



بهینه‌سازی فرکانس طبیعی سازه‌های دو و سه بعدی خرپا به روش تحلیل حساسیت گسسته

زهرا کاظمی^۱ و محمدرحیم همتیان^{۲*}^۱ دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی مکانیک دانشگاه شیراز، شیراز، ایران^۲ استاد، دانشکده مهندسی مکانیک دانشگاه شیراز، شیراز، ایران

تاریخ دریافت: ۱۳۹۴/۰۳/۲۱؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۴/۰۹/۲۲؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۵/۰۷/۲۴

چکیده

کنترل و بهینه‌سازی فرکانس‌های طبیعی یک سازه، یک موضوع مهم در مهندسی مکانیک، هوافضا و عمران است. در این مقاله، مسائل جدیدی برای بهینه‌سازی سطح مقطع اعضای سازه‌های خرپای دو بعدی و سه بعدی معرفی و مطالعه می‌شود. سه الگوریتم به منظور ۱- افزایش اختلاف دو فرکانس اول ۲- افزایش فرکانس اول ۳- افزایش فرکانس دوم ضمن محدود نگه داشتن فرکانس اول ارائه می‌شود. از طریق ایجاد تغییر در سطح مقطع المان‌ها، ضمن ثابت نگه داشتن وزن کل سازه با انجام آنالیز حساسیت گسسته، بهینه‌سازی مورد نظر انجام می‌گردد. آنالیز مودال، آنالیز حساسیت و بهینه‌سازی توسط یک کد تدوین شده در محیط برنامه‌نویسی نرم‌افزار انسیس انجام شده اند. جهت نشان دادن میزان کارایی این روش، رفتار دو سازه خرپای دو بعدی و یک سازه خرپای سه بعدی، مورد ارزیابی قرار گرفته است. مثال‌های ارائه شده نشان می‌دهند که با استفاده از روش‌های پیشنهاد شده می‌توان فرکانس‌های طبیعی یک سازه خرپا را به میزان قابل توجهی بهینه کرد.

کلمات کلیدی: آنالیز حساسیت گسسته؛ بهینه‌سازی؛ فرکانس طبیعی؛ خرپا.

Natural Frequency Optimization of 2D and 3D Truss Structures Using a Discrete Sensitivity Analysis

Z. Kazemi¹, M.R. Hematiyan^{2*}¹ Ph.D. Student, Mech. Eng., Shiraz University, Shiraz, Iran.² Prof., Mech. Eng., Shiraz University, Shiraz, Iran.

Abstract

Controlling and optimizing natural frequencies of structures is an important issue in mechanical, aerospace and civil engineering. In this paper, some new problems for cross-section area optimization of 2D and 3D truss structures considering different frequency objective functions are introduced and investigated. Three algorithms are developed in order to 1- increase the difference of the first two natural frequencies, 2- increase the first natural frequency and 3- increase of the second natural frequency with a limited change of the first natural frequency. Using a discrete sensitivity analysis, the cross-section area of the truss members are changed while the total mass of the structure is maintained fixed in order to achieve optimum natural frequencies. Modal analysis, sensitivity analysis and optimization process are performed by a developed APDL code in ANSYS software. Several two and three dimensional truss optimization examples are presented to demonstrate the efficiency of the methods. The presented examples show that natural frequencies of a truss structure can be optimized significantly by using the proposed methods.

Keywords: Discrete Sensitivity Analysis; Optimization; Natural Frequency; Truss.

۱- مقدمه

به طور کلی، طراحی سازه‌های خرپا به معیارهای مهندسی مورد استفاده و جنبه‌های اقتصادی، روش‌های ساخت و ساز، جنبه‌های زیست محیطی و ... بستگی دارد. پژوهش‌های بسیاری جهت بهینه‌سازی سازه‌های خرپا تحت اعمال قیود مختلفی از جمله، قید تنش، جابجایی، نیروی کماتش و فرکانسی با استفاده از الگوریتم‌های تکاملی انجام شده‌اند. هر چند با انجام بهینه‌سازی بر مبنای الگوریتم‌های تکاملی، می‌توان امید داشت که به جواب سراسری^۱ دست یافت، ولی از جنبه دیگر با حجم زیادی از محاسبات مواجه هستیم که در مرحله مطالعه و طراحی نیاز به صرف زمان زیادی است.

دب^۲ و گولاتی^۳ [۱]، جهت کمینه نمودن جرم سازه با استفاده از الگوریتم ژنتیک و دسته‌بندی گره‌ها، به اساسی (گره‌هایی که قرار است بار تحمل کنند و یا از نظر طراحی باید ثابت باشند) و غیر اساسی، به طراحی پیکربندی، اندازه سطح مقطع و توپولوژی در سازه‌های خرپا پرداختند. لینگویان^۴ و همکارانش [۲]، با تاکید بر کاربرد الگوریتم بهینه‌سازی ازدحام ذرات^۵ در بهینه‌سازی و استفاده از این الگوریتم به بهینه‌سازی سطح مقطع^۶ در سازه‌ی خرپا پرداختند. جین^۷ و ونگ^۸ [۳]، با بکارگیری الگوریتم ژنتیک و لحاظ کردن قیودی که شامل فرکانس اساسی، جابه‌جایی و شتاب گره‌ها است، به بهینه‌سازی توپولوژی سازه‌ی خرپا پرداختند. کمپ^۹ [۴]، با پیشنهاد الگوریتم مه بانگ- مه رمب^{۱۰} به‌عنوان یک الگوریتم اکتشافی^{۱۱} برای متغیرهای طراحی پیوسته و گسسته ضمن اعمال قیود جابجایی و تنش به کمینه کردن جرم سازه خرپا پرداخت. رحمانی و همکاران [۵]، به منظور کاهش جرم سازه خرپا با استفاده از الگوریتم ژنتیک بر مبنای روش انرژی مکمل، فرمول جدیدی را ارائه کردند.

گامز^{۱۲} [۶]، با ارائه چند الگوریتم جدید بر مبنای الگوریتم ازدحام ذرات و با بکار بردن قیود فرکانسی توسط روش تابع جریمه به یافتن سطح مقطع بهینه المان‌های سازه‌های خرپا پرداخت. مایگل^{۱۳} و مایگل [۷]، برای اولین بار از الگوریتم‌های اکتشافی جستجوی هارمونی^{۱۴} و کرم شب‌تاب^{۱۵} جهت بهینه‌سازی سازه‌های خرپا با اعمال همزمان چند قید فرکانسی استفاده کردند. کاوه و ذوالقدر [۸]، با معرفی یک ضریب بر حسب نورم^{۱۶} بردار پاسخ و با استفاده از الگوریتم‌های مه بانگ- مه رمب و الگوریتم جستجوی سیستم بردار شده^{۱۷} شیوه جدیدی جهت جلوگیری از گیر افتادن در منطقه یک مینیمم محلی هنگام بهینه‌سازی خرپا با لحاظ قیود فرکانسی، به منظور رسیدن به جرم کمتر ارایه کردند.

کاوه و ذوالقدر [۹]، به منظور مرتفع نمودن مشکلات ناشی از غیر خطی بودن مسائل بهینه‌یابی توپولوژی تحت قیود فرکانسی، از الگوریتم اکتشافی جستجوی سیستم بردار شده پیشنهاد شده توسط کاوه و طلا طاهری [۱۰] استفاده کردند.

مایگل و همکارانش [۱۱]، برای رسیدن به فرکانس معین با پیشنهاد نمودن الگوریتم اکتشافی کرم شب‌تاب و قیود جابجایی، تنش و پایداری سینماتیکی سازه، ماتریس جرم را بهبود بخشیدند.

کاوه و مهدوی [۱۲]، یک الگوریتم فرا اکتشافی^{۱۸} جدید تحت عنوان بهینه‌سازی برخورد اجسام^{۱۹} به منظور کاهش جرم سازه‌های خرپا تحت قید جابجایی و یا فرکانسی معرفی کردند که این الگوریتم، برگرفته از پدیده طبیعی برخورد بین دو جسم است که اجسام پس از برخورد به سمتی حرکت می‌کنند که انرژی آنها حداقل شود.

روش‌های دیگر بهینه‌سازی که جهت بهینه‌سازی سازه‌های خرپا انجام شده‌اند یا برحسب تمام تنش کردن سازه به منظور بهینه‌یابی مقطع است و یا از روش‌هایی که به اطلاعات گرادیانی مسأله نیاز است، مانند آنالیز حساسیت و

¹ Global

² Deb

³ Gulati

⁴ Lingyun

⁵ Particle Swarm Optimization Algorithm

⁶ Size Optimization

⁷ Jin

⁸ Wang

⁹ Camp

¹⁰ Big Bang-Big Crunch

¹¹ Heuristic Algorithms

¹² Gomes

¹³ Miguel

¹⁴ Harmony Search

¹⁵ Firefly Algorithm

¹⁶ Norm

¹⁷ Charged System Search Algorithm

¹⁸ Meta-Heuristic Algorithm

¹⁹ Colliding Bodies Optimization

بررسی تأثیر پارامترهای هندسی و یا خواص مادی سازه بر سختی آن ارائه دادند.

در طراحی یک مدل ممکن است، تعدادی از پارامترها نامشخص باشد و طراح نسبت به طراحی خود و ارزش‌های آن از قبیل قیمت، هزینه‌ها، بهره‌وری، فن آوری و... مطمئن نباشد. عدم قطعیت، یکی از دلایل اصلی علت استفاده از آنالیز حساسیت در تصمیم‌گیری و طراحی است. اگر تعدادی از پارامترها نامشخص باشند، تحلیل حساسیت می‌تواند اطلاعاتی از جمله اینکه به ازای تغییر پارامترهای مختلف به چه میزان پاسخ تغییر می‌یابد و یا اینکه اگر از تغییر بعضی از پارامترها صرف نظر شود، تا چه میزان کارآمد بودن طرح تحت تأثیر قرار خواهد گرفت و ... در اختیار طراح قرار دهد. این اطلاعات، در تصمیم‌گیری و طراحی بسیار ارزشمند است؛ زیرا اگر استراتژی بهینه‌سازی غیر حساس به تغییر در پارامترهای طراحی باشد، این اجازه را می‌دهد که اجرا با قاطعیت انجام شود و در غیر این صورت، تجزیه و تحلیل حساسیت می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد.

چون شناخت دقیق تمام پارامترهای مدل سازه مانند خواص، جنس و ابعاد معمولاً ناممکن است، حساسیت پاسخ به تغییرات کوچک در این متغیرها برای محاسبه تغییرات آماری پاسخ سازه‌ها ضروری است [۲۰].

این آنالیز در بهینه‌یابی سازه‌ها توسط تعداد زیادی از محققان در نظر گرفته شده است [۲۱-۲۴]. روش‌های متعددی جهت انجام آنالیز حساسیت وجود دارد که به چند دسته از جمله: روش اختلاف محدود^۵ [۲۵ و ۲۶]، روش آشوب^۶ [۲۷ و ۲۸] و روش مشتق‌گیری مستقیم^۷ [۲۹-۳۱] تقسیم می‌شوند.

در تعدادی از مقالات مربوط به بهینه‌سازی سازه‌ها، فرکانس طبیعی نیز، به عنوان تابع هدف در نظر گرفته شده است. برای این منظور، می‌توان به مقاله ارائه شده توسط هوانگ^۸ و همکارانش اشاره کرد که در آن سعی شده است فرکانس طبیعی یک سازه پیوسته^۹ به کمک بهینه‌سازی

روش‌های مشتق‌گیری انجام شده‌اند. این دسته از روش‌ها اگر چه ممکن است به یکی از جواب‌های محلی^۱ همگرا شوند، اما با محاسبات نسبتاً ساده و اندک در مدت زمان کوتاه‌تری قابل اجرا می‌باشند.

واضح است که بهینه‌سازی شکل و یا پیکربندی خریاها با لحاظ قید فرکانسی به طراح این توانایی را می‌دهد که فرکانس‌ها را طوری تغییر دهد که سبب بهبود رفتار دینامیکی سازه شود [۱۳].

بهایی و آریانا [۱۴] در سال ۲۰۰۲، برای رساندن فرکانس طبیعی سازه به یک مقدار دلخواه، آنالیز حساسیت را بدین نحو انجام دادند که با یک مرتبه تحلیل حساسیت، پس از تشخیص حساس‌ترین المان، سطح مقطع آن‌را به اندازه ممکن برای رساندن به فرکانس مورد نظر تغییر دادند. همچنین در سال ۲۰۰۳، با استفاده از تخمین درجه دوم تیلور در فرمولاسیون و با استفاده از آنالیز حساسیت به همان صورت که در پژوهش قبلی خود عمل کرده بودند، سعی در بهبود رفتار ارتعاشی سازه‌ها داشتند [۱۵].

پدرسن^۲ و نیلسن^۳ [۱۶]، توانستند با فرض توخالی (تیوپ) بودن المان‌های خریا و در نظر گرفتن سطح مقطع المان‌ها و شعاع ژیراسیون آن‌ها به عنوان متغیرهای طراحی، به کمک آنالیز حساسیت و ارضا نمودن قیود فرکانسی، جابجایی و تنش؛ جرم بهینه سازه را بدست آورند. ونگ و همکاران [۱۷]، به کمک آنالیز حساسیت و لحاظ کردن قیود فرکانسی با استفاده از تغییر مختصات گره‌ها و سطح مقطع سعی در یافتن کمترین جرم سازگار با قیود موجود نمودند. گائو^۴ [۱۸]، با تغییر پارامترهای فیزیکی (مدول الاستیسیته و چگالی) و پارامترهای هندسی (سطح مقطع و طول المان‌ها) در یک بازه پیوسته و از پیش تعیین شده، روشی را ارائه کرد که در آن عدم قطعیت در مورد مقدار پارامترهای طراحی در بهینه‌یابی فرکانس طبیعی و شکل مودها تأثیر داده می‌شد.

اسدپور و همکارانش [۱۹]، جهت بهینه‌یابی توپولوژی سازه‌های خریا، به کمک آنالیز حساسیت، یک روش برای

⁵ Finite Difference Method

⁶ Perturbation Method

⁷ Direct Differentiation Method

⁸ Huang

⁹ Continuum Structures

¹ Local

² Pedersen

³ Nielsen

⁴ Gao

بودن حساس‌ترین المان نسبت به سطح مقطع پس از هر مقدار تغییر در سطح مقطع آن در اغلب اوقات به بهینه‌ترین پاسخ منجر نخواهد شد. برای دستیابی به یک طرح مناسب پس از تشخیص حساس‌ترین المان و ایجاد تغییرات جزئی در سطح مقطع آن، به آنالیز مجدد حساسیت برای تشخیص حساس‌ترین المان مورد نیاز است.

در مقاله حاضر سعی شده تا با تعریف مسائل جدید و رایج روشی نوین، تابع هدف فرکانسی به کمک تغییر در سطح مقطع المان‌های خرپا بهینه شود. بهینه‌سازی در این مقاله با تغییر توزیع جرمی المان‌ها، کاستن جرم از کم حساس‌ترین المان‌ها و افزودن آن به المان‌هایی با حساسیت بالا، ضمن ثابت نگه داشتن جرم کل سازه صورت می‌گیرد. برای سطح مقطع اعضای خرپا، یک حداقل در نظر گرفته می‌شود و این محدودیت بصورت یک قید در مسأله لحاظ می‌شود.

دلیل انتخاب تابع هدف بر حسب فرکانس‌های طبیعی، این است که بتوان به بهترین مقادیر ممکن برای فرکانس‌های طبیعی اول سازه دست یافت؛ در صورتی که اگر هدف مورد نظر بصورت قید تعریف شود، در پایان بهینه‌سازی ممکن است فرکانس‌های طبیعی سازه در بهترین وضعیت ممکن قرار نداشته باشند. البته به منظور اینکه موارد جامع‌تری در نظر گرفته شود، در بعضی از حالات علاوه بر اینکه یک فرکانس طبیعی در تابع هدف در نظر گرفته می‌شود، قیودی برای سایر فرکانس‌های طبیعی نیز در نظر گرفته می‌شود. بهینه‌سازی با استفاده از آنالیز حساسیت برخلاف الگوریتم‌های تکاملی، هرچند ممکن است به یکی از جواب‌های محلی همگرا شود، اما با حجم نسبتاً کم محاسبات قابل اجرا می‌باشند و طراحی سازه در مدت زمان کوتاهی انجام می‌پذیرد. برای کسب اطمینان از همگرایی جواب به جواب کلی، روش با چند شروع متفاوت از بین حالات مجاز^۱، یعنی حالاتی بکار برده می‌شود که شرایط مرزی را ارضا می‌کنند، اما سطح مقطع‌های مرتبط با هر مسأله در شروع متفاوت است و پاسخ بهینه از بین جواب‌های بدست آمده انتخاب می‌شود.

توپولوژی افزایش یابد [۳۲]. در مقاله ارائه شده توسط زی^۱ و استیون^۲ هدف یافتن شکل و توپولوژی بهینه برای یک سازه است که فرکانس طبیعی را کمینه یا بیشینه می‌کند [۳۳]. از دیگر پژوهش‌های صورت گرفته در این خصوص، روش ارائه شده توسط پارک^۳ و هان^۴ است که در آن بهینه‌سازی توپولوژی یک سازه در مسائل دینامیکی به کمک تغییر در ماتریس جرم و سختی انجام می‌شود [۳۴].

تعدادی از محققان جهت بهینه‌یابی سازه‌ها، تحلیل خود را با استفاده از کدنویسی در محیط برنامه نویسی نرم افزار انسیس انجام داده‌اند [۲ و ۳۵-۳۷]. در این محیط، می‌توان مدل‌سازی را بر اساس پارامترهای طراحی انجام داد؛ بطوری که دستورات طراحی (مانند تعریف نوع المان و خصوصیات ماده، ایجاد سطح و حجم، مش‌بندی و ...) به‌صورت خودکار و با یک ترتیب معین انجام شود. این محیط، همچنین دارای ویژگی‌های قابل توجه‌ای از جمله، تکرار یک دستور، فایل‌های ماکرو، عملیات اسکالری و ماتریسی و دیگر قابلیت‌ها است و از این رو به کاربر اجازه می‌دهد که تجزیه و تحلیل‌های پیچیده و یا دارای دفعات تکرار زیاد را به کمک این قسمت انجام دهد [۳۸ و ۳۹]. همانطور که اشاره گردید، در بیشتر پژوهش‌های انجام شده به منظور بهینه‌سازی رفتار ارتعاشی سازه، فرکانس‌های طبیعی را به صورت قید در مسأله لحاظ کرده‌اند [۳، ۶-۹، ۱۲، ۱۳، ۱۶، ۱۷]. در تعدادی از تحقیقات انجام شده جهت بهینه‌سازی رفتار ارتعاشی سازه، فرکانس طبیعی به عنوان تابع هدف در نظر گرفته شده است، اما در آن‌ها بهینه‌سازی توپولوژی صورت گرفته است [۳۲-۳۴].

همچنین در تعدادی از تحقیقات انجام شده که در آنها به منظور بهینه‌سازی فرکانس‌های طبیعی سازه خرپا از آنالیز حساسیت کمک گرفته شده است، پس از یک بار انجام این آنالیز و مشخص نمودن حساس‌ترین المانی که تغییر سطح مقطع آن بیشترین تاثیر را در تغییر فرکانس دارد، سطح مقطع المان مذکور تا زمان دستیابی به فرکانس مورد نظر افزایش داده می‌شود [۱۴ و ۱۵]؛ در صورتی که فرض ثابت

¹ Xie

² Steven

³ Park

⁴ Han

¹ Admissible Sets

$$\text{Subject to } \sum_{e=1}^N \rho A_e L_e = M \quad (2)$$

$$A_e^* \leq A_e, \quad e = 1, 2, \dots, N \quad (3)$$

که در آن F تابع هدف است که برحسب فرکانس‌های طبیعی سازه بیان می‌شود. قید تساوی، بیانگر این است که جرم کل سازه در حین فرایند بهینه‌سازی ثابت نگه داشته می‌شود و قید نامساوی، حد پایین سطح مقطع المان‌ها را تعیین می‌کند. در این خصوص، سه مسأله تعریف می‌شود. در ادامه برای هر نوع مسأله، تابع هدف و دیگر قیود بیان می‌شوند که عمومی نیستند.

۲-۱- مسأله نوع اول

در این مسأله هدف از بهینه‌سازی مودهای طبیعی سازه‌های خرپا، افزایش فرکانس اول است. این نوع بهینه‌سازی وقتی حائز اهمیت است که قرار است، فرکانس محرک روی سازه کمتر از اولین فرکانس سازه باشد. شایان ذکر است که مرتب‌سازی فرکانس‌های طبیعی که در قسمت قبل اشاره گردید، مانع از تبدیل شدن فرکانس دوم به فرکانس اول ضمن افزایش اولین فرکانس می‌شود. صورت مسأله اول را می‌توان بصورت روابط (۴-۶) بیان کرد.

$$\text{Maximize } \omega = \omega_1(A_1, A_2, \dots, A_N) \quad (4)$$

$$\text{Subject to } \sum_{e=1}^N \rho A_e L_e = M \quad (5)$$

$$A_e^* \leq A_e, \quad e = 1, 2, \dots, N \quad (6)$$

از آنجایی که هدف، بهینه ساختن فرکانس اول است، تابع هدف طبق فرمول (۴)، برابر با ω_1 در نظر گرفته می‌شود.

۲-۲- مسأله نوع دوم

به عنوان رهیافتی دیگر می‌توان فرکانس دوم را ضمن ثابت نگه داشتن اولین فرکانس افزایش داد. به این ترتیب، فاصله بین فرکانس اول و دوم افزایش داده می‌شود، ولی فرکانس اول تغییر داده نمی‌شود. این نوع بهینه‌سازی زمانی مورد استفاده قرار می‌گیرد که قرار است، فرکانس محرک روی سازه بین دو فرکانس اول قرار گیرد. در این حالت، از تابع هدف و قیود زیر بهره خواهیم گرفت:

در این پژوهش، مسائل جدیدی در زمینه بهینه‌سازی رفتار ارتعاشی سازه‌های خرپای دو بعدی و سه بعدی، در قسمت ۲، تعریف و فرمول‌بندی شده است. یکی از حالت‌های در نظر گرفته شده برای این منظور، افزایش اختلاف بین دو فرکانس اول سازه است. به عنوان راهکاری دیگر، می‌توان ایده افزایش فرکانس اول و همچنین افزایش فرکانس دوم ضمن ثابت نگه داشتن فرکانس اول را، مطرح کرد. برای تشخیص حساس‌ترین المان که با تغییر سطح مقطع آن به افزایش بیشتری در تابع هدف فرکانسی می‌رسیم، نیاز به آنالیز حساسیت است. قسمت ۳، تعریف آنالیز حساسیت و فرمول‌بندی مورد استفاده در این مقاله را برای این منظور ارائه می‌دهد. در قسمت ۴، بطور مختصر، بهینه‌سازی بر مبنای آنالیز حساسیت توضیح داده می‌شود. آنالیز مودال، آنالیز حساسیت و بهینه‌سازی توسط یک کد تدوین شده در محیط برنامه‌نویسی نرم‌افزار انسیس^۱ انجام شده است.

الگوریتم‌های مربوط به مسائل مطرح شده در بخش تعریف مسأله، در قسمت ۵ شرح داده می‌شود. رهیافت‌های بهینه‌سازی مورد نظر در این مقاله، برای مثال‌های دوبعدی و سه بعدی سازه‌ی خرپا در قسمت ۶ بررسی می‌شود. در قسمت ۷، خلاصه‌ای از نتیجه‌گیری‌های اصلی آورده شده است.

۲- تعریف مسأله و فرمول‌بندی

یک سازه خرپای دو بعدی یا سه بعدی متشکل از N عضو را در نظر می‌گیریم. طول، سطح مقطع و جرم اعضای خرپا را به ترتیب با L_e ، A_e و m_e بیان می‌کنیم که در آن e شماره عضو ($e = 1, 2, \dots, N$) است. فرکانس‌های طبیعی سازه را با ω_i که به ترتیب شماره مرتب شده‌اند، ($\omega_i \leq \omega_{i+1}$) نامگذاری می‌کنیم؛ همچنین جرم حجمی برای کل اعضاء یکسان و برابر با ρ در نظر گرفته می‌شود. هدف ایجاد تغییر در سطح مقطع اعضا تحت قیود خاص به منظور دستیابی به فرکانس‌های طبیعی بهینه سازه بدون تغییر در جرم کل است. فرایند بهینه‌یابی با استفاده از تابع هدف فرکانسی، به شرح زیر صورت می‌پذیرد:

$$\text{Maximize } F = F(A_1, A_2, \dots, A_N) \quad (1)$$

¹ APDL (ANSYS Parametric Design Language)

همچنین لی و همکارانش [۴۳] اشاره کردند، این فرض به دلایلی مانند در دسترس نبودن اندازه‌های بدست آمده در بین استانداردهای موجود، محدودیت‌های ساخت و ساز و شیوه‌های تولید، همواره درست و امکان‌پذیر نمی‌باشد و نیاز به گسسته تعریف کردن متغیرهای طراحی است.

در مسائل تعریف شده در این مقاله، متغیرهای طراحی سطح مقطع، عضوهای خرپا است. این متغیرها پیوسته هستند، اما تغییر جزئی در آنها به منظور بهینه‌سازی خرپا مدنظر نمی‌باشد. در روند بهینه‌سازی ابتدا گام بزرگ (مثلاً ۱۰ درصدی) در متغیرهای طراحی اعمال می‌شود و آنالیز حساسیت براساس این تغییرات انجام می‌شود. بهینه‌سازی در این سطح تا حد ممکن انجام می‌شود. سپس گام تحلیل حساسیت مقداری کاهش می‌یابد (مثلاً نصف می‌شود) و مجدداً بهینه‌سازی در این مرحله انجام می‌شود. این روند تا کوچک شدن گام به اندازه کافی ادامه می‌یابد. این نوع آنالیز حساسیت، تحت عنوان آنالیز حساسیت گسسته معرفی می‌شود. شایان ذکر است که کوچک کردن گام آنالیز حساسیت گسسته تا زمانی انجام می‌شود که از نظر کاربردی تأثیر آن چشمگیر باشد. با توجه به این موضوع ممکن است، حتی فقط یک اندازه برای گام یعنی اندازه مورد نظر نهایی در نظر گرفته شود و از ابتدا آنالیز حساسیت گسسته با آن انجام شود. مثال‌های عددی انجام شده در این مقاله نشان می‌دهد که در هر حال با تعداد مراحل کم تکرار، جواب بهینه مسأله بدست می‌آید. پارامترهای حساسیت، با مشتق‌گیری از تابع هدف نسبت به متغیرهای طراحی بدست می‌آیند که بصورت زیر قابل بیان است [۴۴]:

$$S_i^j = \frac{\partial F^j(A_1, A_2, \dots, A_N)}{\partial A_i} \approx \frac{F^j(A_1, A_2, \dots, A_i + \Delta A_i, \dots, A_N) - F^j(A_1, A_2, \dots, A_i, \dots, A_N)}{\Delta A_i};$$

$$i = 1, 2, \dots, N \quad (14)$$

در این رابطه (۱۴)، $F = F(A_1, A_2, \dots, A_N)$ تابع هدف فرکانسی است و $\frac{\partial F^j}{\partial A_i}$ مشتق جزئی تابع هدف بدست آمده در مرحله i ام نسبت به سطح مقطع المان i ام (که به عنوان متغیرهای طراحی در نظر گرفته شده‌اند) با تعداد کل

$$\text{Maximize } \omega = \omega_2(A_1, A_2, \dots, A_N) \quad (7)$$

$$\text{Subject to } \sum_{e=1}^N \rho A_e L_e = M \quad (8)$$

$$A_e^* \leq A_e, \quad e = 1, 2, \dots, N \quad (9)$$

$$(1 - \alpha)\omega_1^* \leq \omega_1 \leq (1 + \alpha)\omega_1^* \quad (10)$$

به دلیل سخت بودن ارضا کردن قید تساوی و رسیدن به همگرایی پاسخ مسأله، برای ثابت نگه داشتن فرکانس اول آن را در یک ناحیه کوچک محدود کرده‌ایم. در روابط بالا ω_1^* اولین فرکانس طبیعی سازه در وضعیت غیر بهینه اولیه است و α ثابت عددی محدود کننده (مثلاً 0.05) است.

۲-۳- مسأله نوع سوم

در این مسأله، هدف افزایش اختلاف دو فرکانس اول است. در این حالت، هر دو فرکانس اول و دوم به گونه‌ای تغییر می‌کنند که فاصله بین دو فرکانس اول بیشینه شود. این نوع بهینه‌سازی نیز زمانی مورد توجه قرار می‌گیرد که فرکانس محرک روی سازه بین دو فرکانس اول قرار می‌گیرد. تابع هدف و قیدها مورد استفاده در این قسمت به شرح روابط (۱۱-۱۳) است:

$$\text{Maximize } \omega = \omega_2(A_1, A_2, \dots, A_N) - \omega_1(A_1, A_2, \dots, A_N) \quad (11)$$

$$\text{Subject to } \sum_{e=1}^N \rho A_e L_e = M \quad (12)$$

$$A_e^* \leq A_e; \quad e = 1 : N \quad (13)$$

۳- آنالیز حساسیت گسسته

متغیرهای طراحی مسائل بهینه‌سازی سازه می‌توانند متغیرهای پیوسته و یا گسسته باشند. اگر ماهیت متغیرهای مسأله بهینه‌سازی پیوسته باشد، آن مسأله را پیوسته می‌نامند. در مقابل اگر مقادیری که متغیرهای مسأله اختیار می‌کنند، مقادیر محدود و شمارا باشند، مسأله را گسسته می‌نامند.

در بسیاری از روش‌های ارائه شده، بهینه‌سازی سازه‌ها با فرض پیوسته بودن متغیرهای طراحی انجام شده است [۴۰ و ۴۱]؛ اما همان طور که راجیو و کرشنامورسی [۴۲] و

است. تغییر جرم این دو عضو تا زمان داشتن روند صعودی در تغییر تابع هدف ادامه می‌یابد؛ سپس با انجام دوباره آنالیز حساسیت و تعیین عضوهای مربوط به بیشترین و کمترین حساسیت، تغییرات جرمی را لحاظ می‌کنیم. روند بهینه‌سازی تا زمانی تکرار می‌شود که تمامی اعضا به حساسیت یکسانی دست یابند که در این صورت، افزایش و یا کاهش جرم هیچ یک از المان‌ها، تاثیری در بهبود پاسخ فرکانسی سازه نخواهد داشت.

۵- الگوریتم‌ها

به کمک متغیرهای تعریف شده و با استفاده از روابط شرح داده شده در قسمت‌های قبل، روند بهینه‌سازی مربوط به هر کدام از مسایل را به کمک سه الگوریتم شرح می‌دهیم. الگوریتم‌های پیش رو، تغییرات جرمی مورد نیاز هر یک از اعضا را جهت بهبود پاسخ فرکانسی سازه تعیین می‌کند.

۵-۱- الگوریتم بهینه‌سازی مسأله اول

در مسأله اول افزایش فرکانس اول مورد نظر است و فرایند بهینه‌یابی به شرح زیر اجرا می‌شود:

۱- دو فرکانس اول را در حالت اولیه $(\omega_{1p}, \omega_{2p})$ بدست

آورید.

۲- تلورانس $\varepsilon > 0$ و گام $p > 0$ و محدوده پایینی

برای سطح مقطع المان، A^* را انتخاب کنید.

۳- $\omega_{1s}^{(0)} = \omega_{1f}^{(0)} = \omega_{1p}$ و شمارنده‌های حلقه را $k = 1$

و $h = 1$ قرار دهید

۴- جرم هر المان را بصورت تک تک به اندازه p تغییر

دهید و نرخ تغییرات فرکانس اول را در هر حالت بدست آورید.

۵- المان مربوط به کمترین نرخ تغییرات (i) و بیشترین

نرخ تغییرات (j) را در نظر بگیرید.

۶- از جرم کم حساس‌ترین المان (m_i^1) به میزان p

کاسته و به جرم حساس‌ترین المان (m_j^1) بیفزایید.

۷- دو فرکانس اول را در این حالت، $\omega_{1s}^{(k)}$ و $\omega_{2s}^{(k)}$

بدست آورید.

المان N است. ΔA_i ، بیان‌کننده گام آنالیز حساسیت است. شایان ذکر است که F^0 پاسخ سازه در وضعیت غیر بهینه اولیه است.

S_i^j تعیین‌کننده میزان حساسیت تابع هدف در مرحله z ام نسبت به سطح مقطع عضو i ام است که می‌توان آن را با بدست آوردن نسبت تغییر تابع هدف فرکانسی به تغییر مقدار سطح مقطع المان‌ها محاسبه کرد. در این خصوص، می‌توان اظهار نمود که هر چه اندازه این نسبت بزرگتر باشد، حساسیت پاسخ نسبت به متغیر نیز بیشتر است؛ در صورت مثبت بودن این مقدار با افزایش متغیر مربوطه به مقدار بزرگتری از تابع هدف خواهیم رسید و همچنین در صورت منفی بودن نسبت حساسیت، با کاهش متغیر می‌توان به تابع هدف بزرگتری دست یافت.

از این رو با نتایج بدست آمده از تحلیل حساسیت، می‌توان طراحی را به میزان قابل ملاحظه‌ای بهبود بخشید. این آنالیز، غالباً هزینه اصلی محاسباتی فرایند بهینه‌سازی را تشکیل می‌دهد؛ بنابراین داشتن یک الگوریتم کارآمد برای ارزیابی مشتقات حساسیت، از اهمیت بالایی برخوردار است.

۴- بهینه‌سازی

در این پژوهش در هر مرحله از بهینه‌سازی نسبت حساسیت، S_i^j را بر اساس توضیحات داده شده در قسمت قبل برای تک تک اعضا محاسبه نموده، بیشترین و کمترین مقدار جبری را مدنظر قرار می‌دهیم. r شماره مربوط به عضو با بیشترین حساسیت و q ، شماره مربوط به المان با کمترین حساسیت است.

پس از معین نمودن این دو عضو با کاستن جرم با گام p از کم حساس‌ترین عضو و افزایش همزمان آن به جرم حساس‌ترین عضو، ضمن ثابت نگه داشتن جرم کل سازه، می‌توان تاثیر بیشتری را در پاسخ فرکانسی سازه‌ی مورد نظر لحاظ کرد.

$$(m_r)_n = (m_r)_{n-1} + p \quad (15)$$

$$(m_q)_n = (m_q)_{n-1} - p \quad (16)$$

در روابط (۱۵-۱۶)، $(m_r)_n$ و $(m_q)_n$ به ترتیب جرم جدید عضوهای r و q است؛ همچنین $(m_r)_{n-1}$ و $(m_q)_{n-1}$ جرم دو عضو ذکر شده پیش از اعمال تغییرات

۹-۷ مراحل و $k = k + 1$ و $m_j^1 = m_j^2$ ، $m_i^1 = m_i^2$ را تکرار کنید؛

$$10- \omega_{2f}^{(k)} = \omega_{2f}^{(k-1)} \text{ در غیر این صورت}$$

۱۱- اگر $\varepsilon > \omega_{2s}^{(k)} - \omega_{2s}^{(k-1)}$ آنگاه $h = h + 1$ و مراحل

۹-۵ را تکرار کنید. در غیر این صورت پایان کار

۵-۳- الگوریتم بهینه‌سازی مساله سوم

فرایند بهینه‌یابی با استفاده از تابع هدف اختلاف دو فرکانس اول به شرح زیر انجام می‌شود:

۱- اختلاف دو فرکانس اول را در طرح اولیه $(\Delta\omega_p)$ بدست آورید.

۲- تلورانس $\varepsilon > 0$ و گام $p > 0$ و محدوده پایینی برای سطح مقطع المان، A^* را انتخاب کنید.

۳- $\Delta\omega_f^{(0)} = \Delta\omega_s^{(0)} = \Delta\omega_p$ و شمارنده‌های حلقه را $k = 1$ و $h = 1$ قرار دهید.

۴- جرم هر المان را بصورت تک تک به اندازه p تغییر دهید و نرخ تغییرات فرکانس اول را در هر حالت بدست آورید.

۵- المان مربوط به کمترین نرخ تغییرات (i) و بیشترین نرخ تغییرات (j) را در نظر بگیرید.

۶- از جرم کم حساس‌ترین المان (m_i^1) به میزان p کاسته و به جرم حساس‌ترین المان (m_j^1) بیفزایید.

۷- اختلاف دو فرکانس اول را در این حالت $\Delta\omega_s^{(k)}$ بدست آورید.

۸- اگر $\Delta\omega_s^{(k)} > \Delta\omega_s^{(k-1)}$ و $A_i^* < A_i^2$ و جرم جدید المان i و j بترتیب m_i^2 و m_j^2 باشد، دهید:

۸-۶ مراحل و $k = k + 1$ و $m_j^1 = m_j^2$ ، $m_i^1 = m_i^2$ را تکرار کنید.

$$9- \Delta\omega_f^{(h)} = \Delta\omega_s^{(k-1)} \text{ در غیر این صورت}$$

۱۰- اگر $\varepsilon > \Delta\omega_f^{(h)} - \Delta\omega_s^{(h-1)}$ آنگاه $h = h + 1$ و

مراحل ۴-۸ را تکرار کنید. در غیر این صورت پایان کار

۸- اگر $\omega_{1s}^{(k)} > \omega_{1s}^{(k-1)}$ و $A_i^* < A_i^2$ و جرم جدید المان i و j بترتیب m_i^2 و m_j^2 باشد، قرار دهید:

۸-۶ مراحل و $k = k + 1$ و $m_j^1 = m_j^2$ ، $m_i^1 = m_i^2$ را تکرار کنید.

$$9- \omega_{1f}^{(h)} = \omega_{1s}^{(k-1)} \text{ در غیر این صورت:}$$

۱۰- اگر $\varepsilon > \omega_{1f}^{(h)} - \omega_{1s}^{(h-1)}$ آنگاه $h = h + 1$ و مراحل

۴-۸ را تکرار کنید. در غیر این صورت پایان کار

۵-۲- الگوریتم بهینه‌سازی مساله دوم

برای این منظور، این قید فرکانسی که فرکانس اول در یک بازه‌ی محدود تغییر کند، نیز لحاظ می‌شود. در ادامه الگوریتم پیشنهادی جهت ثابت نگه داشتن فرکانس اول و افزایش فرکانس دوم تشریح شده است:

۱- دو فرکانس اول را در طرح اولیه $(\omega_{1p}, \omega_{2p})$ بدست آورید.

۲- تلورانس $\varepsilon > 0$ و گام $p > 0$ و محدوده پایینی برای سطح مقطع المان، A^* را انتخاب کنید.

۳- برای تعیین بازه تغییرات فرکانس اول $0 < \alpha < 1$ را در نظر بگیرید.

۴- $\omega_{1f}^{(0)} = \omega_{1s}^{(0)} = \omega_{1p}$ و شمارنده‌های حلقه را $k = 1$ و $h = 1$ قرار دهید.

۵- جرم هر المان را بصورت تک تک به اندازه p تغییر دهید و نرخ تغییرات فرکانس اول را در هر حالت بدست آورید.

۶- المان مربوط به کمترین نرخ تغییرات (i) و بیشترین نرخ تغییرات (j) را در نظر بگیرید.

۷- از جرم کم حساس‌ترین المان (m_i^1) به میزان p کاسته و به جرم حساس‌ترین المان (m_j^1) بیفزایید.

۸- دو فرکانس اول را در این حالت، $\omega_{1s}^{(k)}$ و $\omega_{2s}^{(k)}$ بدست آورید.

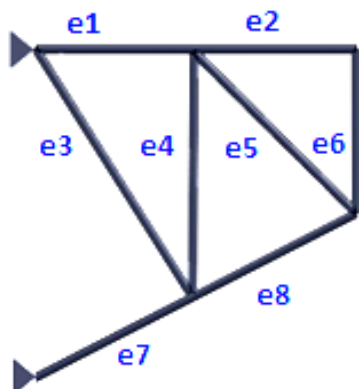
۹- اگر $(\alpha - 1)\omega_{1p} < (\omega_{1s})_k < (\alpha + 1)\omega_{1p}$ و

$\omega_{2s}^{(k)} > \omega_{2s}^{(k-1)}$ و $A_i^* < A_i^2$ و جرم جدید المان i

و j بترتیب m_i^2 و m_j^2 باشد، قرار دهید:

۶- مثال‌ها

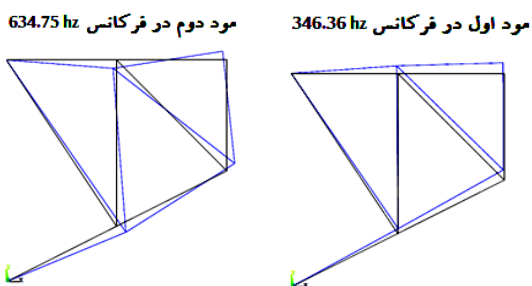
در این قسمت جهت بررسی توانمندی الگوریتم‌ها دو مثال دو بعدی و یک مثال سه بعدی، مورد ارزیابی قرار می‌گیرد. جهت تحلیل المان محدود از نرم افزار انسیس استفاده شده است و برای آنالیز حساسیت و انجام فرایند بهینه‌سازی، از یک کد تدوین شده استفاده گردیده است.



شکل ۱- سازه خرپای ۸ عضوی و شماره اعضا

۶-۱- سازه خرپای ۸ عضوی

سازه خرپای ۸ عضوی با مدول الاستیسیته 200 GPa و چگالی 7800 kg/m³ نشان داده شده در شکل ۱ به عنوان اولین مثال جهت بررسی میزان بهبود مورد نیاز روی سطح مقطع المان‌ها ضمن ثابت نگه داشتن جرم کل سازه در نظر گرفته شده است. در این مثال، مانند خرپای مورد استفاده در جرثقیل‌ها، پل‌ها و ... تکیه‌گاه‌ها را در یک طرف سازه در نظر می‌گیریم. دو فرکانس اول 346.4 Hz و 634.8 Hz و اختلاف این دو فرکانس 288.4 Hz است. سطح مقطع اعضا در حالت اولیه 4 cm² در نظر گرفته شده است. جرم و طول المان‌ها به شرح جدول ۱ است و دو مود ارتعاشی اول این سازه در شکل ۲ قابل مشاهده است.



شکل ۲- مودهای ارتعاشی سازه خرپای ۸ عضوی

جدول ۱- مشخصات المان‌های سازه خرپای ۸ عضوی

شماره المان	1	2	3	4	5	6	7	8
جرم (kg)	1.56	1.56	2.8	2.34	2.2	1.56	1.75	1.75
طول (m)	0.5	0.5	0.9	0.8	0.7	0.5	0.6	0.6

جدول ۲- اختلاف دو فرکانس اول در هر مرحله از سعی و خطا جهت افزایش اختلاف دو فرکانس اول در سازه ۸ عضوی

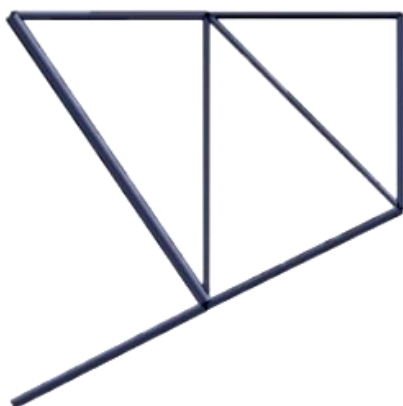
شماره مراحل	1	2	3	4	5	6	7	8	9
اختلاف فرکانس (Hz)	409.5	446.5	492.2	497.5	508.2	513.5	519.3	522.4	524.1

جدول ۳- مشخصات سازه بعد از اعمال بهینه‌سازی جهت افزایش اختلاف دو فرکانس اول در سازه ۸ عضوی

شماره المان	1	2	3	4	5	6	7	8
جرم جدید (kg)	3.3	0.5	0.5	2.8	1.9	0.5	4.6	1.4
تغییر جرم (kg)	1.7	-1	-2.3	0.5	-0.3	-1	2.9	-0.4



شکل ۳ - طرح بهینه جهت افزایش اختلاف دو فرکانس اول



شکل ۴ - سازه مدل شده جهت ثابت نگه داشتن فرکانس اول و افزایش فرکانس دوم

۶-۱-۱- افزایش اختلاف دو فرکانس اول

پس از انجام محاسبات، الگوریتم پیشنهادی توزیع جرمی نشان داده شده در شکل ۳ را به عنوان طرح بهینه برای افزایش اختلاف بین دو فرکانس اول خرپای مورد نظر ارائه می‌دهد. طبق جدول ۲، این الگوریتم توانسته است پس از ۹ اجرای متوالی، طرح بهینه با فرکانس طبیعی اول 203 Hz و فرکانس طبیعی دوم 727.1 Hz را نتیجه دهد. در طرح بهینه، اختلاف دو فرکانس اول 524.1 Hz است که این اختلاف به میزان 235.7 Hz نسبت به حالت اولیه افزایش یافته است. تغییراتی مطابق جدول ۳ جهت لحاظ در جرم اعضا مورد نیاز است. لازم به ذکر است که حداقل جرم عضوها و گام تغییر جرم در این حالت و تمامی حالات پیش رو بترتیب 0.5 kg و 0.1 kg در نظر گرفته شده است.

۶-۱-۲- ثابت نگه داشتن فرکانس اول و افزایش

فرکانس دوم

در این حالت، فرکانس اول را در بازه 90 تا 110 درصدی فرکانس اول طرح اولیه (346.4 Hz) مقید می‌کنیم، به این معنی که فرکانس اول در دامنه 311 Hz تا 381 Hz می‌تواند تغییر کند که با 7 اجرای متوالی نشان داده شده در جدول ۴، فرکانس اول به 380.3 Hz و فرکانس دوم به 787.5 Hz می‌رسد؛ در نتیجه فرکانس دوم به مقدار 152.7 Hz افزایش یافته است. بدین نحو، طرح بهینه‌ای مطابق شکل ۴ و به شرح جدول ۵ حاصل می‌شود.

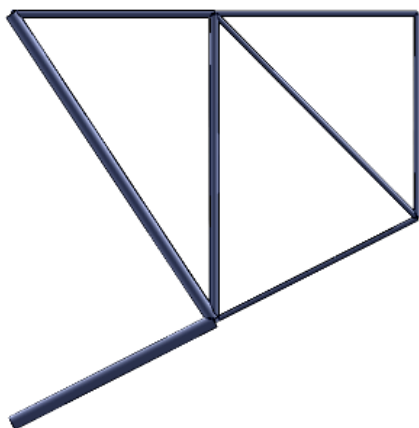
جدول ۴- نتایج بدست آمده از هر مرحله سعی و خطا

شماره مراحل	1	2	3	4	5	6	7
فرکانس دوم (Hz)	683.8	725.3	754.5	762.1	780.6	785.3	787.5

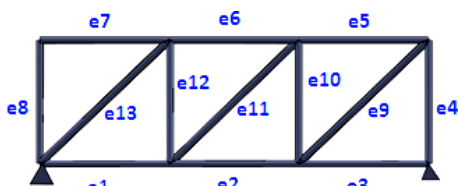
جدول ۵- مشخصات سازه بعد از اعمال بهینه‌سازی جهت افزایش فرکانس دوم و ثابت نگه داشتن فرکانس اول

شماره المان	1	2	3	4	5	6	7	8
جرم جدید (kg)	1.3	0.6	5.9	1.04	1	1.52	2.41	1.75
میزان تغییر جرم (kg)	-0.26	-0.96	3.1	-1.3	-1.2	-0.04	0.66	0

اختلاف آنها 166.1 Hz است. شکل ۷، دو فرکانس طبیعی اول سازه را نشان می‌دهد.



شکل ۵- طرح بهینه به ازای تغییرات جرم المان‌ها جهت افزایش فرکانس اول



شکل ۶- سازه خربای ۱۳ عضوی و شماره المان‌ها

۶-۱-۳- افزایش فرکانس اول

براساس سومین الگوریتم، نتایج بدست آمده در جدول ۶، حاکی از آن است که پس از اجرای ۷ مرحله سعی و خطا فرکانس اول به ۵۲۴.۲ Hz و فرکانس دوم به ۷۶۲.۱ Hz می‌رسد که در این حالت، فرکانس اول به مقدار ۱۷۷.۸ Hz افزایش یافته است. در شکل ۵، طرح بهینه و در جدول ۷، نتایج الگوریتم پیشنهادی نشان داده شده است.

کاهش و افزایش سطح مقطع تعدادی از المان‌ها در وضعیت بهینه نسبت به وضعیت اولیه، به خوبی از مقایسه شکل‌های ۳، ۴ و ۵ با شکل ۱ قابل مشاهده است.

۶-۲- سازه خربای ۱۳ عضوی

جهت بهینه ساختن فرکانس‌های طبیعی در دومین مثال، یک سازه خربا در نظر گرفته می‌شود که مطابق شکل ۶ از ۱۳ المان تشکیل شده است. در این مسأله، به منظور فراگیر شدن تحقیق، تکیه‌گاه‌های سازه در دو طرف آن قرار دارند و سطح مقطع اعضا نسبت به مسأله قبل به 6 cm^2 افزایش داده شده است. تمامی اعضای این خربا، دارای مدول الاستیسیته، چگالی و سطح مقطع به ترتیب 200 GPa و 7800 kg/m^3 هستند که طول و جرم اعضای خربا در جدول ۸ آورده شده است. فرکانس اول 331.1 Hz، فرکانس دوم 497.2 Hz و

جدول ۶- نتایج بدست آمده از هر مرحله سعی و خطا

شماره مراحل	1	2	3	4	5	6	7
فرکانس اول (Hz)	386.7	436.12	469.87	510.16	515.68	521.8	524.2

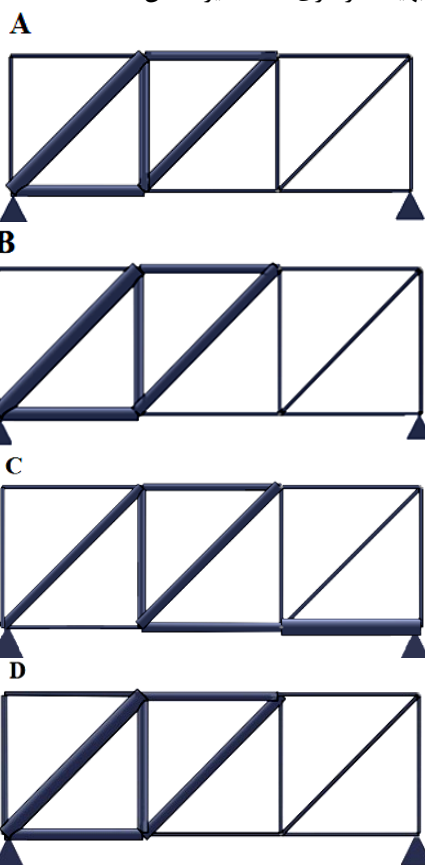
جدول ۷- مشخصات سازه بعد از اعمال بهینه‌سازی جهت افزایش فرکانس اول (kg)

شماره المان	1	2	3	4	5	6	7	8
جرم جدید (kg)	1.1	0.5	5.7	2.4	0.76	0.5	4	0.56
میزان تغییر جرم (kg)	-0.46	-1.06	2.9	0.06	-1.44	-1.06	2.25	-1.19

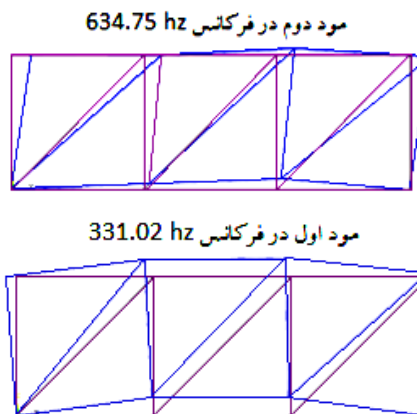
جدول ۸- مشخصات سازه خربای ۱۳ عضوی

المان	1	2	3	4	5	6	7
جرم (kg)	2.34	2.34	2.34	2.34	2.34	2.34	2.34
طول (m)	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
المان	8	9	10	11	12	13	
جرم (kg)	2.34	3.3	2.34	3.3	2.34	3.3	
طول (m)	0.5	0.7	0.5	0.7	0.5	0.7	

از پیکربندی مربوط به توزیع جرمی اول تا چهارم در شکل ۸ مشخص است که این سه توزیع جرمی به پاسخی مشابه رسیده‌اند. با توجه به بهبود قابل توجه در تابع هدف می‌توان امید داشت که این جواب نزدیک به جواب سراسری باشد. البته باید توجه داشت که اثبات دقیق اینکه این جواب یک جواب بهینه سراسری است، غیر ممکن است.



شکل ۸- طرح بهینه به ازای توزیع جرمی متفاوت (توزیع جرمی A. اول - B. دوم - C. سوم - D. چهارم)



شکل ۷- مودهای ارتعاشی سازه خرابای ۱۳ عضوی

۶-۲-۱- افزایش اختلاف دو فرکانس اول

همانطور که اشاره گردید، برای کسب اطمینان بیشتر از نزدیک بودن جواب به جواب سراسری، می‌توان برای هر مسئله الگوریتم را با چند شروع متفاوت (یک پیکربندی به ازای سطح مقطع‌های متفاوت اعضا) امتحان کرد که شرایط مرزی یکسانی دارند و پاسخ بهینه را از بین جواب‌های بدست آمده انتخاب کرد. برای این منظور، مسئله با چهار توزیع جرمی مختلف به شرح جدول ۹ حل می‌شود که نتایج حاصل از این چهار حالت در جدول ۱۰ قابل بررسی است. همانطور که در جدول ۱۱ قابل ملاحظه است، اولین توزیع جرمی، بیشترین اختلاف فرکانس را نتیجه داده است.

در این حالت، اختلاف فرکانس از 166.1 Hz به 623.1 Hz رسیده است؛ در نتیجه اختلاف دو فرکانس 457 Hz و به عبارت دیگر 275.3 درصد افزایش یافته است. شکل ۸، نمایانگر پیکربندی بهینه شده به ازای هر چهار توزیع جرمی است.

جدول ۹- چهار حالت توزیع جرمی هر المان در وضعیت غیر بهینه

توزیع جرمی غیر بهینه/ المان	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
اول	2.34	2.34	2.34	2.34	2.34	2.34	2.34	2.34	3.3	2.34	3.3	2.34	3.3
دوم	7.5	0.5	2.5	4	1.25	1	3	0.5	0.75	1.5	3.3	5.5	2
سوم	0.5	2.5	5	1	1.25	2	0.7	0.8	7	2.25	3.5	4	2.8
چهارم	2.25	0.75	0.5	5	1.75	0.9	1.4	5.2	3	2.25	3.5	6	0.8

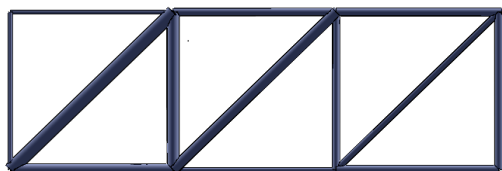
جدول ۱۰- چهار حالت توزیع جرمی هر المان پس از بهینه‌سازی

توزیع جرمی بهینه/ المان	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	تعداد تکرار
اول	5.9	0.5	0.5	0.5	0.5	3.3	0.5	0.5	0.5	0.5	5.7	4.14	10.26	24
دوم	7.1	0.5	0.5	0.5	0.5	3.1	0.5	0.5	0.5	5.1	3.7	10.3	13	
سوم	0.5	3.9	11.5	0.5	0.5	1.9	0.5	0.5	0.5	2.45	4.25	3.8	9	
چهارم	5.9	0.5	0.5	0.5	0.5	2.9	0.9	1.5	0.5	5.1	4.4	9.6	14	

جدول ۱۱- مقدار فرکانس‌ها قبل و بعد از بهینه‌سازی

توزیع جرمی غیر بهینه	فرکانس اول	فرکانس دوم	اختلاف دو فرکانس اول	توزیع جرمی بهینه	فرکانس اول	فرکانس دوم	اختلاف دو فرکانس اول
اول	331.1	497.2	166.1	اول	164.5	787.6	623.1
دوم	221.2	438.1	216.8	دوم	168.1	788.6	620.4
سوم	298	490.4	192.4	سوم	157	622.1	465.1
چهارم	231.5	353.7	122.2	چهارم	167.4	774.4	607

شماره المان‌های تغییر جرم یافته و هم میزان تغییر جرم آن‌ها با یکدیگر متفاوت است.



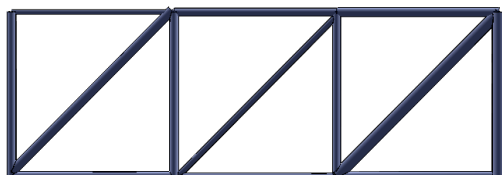
شکل ۹- سازه مدل شده جهت ثابت نگه داشتن فرکانس اول و افزایش فرکانس دوم

۶-۲-۲- ثابت نگه داشتن فرکانس اول و افزایش فرکانس دوم

با کمک گرفتن از دومین الگوریتم و مقید ساختن فرکانس اول در بازه‌ی 90 تا 110 درصدی فرکانس اول، طرح اولیه دو فرکانس اول به 297.9 Hz و 674.6 Hz می‌رسد که افزایش فرکانس دوم 177.4 Hz و افزایش اختلاف فرکانس‌ها 228.6 Hz است. جرم بهینه المان‌ها در جدول ۱۲ قابل مشاهده است. شکل ۹، طرح بهینه را پس از ۱۰ اجرای متوالی نشان می‌دهد و نتایج آن در جدول ۱۳ قابل مشاهده است.

۶-۲-۳- افزایش فرکانس اول

سومین الگوریتم به منظور افزایش فرکانس اول بعد از 5 مرحله بشرح جدول ۱۴، فرکانس اول سازه را به 403.3 Hz و فرکانس دوم آن را به 406.1 Hz می‌رساند که افزایش فرکانس اول به میزان 72.2 Hz است. تغییر جرم المان‌ها در جدول ۱۳ قابل مشاهده است. طرح بهینه سازه در شکل ۱۰ نشان داده شده است. از مقایسه شکل‌های ۸، ۹ و ۱۰ با یکدیگر مشخص است که به ازای هر صورت مساله، هم



شکل ۱۰- طرح بهینه جهت افزایش فرکانس اول

جدول ۱۲- جرم بهینه المان‌ها جهت افزایش فرکانس دوم و ثابت نگه داشتن فرکانس اول در خرپا ۱۳ عضوی (kg)

شماره المان	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
جرم جدید (kg)	4.3	0.5	2.5	2.34	1.9	1.74	0.5	0.5	1.5	1.54	4.42	4.18	7.38
میزان تغییر جرم (kg)	1.96	-1.84	0.16	0	-0.44	-0.6	-1.84	-1.84	-1.8	-0.8	1.12	1.84	4.08

جدول ۱۳- نتایج بدست آمده جهت ثابت نگه داشتن فرکانس اول و افزایش فرکانس دوم در سازه ۱۳ عضوی

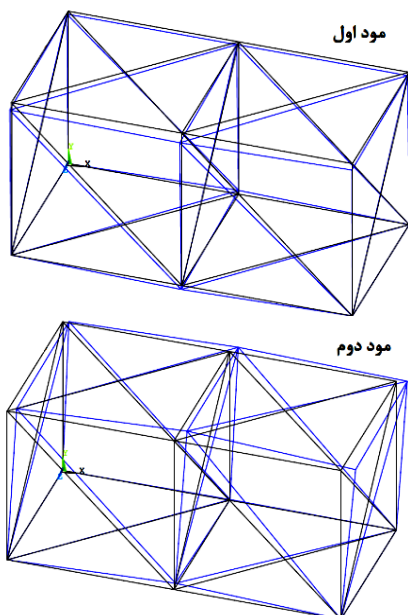
مراحل	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
فرکانس دوم	543.2	569	599.6	615.4	654.8	664.5	669.4	671.6	673.6	674.6

جدول ۱۴- جرم المان‌ها بعد از اعمال بهینه‌سازی جهت افزایش فرکانس اول در سازه ۱۳ عضوی (kg)

شماره المان	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
جرم جدید (kg)	2.34	0.9	2.7	5.54	2.34	1.9	0.58	2.34	5.3	1.98	1.3	2.34	3.74
میزان تغییر جرم (kg)	0	-1.44	0.36	3.2	0	-0.44	-1.76	0	2	-0.36	-2	0	0.44

جدول ۱۵- نتایج بدست آمده از هر مرحله سعی و خطا جهت افزایش فرکانس اول در سازه ۱۳ عضوی

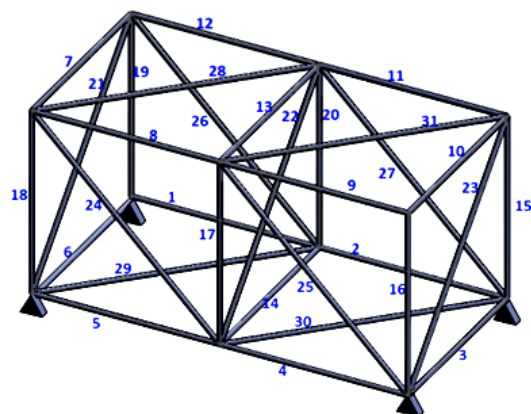
مراحل	1	2	3	4	5
فرکانس اول	360.4	384.6	395	401.8	403.3



شکل ۱۲- مدهای ارتعاشی سازه خرپای ۱۳ عضوی

۳-۶- خرپای سه بعدی ۳۱ المانی

در سومین مثال، یک خرپای سه بعدی متشکل از ۳۱ المان مطابق شکل ۱۱ مورد تحلیل قرار گرفته است. مدول الاستیسیته، چگالی و سطح مقطع المان‌ها در این خرپا به ترتیب، 200 GPa و 7800 kg/m^3 و 6 cm^2 هستند. مشخصات سازه در جدول ۱۵ داده شده است. فرکانس اول، دوم و اختلاف آنها بترتیب، 173.3، 132.4، و 40.9 Hz است. شکل ۱۲، نشان‌دهنده دو مود ارتعاشی اول سازه است.



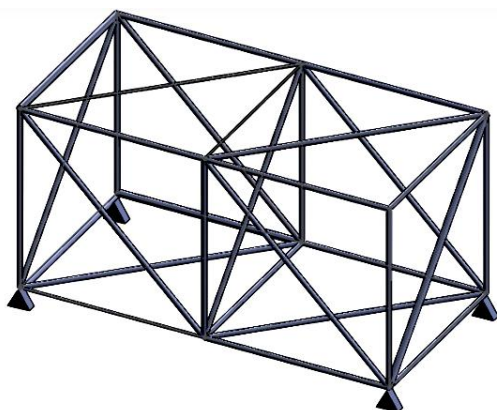
شکل ۱۱- سازه خرپای ۳۱ عضوی و شماره المان‌ها

جدول ۱۶- نتایج بدست آمده از هر مرحله اجرا جهت

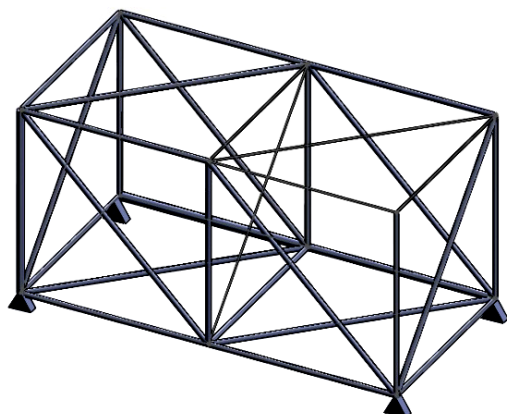
مرحله	۱	۲	۳	۴	۵	۶
اختلاف فرکانس	72.9	93	98.1	101.5	105.6	106.9
مرحله	7	8	9	10	11	
اختلاف فرکانس	110.8	115.4	116.6	117.1	117.1	117.1

جدول ۱۷- نتایج بدست آمده از هر مرحله سعی و خطا جهت

مرحله	۱	۲	۳	۴	۵	۶
فرکانس اول	187.2	192.1	194.8	197.6	202.3	202.3



شکل ۱۴- طرح بهینه جهت افزایش فرکانس اول



شکل ۱۵- طرح بهینه جهت افزایش فرکانس دوم و ثابت نگه داشتن فرکانس اول در خرابی ۳۱ عضوی

۶-۳-۱- افزایش اختلاف دو فرکانس اول

مطابق جدول ۱۶، ملاحظه می‌شود که پس از ۱۰ اجرای متوالی پروسه بهینه‌سازی، مقادیر 78.4 Hz و 195.5 Hz برای فرکانس اول و دوم بدست می‌آید. بدین ترتیب، اختلاف دو فرکانس اول از 40.9 Hz به 117.1 Hz می‌رسد که به عبارت دیگر، این مقدار 76.2 Hz یعنی 186 درصد افزایش یافته است. پیکربندی سازه در وضعیت بهینه بصورت نشان داده شده در شکل ۱۳ است.

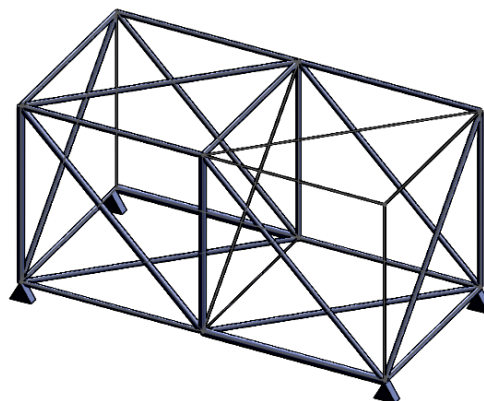
۶-۳-۲- افزایش فرکانس اول

جهت بهینه ساختن رفتار فرکانسی سازه بمنظور رسیدن به فرکانس اول بیشتر، همانطور که در جدول ۱۷ قابل مشاهده است، پس از ۱۳ مرحله سعی و خطا به فرکانس اول 169.4 Hz و فرکانس دوم 169.6 Hz دست می‌یابیم. در این صورت، فرکانس اول 37 Hz افزایش مقدار داشته است. شکل ۱۴، نتیجه‌ی بدست آمده از این الگوریتم را نشان می‌دهد.

۶-۳-۳- ثابت نگه داشتن فرکانس اول و افزایش

فرکانس دوم

از دیگر رهیافت‌های بهینه‌سازی رفتار دینامیکی سازه خراب، ثابت نگه‌داشتن فرکانس اول و افزایش فرکانس دوم است. برای این منظور، با مقید ساختن تغییرات فرکانس اول در بازه‌ی Hz (119.2-145.6) طبق جدول ۱۸ فرکانس اول 119.5 Hz و فرکانس دوم 202.3 Hz بدست آمدند که در این مورد، فرکانس دوم 29 Hz افزایش یافته است. پیکربندی بهینه سازه در شکل ۱۵ نشان داده شده است.



شکل ۱۳- طرح بهینه جهت افزایش اختلاف دو فرکانس اول

جدول ۱۸- نتایج هر مرحله اجرا جهت ثابت نگه داشتن فرکانس اول و افزایش فرکانس دوم در خرابی ۳۱ عضوی

شماره سعی و خطا	1	2	3	4	5	6	7
اختلاف دو فرکانس اول (Hz)	140	145.6	146.3	148.4	148.4	153.58	160.3
شماره سعی و خطا	8	9	10	11	12	13	
اختلاف دو فرکانس اول (Hz)	166.2	167.7	168.6	169	169.23	169.4	

جدول ۱۹- درصد بهینه‌سازی تابع هدف در مثال‌های مختلف

حالات مورد بررسی	خرابی ۸ عضوی	خرابی ۱۳ عضوی	خرابی سه بعدی ۳۱ المانی
افزایش اختلاف دو فرکانس اول	82 %	275 %	186 %
ثابت نگه داشتن فرکانس اول و افزایش فرکانس دوم	52%	138%	102%
افزایش فرکانس اول	51%	22%	28%

۷- نتیجه‌گیری

در این مقاله، بهینه‌سازی رفتار ارتعاشی خرپاهای دو بعدی و سه بعدی و قرار دادن فرکانس ارتعاشات طبیعی آنها در محدوده مناسب، بررسی گردید. بهینه‌سازی بر اساس تحلیل حساسیت گسسته و با استفاده از کد تدوین شده در محیط نرم افزار انسیس انجام گردید. تحلیل و بررسی نتایج به دست آمده حاکی از آن است که:

- ۱- بهینه‌سازی با استفاده از آنالیز حساسیت گسسته بر خلاف الگوریتم‌های تکاملی بدون نیاز به جستجو و با محاسبات نسبتاً کم قابل اجرا می‌باشند.
- ۲- همانطور که نتایج جدول ۱۹ نشان می‌دهد، با ثابت نگه داشتن جرم کل سازه و جابجایی جرم بین المان‌های آن می‌توان روی فرکانس طبیعی سازه تاثیر گذاشت. با توجه به نتایج بدست آمده می‌توان گفت، حداقل در مسائل در نظر گرفته شده در این مقاله، بهینه‌سازی با درصد قابل توجهی انجام شده است.

۳- فرض ثابت بودن حساس‌ترین المان نسبت به سطح مقطع پس از هر مقدار تغییر در سطح مقطع آن، به بهینه‌ترین پاسخ منجر نخواهد شد. به منظور دستیابی به یک طرح مناسب، با کمک گرفتن از آنالیز حساسیت گسسته، باید تشخیص داده شود که

جرم هریک از المان‌ها بهتر است، کاهش داده شود و یا افزایش و از آنجایی که سعی بر آن است که جرم کل سازه ثابت باقی بماند، در وهله بعد باید این مورد بررسی شود که انتقال جرم بین کدامین دو المان و به چه میزان صورت بگیرد؛ همچنین پس از تغییر جرم لازم بین دو المان مذکور لازم است بررسی شود که آیا نیازی به تکرار روند گفته شده (انجام دوباره آنالیز حساسیت و تشخیص حساس‌ترین و کم حساس‌ترین المان‌ها و پس از آن انتقال جرم بین دو المان) می‌باشد یا خیر.

۴- برای کسب اطمینان بیشتر از نزدیک بودن جواب به جواب سراسری، می‌توان الگوریتم را با چند شروع متفاوت اجرا کرد و پاسخ بهینه را از بین جواب‌های موجود انتخاب نمود.

۸- مراجع

- [1] Deb K, Gulati S (2001) Design of truss-structures for minimum weight using genetic algorithms. Finite Elem Anal Des 37(5): 447-465.
- [2] Lingyun W, Mei Z, Guangming S, Guang M (2005) Truss optimization on shape and sizing with frequency constraints based on genetic algorithm. Comput Mech 35(5): 361-368.
- [3] Jin P, De-Yu W (2006) Topology optimization of truss structure with fundamental frequency and

- interval parameters. *Finite Elem Anal Des* 42(6): 471-477.
- [19] Asadpoure A, Tootkaboni M, Guest JK (2011) Robust topology optimization of structures with uncertainties in stiffness—Application to truss structures. *Comput Struct* 89(11): 1131-1141.
- [20] Haftka RT, Gürdal Z (2012) *Elements of structural optimization* (Vol. 11), Springer Science & Business Media.
- [21] Sergeev O, Mroz Z (2000) Sensitivity analysis and optimal design of 3D frame structures for stress and frequency constraints, *Comput struct* 75(2): 167-185.
- [22] Apostol V, Santos JLT (1996) Sensitivity analysis and optimization of truss/beam components of arbitrary cross-section—I. Axial stresses, *Comput struct* 58(4): 727-737.
- [23] Cardoso JB, Arora JS (1992) Design sensitivity analysis of nonlinear dynamic response of structural and mechanical systems. *Struct optimization* 4(1): 37-46.
- [24] Materna D, Barthold FJ (2007) Variational design sensitivity analysis in the context of structural optimization and configurational mechanics. *Int J Fracture* 147(1-4): 133-155.
- [25] Radwan AG, Moaddy K, Momani S (2011) Stability and non-standard finite difference method of the generalized Chua's circuit. *Comput Math Appl* 62(3): 961-970.
- [26] Reddy RM, Rao BN (2008) Fractal finite element method based shape sensitivity analysis of mixed-mode fracture. *Finite Elem Anal Des* 44(15): 875-888.
- [27] Lepidi M (2013) Multi-parameter perturbation methods for the eigensolution sensitivity analysis of nearly-resonant non-defective multi-degree-of-freedom systems. *J Sound Vib* 332(4): 1011-1032.
- [28] Fang F, Pain CC, Navon IM, Gorman GJ, Piggott MD, Allison PA (2011) The independent set perturbation adjoint method: A new method of differentiating mesh-based fluids models. *Int J Numer Meth Fl* 66(8): 976-999.
- [29] Zhang U, Der Kiureghian A (1993) Dynamic response sensitivity of inelastic structures. *Comput Method Appl* 108(1): 23-36.
- [30] Conte, Joel P, Michele Barbato, and Enrico Spacone. Finite element response sensitivity analysis using force-based frame models. *Int J Numer Meth Eng* 59.13 (2004): 1781-1820.
- [31] Gu Q, Barbato M, Conte JP (2009) Handling of constraints in finite-element response sensitivity analysis. *J Eng mech* 135(12): 1427-1438.
- [32] Huang X, Zuo ZH, Xie YM Evolutionary topological optimization of vibrating continuum frequency domain dynamic response constraints. *Acta Mech Solida Sin* 19(3): 231-240.
- [4] Camp CV (2007) Design of space trusses using Big Bang–Big Crunch optimization. *J Struct Eng* 133(7): 999-1008.
- [5] Rahami H, Kaveh A, Gholipour Y (2008) Sizing, geometry and topology optimization of trusses via force method and genetic algorithm. *Eng Struct* 30(9): 2360-2369.
- [6] Gomes HM (2011) Truss optimization with dynamic constraints using a particle swarm algorithm. *Expert Syst Appl* 38(1): 957-968.
- [7] Miguel LFF, Miguel LFF (2012) Shape and size optimization of truss structures considering dynamic constraints through modern metaheuristic algorithms. *Expert Syst Appl* 39(10): 9458-9467.
- [8] Kaveh A, Zolghadr A (2012) Truss optimization with natural frequency constraints using a hybridized CSS-BBBC algorithm with trap recognition capability. *Comput Struct* 102: 14-27.
- [9] Kaveh A, Zolghadr A (2013) Topology optimization of trusses considering static and dynamic constraints using the CSS. *Applied Soft Computing* 13(5): 2727-2734.
- [10] Kaveh A, Talatahari S (2010) Optimal design of skeletal structures via the charged system search algorithm. *Struct Multidiscip Opt* 41(6): 893-911.
- [11] Miguel LFF, Lopez, RH, Miguel LFF (2013) Multimodal size, shape, and topology optimisation of truss structures using the Firefly algorithm. *Adv Eng Softw* 56: 23-37.
- [12] Kaveh A, Mahdavi VR (2014) Colliding Bodies Optimization method for optimum design of truss structures with continuous variables. *Adv Eng Softw* 70: 1-12.
- [13] Gandhi R (1993) Structural optimization with frequency constraints - a review, *AIAA J* 31(12): 2296-2303.
- [14] Bahai H, Aryana F (2002) Design optimisation of structures vibration behaviour using first order approximation and local modification, *Comput struct* 80(26): 1955-1964.
- [15] Aryana F, Bahai H (2003) Sensitivity analysis and modification of structural dynamic characteristics using second order approximation, *Eng Struct* 25(10): 1279-1287.
- [16] Pedersen NL, Nielsen AK (2003) Optimization of practical trusses with constraints on eigenfrequencies, displacements, stresses, and buckling. *Struct Multidiscip Opt* 25(5-6): 436-445.
- [17] Wang D, Zhang WH, Jiang JS (2004) Truss optimization on shape and sizing with frequency constraints. *AIAA J* 42(3): 622-630.
- [18] Gao W (2006) Interval natural frequency and mode shape analysis for truss structures with

- Innovation of Machinery & Electrical Products 2: 046.
- [39] Strain J, Miller E (2013) Introduction to the ANSYS Parametric Design Language (APDL). CreateSpace Independent Publishing Platform, USA.
- [40] Lee KS, Geem ZW (2005) A new meta-heuristic algorithm for continuous engineering optimization: harmony search theory and practice. *Comput Meth Appl Mech Eng* 194(36): 3902-3933.
- [41] Back T (1996) Evolutionary algorithms in theory and practice. Oxford Univ. Press.
- [42] Rajeev S, Krishnamoorthy CS (1992) Discrete optimization of structures using genetic algorithms. *J Struct Eng* 118(5): 1233-1250.
- [43] Li LJ, Huang ZB, Liu F (2009) A heuristic particle swarm optimization method for truss structures with discrete variables. *Comput Struct* 87(7): 435-443.
- [44] Tortorelli DA, Michaleris P (1994) Design sensitivity analysis: overview and review. *Inverse problems in Engineering* 1(1): 71-105.
- structures for natural frequencies. *Comput Struct* 88(5): 357-364.
- [33] Xie YM, Steven GP (1994) A simple approach to structural frequency optimization. *Comput Struct* 53(6): 1487-1491.
- [34] Park JY, Han SY (2013) Application of artificial bee colony algorithm to topology optimization for dynamic stiffness problems. *Computers Mathematics with Applications* 66(10): 1879-1891.
- [35] Wang F, Rui Z, Wei X (2006) Design of Structure Optimization with APDL. *Science Technology and Engineering* 21:006.
- [36] Wei L, Tang T, Xie X, Shen W (2011) Truss optimization on shape and sizing with frequency constraints based on parallel genetic algorithm. *Structural and Multidisciplinary Optimization* 43(5): 665-682.
- [37] Šešok D, Belevičius R (2007) Use of genetic algorithms in topology optimization of truss structures. *Mechanika* 64(2): 34-39.
- [38] Rui-Wu XIA (2008) On APDL Parametric FEA Technology and Its Application. *Development &*