد ۳۸۶۰۰۰، ۵۲۲۰۰۰ و ۷۸۲۰۰۰ سلول استفاده شده است و ضریب فشار روی خطی در حول شمع و در صفحه  $y = 10\text{in}$  (محور  $y$  در جهت محور شمع



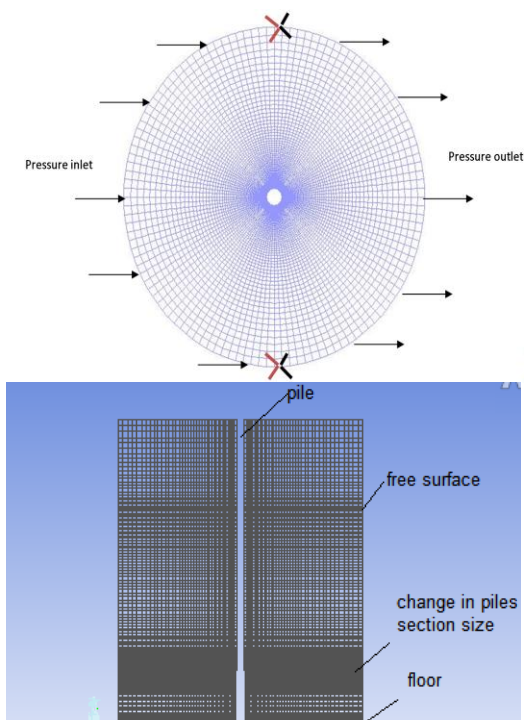
شکل ۳- شماتیک شمع آزمایش [۳]

$$\frac{\partial F}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \vec{\nabla})F = 0 \quad (18)$$

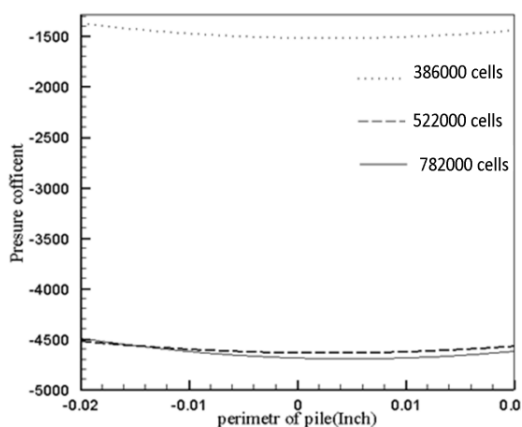
نمونه‌هایی از کاربرد این روش را می‌توان در منابع [۷]، [۸] یافت. همچنین جریان از نوع کانال باز است؛ لذا شرط کانال باز باید در تحلیل مسأله لحاظ شود. جهت شبیه‌سازی عددی اغتشاش جریان از روش  $k - \omega$  (SST) استفاده شده است. در این روش، از چندین روش برای تعیین مقادیر اغتشاش در ورودی میدان جریان می‌توان استفاده کرد. این روش‌ها شامل، تعیین شدت اغتشاش و قطر هیدرولیکی، تعیین  $k, \omega$ ، شدت اغتشاش و مقیاس طول و... هستند. مسأله موجود از جمله مسائل جریان داخل کانال به شمار آمده و بهتر است، با استفاده از روش شدت اغتشاش و قطر هیدرولیکی تحلیل شود. شدت اغتشاش، میزان اغتشاش جریان را نشان می‌دهد. در مرکز ناحیه توسعه یافته‌ی داخل کانال، جهت تخمین شدت اغتشاش می‌توان از رابطه (۱۹) استفاده کرد. در این رابطه  $I$  شدت اغتشاش است.

$$I = 0.16(Re_{DH})^{-1/8} \quad (19)$$

در رابطه (۱۳)، نسبت لزجت سینماتیکی جهت ایجاد تشابه کامل بیان شد. با توجه به این که لزجت سینماتیکی از تقسیم لزجت دینامیکی بر چگالی بدست می‌آید، لذا در روش عددی و در محاسبات مربوطه در این تحقیق به طور فرضی، چگالی سیالات مدل و نمونه اصلی یکسان در نظر



شکل ۴- شبکه‌بندی میدان حل



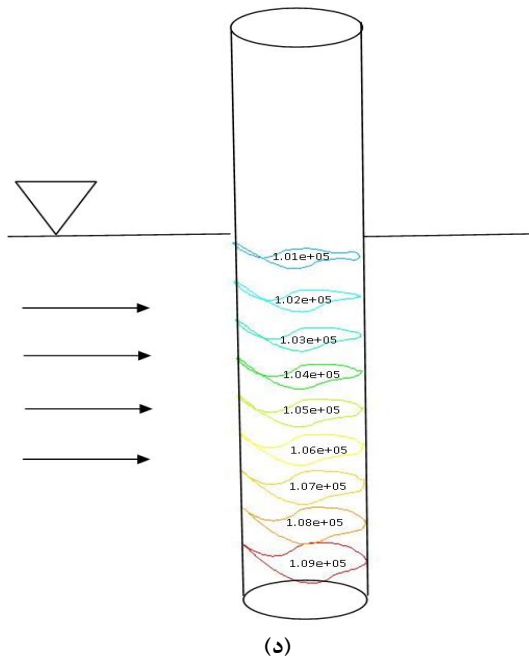
شکل ۵- ضریب فشار برای سه نوع شبکه‌بندی

شده است که آزمایش را انجام داده‌اند [۳]. لازم به ذکر است، منحنی تئوری از برازش یک معادله مرتبه دو (معادله ۲۱) بر داده‌های آزمایشگاهی بدست آمده است [۳]. پس از حل عددی مدل اکنون می‌توان نمونه اصلی را نیز به روش عددی مورد تحلیل قرار داد و نتایج مدل و نمونه اصلی را بایکدیگر مقایسه کرد. در شکل ۶-د، کانتور فشار استاتیکی حول استوانه و در شکل ۶-ه کانتور سرعت حول سیلندر نشان داده شده‌اند.

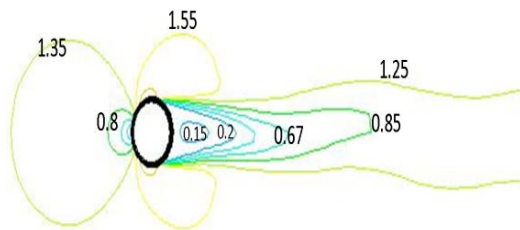
است)، در هر سه حالت بدست آورده شده است. نمودار ضریب فشار در هر سه حالت، در شکل ۵ نشان داده شده است. شکل ۵، نشان می‌دهد که نمودار ضریب فشار برای حالت ۵۲۲۰۰۰ سلولی بر نمودار ضریب فشار برای حالت ۷۸۲۰۰۰ سلولی تا حد بسیار زیادی منطبق شده است؛ لذا تعداد ۵۲۲۰۰۰ سلول، آرایش مناسبی جهت تحلیل مسأله است.

## ۶- اعتبارسنجی حل عددی

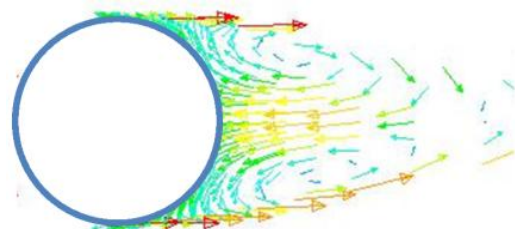
در این تحقیق، در ابتدا سیلندری که توسط چاپلین و کو [۵۴] به روش‌های آزمایشگاهی و عددی بررسی گردید، برای حالتی که سرعت ۰/۶۳ متر بر ثانیه است، مجدداً بررسی شد. نیروی درگ محاسبه شده، در شکل ۶-الف نشان داده شده است. باید توجه داشت که به علت ناپایا بودن مسئله و ریزش گردابه نیروی درگ بدست آمده پس از پایداری مسئله به مقدار ثابتی دست نیافته، بلکه از نوساناتی برخوردار است که میانگین مقدار آن  $C_D = 1.12$  در این تحقیق بدست آمد که در توافق خوبی با کارهای آزمایشگاهی و عددی پیشین است. گام زمانی انتخاب شده، ۰/۰۱ ثانیه انتخاب گردید و شرط همگرایی برای باقیمانده معادله پیوستگی  $10^{-5}$  و برای سایر معادلات  $10^{-6}$  در نظر گرفته شد و مدت زمان لازم جهت همگرایی حدوداً یک هفته به طول انجامید. علت کوچک انتخاب کردن گام زمانی و طولانی شدن زمان حل، همان پدیده ریزش گردابه است، به نحوی که گام زمانی انتخاب شده باید پدیده مذکور را بتواند تسخیر نماید. در ادامه، نیروی وارد بر مدلی که مشخصات آن در بخش ۱-۳ ذکر شد، بدست آورده شده است و نتایج حل عددی با نتایج آزمایشگاهی مقایسه شده‌اند که توسط سوپراتا روی همان مدل انجام شده است. نتایج عددی برای سرعت‌های ۰/۵، ۰/۸، ۱ و ۱/۲ فوت بر ثانیه محاسبه شده‌اند. داده‌های آزمایشگاهی در شکل ۶-ب و داده‌های عددی بدست آمده در این تحقیق در کنار داده‌های آزمایشگاهی در شکل ۶-ج جمع آوری شده‌اند. با مشاهده شکل ۶-ب، از داده‌های مربوط به آزمایش‌هایی که روی شمع انجام شده است، در سرعت‌های پایین اختلاف روش آزمایشگاهی با روش تئوری بیشتر است که علت این امر، اثرات ناشی از پایین بودن سرعت، توسط محققانی بیان



(د)

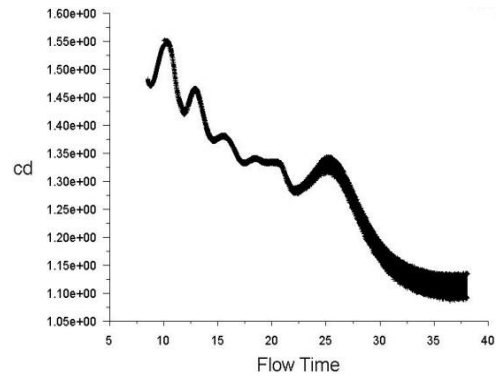


(هـ)

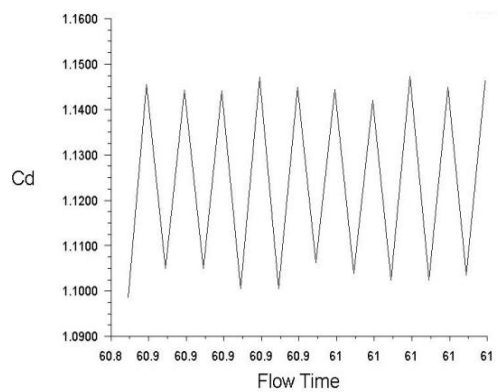


(و)

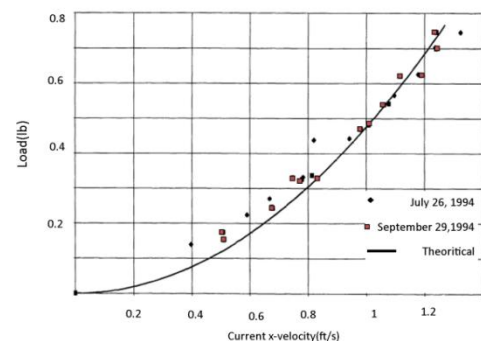
شکل ۶- الف-۱) روند پایدار شدن ضریب درگ استوانه در حالت  $V = 1.2 \text{ m/s}$  و  $Fr = 0.44$  بر اساس مرجع [۴]، الف-۲) ضریب درگ استوانه پس از پایداری در حالت  $V = 1.2 \text{ m/s}$  و  $Fr = 0.44$  بر اساس مرجع [۴]، ب) نمودار نیروی وارد بر شمع در روش آزمایشگاهی برحسب سرعت جریان [۳]، ج) نمودار نیروی وارد بر شمع در روش-های عددی و آزمایشگاهی بر حسب سرعت جریان، د) کانتور فشار حول استوانه، هـ) کانتور سرعت در صفحه  $Z = 0.4$  و بردار سرعت در صفحه  $Z = 0.4$



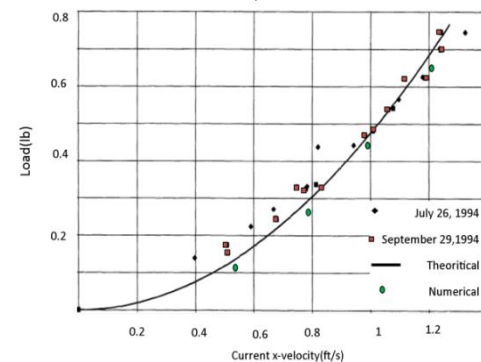
(الف-۱)



(الف-۲)



(ب)



(ج)



## ۷- بررسی اثر مقیاس مدل‌سازی در خطای روش آزمایشگاهی

پس از اعتبارسنجی روش عددی، در این قسمت جهت بررسی میزان وابستگی خطای عددی مدل آزمایشگاهی، نمونه اصلی و مدل‌هایی با ابعاد  $\frac{1}{12}$ ،  $\frac{1}{20}$ ،  $\frac{1}{40}$  و  $\frac{1}{120}$  نمونه اصلی مورد بررسی قرار گرفتند که برای هر مقیاس، مدل با تشابه کامل و مدل آزمایشگاهی به روش عددی بررسی شد. همان‌گونه که در شکل‌های ۱ و ۲ مشاهده شد، با افزایش نسبت ابعادی، درصد خطای نسبی اعداد رینولدز و فرود مدل در حالت تشابه غیر کامل بیشتر می‌شوند؛ لذا چنان پیش‌بینی می‌شود که خطای عددی مدل در روش آزمایشگاهی در تعیین نیرو و سایر پارامترها نیز با افزایش نسبت ابعادی افزایش یابد. برای هر یک از حالات حل عددی جهت سهولت، کدی به اختصار به آن حالت اختصاص داده شده است که جزئیات آن در جدول ۱ نشان داده شده است. حالت NMF حل عددی مربوط به مدلی است که فقط عدد فرودش با عدد فرود نمونه اصلی یکسان باشد که معادل با روش آزمایشگاهی است، حالت NMFIR حل عددی مربوط به مدلی است که تمامی اعداد بدون بعد مدل با اعداد بدون بعد نمونه اصلی یکسان باشند (تشابه کامل) و حالت NP، حل عددی برای نمونه اصلی است. برای هر سه حالت، نمونه‌ای از این محاسبات را می‌توان در جدول ۲ یافت که مربوط به حالتی است که عدد فرود نمونه اصلی ۰/۹۹۸ و مدل آن دارای مقیاس  $\frac{1}{20}$  نمونه

اصلی است و نیروهای بدون بعد وارد بر آن‌ها را می‌توان مشاهده کرد.  $\bar{F}$  نیروی بدون بعد است که از رابطه (۲۱) بدست می‌آید.  $H$  ارتفاع مایع داخل کانال و اندیس‌های  $g, L$  به ترتیب، معرف فازهای مایع و گاز می‌باشند. مقادیر لزجت در حالت NMFIR توسط معادله (۱۳) بدست آمده‌اند. از جدول ۲ می‌توان مشاهده کرد که در حالات NMFIR و NP، مقادیر ضریب بی‌بعد نیروها یکسان هستند که از روش عددی بدست آمده‌اند که این امر، نشان از تشابه کامل دینامیکی بین نمونه اصلی و مدل در این حالت است؛ ولی در حالت NMF همان‌طور که مشاهده می‌شود، در چنین مسائلی به کار بردن روش تجربی چندان کار صحیحی به نظر نمی‌رسد؛ زیرا با خطای زیادی مواجه است و نتایج مدل را نمی‌توان برای نمونه اصلی بکار برد.

$$\bar{F} = \frac{F}{\frac{1}{2}\rho_L V^2 A} \quad (21)$$

این که میزان خطا به چه پارامترهایی بستگی دارد، مدل با مقیاس‌های دیگر نیز باید مورد حل عددی قرار می‌گرفت. در جدول ۳، درصد خطای نسبی نیرو برای حالات NMF و NMFIR در دو مقیاس  $\frac{1}{20}$  و  $\frac{1}{40}$  در چندین عدد فرود مختلف نشان داده شده‌اند و نتایج آن‌ها طی شکل‌های ۷ و ۸ مقایسه شده‌اند. از این جدول می‌توان مشاهده کرد که در هر جریانی با هر عدد فرودی، افزایش نسبت ابعادی موجب افزایش خطا در روش آزمایشگاهی می‌شود.

جدول ۱- خلاصه مشخصات موارد حل عددی نمونه اصلی و مدل‌ها در شرایط مختلف

علامت اختصاری حل عددی انجام شده	کمیت‌های بی‌بعد یکسان بین نمونه و مدل	کمیت‌های بی‌بعد متفاوت بین نمونه و مدل	توضیحات
NP	-----	-----	حل عددی نمونه اصلی
NMF	$Fr_M = Fr_P$	$(Re_M \neq Re_P)$	عدد فرود مدل و نمونه یکسان
NMFIR	$Fr_M = Fr_P$ $I_p(Re_M = Re_P)$	-----	تمام اعداد بدون بعد مدل و نمونه یکسان

جدول ۲- کمیت‌ها و نتایج در حل‌های عددی مختلف در فرود ۰/۹۹۸ و مدل با مقیاس  $\frac{1}{20}$

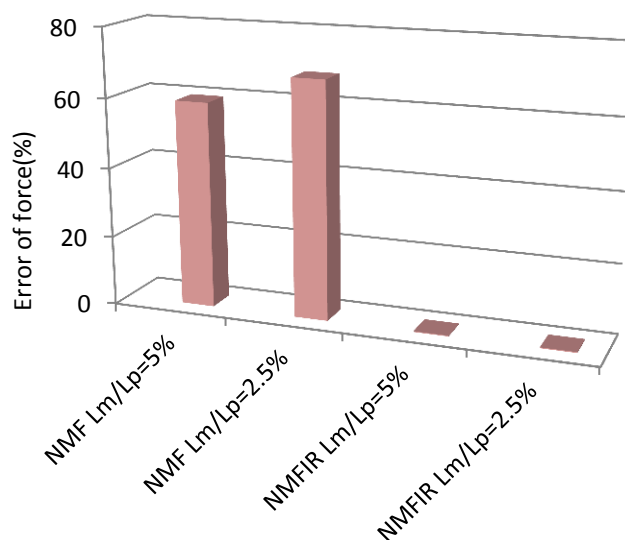
Num. code	Fr	H (ft)	V ( $\frac{ft}{s}$ )	$\frac{\mu_L}{s}$ ( $\frac{kg \cdot m}{s}$ )	$\frac{\mu_g}{s}$ ( $\frac{kg \cdot m}{s}$ )	$\bar{F}$
NP	۰/۹۹۸	۵۰	۴۰	۰/۰۰۰۱۰۳	۰/۰۰۰۰۱۷۸۹۴	۰/۸۳
NMF	۰/۹۹۸	۲/۵	۸/۹۹۴	۰/۰۰۰۱۰۳	۰/۰۰۰۰۱۷۸۹۴	۱/۲
NMFIR	۰/۹۹۸	۲/۵	۸/۹۹۴	۰/۰۰۰۰۴۰۷۱	۰/۰۰۰۰۰۰۰۷۰۳۶	۰/۸۴

جدول ۳- مقادیر درصد خطای نیرو در اعداد فرود مختلف و در مقیاس‌های مختلف

	Fr = ۲	Fr = ۰/۹۱	Fr = ۰/۸۴	Fr = ۰/۹۹۸
خطای مدل با ابعاد $\frac{1}{20}$ و NMF	۴۸/۸٪	۴۷٪	۵۹/۳٪	۴۴/۵۷٪
خطای مدل با ابعاد $\frac{1}{40}$ و NMF	۵۶/۷٪	۵۳/۴٪	۶۸٪	۴۸٪
خطای مدل با ابعاد $\frac{1}{20}$ و NMFIR	۰/۰۰۲٪	۰/۳٪	۰/۲٪	۰/۱۵٪
خطای مدل با ابعاد $\frac{1}{40}$ و NMFIR	۰/۱۱٪	۰/۱٪	۰/۲۶٪	۰/۴٪

تا بتوان نمودار درصد خطای نسبی نیروی وارد بر مدل برحسب نسبت ابعادی را در حالت NMF مشاهده کرد. با در نظر گرفتن مدل‌هایی با مقیاس‌های  $\frac{1}{12}$ ،  $\frac{1}{20}$ ،  $\frac{1}{40}$  و  $\frac{1}{120}$ ، نمودار درصد خطای نسبی نیرو برحسب نسبت ابعادی در فرود ۰/۹۹۸ برای حالت NMF (شبیه‌سازی عددی روش آزمایشگاهی)، به صورت شکل ۹ است. با ترسیم نمودار درصد خطا برحسب عدد فرود و نسبت ابعادی می‌توان به تصویر روشنی از مطالب فوق دست یافت. شکل ۱۰، گویای این مطلب است. از این تحقیق می‌توان چنین استنباط کرد که روش تجربی در مسائلی که دارای تشابه غیر کامل می‌باشند، نمی‌تواند به تنهایی جهت یافتن داده‌های دقیق مورد استفاده قرار گیرد، لذا تحلیل عددی این گونه مسائل در کنار نتایج آزمایشگاهی امری اجتناب ناپذیر بوده، می‌تواند مقدار زیادی از خطای موجود در این گونه مسائل را برطرف کند.

شکل ۷، نشان می‌دهد که در یک عدد، فرود مشخص خطا در هر دو مقیاس در حالت NMF، بسیار بیشتر از حالت NMFIR (که خطایی حدود صفر درصد را دارد) است. همچنین افزایش نسبت ابعادی در حالت NMF، باعث افزایش درصد خطا می‌شود، ولی تأثیر چندانی بر درصد خطا در حالت NMFIR ندارد. در شکل ۸، مقادیر درصد خطا برای هر دو مقیاس در حالت NMF در چندین عدد فرود مختلف که در جدول ۳ جمع‌آوری شدند به صورت شماتیک نشان داده شده- اند تا روند افزایش خطا در حالت NMF مشاهده شود. این شکل نشان می‌دهد که برای مدلی با مقیاس مشخص، تغییر در عدد فرود (ناشی از تغییر ارتفاع مایع) نیز می‌تواند سبب ایجاد تغییر در درصد خطا شود. جهت مشخص نمودن میزان وابستگی خطای نیرو به نسبت ابعادی و روند رشد آن با در دست داشتن شکل‌های ۱ و ۲، مدل با دو مقیاس دیگر  $\frac{1}{12}$  و  $\frac{1}{120}$  در یک عدد فرود خاص ( $Fr = 0.998$ ) نیز، مورد حل عددی قرار گرفتند

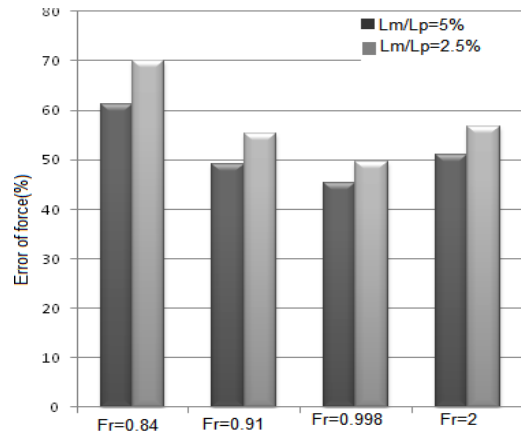
شکل ۷- نمودار درصد خطای نسبی در حالت فرود ۰/۸۴ برای مقیاس‌های  $\frac{1}{20}$  و  $\frac{1}{40}$  نمونه اصلی

## ۸- نتیجه گیری

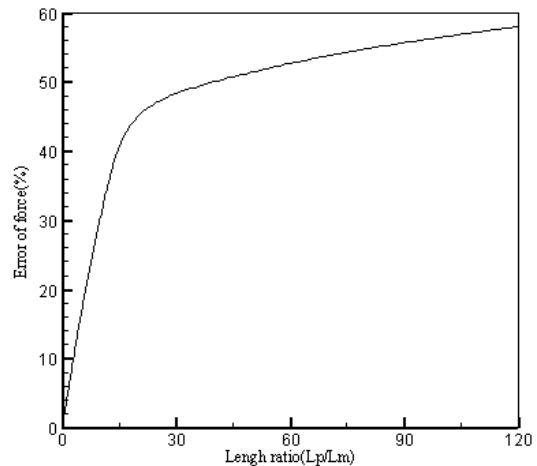
۱- اگر در مسئله‌ای بین مدل و نمونه اصلی تشابه کامل برقرار نباشد، نتایج آزمایش مدل با داده‌های نمونه اصلی متفاوت خواهد بود و مقدار این خطا در مواردی آن قدر زیاد است که از روش آزمایشگاهی نتوان در این مسائل استفاده کرد. در این گونه مسائل، تحلیل عددی مسئله می‌تواند بسیار مؤثر واقع شود.

۲- از مشاهده تمامی شکل‌ها و جداول می‌توان این-چنین استدلال کرد که با افزایش نسبت ابعادی، خطای عددی روش آزمایشگاهی در تخمین نیروی وارد بر شمع افزایش می‌یابد؛ لذا بهتر است، ابعاد مدلی که در تانک آزمایش قرار داده می‌شود، به ابعاد نمونه اصلی حدالامکان نزدیک‌تر باشد تا آزمایش مدل با خطای کمتری نسبت به نمونه مواجه شود. البته مقدار این خطا تابع عدد فرود نیز است.

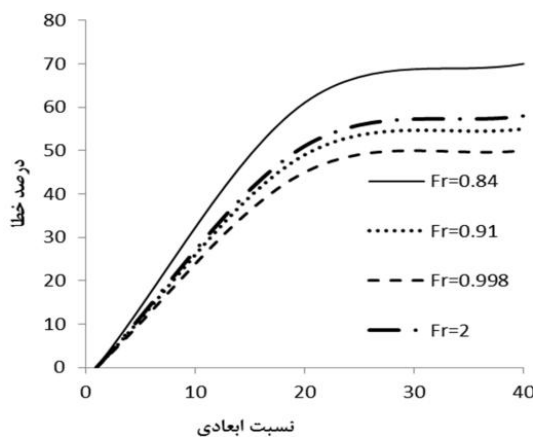
۳- چنانچه بتوان بین مدل و نمونه اصلی تشابه کامل برقرار نمود، مقیاس مدل تأثیری بر نتایج آزمایش مدل نداشته، در هر مقیاسی نتایج مدل با نمونه اصلی کاملاً هم‌خوانی دارد؛ لذا بررسی روش‌هایی جهت برقراری تشابه کامل در این گونه مسائل امری ضروری است.



شکل ۸- درصد خطا برای مقیاس‌های  $\frac{1}{20}$  و  $\frac{1}{40}$  نمونه اصلی در حالت NMF در اعداد فرود مختلف



شکل ۹- درصد خطای نسبی نیرو بر حسب نسبت ابعادی در روش تجربی و در عدد فرود ۰/۹۹۸



شکل ۱۰- نمودار درصد خطا بر حسب نسبت ابعادی و عدد فرود

## ۹- مراجع

- [1] Fox RW, Pritchard PJ, McDonald AT (2007) Introduction to fluid mechanis.
- [2] Shames, Irving H (2003) Mechanics of Fluides. McGraw-Hill.
- [3] Chakrabartia SK, DL Kriebel, Berek EP (1997) Forces on a single pile caisson in breaking waves and current. APPL OCEAN RES 19(2):113-140.
- [4] Chaplin JR, Teigen P (2003) Steady flow past a vertical surface-piercing circular cylinder. J Fluid Struct 18(s 3-4): 271-285.
- [5] Koo B, Suh J (2010) Simulation of two-phase flow past a vertical surface-piercing cylinder. 8th Int. Conf. on Nanochannels, August 1-5, Montreal, Canada.
- [6] Yu G, Avital E (2006) Large eddy simulation of flow past free surface piercing circular cylinders. 7th Int. Conf. on HydroScience and Eng. Philadelphia, USA September 10-13, (ICHE 2006).

[8] Cassio MO, Murilo FT, Jose AC, Sean M (2008) An implicit technique for solving low Reynolds number moving free surface flows. J comput Phys 1: 7446-7468.

[7] Harlow F, Welch JE (1965) Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with a free surface. Phys Fluid 1: 2182-2189.