



## تحلیل برخورد زمانمند الاستوپلاستیک پرتابه پرسرعت با سطح آب

حسن فروزانی<sup>۱\*</sup>، بهادر سرانجام<sup>۲</sup>، رضا کمالی<sup>۲</sup> و علی عبداللهی فر<sup>۴</sup><sup>۱</sup> مربی، دانشکده مهندسی دریا، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، شیراز<sup>۲</sup> دانشیار، دانشکده مهندسی دریا، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، شیراز<sup>۳</sup> استاد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه شیراز، شیراز<sup>۴</sup> استادیار، دانشکده مهندسی دریا، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، شیراز

تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۰۲/۰۷؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۵/۰۴/۱۲؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۵/۰۷/۲۴

## چکیده

در این مقاله، برخورد زمانمند الاستوپلاستیک پرتابه پرسرعت با سطح آب به صورت عددی با استفاده از روش اختیاری لاگرانژین-اولرین شبیه‌سازی شده است. پرتابه یک جامد الاستوپلاستیک در نظر گرفته شده، شبکه آن به صورت لاگرانژین ایجاد شده است. آب نیز یک سیال تراکم پذیر فرض شده، شبکه آن با روش اولرین تولید شده است. در این تحقیق، شبیه‌سازی در سه گام انجام شده است؛ تحلیل تنش استاتیکی، دینامیکی و همچنین تحلیل برخورد پرتابه با درجات آزادی کامل با سطح آب، به روش اختیاری لاگرانژین - اولرین. اثرات تراکم‌پذیری سیال و کاویتاسیون در آنالیز آخر لحاظ شده است. به منظور صحت‌گذاری نتایج، انتشار موج تنش ایجاد شده در پرتابه ناشی از برخورد با آب، با نتایج تحلیلی مقایسه شده است. نتایج نشان می‌دهد که بیشترین خطا در مقایسه با نتایج تحلیلی حدود ۵٪ است؛ همچنین مقدار بیشینه تنش و مکان/مسیر شکست در پرتابه با داده‌های آزمایشگاهی مقایسه شده است. تطابق خوب بین مقادیر پیش بینی شده و آزمایشگاهی/تحلیلی نشان‌دهنده دقت این الگوریتم عددی است. برخورد پرتابه با سطح آب با زوایای مختلف نیز، شبیه‌سازی شده است. نتایج نشان می‌دهد که محدوده ایمن زاویه پرتاب برای پرتابه حاضر  $0.5^\circ \pm$  است.

**کلمات کلیدی:** روش اختیاری لاگرانژین-اولرین؛ برخورد؛ الاستوپلاستیک؛ پرتابه پرسرعت.

## Elasto-Plastic Time Dependent Impact Analysis of High Speed Projectile on Water Surface

H. Forouzani<sup>1\*</sup>, B. Saranjam<sup>1</sup>, R. Kamali<sup>2</sup>, A. Abdollahi far<sup>1</sup><sup>1</sup> Department of Naval Eng., Malek Ashtar Univ. of Technology, Shiraz, Iran.<sup>2</sup> Department of Mechanical Eng., Shiraz Univ., Shiraz, Iran.

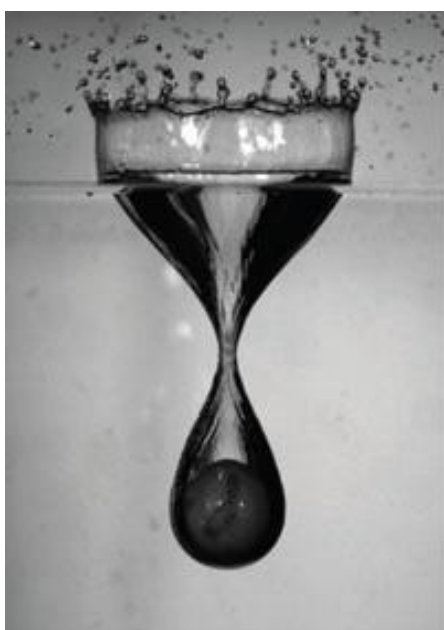
## Abstract

In this paper, elasto-plastic time dependent impact of high-speed projectile on water surface is simulated numerically using Arbitrary Lagrangian- Eulerian (ALE) method. The projectile is considered as elasto-plastic solid and its mesh is generated by Lagrangian approach. The water is also assumed as compressible fluid so its mesh is produced by Eulerian method. Three steps simulation are performed in this research; static, dynamic stress analysis and also impact analysis of full degrees of freedom (DOF) projectile on water surface using ALE method. The effects of fluid compressibility and cavitation are considered in last analysis. In order to validate results, the stress wave propagation produced in the projectile due to water impact is compared with exact ones. The results show that the maximum error compare with exact ones is 5%. Also the magnitude of maximum stress and location/path of fracture in the projectile are compared with experimental data. The good agreement between the predicted and analytical/experimental values shows the accuracy of this numerical algorithm. The impact of projectile on water surface is simulated with different angles. The results show that the safe zone of impact angle for present projectile is  $\pm 0.5^\circ$ .

**Keywords:** Arbitrary Lagrangian- Eulerian (ALE) Method; Impact; Elasto-Plastic; High Speed Projectile.

## ۱- مقدمه

را به‌طور چشمگیری کاهش می‌دهد. این پدیده، سوپرکاویتاسیون<sup>۱</sup> یا کاویتاسیون توسعه یافته نام دارد. قسمت دماغه به شکل یک صفحه تخت، کویتیتور<sup>۲</sup> مؤثری است که سبب حرکت جسم در آب در رژیم سوپرکاویتاسیون می‌شود. تحلیل نتایج آزمایش‌ها و بررسی‌های نظری [۲] نشان می‌دهد که در قسمت دماغه یک پرتابه متحرک در آب، ناحیه بسیار پرفشاری وجود دارد که تنش در آن می‌تواند حتی از مقاومت تسلیم پرتابه نیز بالاتر رفته، منجر به تغییر شکل پلاستیک و یا حتی تخریب پرتابه شود.



شکل ۱- برخورد توپ بیلیارد با سطح آب و تشکیل حفره شبیه ساعت شنی [۱]



شکل ۲- برخورد پرتابه با سطح آب و تشکیل حفره کپسولی و پیوسته [۲]

بی‌شک توسعه فناوری‌های پیشرفته دریایی، نیازمند استخراج مدل‌های ریاضی و الگوریتم‌های عددی مناسب به منظور بیان برهم‌کنش جسم و آب در سرعت‌های بسیار زیاد است. امروزه کاربرد شبیه‌سازی عددی به سبب افزایش پیچیدگی مسائل طراحی تجهیزات فناوریانه دریایی بسیار محسوس است. هنگام برخورد یک جسم صلب با سرعت بسیار زیاد با سطح آب و نفوذ در آن، غلبه بر نیروی مقاوم هیدرودینامیکی هم در مرحله ابتدایی نفوذ جسم به درون آب و هم در مرحله حرکت جسم در اعماق آب، از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. برخورد اجسام با سطح آب را می‌توان به‌طور کلی بر اساس نحوه تشکیل حفره به دو گروه (ایجاد حفره توسط کشش هوا و تبخیر آب) تقسیم کرد؛ گروه اول شامل، برخورد جسم با سطح آب به صورت سقوط آزاد و یا برخورد جسم با سطح آب با سرعت‌های کم است. این تحلیل معمولاً در طراحی شناورها، پرتابه‌های سرعت پایین و... مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این تحلیل، آب کاملاً تراکم‌ناپذیر و جسم معمولاً صلب فرض می‌شود. با برخورد جسم جامد با سطح آب، مقداری هوا به دنبال جسم وارد آب شده، حفره‌ای به شکل ساعت شنی ایجاد می‌شود (شکل ۱). گروه دوم شامل، برخورد جسم با سطح آب در سرعت‌های زیاد است. این نوع تحلیل، معمولاً برای طراحی پرتابه‌های پرسرعت از اهمیت فراوانی برخوردار است. با افزایش سرعت جسم، آب به صورت یک ماده تراکم‌پذیر رفتار می‌کند. از طرفی تغییر شکل پرتابه در برخورد با سرعت زیاد بیشتر شده، لذا فرض صلب بودن آن همیشه صحیح و مناسب نیست. در این حالت، فشار منفی ایجاد شده در پشت پرتابه، سبب تبخیر آب و ایجاد حفره می‌شود (شکل ۲) [۱].

حرکت یک پرتابه در آب با سرعتی بیش‌تر از ۵۰ متر بر ثانیه منجر به تشکیل حباب‌های بخار روی سطح آن می‌شود. با افزایش سرعت، بر تعداد و اندازه این حباب‌ها افزوده می‌شود. این حباب‌ها از اولین نقطه تماس پرتابه با آب یعنی دماغه شروع شده، در نهایت با پیوستن به یکدیگر به‌طور کامل پرتابه را در بر گرفته و آن را از تماس با آب جدا می‌سازند. این امر، مقاومت هیدرودینامیکی در مقابل حرکت

<sup>1</sup> Supercavitation  
<sup>2</sup> cavitator

سرعتی بیش‌تر از سرعت صوت با سطح آب توسط کریشنر و همکارانش بررسی شد [۱۲].

تروسکات<sup>۱۴</sup> و همکارانش در سال ۲۰۰۹، نشان دادند که پرتابه‌های بالستیکی ضد اژدر هوا به دریا نیازمند ورود پایدار به آب در زوایای کم برخورد هستند [۱۳] و در سال ۲۰۱۳، اطلاعات مربوط به برخورد جسم صلب با شکل‌های متفاوت با سطح آب را جمع‌آوری و ارائه کردند [۱]. در سال ۲۰۱۳ آفاناس‌ایوا<sup>۱۵</sup> و همکارانش، برخورد یک پرتابه با سرعتی حدود ۲۰۰۰ متر بر ثانیه را آزمایش و بررسی کردند. آن‌ها در این آزمایش‌ها متوجه شدند که تا سرعت حدود ۱۰۰۰ متر بر ثانیه پرتابه دچار تغییر شکل پلاستیک شده، اما در سرعت‌های بالاتر این تغییر شکل شدیدتر بوده، حتی گاه منجر به تخریب پرتابه می‌شود. البته جنس پرتابه در نتایج به‌دست آمده مؤثر است [۱۴]. همین آزمایش‌ها در سال ۲۰۱۴ نیز توسط ایشچنکو<sup>۱۶</sup> و همکارانش تا سرعتی معادل ۲۲۰۰ متر بر ثانیه انجام و نتایج مشابهی گزارش شده است. آن‌ها در کنار انجام آزمایش‌ها، با استفاده از اصول مکانیک محیط‌های پیوسته، یک مدل ریاضی برای بررسی تقابل جسم با آب ارائه کردند [۱۵].

در این پژوهش، برای اولین بار تحلیل برخورد زمانمند الاستوپلاستیک یک پرتابه با سطح آب با استفاده از روش کوپل اویلری-لاگرانژی مورد بررسی قرار گرفته، محدوده ایمن زاویه پرتاب محاسبه شده است. در اکثر پژوهش‌های پیشین معمولاً پرتابه صلب فرض شده است. اگرچه فرض صلب بودن پرتابه در سرعت‌های پایین نادرست نیست، اما این فرض با افزایش سرعت، خطای مضاعفی به محاسبات اضافه می‌نماید. در این مقاله برای اولین بار با چنین نگاه جامعی به مسئله برخورد پرتابه با سطح آب و لحاظ کردن انعطاف‌پذیری پرتابه، تحلیل تنش الاستیک و پلاستیک و خرابی پرتابه شبیه‌سازی شده است. علاوه بر آن در این پژوهش اثر تراکم‌پذیری سیال نیز لحاظ شده، حرکت و برخورد پرتابه به صورت شش درجه آزادی شبیه‌سازی شده است.

تاکنون مطالعات فراوانی به‌صورت تجربی، تحلیلی و عددی روی مسئله ورود به آب و مشکلات آن انجام شده، مستندات بسیاری در این زمینه منتشر شده است. اولین تحقیق تجربی در این زمینه، به سال‌های ۱۸۹۷ تا ۱۹۰۰ باز می‌گردد که ورتینگتون<sup>۱</sup> و کول<sup>۲</sup> با استفاده از دوربین‌های عکاسی ابتدایی به بررسی حفره‌های هوایی ناشی از ورود عمودی یک کره به درون آب پرداختند [۳] و بدین ترتیب، تحقیقات علمی در زمینه برخورد جامد-مایع آغاز شد. در مطالعات بعدی نیز مالوک<sup>۳</sup> و بل<sup>۴</sup> برخی توصیفات کیفی را برای شکل حفره و مسیر کره در ورود به آب ارائه کردند [۴]. هرچند که بعدها تحقیقات بیش‌تری در زمینه ورود به آب و میدان جریان اطراف آن توسط دانشمندانی چون بیرخوف<sup>۵</sup> و کی‌وود<sup>۶</sup> [۵]، بیرخوف و آیزاکز<sup>۷</sup> [۶]، بیرخوف و زارانتونلو<sup>۸</sup> [۷]، و آبلسون<sup>۹</sup> [۸] انجام شد، اما اولین پژوهش‌های مدون در حوزه برخورد یک پرتابه به سطح آب توسط می<sup>۱۰</sup> و وودهال<sup>۱۱</sup> در سال ۱۹۴۸ انجام شد [۹]. پس از آن نیز تا سال ۱۹۷۵ برخورد اجسام مختلفی مانند، گوه، موشک و ... با سطح آب توسط می، مورد بررسی قرار گرفت [۱۰].

امروزه مطالعه در حوزه برخورد اجسام پرسرعت با سطح آب، هنوز یکی از مباحث پژوهشی روز است. در برخورد پرتابه‌های پرسرعت با سطح آب، استحکام قسمت‌های مختلف پرتابه از اهمیت خاصی برخوردار است. در سال ۱۹۹۳، ورود پرتابه به درون آب با سرعتی حدود ۱۵۰۰ متر بر ثانیه توسط سربریاکو<sup>۱۲</sup> به ثبت رسید. برخورد پرتابه با سرعتی حدود ۶۰۰ متر بر ثانیه به پوسته یک اژدر و عبور از آن در سال ۱۹۹۵ توسط کریشنر<sup>۱۳</sup> و همکارانش گزارش شده است [۱۱]. همین‌طور در سال ۲۰۰۱، برخورد پرتابه با

<sup>1</sup> Wortington

<sup>2</sup> Cole

<sup>3</sup> Mallock

<sup>4</sup> Bell

<sup>5</sup> Birkhoff

<sup>6</sup> Caywood

<sup>7</sup> Isaacs

<sup>8</sup> Zarantonello

<sup>9</sup> Abelson

<sup>10</sup> May

<sup>11</sup> Woodhull

<sup>12</sup> Serebryakov

<sup>13</sup> Kirschner

<sup>14</sup> Truscott

<sup>15</sup> Afanas'eva

<sup>16</sup> Ishchenko

## ۲- حل مسایل زمان‌مند با استفاده از روش المان

### محدود و کوپل روش‌های اویلرین - لاگرانژین

در مکانیک محیط‌های پیوسته، دو روش اویلری و لاگرانژی برای توصیف حرکت در یک محیط پیوسته ارائه شده است. در روش لاگرانژین شبکه ایجاد شده روی ماده همراه با آن تغییر شکل داده، المان دچار کرنش و اعوجاج می‌شود. این روش اگر چه ساده و سریع است، اما زمانی که تغییر شکل‌ها بزرگ باشد، تغییر شکل شدید المان‌ها مشکلاتی را برای تحلیل به وجود می‌آورد. این مشکلات حتی با افزایش تعداد المان‌ها در محدوده تغییر شکل بزرگ نیز برطرف نمی‌گردد.

حل مسایل با استفاده از شبکه‌بندی لاگرانژین در صورتی که تغییر شکل المان‌ها زیاد نباشد، مقرون به صرفه و دقیق است؛ لذا استفاده از این روش برای شبکه‌بندی جامدات بسیار مرسوم و معقول است، اما اگر تغییر شکل‌ها بزرگ باشد، استفاده از این روش، مشکلات فراوان ناشی از تراکم المان‌ها در یک ناحیه و برخورد المان‌ها با یکدیگر را به دنبال دارد؛ بنابراین در حل مسایلی مانند برهمکنش سیالات و جامدات که تغییر شکل‌های بسیار بزرگ وجود دارد، روش لاگرانژین، دچار تغییر شکل بسیار زیاد شده، دقت خود را از دست می‌دهد. برای این‌گونه مسایل می‌توان از روش شبکه‌بندی مجدد در گام‌های مختلف استفاده نمود، اما این روش نیز دارای مشکلاتی مانند، اتلاف زمانی زیاد است. یکی از روش‌های رفع این مشکل، استفاده از شبکه‌بندی اویلرین است.

در روش اویلرین، حجم خاصی از فضا مورد توجه قرار گرفته که نسبت به چارچوب مرجع ثابت بوده، سیال گذرنده از این حجم مطالعه می‌شود. در این روش، گره‌ها ثابت و ماده در آن‌ها حرکت کرده و یا تغییر شکل داده و نظم شبکه حفظ می‌شود. در روش لاگرانژین، المان‌ها به‌طور کامل از یک ماده تشکیل شده، شرایط مرزی ماده محدود به محدوده المان است، در حالی که المان‌های اویلرین ممکن است به‌طور کامل از یک ماده تشکیل نشده و شامل، چندین ماده و یا فضای خالی باشند؛ بنابراین شرایط مرزی هر ماده اویلرین باید در هر بازه زمانی حل، محاسبه شده و مزر هر ماده مشخص شود. ماده اویلرین می‌تواند با ماده لاگرانژین در تماس باشد. این نوع از تماس به تماس اویلرین-لاگرانژین معروف بوده، در

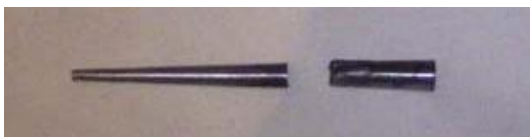
حصول اطمینان از روش تحلیل، نیازمند مقایسه با نتایج مسئله حل شده مشابه است، اما از آن‌جا که مسئله متعارفی برای مقایسه وجود ندارد، به منظور صحت‌گذاری، آزمایش در محیط آزمایشگاه می‌تواند راهگشا باشد، اما در آزمایش‌های انجام شده در اسناد در دسترس نیز تنش در پرتابه محاسبه نشده است. با این وجود در این پژوهش به منظور صحت‌گذاری بر نتایج، مسئله مفروض در چند مرحله تحلیل و با نتایج تئوری و آزمایشگاهی متناسب مقایسه شده است. در شکل‌های ۳ تا ۵، حرکت پرتابه زیرسطحی با سرعت زیاد در آب و ایجاد حفره و نمایی از پرتابه پیش و پس از انجام آزمایش ارائه شده است. شایان ذکر است که در این تحلیل پرتابه با سرعت ۷۰۰ متر بر ثانیه به درون آب پرتاب شده است. مشخصات پرتابه و نتایج آزمایش از مرجع [۱۶] برداشت شده است.



شکل ۳- ایجاد حفره و مسیر ناشی از حرکت پرتابه پرسرعت در آب [۱۶]



شکل ۴- نمایی از پرتابه پیش از انجام آزمایش [۱۶]



شکل ۵- پرتابه‌ی شکسته شده پس از انجام آزمایش [۱۶]

باشد. فرمولاسیون لاگرانژی با تعریف چگالی به صورت نسبت جرم المانی به حجم جاری، پایداری جرم را (به صورت جزئی و ضمنی) اعمال می‌کند. پایداری انرژی نیز در غیاب هدایت حرارتی، به صورت محلی در هر المان (یا حجم کنترل) اعمال می‌شود. نحوه اعمال پایداری ممنتوم روش حل را متفاوت می‌کند. دو روش کلی، تفاضل محدود و المان محدود بدین منظور استفاده می‌شود. در روش المان محدود که این مقاله نیز از آن استفاده کرده است، با استفاده از فرم ضعیف معادلات بیان می‌شود. در این روش معادله (۱)، با استفاده از اصل کار مجازی ارائه می‌شود:

$$\int_V [\rho \ddot{x} \delta x + \sigma : \delta \epsilon] dV = \int_V \rho b \delta x dV + \int_{S_\tau} \tau \delta x dS, \quad (1)$$

در این معادله،  $\rho$  بیانگر چگالی،  $\sigma$  تنش،  $\epsilon$  کرنش،  $\tau$  تنش برشی،  $V$  حجم و  $S$  سطح دامنه است. معادله (۱) را به صورت (۲) می‌توان بازنویسی کرد:

$$\int_V \rho \ddot{x} \delta x dV = F^{\text{ext}} - F^{\text{int}} \quad (2)$$

در این رابطه نیروی داخلی و خارجی به صورت زیر است:

$$F^{\text{ext}} = \int_V \rho b \delta x dV + \int_{S_\tau} \tau \delta x dS \quad (3)$$

$$F^{\text{int}} = \int_V \sigma : \delta \epsilon dV \quad (4)$$

در روش المان محدود، جابجایی، سرعت و شتاب با استفاده از یک سری توابع شکل که روی گره‌ها تشکیل شده، به صورت روابط (۵-۸) بیان می‌شود:

$$x = \sum_A N_A x_A \quad (5)$$

$$\dot{x} = \sum_A N_A \dot{x}_A \quad (6)$$

$$\ddot{x} = \sum_A N_A \ddot{x}_A \quad (7)$$

$$\delta x = \sum_A N_A \delta x_A \quad (8)$$

در این روابط  $N_A$  و  $x_A$  به ترتیب، توابع شکل و جابجایی گره‌ای است. با جای‌گذاری روابط فوق در معادله بالا، معادله (۹) حاصل می‌شود:

$$\int_V \rho \ddot{x} \delta x dV = \int_V \rho \sum_A N_A \ddot{x}_A \sum_B N_B \delta x_B dV = \sum_A \sum_B \left[ \int_V \rho N_A N_B dV \right] \ddot{x}_A \delta x_B \quad (9)$$

تحلیل با روش کوپل اوپلرین- لاگرانژین مورد استفاده قرار می‌گیرد.

در مسئله حاضر، دو جزء سیال و جامد با یکدیگر در ارتباط هستند. سیال دچار تغییر شکل بزرگ می‌شود، پس شبکه‌بندی اوپلرین برای آن مناسب است. از طرفی پرتابه جامد تغییر شکل‌های کوچک (نسبت به سیال) خواهد داشت، لذا بهتر است که شبکه‌بندی لاگرانژین داشته باشد. این نوع تحلیل، اصطلاحاً کوپل اوپلرین- لاگرانژین خوانده می‌شود. احمدزاده و همکارانش در سال ۲۰۱۴ با استفاده از این روش به بررسی برخورد یک کره با سطح آزاد آب در سقوط آزاد پرداخته و نشان دادند که روش کوپل اوپلرین- لاگرانژین در حل چنین مسائلی از توانمندی بالایی برخوردار بوده، نتایج شبیه‌سازی عددی با داده‌های آزمایشگاهی تطابق خوبی دارد [۱۷]. این ابزار قدرتمند این امکان را ایجاد می‌کند که بتوان بسیاری از مسائل چند فازی از جمله تماس سازه با سیال را شبیه‌سازی کرد.

برای پیاده‌سازی این روش، به این ترتیب عمل می‌شود که موقعیت ماده اوپلرین در محیط مش‌بندی با محاسبه کسر حجمی اوپلرین در هر المان مشخص می‌شود. اگر المانی به طور کامل از ماده پر شود، مقدار کسر حجمی اوپلرین آن یک و اگر ماده‌ای در آن قرار نگیرد، کسر حجمی اوپلرین آن صفر است. المان‌های اوپلرین ممکن است شامل، بیش از یک ماده باشد که کسر حجمی اوپلرین هر یک از این مواد در هر بازه زمانی محاسبه می‌شود. اگر مجموع تمام کسر حجمی اوپلرین یک المان کمتر از یک باشد، مقدار باقی مانده به طور خودرو تهی (بدون جرم و استحکام) در نظر گرفته می‌شود. در این روش، در هر بازه زمانی مرز بین هر دو ماده با استفاده از یک صفحه صاف مشخص می‌شود (روش اوپلرین، تنها برای المان‌های سه بعدی به کار برده می‌شود [۱۸]). این فرض یک مرز تقریبی برای هر ماده در نظر می‌گیرد که آن ماده را از ماده‌ای تفکیک می‌کند که در همسایگی آن قرار دارد؛ بنابراین شبکه‌بندی مربوط به روش اوپلرین، باید یک شبکه کاملاً منظم باشد. برای اطلاع بیشتر به [۱۹] مراجعه شود.

## ۲-۱- معادلات حاکم در روش لاگرانژی [۱۹]

معادلات حاکم باید به نحوی نگارش و حل شوند که سه معادله اساسی بقا (پایداری جرم و ممنتوم و انرژی) برقرار

خاصی از دامنه جریان مورد نظر است. سیال‌های ایزوتروپیک لزج خطی با نام سیالات نیوتنی به مراتب از مهم‌ترین سیال‌ها در کاربردهای عملی می‌باشند. سیال نیوتنی با قانون مواد زیر برای تانسور تنش کوشی  $T$  مشخص می‌شود:

$$T_{ij} = \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) - p \delta_{ij} \quad (21)$$

در رابطه (۲۱)،  $v_i$  بردار سرعت نسبت به مرجع مختصات  $x_i$ ، فشار،  $p$ ، لزجت دینامیکی،  $\mu$ ، دلتای کرونگر است. از این رو قوانین پایستگی جرم، مومنوموم و انرژی عبارتند از:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (22)$$

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i v_j)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) \right] - \frac{\partial p}{\partial x_j} + \rho f_i \quad (23)$$

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i e)}{\partial x_i} = \mu \left[ \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right)^2 \right] - p \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \rho q \quad (24)$$

در این روابط  $\rho$  چگالی سیال،  $e$  انرژی داخلی مخصوص و  $f_i$  و  $q$  به ترتیب، نیروهای خارجی و چشمه‌های حرارتی هستند. در معادله بقای انرژی (۲۴) برای بردار جریان حرارتی  $h_i$  از قانون فوریه با رسانایی حرارتی  $\kappa_f$  استفاده شده است. به عبارت دیگر ظرفیت حرارتی ویژه، ثابت فرض شده و از کار انجام شده توسط نیروهای فشاری و اصطکاکی صرف‌نظر شده است.

$$h_i = -\kappa_f \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (25)$$

سیستم معادلات (۲۲) تا (۲۴) با دو معادله حالت به شکل رابطه (۲۶) کامل می‌شوند:

$$p = p(\rho, T) \quad \text{و} \quad e = e(\rho, T) \quad (26)$$

این معادلات خصوصیات ترمودینامیکی سیال را بیان می‌کنند.

در این تحقیق با توجه به ماهیت فیزیکی مسئله، جریان به‌صورت غیرلزج مدل‌سازی شده، از اثرات لزجت صرف‌نظر شده است. چشم‌پوشی از لزجت به‌صورت خودرو، موجب صرف‌نظر کردن از هدایت حرارتی می‌شود؛ هم‌چنین به‌طور معمول از چشمه‌های حرارتی نیز صرف‌نظر می‌شود؛ بنابراین

$$F^{ext} = \int_V \rho b \delta x dV + \int_{S_\tau} \tau \delta x dS \quad (10)$$

$$= \int_V \rho b \sum_B N_B \delta x_B dV + \int_{S_\tau} \tau \sum_B N_B \delta x_B dS \quad (11)$$

$$= \sum_B \left\{ \int_V \rho b N_B dV + \int_{S_\tau} \tau N_B dS \right\} \delta x_B \quad (12)$$

$$\delta \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial x_i}{\partial x_j} + \frac{\partial x_j}{\partial x_i} \right) \quad (13)$$

$$= \sum_B \frac{1}{2} \left( \frac{\partial N_B}{\partial x_j} \delta x_{B_i} + \frac{\partial N_B}{\partial x_i} \delta x_{B_j} \right) \quad (14)$$

$$\delta \epsilon = B \delta x \quad (15)$$

$$F^{int} = \int_V \sigma : \delta \epsilon dV \quad (16)$$

$$= \sum_B \left\{ \int_V B_B \sigma dV \right\} \delta x_B \quad (17)$$

به منظور ساده‌سازی، ماتریس جرم به صورت رابطه (۱۸) تعریف می‌شود:

$$M_{AB}^c = \left[ \int_V \rho N_A N_B dV \right] \quad (18)$$

با ترکیب روابط فوق و استفاده از تعریف ماتریس جرم رابطه (۱۹) به‌دست می‌آید:

$$\sum_B \left\{ \ddot{x}_B - \frac{1}{M_B} \left( \int_V \rho b N_B dV + \int_{S_\tau} \tau N_B dS - \int_V B_B \sigma dV \right) \right\} \delta x_B = 0 \quad (19)$$

از آن‌جا که انتگرال فوق بایستی برای تمامی جایجایی‌های مجازی دلخواه برقرار باشد، پس:

$$\ddot{x}_B = \frac{1}{M_B} \left( \int_V \rho b N_B dV + \int_{S_\tau} \tau N_B dS - \int_V B_B \sigma dV \right) \quad (20)$$

برای قسمت زمان‌مند معادله (۲۰)، می‌توان از روش تفاضل مرکزی<sup>۱</sup> استفاده کرد که روش حل صریح<sup>۲</sup> است.

## ۲-۲- معادلات حاکم در روش اویلرین [۱۹]

معمولا برای توصیف جریان سیال، از روش اویلرین استفاده می‌شود؛ زیرا اصولا اطلاع از خصوصیات جریان در مکان‌های

<sup>۱</sup> CDM  
<sup>۲</sup> Explicit

$$\frac{df(t)}{dt} = \frac{f\left(t + \frac{1}{2}\Delta t\right) - f\left(t - \frac{1}{2}\Delta t\right)}{\Delta t} \quad (30)$$

در این رابطه  $\Delta t$  گام زمانی است.

با استفاده از رابطه (۲۰) می‌توان در زمان  $t$  شتاب را به صورت رابطه (۳۱) محاسبه کرد.

$$\ddot{x}_t = \frac{F_t}{M_B} \quad (31)$$

اکنون با استفاده از رابطه (۳۰) برای سرعت-شتاب، سرعت در زمان  $t + \frac{1}{2}\Delta t$  به صورت رابطه (۳۲) به دست می‌آید:

$$\dot{x}_{t+\frac{1}{2}\Delta t} = \dot{x}_{t-\frac{1}{2}\Delta t} + \ddot{x}_t \Delta t \quad (32)$$

سپس با استفاده از رابطه (۳۰) برای سرعت-جابجایی، جابجایی در زمان  $t + \Delta t$  به دست می‌آید:

$$x_{t+\Delta t} = x_t + \dot{x}_{t+\Delta t} \Delta t \quad (33)$$

پایداری این روش به مقدار گام زمانی و کوچک‌ترین اندازه المان مربوط می‌شود و در صورتی پایداری حاصل می‌شود که رابطه (۳۴) برقرار باشد:

$$\Delta t \leq \frac{l}{c} \quad (34)$$

در این رابطه،  $c$  سرعت صوت و  $l$  کوچک‌ترین طول المان است.

### ۳- مدل‌سازی پرتابه

#### ۳-۱- هندسه پرتابه و تولید شبکه

همان‌طور که گفته شد، در این مقاله برخورد یک پرتابه پرسرعت زیرسطحی به سطح آب و ورود آن به درون آب و تغییر شکل پرتابه به صورت عددی بررسی شده، نتایج حاصل با نتایج تجربی مقایسه شده است. در شکل ۶، نمایی از هندسه پرتابه و در جدول ۱، مشخصات هندسی آن ارائه شده است. شکل پرتابه یک مخروط ناقص به طول ۶۰ میلی‌متر، قطر قاعده ۶ میلی‌متر و قطر رأس ۲ میلی‌متر است که در قسمت انتهایی آن حفره‌ای به طول ۳۰ میلی‌متر و قطر ۳ میلی‌متر در درون پرتابه تعبیه شده است.

برای شبکه‌بندی، از ترکیب المان‌های هرمی و مکعبی شکل استفاده شده است. در این تحلیل، پرتابه به عنوان محیط لاگرانژی در نظر گرفته شده، در شبکه‌بندی آن از المان‌های هرمی استفاده شده است. آب نیز به عنوان محیط اویلری لحاظ شده، با المان‌های مکعبی شبکه‌بندی شده است.

در حالت غیرلزج، معادلات بقا برای جرم، مومنتوم و انرژی عبارتند از:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (27)$$

$$\frac{\partial(\rho v_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i v_j)}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho f_i \quad (28)$$

$$\frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i e)}{\partial x_i} = -p \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \quad (29)$$

این سیستم معادلات، به نام معادلات اویلر شناخته می‌شوند. لازم به ذکر است که با حذف جملات شامل لزجت، یک تغییر اساسی در طبیعت فرمولاسیون ریاضی مسئله ایجاد می‌شود؛ زیرا همه مشتقات مرتبه دوم در معادلات ناپدید شده، این امر منجر به تغییرات در شرایط مرزی قابل قبول می‌شود؛ لذا برای یک سیستم مرتبه اول، شرایط مرزی کمتری مورد نیاز است.

#### ۲-۳- روش حل زمان‌مند صریح

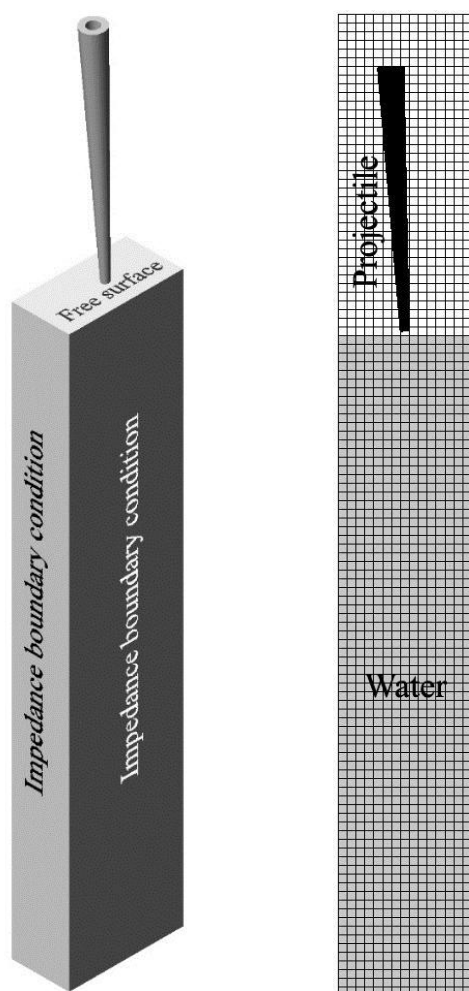
برای حل دینامیکی، دو الگوریتم کلی زمان‌مند به صورت ضمنی<sup>۱</sup> و صریح موجود است. هر دو روش ضمنی و صریح، از روش تفاضل محدود بهره می‌گیرند. در روش ضمنی که از روش نیومارک استفاده می‌شود، لازم است که ماتریس‌ها معکوس شوند، لذا برای اجرا زمان بیشتری مورد نیاز است، اما این روش دقت بالایی داشته و افزون بر آن همگرایی این روش در مسایل خطی تضمین شده است. در روش صریح، نیازی به معکوس کردن ماتریس‌ها نیست، بنابراین سرعت تحلیل به مراتب بالاتر خواهد بود. افزون بر آن برای مسایلی که مش‌بندی و دامنه مسئله بزرگ‌تر باشد و یا هدف، محاسبه مسئله در زمان‌های خیلی کوچک باشد، هزینه محاسباتی روش نیومارک به مراتب بالاتر خواهد بود. همگرایی در روش صریح در صورتی حاصل می‌شود که گام زمانی از اندازه کوچک‌ترین المان تقسیم بر سرعت صوت در ماده کمتر باشد.

روش تفاضل مرکزی، یک روش حل صریح در حوزه زمانی است. این روش، بر اساس تقریب تفاضل محدود استوار است. به این نحو که محاسبه مشتق زمانی یک تابع به صورت رابطه (۳۰) تعریف می‌شود:

<sup>۱</sup> Implicit

پرتابه نیز با سرعت ۷۰۰ متر بر ثانیه با زاویه ۳ درجه نسبت به خط قائم به درون آب پرتاب می‌شود. جنس پرتابه از فولاد ماریچینگ<sup>۲</sup> با چگالی ۷٫۸ گرم بر سانتی‌متر مکعب است [۱۶].

نحوه تعیین مرز آب بر اساس کسر حجمی اوپلرین انجام شده است. در این روش، پس از انجام شبکه‌بندی منظم روی دامنه اوپلری، برای هر المان یک ضریب کسر حجمی در نظر گرفته می‌شود. این ضریب عددی بین صفر تا یک بوده که عدد یک، نمایانگر آن است که کل المان از آب تشکیل شده است.



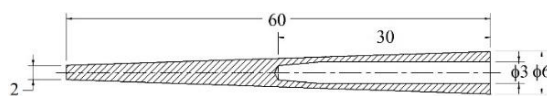
شکل ۸- تقسیم‌بندی دامنه محاسباتی و شرایط مرزی

با توجه به تقارن پرتابه، جهت کاهش حجم محاسباتی، در تحلیل‌های استاتیکی و دینامیکی یک چهارم پرتابه و در تحلیل با روش کوپل لاگرانژی - اوپلری، نیمی از آن مدل‌سازی شده است. در شکل ۷، نمایی از شبکه پرتابه نشان داده شده است.

در شکل ۸، شرایط مرزی در تحلیل با روش کوپل لاگرانژی-اوپلری نشان داده شده است. به منظور کاهش حجم و زمان انجام محاسبات بخشی از سیال انتخاب شده، برخورد پرتابه به آن مورد بررسی قرار گرفته است. از آنجا که سیال یک ماده بی‌نهایت است، طرفین این حجم شرط مرزی مقاومت ظاهری<sup>۱</sup> اعمال شده است. عملکرد این شرط به گونه‌ای است که موج ایجاد شده در سیال از این مرز عبور کرده، تقریباً برگشت داده نمی‌شود. روابط شرط مرزی فوق عبارت است از:

$$dp - \rho c du = 0 \quad (35)$$

$$\frac{dx}{dt} = -c \quad (36)$$

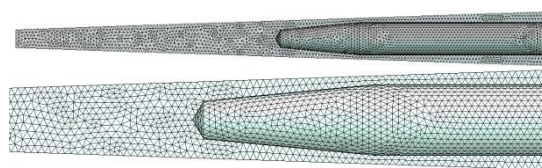


شکل ۶- مقطع طولی پرتابه (ابعاد بر حسب میلی‌متر است)

[۱۶]

جدول ۱- مشخصات هندسی پرتابه [۱۶]

جرم (گرم)	طول (میلی‌متر)	قطر انتها (میلی‌متر)	قطر کویلتور (میلی‌متر)
۵	۶۰	۶	۲



شکل ۷- شبکه‌بندی پرتابه

در این روابط،  $\rho$  چگالی،  $c$  سرعت صوت در سیال،  $p$  فشار،  $u$  سرعت عمود بر موج و  $x$  راستای عمود بر مرز است.

<sup>2</sup> Maraging

<sup>1</sup> Impedance



پلاستیک<sup>۷</sup>، کرنش سختی ایزوتروپیک<sup>۸</sup>، نرخ کرنش سختی<sup>۹</sup>، سختی<sup>۱۰</sup>، نرمی به علت گرمایش آدیاباتیک<sup>۱۱</sup> و آسیب<sup>۱۱</sup> است. تنش فون-مایز معادل در مدل جانسون-کوک، به صورت رابطه (۳۷) بیان می‌شود:

$$\bar{\sigma}(\bar{\epsilon}^{pl}, \dot{\bar{\epsilon}}^{pl}, \hat{T}) = [A + B(\bar{\epsilon}^{pl})^n] \left[ 1 + C \ln \left( \frac{\dot{\bar{\epsilon}}^{pl}}{\dot{\epsilon}_0} \right) \right] [1 - \hat{T}^m] \quad (37)$$

که  $A, B, C, m$  و  $n$  پارامترهای ماده هستند.  $\bar{\epsilon}^{pl}$ ، کرنش پلاستیک معادل؛  $\dot{\bar{\epsilon}}^{pl}$ ، نرخ کرنش پلاستیک معادل؛  $\dot{\epsilon}_0$ ، نرخ کرنش مرجع و  $\hat{T}$  دمای بی‌بعد است که به صورت رابطه (۳۸) تعریف می‌شود:

$$\hat{T} = (T - T_0) / (T_{melt} - T_0) \quad T_0 \leq T \leq T_{melt} \quad (38)$$

که در آن  $T$  دمای فعلی؛  $T_{melt}$  دمای نقطه ذوب و  $T_0$  دمای اتاق است. مدل شکست ارائه شده توسط جانسون-کوک، اثر تنش سه محوری، نرخ کرنش و دما در کرنش شکست معادل را در نظر می‌گیرد. کرنش شکست معادل به صورت رابطه (۳۹) بیان می‌شود:

$$\bar{\epsilon}_f^{pl} \left( \frac{\sigma_m}{\bar{\sigma}}, \dot{\bar{\epsilon}}^{pl}, \hat{T} \right) = \left[ D_1 + D_2 \exp \left( D_3 \frac{\sigma_m}{\bar{\sigma}} \right) \right] \left[ 1 + D_4 \ln \left( \frac{\dot{\bar{\epsilon}}^{pl}}{\dot{\epsilon}_0} \right) \right] [1 - D_5 \hat{T}] \quad (39)$$

که  $D_1$  تا  $D_5$  پارامترهای ماده هستند.  $\sigma_m / \bar{\sigma}$  نرخ تنش سه محوری و  $\sigma_m$  نیز تنش اصلی است. در جدول ۲، ضرایب تئوری جانسون-کوک برای فولاد و هم‌چنین پارامترهای مورد نیاز دیگر این ماده بیان شده است.

### ۳-۳-۳ مدل‌سازی جنس سیال

وقتی فشار اعمالی بر آب زیاد باشد، آب از خود رفتار تراکم‌پذیر نشان می‌دهد. از طرفی وقتی فشار آب مایع کمتر از مقدار فشار بخار شود، آب تبخیر شده و تغییر فاز می‌دهد؛ لذا مدل‌سازی آب باید به نحوی انجام شود که این خصوصیات لحاظ گردند. پس مدل مورد استفاده برای آب بایستی خواص زیر را برآورده نماید:

### ۳-۲-۲ مدل‌سازی جنس پرتابه

از آن‌جا که در این شبیه‌سازی تحلیل پلاستیسته و شکست پرتابه در برخورد با آب مد نظر است، لذا برای پرتابه فولادی باید مدلی انتخاب شود که افزون بر خصوصیات فیزیکی مرسوم یک جامد مانند چگالی، حداقل خصوصیات زیر را نیز ارضاء نماید.

الف) جامد الاستیک ایزوتروپیک:

مواد ایزوتروپیک، موادی هستند که خواص آن‌ها در یک نقطه در تمام جهات یکسان است؛ لذا رابطه بین تنش و کرنش در این مواد تنها وابسته به دو ثابت مستقل مهندسی است. در تمام مقالات بررسی شده در تاریخچه (طبق اطلاع نویسندگان) پرتابه به صورت یک جامد صلب<sup>۱</sup> فرض شده است، اما مطلوب است که در این مقاله، پرتابه انعطاف‌پذیر در نظر گرفته شود. لذا خصوصیات جامد الاستیک ایزوتروپیک به پرتابه تخصیص داده می‌شود.

ب) رفتار غیرخطی و سخت شوندگی:

وقتی به جسم جامد ایزوتروپیک به صورت محدود نیرو اعمال شود، به صورت الاستیک تغییر شکل می‌دهد. در این محدوده، رابطه خطی بین تنش و کرنش برقرار است؛ اما اگر نیروی اعمالی از یک حد خاص بزرگ‌تر باشد، رابطه تنش و کرنش از حالت خطی خارج می‌شود و تغییر شکل به صورت دائمی در جسم ایجاد می‌شود.

ج) خرابی<sup>۲</sup>:

در صورتی که تنش درون جسم افزایش یابد، جسم جامد دچار خرابی می‌شود. در این مقاله، از تئوری جانسون-کوک<sup>۳</sup> به منظور مدل‌سازی رفتار پلاستیک و خرابی فولاد استفاده شده است.

- تئوری جانسون-کوک [۱۸]

رفتار فولاد مورد استفاده در این تحقیق، از طریق تئوری الاستو-ویسکوپلاستیک<sup>۴</sup> جانسون-کوک مدل‌سازی می‌شود. این تئوری شامل، اثر ترموالاستیک خطی<sup>۵</sup>، تسلیم<sup>۶</sup>، شار

<sup>1</sup> Rigid

<sup>2</sup> Failure

<sup>3</sup> Johnson-Cook

<sup>4</sup> Elasto-Viscoplastic

<sup>5</sup> Linear Thermo-Elasticity

<sup>6</sup> Yielding

<sup>7</sup> Plastic flow

<sup>8</sup> Isotropic strain hardening

<sup>9</sup> Strain rate hardening

<sup>10</sup> Softening due to adiabatic heating

<sup>11</sup> Damage

جدول ۲- پارامترهای بیان کننده فولاد در مدل

جانسون-کوک [۱۸]

پارامتر	مقدار
مدول یانگ (E - N/mm <sup>2</sup> )	2×10 <sup>5</sup>
ضریب پواسون (ν)	0.33
چگالی (ρ - kg/m <sup>3</sup> )	7850
حد تسلیم (A - N/mm <sup>2</sup> )	490
ضریب B (N/mm <sup>2</sup> )	383
ضریب n	0.45
نرخ کرنش مرجع (ε <sub>0</sub> - S <sup>-1</sup> )	5×10 <sup>-4</sup>
ضریب C	0.0114
ضریب m	0.94
دمای ذوب (T <sub>melt</sub> - K)	1800
دمای مرجع (T <sub>0</sub> - K)	293
ضریب D <sub>1</sub>	0.0705
ضریب D <sub>2</sub>	1.732
ضریب D <sub>3</sub>	-0.54
ضریب D <sub>4</sub>	0.0097
ضریب D <sub>5</sub>	0

$p$  تنش فشاری است که در جهت تراکم، مثبت تعریف می‌شود.  $p_{bv}$ ، تنش فشاری مربوط به لزجت حجمی،  $S$  تانسور تنش فرعی،  $\dot{\epsilon}$  بخش فرعی نرخ کرنش و  $\dot{Q}$  نرخ گرما بر واحد حجم است. فرض می‌شود که معادله حالت برای فشار به عنوان تابعی از چگالی  $\rho$  و انرژی داخلی بر واحد جرم  $E_m$  باشد.

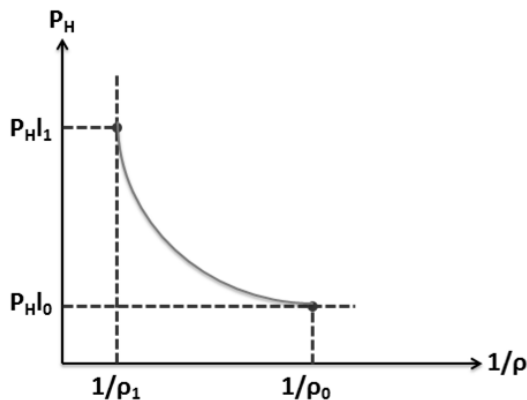
$$p = f(\rho, E_m) \quad (41)$$

انرژی داخلی را می‌توان از معادله فوق حذف کرد تا رابطه‌ای بین  $p$  و  $V$  (که  $V$  حجم اولیه است) حاصل شود یا به صورت معادل رابطه‌ای بین  $p$  و  $1/\rho$  بدست آید. معادله مذکور، به جنسی که با معادله حالت تعریف شده، به صورت یکتا وابسته است.

این رابطه یکتا، به نام منحنی هوگونیوت شناخته می‌شود و بیانگر مکان هندسی حالت‌های  $p$ - $V$  قابل حصول در پشت یک شوک است (شکل ۹). فشار هوگونیوت،  $p_H$ ، تنها تابعی از چگالی است و عموماً از ترسیم داده‌های تجربی حاصل می‌شود. معادله حالت به صورت خطی در نظر گرفته شده و می‌تواند به شکل رابطه (۴۲) نوشته شود:

$$p = f + gE_m \quad (42)$$

$f(\rho)$  و  $g(\rho)$ ، تنها تابعی از چگالی هستند و وابسته به معادله خاصی از مدل حالت هستند.



شکل ۹- بیان شماتیکی از منحنی هوگونیوت

- معادله حالت می-گرانسین [۱۷]

معادله حالت می-گرانسین برای انرژی داخلی خطی است. فرم بسیار معمول آن به شکل رابطه (۴۳) است.

$$p - p_H = \Gamma \rho (E_m - E_H) \quad (43)$$

- تراکم‌پذیری سیال تحت فشار بالا؛
- ایجاد حفره، ناشی از کاهش فشار.

در این تحلیل، به منظور شبیه‌سازی رفتار تراکم‌پذیری آب، مدلی بر مبنای معادله حالت چند جمله‌ای به کار گرفته شده، به منظور شبیه‌سازی پدیده کاویتاسیون، از مدلی ساده بر اساس کاهش فشار استفاده شده است. به این صورت که وقتی فشار از حد معینی کوچک‌تر باشد، خرابی یا به عبارتی کویتی در ماده رخ می‌دهد. این معیار با نام "بیش‌ترین فشار کششی" [۱۸] شناخته می‌شود.

- معادله انرژی و منحنی هوگونیوت [۱۷]

معادله بقای انرژی برابر با افزایش انرژی داخلی بر واحد جرم  $E_m$  به نرخ کار ایجاد شده ناشی از تنش‌ها و نرخ افزایش دما است. در غیاب هدایت گرمایی، معادله انرژی را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\rho \frac{\partial E_m}{\partial t} = (p - p_{bv}) \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} + S : \dot{\epsilon} + \rho \dot{Q} \quad (40)$$

<sup>1</sup> Maximum Tensile Pressure

مدول حجمی به عنوان یک پارامتر جریمه برای قید غیر قابل تراکم عمل می‌کند، توسط معادله حالت کنترل می‌شود.

#### ۴- نتایج و بحث

در این پژوهش، برخورد پرتابه پرسرعت با سطح آب به صورت الاستوپلاستیک با استفاده از روش کوپل لاگرانژی-اویلری به صورت عددی تحلیل شده است. به منظور اطمینان از نتایج حاصل و روش تحلیل، شبیه‌سازی در سه گام انجام شده است؛ تحلیل تنش استاتیکی، دینامیکی و همچنین تحلیل برخورد پرتابه با درجات آزادی کامل با سطح آب به روش اختیاری لاگرانژین-اویلری. در آنالیز آخر، اثرات تراکم‌پذیری سیال و کاویتاسیون نیز لحاظ شده است. به منظور صحت‌گذاری نتایج، انتشار موج تنش ایجاد شده در پرتابه ناشی از برخورد با آب با نتایج تحلیلی مقایسه شده است؛ همچنین مقدار بیشینه تنش و مکان/مسیر شکست در پرتابه با داده‌های آزمایشگاهی مقایسه شده است.

#### ۴-۱- شبیه‌سازی استاتیکی

در اولین گام به منظور دستیابی به یک تخمین اولیه، تحلیل تنش استاتیکی پرتابه انجام شده است. در این شبیه‌سازی، اثرات ضربه و سیال در نظر گرفته نشده است. شرایط مرزی شامل، فشار ۲۴۵ مگاپاسکال (معادل فشار سکون متناظر با سرعت ۷۰۰ متر برثانیه) و قید ثابت که به ترتیب به نوک و انتهای پرتابه اعمال شده است (شکل ۱۰).



شکل ۱۰- شرایط مرزی در شبیه‌سازی استاتیکی

به منظور بررسی استقلال پاسخ از شبکه، میزان تغییرات کرنش پرتابه بر حسب تغییرات تعداد المان بررسی شده، نتایج در شکل ۱۱ نشان داده شده است. لازم به ذکر است که مش‌بندی روی مدل یک چهارم پرتابه انجام شده است. پس از انتخاب شبکه‌بندی مناسب و اختصاص جنس فولاد ماریچینگ به مدل، تنش معادل در پرتابه محاسبه و در شکل ۱۲ نشان داده شده است. همانگونه که مشاهده می‌شود، بیشینه تنش در نوک پرتابه و محل تغییر مقطع دوم

که  $E_H$  و  $p_H$  به ترتیب، فشار هوگونیوت و انرژی مخصوص بر واحد جرم بوده، تنها تابعی وابسته به چگالی می‌باشند.  $\Gamma$  نیز نسبت گرانشین است که چنین تعریف می‌شود:

$$\Gamma = \Gamma_0 \frac{\rho_0}{\rho} \quad (44)$$

که در آن  $\Gamma_0$  ثابت ماده و  $\rho_0$  دانسیته مرجع است. ارتباط انرژی هوگونیوت،  $E_H$  و فشار هوگونیوت عبارتست از:

$$E_H = \frac{\rho H \eta}{2\rho_0} \quad (45)$$

که  $\eta = 1 - \rho_0/\rho$  کرنش تراکمی حجمی اسمی است. با حذف  $\Gamma$  و  $E_H$  از رابطه بالا، رابطه (۴۶) حاصل می‌شود:

$$p = p_H \left(1 - \frac{\Gamma_0 \eta}{2}\right) + \Gamma_0 \rho_0 E_m \quad (46)$$

معادله حالت و معادله انرژی معادلات کوپل شده‌ای برای فشار و انرژی داخلی ارائه می‌دهند. اکنون می‌توان با استفاده از روش صریح به طور همزمان هر یک از این معادلات را در هر نقطه جسم حل کرد.

- فرم هوگونیوت خطی  $U_S - U_P$

رابطه معمول برای داده‌های هوگونیوت چنین است:

$$p_H = \frac{\rho_0 c_0^2 \eta}{(1 - s\eta)^2} \quad (47)$$

که  $c_0$  و  $s$ ، رابطه خطی بین سرعت خطی شوک  $U_S$  و سرعت مخصوص  $U_P$  را توسط رابطه (۴۸) تعریف می‌کنند:

$$U_S = c_0 + sU_P \quad (48)$$

با فرضیات فوق، فرم هوگونیوت خطی  $U_S - U_P$  چنین نوشته می‌شود:

$$p = \frac{\rho_0 c_0^2 \eta}{(1 - s\eta)^2} \left(1 - \frac{\Gamma_0 \eta}{2}\right) + \Gamma_0 \rho_0 E_m \quad (49)$$

که  $\rho_0 c_0^2$  معادل ضریب حجمی الاستیک، تحت یک کرنش اسمی کوچک است. مخرج معادله (۴۷) نباید صفر شود؛ بنابراین یک مقدار حدی برای  $\rho$  و  $\eta$  به صورت روابط (۵۰)

(۵۱) تعریف می‌شود:

$$\eta_{lim} = \frac{1}{s} \quad (50)$$

$$\rho_{lim} = \frac{s\rho_0}{s-1} \quad (51)$$

در این محدوده یک حداقل کشش وجود دارد که سبب می‌شود، سرعت‌های صوت منفی برای ماده محاسبه شود. معادله حالت خطی  $U_S - U_P$  می‌تواند برای مدل‌سازی جریان‌های آرام غیر قابل تراکم لزج و غیر لزج با معادلات حرکت ناویر استوکس استفاده شود. پاسخ حجمی، زمانیکه

پس از انجام تحلیل، تنش به صورت زمان‌مند محاسبه شده و در شکل ۱۳، حرکت موج تنش در پرتابه تحت بار ضربه به صورت زمان‌مند نشان داده شده است. همانطور که در شکل ۱۳ مشاهده می‌شود، بیشینه تنش ۴۵۴/۳ مگاپاسکال بوده که از میزان استاتیکی آن بسیار بزرگ‌تر است. ضریب ضربه حاصل از این تحلیل، حدود ۱/۸۵۴ برآورد می‌شود. از طرفی ضریب ضربه حاصل از نتایج تجربی ارائه شده در مرجع [۲۰] نیز برابر با ۱/۸۷ است؛ لذا طبق ضریب بار تجربی بیش‌ترین تنش برابر با ۴۵۸/۱۵ مگاپاسکال خواهد بود. در جدول ۴، نتایج حاصل از شبیه‌سازی عددی با نتایج تجربی [۲۰] مقایسه شده است. همانگونه که مشاهده می‌شود، میزان خطا کمتر از یک درصد است که این خود بر دقت مناسب شبیه‌سازی عددی دلالت دارد. سرعت موج تنش الاستیک [۲۱] به صورت رابطه (۵۲) قابل محاسبه است:

$$C = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (52)$$

پس مکان موج تنش در زمان‌های مختلف برابر است با:

$$x = C \cdot t \quad (53)$$

در شکل ۱۴، مکان موج تنش حاصل از شبیه‌سازی عددی و تئوری در زمان‌های مختلف با یکدیگر مقایسه شده، میزان خطا نیز محاسبه و در جدول ۵ ارائه شده است.

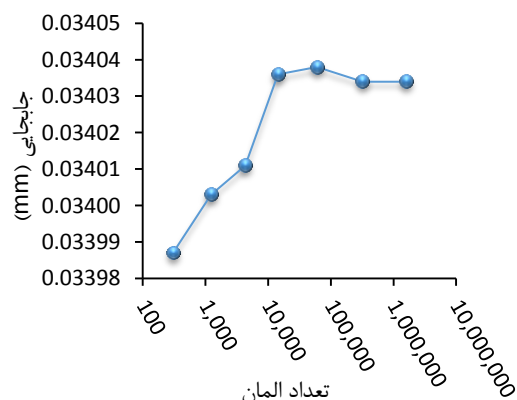
#### ۳-۴- تحلیل برخورد پرتابه با سطح آب با روش کوپل لاگرانژی-اویلری

پس از تحلیل تنش استاتیکی و دینامیکی پرتابه، به منظور شبیه‌سازی هرچه صحیح‌تر فرآیند برخورد پرتابه با سطح آب، آنالیز عددی با استفاده از روش کوپل اویلری-لاگرانژی انجام شده است. در این تحلیل، آب به صورت یک جسم تراکم‌پذیر مدل شده، هم‌چنین اثرات تشکیل حفره در آب نیز لحاظ شده است. پرتابه نیز به صورت یک جسم شش درجه آزادی الاستوپلاستیک با سطح آب برخورد نموده است. پس از تخصیص جنس مناسب، پرتابه به صورت لاگرانژی و آب به صورت اویلری شبکه‌بندی شده است. لازم به ذکر است که طبق مرجع [۱۶]، زاویه پرتاب حدود ۳ درجه نسبت به خط قائم لحاظ شده است. پس از انجام شبیه‌سازی، مشخص شد که در این شبیه‌سازی بیش‌ترین تنش تا پیش از رسیدن

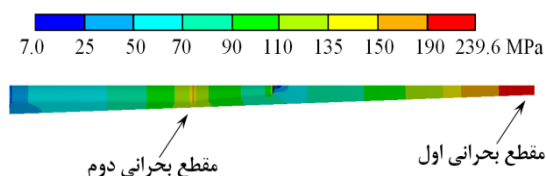
حاصل شده است. پس می‌توان انتظار داشت که در تحلیل دینامیکی یکی از این نقاط، بحرانی باشد.

#### ۲-۴- شبیه‌سازی دینامیکی ضربه

از آن‌جا که فرآیند برخورد پرتابه با سطح آب، در مدت زمان بسیار کوتاهی همراه با اعمال فشار نسبتاً زیادی در نوک پرتابه انجام می‌شود، لازم است که در شبیه‌سازی عددی نیز، بار به‌صورت ناگهانی و با یک ضربه به نوک پرتابه اعمال شود؛ این در حالی است که در تحلیل استاتیکی، بارگذاری به صورت استاتیکی اعمال گردید. لذا برای بررسی دقیق‌تر این پدیده، تحلیل الاستوپلاستیک زمان‌مند پرتابه تحت بار ضربه در نوک آن، مورد بررسی قرار گرفته است.

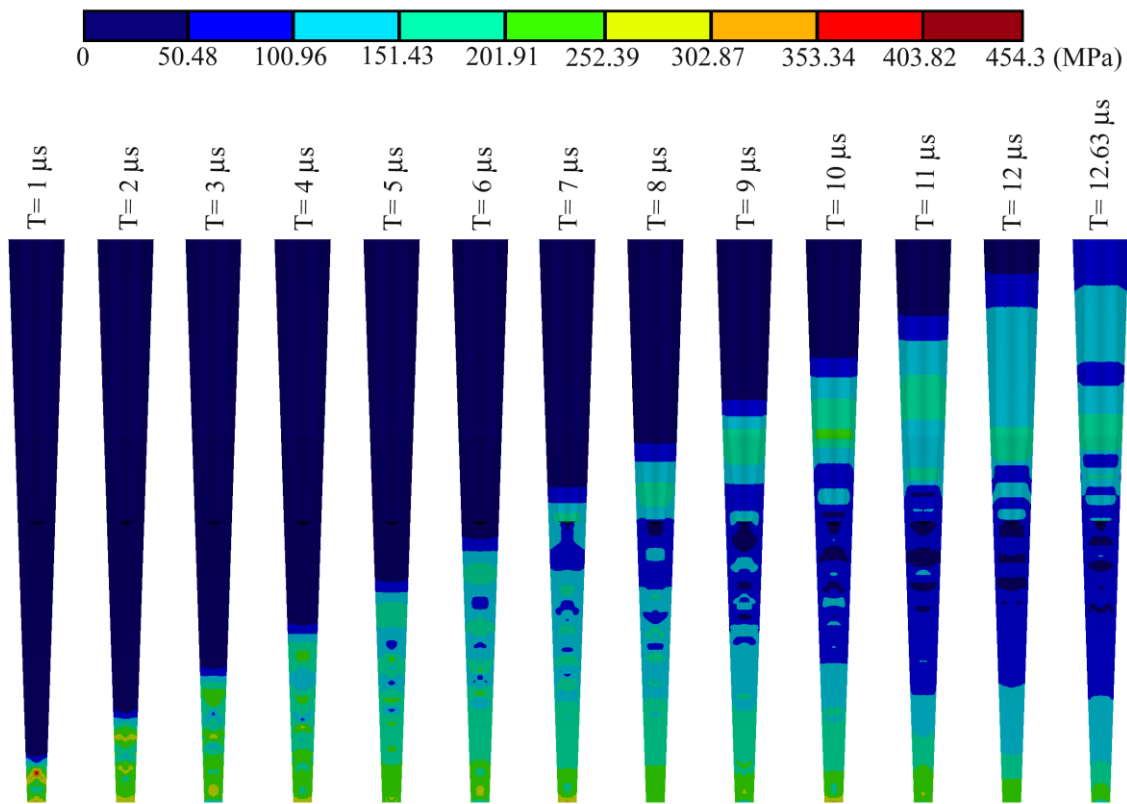


شکل ۱۱- میزان تغییرات جایجایی پرتابه بر حسب تعداد المان‌های مختلف



شکل ۱۲- تنش معادل استاتیکی در پرتابه

در این پژوهش، برای انجام تحلیل دینامیکی، از روش صریح استفاده شده است. شرایط مرزی، شبکه‌بندی و جنس، مشابه حالت استاتیکی در نظر گرفته شده است. با این تفاوت که در این شبیه‌سازی بار به صورت ضربه اعمال و اثرات حرکت موج تنش و ضربه بار نیز لحاظ شده است.



شکل ۱۳- انتشار موج تنش در پرتابه تحت بار ضربه

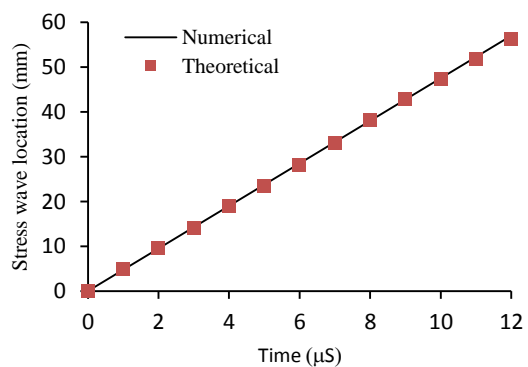
جدول ۵- درصد خطای نتایج حاصل از روش عددی در

مقایسه با روش تئوری	
خطا (درصد)	زمان (میکرو ثانیه)
1.05	1
0.21	2
0.70	3
0.74	4
0.97	5
1.54	6
0.63	7
0.58	8
0.16	9
0.40	10
0.82	11
1.30	12
0.003	12.63

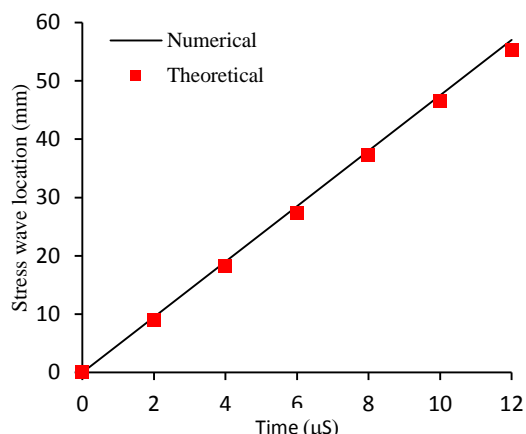
موج تنش به انتهای پرتابه برابر با ۶۶۱ مگاپاسکال است. در شکل ۱۵، انتشار موج تنش در پرتابه حاصل از شبیه‌سازی عددی و روابط تئوری نشان داده شده، در جدول ۶ میزان خطای روش عددی در مقایسه با روش تئوری ارائه شده

جدول ۴- مقایسه نتایج عددی و تجربی

روش تجربی [۲۰]	روش عددی	خطا (%)
۱/۸۷۰	۱/۸۵۴	۱/۸۴۷
۴۵۸/۱۵۰	۴۵۴/۲۷۰	۱/۸۴۷



شکل ۱۴- مقایسه مکان موج تنش حاصل از روش‌های تئوری و عددی



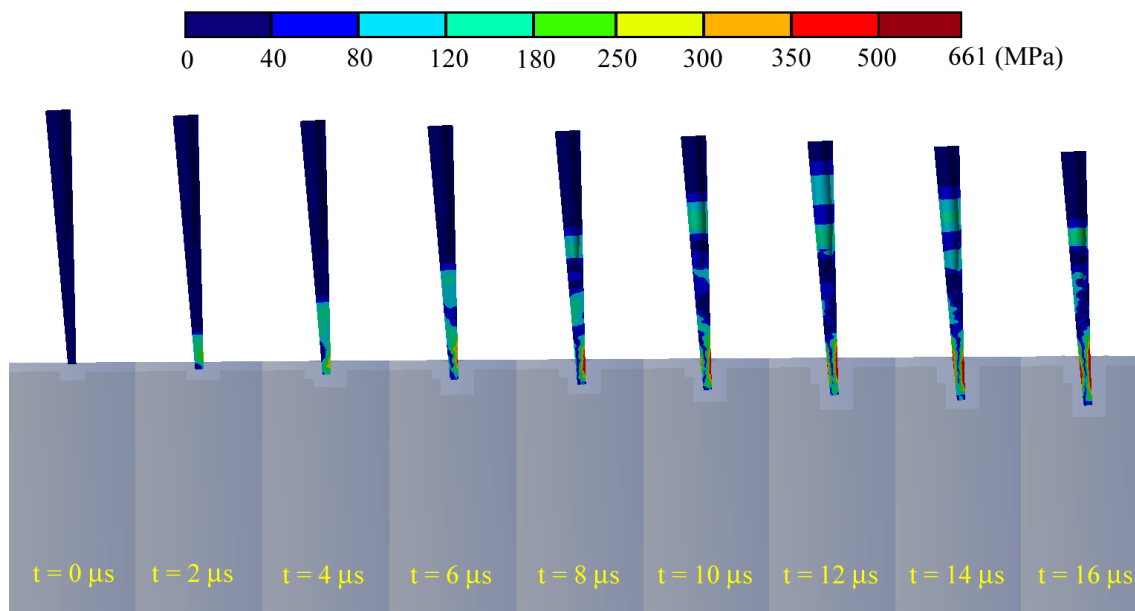
شکل ۱۵- مقایسه مکان موج تنش حاصل از روش‌های تئوری و عددی در روش کوپل اویلری-لاگرانژی

جدول ۶- مقایسه مکان موج تنش با استفاده از روش‌های تئوری و عددی در روش کوپل اویلری-لاگرانژی

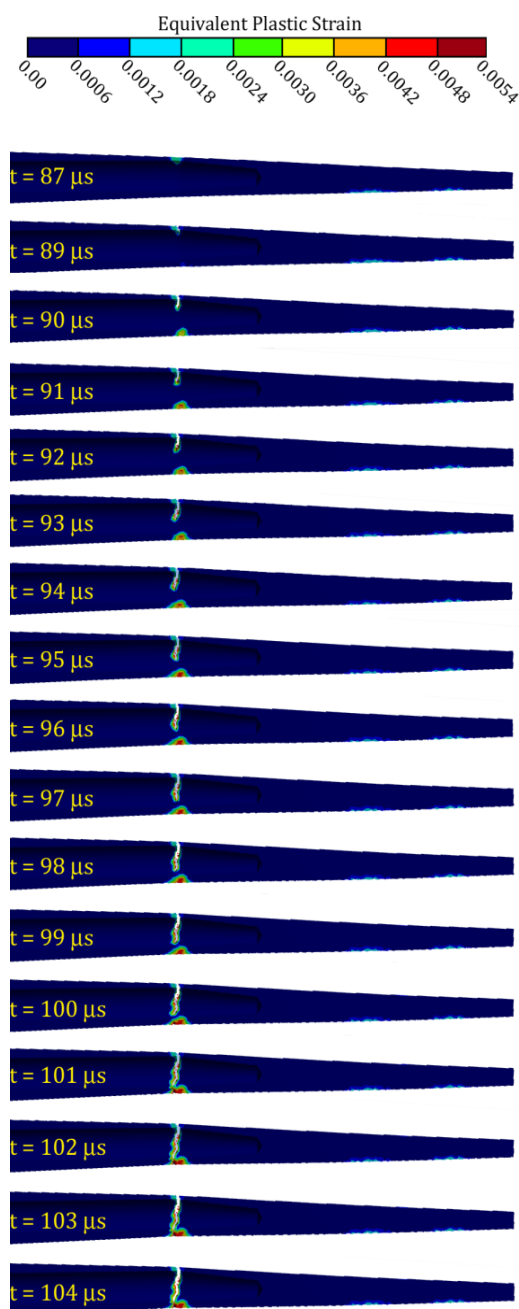
خطا (درصد)	زمان (میکرو ثانیه)
4.98	2
3.88	4
4.28	6
1.99	8
2.04	10
2.99	12

است. لازم به ذکر است که انتشار موج تنش تا زمان رسیدن به انتهای پرتابه، مورد بررسی قرار گرفته است. همانطور که مشاهده می‌شود، بیشینه خطا کمتر از ۵٪ بوده که میزان قابل قبولی است. در شکل ۱۶، انتشار موج تنش به صورت زمان‌مند در پرتابه نشان داده شده است. همان طور که مشاهده می‌شود، زمانیکه موج تنش به انتهای پرتابه می‌رسد، به سمت نوک پرتابه منعکس می‌شود. این امر موجب تشدید موج‌های تنش بعدی شده و در نواحی تغییر مقطع شدید، تمرکز تنش شدید ایجاد می‌کند. همان طور که در تحلیل استاتیکی نیز مشخص شد، در این پرتابه نقطه تغییر سطح مقطع دوم، یکی از نقاط بحرانی است. با بازگشت موج تنش، در این نقطه تمرکز تنش شدید ایجاد شده، این نقطه بسیار مستعد شکست است.

در شکل ۱۷، تحلیل برخورد پرتابه با سطح آب با روش کوپل اویلری-لاگرانژی انجام شده، کرنش پلاستیک تجمیع در پرتابه بر حسب زمان رسم شده است. در این شکل نحوه تجمیع کرنش پلاستیک، ایجاد و رشد ناحیه خرابی در پرتابه نشان داده شده است. شروع خرابی از محل تمرکز تنش پیش‌بینی شده در تحلیل استاتیک شروع شده، تا شکست کامل پرتابه ادامه پیدا کرده است.



شکل ۱۶- حرکت موج تنش در پرتابه ناشی از ورود آن به درون آب



شکل ۱۷- میزان کرنش پلاستیک و نحوه شکست پرتابه



شکل ۱۸- مقایسه مکان شکست پرتابه حاصل از نتایج آزمایشگاهی [۱۶] و شبیه‌سازی عددی

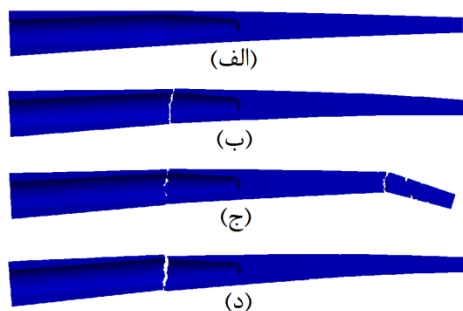
در شکل ۱۸، به منظور مقایسه با نتایج آزمایشگاهی، پرتابه شکسته شده در کنار نتایج حاصل از حل عددی ارائه شده است. این شکل، بیانگر تطابق خوب بین نتایج حاصل از حل عددی و نتایج آزمایشگاهی است. با توجه به شکست پرتابه در تحلیل عددی می‌توان گفت که طراحی اولیه پرتابه فوق مناسب نبوده، در روند طراحی تأثیر زاویه برخورد با سطح آب لحاظ نشده است.

برای تعیین محدوده ایمن زاویه پرتاب این پرتابه، تحلیل عددی فوق در زوایای مختلف ۰، ۰/۵، ۱، ۱/۵، ۲ و ۳ درجه انجام و نتایج آن در شکل ۱۹ ارائه شده است. همانطور که مشاهده می‌شود تا زاویه ۰/۵° پرتابه هنگام برخورد با سطح آب دچار شکست نشده، از زاویه ۱° به بعد پرتابه فوق دچار شکست می‌شود.

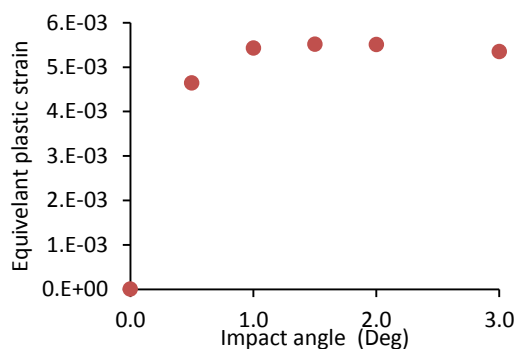
شایان ذکر است که وقتی در یک نقطه از پرتابه تنش به حد تسلیم برسد، پرتابه در آن نقطه وارد ناحیه پلاستیک می‌شود. با تجمع میزان کرنش پلاستیک، خرابی در آن ناحیه ایجاد شده و با رشد ناحیه خرابی، شکست رخ می‌دهد، لذا دلیل شکست، تجمع کرنش پلاستیک ایجاد شده در پرتابه است. اگرچه در زوایای صفر و نیم درجه تنش به حد تسلیم رسیده و در پرتابه کرنش پلاستیک ایجاد شده است، اما به دلیل اینکه کرنش پلاستیک تجمع شده به حد خرابی نرسیده است، در این زوایا شکست مشاهده نمی‌شود.

در شکل ۲۰، میزان کرنش معادل و در شکل ۲۱، بیشترین تنش معادل برحسب زوایای پرتاب برای پرتابه فوق ترسیم شده است.

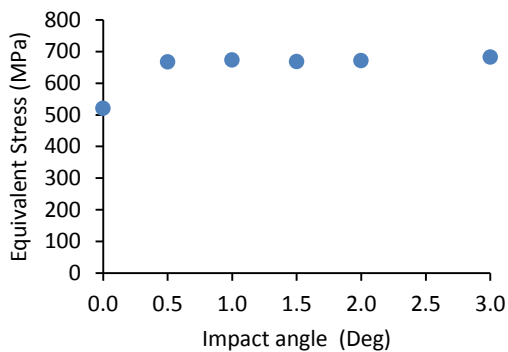
همانطور که از این دو شکل برمی‌آید، کوچکترین انحرافی در زاویه پرتاب نسبت به خط عمود، افزایش شدید تنش و کرنش پلاستیک را به دنبال خواهد داشت؛ بنابراین انحراف پرتابه از خط عمود هنگام برخورد با سطح آب، نقش بسیار مهمی در تغییر شکل پرتابه و یا شکست آن ایفا می‌کند. از طرفی وابستگی شدید پرتابه به زاویه پرتاب، بیانگر ضعف طراحی پرتابه است؛ زیرا در عمل تقریباً غیرممکن است که اینگونه پرتابه‌ها بصورت عمود با سطح آب برخورد کنند. لذا طراح باید تأثیر زاویه برخورد با سطح آب را نیز لحاظ نماید. از اینرو پرتابه فوق در صورتی قابل استفاده است که به صورت عمود بر سطح آب با ترانس کمتر از نیم درجه مورد استفاده قرار گیرد.



شکل ۱۹- وضعیت پرتابه در زوایای پرتاب مختلف در هنگام برخورد با سطح آب؛ الف)  $0.5^\circ$ ، ب)  $1^\circ$ ، ج)  $2^\circ$  و د)  $3^\circ$



شکل ۲۰- تغییرات کرنش معادل بر حسب زاویه برخورد



شکل ۲۱- تغییرات بیشترین تنش معادل بر حسب زاویه برخورد

#### ۶- علائم و نشانه‌ها

سرعت صوت	$c$
انرژی داخلی بر واحد جرم	$E_m$
انرژی هوگونیوت	$E_H$
انرژی داخلی مخصوص	$e$
بخش فرعی نرخ کرنش	$\dot{e}$

در نهایت می‌توان گفت که انجام تحلیل الاستوپلاستیک برخورد پرتابه‌های زیرسطحی با سطح آب، یکی از مهمترین آنالیزها در روند طراحی پرتابه‌های پرسرعت زیرسطحی است؛ زیرا با انجام این تحلیل اطمینان از عملکرد پرتابه در زمان برخورد با سطح آب حاصل خواهد شد.

#### ۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله، برای اولین بار تحلیل برخورد زمان‌مند الاستوپلاستیک یک پرتابه با سطح آب با استفاده از روش کوپل اویلری-لاگرانژی، مورد بررسی قرار گرفته است. ابتدا تحلیل تنش استاتیکی پرتابه انجام و نتایج حاصله با نتایج آزمایشگاهی مقایسه شده است. سپس تحلیل تنش دینامیکی پرتابه تحت بار ضربه با استفاده از روش صریح انجام و نتایج انتشار موج تنش درون پرتابه با پاسخ تحلیلی مقایسه شده است. در نهایت، با استفاده از روش کوپل اویلری-لاگرانژی، تحلیل برخورد شش درجه آزادی پرتابه سه بعدی با سطح آب انجام شده است. در این آنالیز، پرتابه به صورت یک جامد الاستوپلاستیک به صورت لاگرانژی شبکه‌بندی شده، شبکه‌بندی سیال به صورت لاگرانژی بوده است و اثرات تراکم‌پذیری و ایجاد حفره در سیال نیز لحاظ گردیده است.

پس از انجام شبیه‌سازی، انتشار موج تنش ایجاد شده در پرتابه ناشی از برخورد با آب، با نتایج تحلیلی مقایسه شده، بیشترین خطا کمتر از ۵٪ است. از طرف دیگر، مکان و نحوه شکست پرتابه در مقایسه با نتایج آزمایشگاهی به خوبی شبیه‌سازی شده است. با تحلیل زوایای مختلف پرتاب، محدوده ایمن زاویه پرتاب برای پرتابه مذکور حدود  $\pm 0.5^\circ$  تعیین گردید. تطابق خوب بین مقادیر پیش‌بینی شده و آزمایشگاهی/تحلیلی نشان دهنده، دقت این الگوریتم عددی در انجام تحلیل الاستوپلاستیک برخورد اینگونه پرتابه‌ها با سطح آب است.

در کل نتایج حاصل از این تحقیق، بر طراحی نامناسب پرتابه فوق و لحاظ نکردن تأثیر زاویه برخورد پرتابه با سطح آب در روند طراحی آن، دلالت دارد. از نتایج این تحقیق، می‌توان در طراحی پرتابه‌های پرسرعت زیرسطحی استفاده نمود. همچنین این تحقیق نشان داد که روش حاضر برای تحلیل پرتابه‌های پرسرعت در برخورد و حرکت در زیر آب بسیار مناسب است.



## ۷- مراجع

- |  |                                |                             |
|--|--------------------------------|-----------------------------|
|  | نیروهای خارجی                  | $F^{ext}$                   |
|  | نیروهای داخلی                  | $F^{int}$                   |
|  | نیروهای خارجی                  | $f_i$                       |
|  | جریان حرارتی                   | $h_i$                       |
|  | کوچکترین طول المان             | $l$                         |
|  | ماتریس جرم                     | $M_{AB}^c$                  |
|  | توابع شکل                      | $N_A$                       |
|  | فشار                           | $p$                         |
|  | فشار هوگونیوت                  | $p_H$                       |
|  | تنش فشاری مربوط به لزجت حجمی   | $p_{bv}$                    |
|  | نرخ گرما بر واحد حجم           | $\dot{Q}$                   |
|  | چشمه‌های حرارتی                | $q$                         |
|  | تانسور تنش فرعی                | $S$                         |
|  | سطح دامنه                      | $S$                         |
|  | دما                            | $T$                         |
|  | دمای بی‌بعد                    | $\hat{T}$                   |
|  | دمای نقطه ذوب                  | $T_{melt}$                  |
|  | دمای مرجع                      | $T_0$                       |
|  | سرعت عمود بر موج               | $u$                         |
|  | حجم                            | $V$                         |
|  | جابجایی گره‌ای                 | $x_A$                       |
|  | چگالی                          | $\rho$                      |
|  | تنش                            | $\sigma$                    |
|  | کرنش                           | $\epsilon$                  |
|  | تنش برشی                       | $\tau$                      |
|  | بردار سرعت نسبت به مرجع مختصات | $v_i$                       |
|  | لزجت دینامیکی                  | $\mu$                       |
|  | دلتای کرونگر                   | $\delta_{ij}$               |
|  | رسانایی حرارتی                 | $\kappa_f$                  |
|  | گام زمانی                      | $\Delta t$                  |
|  | کرنش پلاستیک معادل             | $\bar{\epsilon}^{pl}$       |
|  | نرخ کرنش پلاستیک معادل         | $\dot{\bar{\epsilon}}^{pl}$ |
|  | نرخ کرنش مرجع                  | $\dot{\epsilon}_0$          |
|  | تنش اصلی                       | $\sigma_m$                  |
|  | ضریب پواسون                    | $\nu$                       |
|  | نسبت گرانشین                   | $\Gamma$                    |
|  | کرنش تراکمی حجمی اسمی          | $\eta$                      |
- [1] Truscott TT, Epps BP, Belden J (2014) Water entry of projectiles. *Annu Rev Fluid Mech* 46: 355-378.
- [2] Savchenko YN, Zverkhovskii AN (2009) Technique of conducting experiments on the high-velocity movement of inertial models in water in the supercavitation regime. *Prikl Gidromekh* 11(4): 69-75.
- [3] Worthington AM, Cole RS (1897) Impact with a liquid surface, studied by the aid of instantaneous photography. *Philos T Roy Soc A* 189: 137-148.
- [4] Bell GE (1924) On the impact of a solid sphere with a fluid surface. *Philos Mag* 48(287): 753-764.
- [5] Birkhoff G, Caywood TE (1949) Fluid flow patterns. *Appl Phys* 20(7): 646-659.
- [6] Birkhoff G, Isaacs R (1951) Transient cavities in air-water entry. *Nav Ordnance Rep*.
- [7] Birkhoff G, Zarantonello EH (1957) Jets, wakes, and cavities. 1st edn. Academic Press, New York.
- [8] May A, Woodhull JC (1948) Drag coefficients of steel spheres entering water vertically. *Appl Phys* 19:1109-1121.
- [9] Abelson HI (1970) Pressure measurements in the water-entry cavity. *Fluid Mech* 44:129-144.
- [10] May A (1975) Water entry and the cavity-running behavior of missiles. Tech rep, NAVSEA Hydroballistics Advisory Committee, Silver Spring, MD (Reproduced by NTIS).
- [11] Savchenko YuN, Semenenko VN, Serebryakov VV (1993) Experimental Research of Subsonic Cavitating Flows. *DAN of Ukraine*, 2:64-68. (in Russian.)
- [12] Kirschner IN (2001) Results of selected experiments involving supercavitating flows. RTO AVT lecture series on supercavitating flows, Von Karman Institute, Brussels Belgium.
- [13] Truscott TT, Beal DN, Techet AH (2009) Shallow angle water entry of ballistic projectiles. *Proc Cav Int Symp Cavitation*, ed. S Ceccio, Art. 100.
- [14] Afanas'eva SA, Belov NN, Burkin VV, D'yachkovskii AS, Evt'yushkin EV (2013) Characteristic features of the high-velocity interaction of strikers with obstacles protected by a water layer. *Izv Vyssh Uchebn Zaved Fizika* 56(4): 8-15.
- [15] Ishchenko AN (2014) Theoretical and experimental analysis of the high-velocity interaction of solid bodies in water. *J Eng Phys Thermophys* 87(2): 399-408.
- [16] Karimi H, Mohammadi J, Arabi H, Fesanghari R, Farhadzadeh F, Shariati (2008) Design, production and experiment of small caliber supercavitating projectile. *International Conference on innovative approaches to further increase speed of fast marine*

- [19] Souli M, Benson DJ (2010) Arbitrary Lagrangian Eulerian and Fluid – structure Interaction. 1st edn. Wiley, Hoboken.
- [20] Savchenko VT (1997) Reduction of overload on body entering water at high speed. AGARD FDP workshop.
- [21] Hagedorn P, DasGupta A (2007) Vibrations and waves in continuous mechanical systems. John Wiley & Sons Ltd.
- vehicles, moving above, under and in water surface, SuperFAST'2008, Russia.
- [17] Ahmadzadeh M, Saranjam B, Hoseini Fard A, Binesh AR (2014) Numerical simulation of sphere water entry problem using Eulerian–Lagrangian method. Appl Math Model 38:1673-1684.
- [18] ANSYS 15 Documentation (2009) User's Manual.