



بررسی تاثیرات محیط حرارتی بر ارتعاشات آزاد ورق مستطیلی از جنس مواد تابعی مدرج دو بعدی مستقر بر بستر پسترناک

کوروش خورشیدی^{۱*}، علی بخششی^۲ و حسین قدیریان^۳

^۱ استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه اراک، اراک

^۲ کارشناس ارشد، آزمایشگاه صوت و ارتعاش، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه اراک، اراک

^۳ دانشجوی دکتری، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه خلیج فارس، بوشهر

تاریخ دریافت: ۱۳۹۴/۱۲/۱۸؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۵/۰۲/۰۳؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۵/۰۷/۲۴

چکیده

در این مقاله، تاثیرات محیط حرارتی بر ارتعاشات آزاد ورق مستطیلی از جنس مواد تابعی مدرج دو بعدی مستقر بر بستر دو پارامتری (بستر پسترناک)، مورد بررسی قرار گرفته است. برای تحلیل مسئله و محاسبه مقادیر فرکانس سازه، از روش ریلی ریتز بر مبنای روش حداقل انرژی کل، استفاده شده است. جهت تقریب جایجایی‌های ورق با فرض تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم، از توابع آزمون هارمونیک مثلثاتی استفاده شده است که شرایط مرزی هندسی تکیه‌گاه ساده و تکیه‌گاه کاملاً گیردار ورق را ارضاء می‌نمایند. به منظور بررسی دقت روش بکاررفته، نتایج بدست آمده در این پژوهش با مراجع مقایسه شده است. مقایسه‌های مذکور نشان می‌دهند که انطباق خوبی میان نتایج حاصل از مطالعه حاضر با نتایج حل دقیق موجود در منابع وجود دارد. در انتها تأثیر پارامترهای ضرایب توانی، نسبت حجمی، نسبت ضخامت به طول ورق، نسبت طول به عرض ورق، پارامتر سفتی بستر، دما و شرایط مرزی روی فرکانس‌های طبیعی سازه مورد بحث و بررسی قرار گرفته است.

کلمات کلیدی: محیط حرارتی؛ ورق مستطیلی؛ بستر پسترناک؛ مواد تابعی مدرج دو بعدی.

The Study of the Effects of Thermal Environment on Free Vibration Analysis of Two Dimensional Functionally Graded Rectangular Plates on Pasternak Elastic Foundation

K. Khorshidi^{1,*}, A. Bakhsheshi², H. Ghadirian³

¹ Assis. Prof., Mech. Eng., Arak university., Arak, Iran

² MSc., Mech. Eng., Arak university., Arak, Iran

³ Ph.D. Stu., Mech. Eng., P.G. university, Bushehr, Iran

Abstract

This paper is the study of the effects of thermal environment on vibration analysis of a two-dimensional functionally graded rectangular plate on Pasternak elastic foundation. The natural frequencies of the plate are calculated by using the Rayleigh-Ritz method based on minimizing the total energy of the plate. The transverse displacement of the plate based on the third-order shear deformation plate theory (TSDT) is approximated by a set of admissible trial functions which is required to satisfy the clamped (CL) and simply supported geometric boundary conditions. For verifying the accuracy of this method, results are compared with those reported in the literature. As it is shown a good conformance is derived from the obtained results and the exact solution. In the numerical results, the effects of volume fraction coefficients, thickness ratios, aspect ratios of the FG plates, foundation stiffness parameters, temperature and boundary conditions on the natural frequencies are examined and discussed in detail.

Keywords: Thermal Environment; Rectangular Plate; Pasternak Elastic Foundation; Two-Dimensional Functionally Graded Material.

۱- مقدمه

مواد تابعی مدرج، از مواد مرکب با ریزساختار ناهمگن می‌باشند که خواص مکانیکی آنها به طور یکنواخت و پیوسته از یک سطح به سطح دیگر جسم تغییر می‌کند. نوع رایج آن، ترکیب پیوسته‌ای از سرامیک و فلز است. این مواد از اختلاط پودر فلز و سرامیک بدست می‌آیند؛ مزیت استفاده از این مواد، این است که قادر به تحمل درجات حرارت بسیار بالا و اختلاف درجه حرارت بسیار بالا بوده، مقاوم در مقابل خوردگی و سایش می‌باشند و مقاومت بالایی در مقابل شکست دارند. در حال حاضر از این مواد برای سازه‌هایی استفاده می‌شود که در مقابل درجات حرارت بالا باید مقاوم باشند. با توجه به اهمیت مواد تابعی در صنایع، محققین زیادی به بررسی رفتار دینامیکی این نوع از مواد پرداخته‌اند. حسینی هاشمی و همکاران [۱]، به بررسی و تحلیل ارتعاش آزاد یک ورق مستطیلی از جنس مواد تابعی نسبتاً ضخیم براساس تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی پرداخته‌اند. در مطالعه آن‌ها فرکانس طبیعی ورق برای ۶ حالت از ترکیب شرایط مرزی مختلف ورق با دو لبه موازی ساده و سایر لبه‌ها ترکیبی از شرایط مرزی ساده، آزاد و گیردار با استفاده از حل دقیق بدست آمده است. یکی از مزایای این تحقیق، دقت بسیار بالای روش پیشنهادی است. ژاو و همکاران [۲]، تحلیلی برای ارتعاش آزاد صفحات از جنس مواد تابعی ارائه دادند. ایشان همچنین از تئوری مرتبه اول برشی برای محاسبه کرنش برشی عرضی و اینرسی چرخشی استفاده کردند. معادلات ویژه بوسیله بکارگیری از روش ریتز به توابع انرژی تبدیل شده و سپس حل گردیده است. تالها و سینگ [۳]، به بررسی ارتعاش و تحلیل استاتیکی صفحات از جنس مواد تابعی با بکارگیری تئوری مرتبه سوم تغییر شکل برشی پرداخته‌اند، اما با این تفاوت که در این تئوری، اصلاحات کمی در جابجایی عرضی این صفحات، به کمک روش المان محدود انجام شده است. حسینی هاشمی و همکاران [۴]، یک حل بسته دقیق بر پایه تحلیل ارتعاش آزاد صفحات ضخیم از جنس مواد تابعی براساس تئوری مرتبه سوم برشی ردی ارائه کرده‌اند. شرایط مرزی بکار رفته برای دو تکیه‌گاه موازی، ساده است. ژاو و همکاران [۵]، ارتعاش آزاد صفحات مستطیلی مستقر بر بستر پسترناک را مورد بررسی قرار دادند. کیم و همکاران [۶]، تاثیرات محیط حرارتی روی

ارتعاش ورق تابعی را مورد بررسی قرار دادند. در همین راستا لی و همکاران [۷]، به تحلیل ارتعاشی ورق تابعی در محیط حرارتی پرداختند. کیان و همکاران [۸]، به تحلیل ارتعاشات آزاد و اجباری ورق ضخیم ساخته شده از مواد تابعی با استفاده از تئوری‌های مرتبه بالای برشی پرداختند. ژانگ [۹] ورق تابعی را بر مبنای تئوری مرتبه بالای برشی و سطح خنثی فیزیکی مدلسازی نموده، رفتار کمانشی، خمشی و ارتعاشی آن را مورد مطالعه قرار داده است. شن و وانگ [۱۰]، رفتار ارتعاشی ورق تابعی روی بستر الاستیک دو پارامتری و در محیط حرارتی را با استفاده از مدل وویگت و موری تاناکا مورد مطالعه قرار داده‌اند.

اکثر تحقیقات انجام شده در زمینه تاثیر محیط حرارتی بر فرکانس طبیعی ورق، مربوط به ورق‌های همگن و یا ورق‌های تابعی تک بعدی است. در این مقاله، تاثیرات محیط حرارتی بر ارتعاش آزاد ورق مستطیلی از جنس مواد تابعی دو بعدی مستقر بر بستر الاستیک دو پارامتری (بستر پسترناک)، مورد بررسی قرار گرفته است. تئوری مورد استفاده در این پژوهش، تئوری مرتبه سوم تغییر شکل برشی است. توابع آزمون، شرایط تکیه‌گاه ساده و کاملاً گیردار را ارضاء می‌نمایند. برای دستیابی به فرکانس طبیعی، از روش انرژی ریلی- ریتز بر مبنای حداقل انرژی کل استفاده می‌شود. به منظور بررسی دقت روش به کار رفته، نتایج عددی با نتایج دقیق موجود در مراجع مقایسه می‌شود. در نهایت تاثیر پارامترهای ضریب توانی نسبت حجمی، نسبت طول، نسبت ضخامت ورق، ضرایب سفتی بستر پسترناک و دما روی فرکانس طبیعی ورق، مورد بررسی و تحلیل قرار گرفته است.

۲- توزیع مادی و هندسه مسئله

از آنجایی که سازه‌های از جنس مواد تابعی، عمدتاً در محیط‌های با دمای بالا استفاده می‌شوند، خواص آنها با دما تغییرات زیادی می‌کند؛ لذا برای پیش‌بینی رفتار مکانیکی این سازه‌ها، لازم است این تابعیت به دقت لحاظ شود. بدین سبب در حالت کلی، تابعیت دمایی خواص مواد تابعی طبق رابطه (۱) تعریف می‌شوند که P_f ، بیانگر خواص عمومی مؤثر مواد است. از جمله این خواص می‌توان چگالی ρ ، مدول الاستیسیته E ، ضریب انبساط حرارتی α ، رسانش حرارتی K

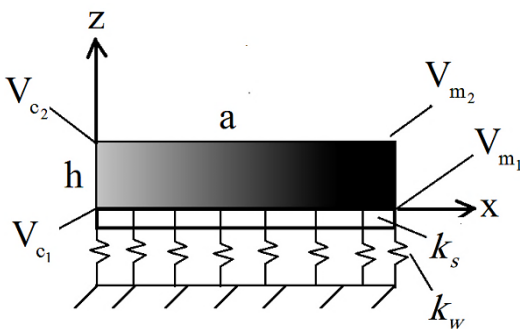
$$P(x, z, T) = P_{m1}(T)V_{m1} + P_{m2}(T)V_{m2} + P_{c1}(T)V_{c1} + P_{c2}(T)V_{c2} \quad (۴)$$

کسر حجمی در معادلات (۲) و (۳) به ازای $\alpha = 0$ به فرم متداول آن برای مواد تابعی یک بعدی در می‌آید و در این حالت، خواص مادی تنها در راستای ضخامت تغییر می‌کنند. توجه شود که ضریب پواسون نسبت به ابعاد فضایی ورق ثابت در نظر گرفته شده است. این فرض با توجه به اینکه تغییرات نسبت پواسون مواد پایه خیلی کوچک است، منطقی است. طبق رابطه (۴)، مدول الاستیسیته و چگالی جرمی به صورت روابط (۵-۶) بدست می‌آیند:

$$E(x, z, T) = E_{m1}(T)V_{m1} + E_{m2}(T)V_{m2} + E_{c1}(T)V_{c1} + E_{c2}(T)V_{c2} \quad (۵)$$

$$\rho(x, z) = \rho_{m1}V_{m1} + \rho_{m2}V_{m2} + \rho_{c1}V_{c1} + \rho_{c2}V_{c2} \quad (۶)$$

در معادلات (۵) و (۶)، ρ_{m2}, ρ_{m1} به ترتیب، بیانگر چگالی فلز نوع اول و دوم، ρ_{c2}, ρ_{c1} چگالی سرامیک نوع اول و دوم، E_{m2}, E_{m1} مدول الاستیسیته فلز نوع اول و دوم، E_{c2}, E_{c1} مدول الاستیسیته سرامیک نوع اول و دوم می‌باشند. V ، ضریب نسبت حجمی و مبدا مختصات با توجه به شکل ۱ در قسمت پایین از سمت چپ در نظر گرفته شده است.



شکل ۱- هندسه ورق مستطیلی تابعی دو بعدی مستقر بر بستر پسترناک در دستگاه کارترین

۳- مدل سازی ورق

با فرض تئوری مرتبه سوم، تغییر شکل برشی روابط جابجایی ورق در دستگاه مختصات کارترین به صورت روابط (۷-۹) بیان می‌شوند [۴].

و نسبت پواسون ν را نام برد. با استفاده از این رابطه، مقدار عددی خواص مواد در دمای T قابل محاسبه است [۱۱].

$$P_f = P_0(P_{-1}T^{-1} + 1 + P_1T + P_2T^2 + P_3T^3) \quad (۱)$$

که $P_0, P_{-1}, P_1, P_2, P_3$ ضرایب ثابت دمایی هستند که برای هر ماده منحصر به فرد هستند. معمولاً چگالی جرمی ρ ، تابعیت ضعیفی نسبت به دما دارد و فرض می‌شود که تنها تابعی از Z باشد.

در ورق مستطیلی از جنس مواد تابعی مدرج دوبعدی ویژگی‌های الاستیکی مواد در راستای Z و X متغیر است و براساس قانون نسبت حجمی است [۱۲]. ورق مستطیلی به طول a در راستای X و به پهنای b در راستای Y و ضخامت h در راستای Z مانند شکل ۱ در نظر گرفته شده است. مواد تابعی دو بعدی، معمولاً از تغییرات پیوسته سه یا چهار ماده مختلف تشکیل می‌شوند که یک یا دو ماده از جنس سرامیک و مابقی آنها آلیاژهای فلزی هستند. در اینجا سطح سمت چپ ورق ($x=0$)، از دو نوع سرامیک متفاوت و سطح سمت راست آن ($x=a$)، از دو نوع فلز مختلف ساخته شده است؛ به طوریکه جنس ورق در نقطه ($x=z=0$) سرامیک نوع اول در نقطه ($x=0, z=h$) سرامیک نوع دوم، در نقطه ($x=a, z=0$) فلز نوع اول و در نقطه ($x=a, z=h$) فلز نوع دوم است. به ترتیب c_1 و c_2 ، معرف سرامیک اول و دوم و m_1 و m_2 ، معرف فلز اول و دوم هستند. تابع توزیع کسر حجمی هر ماده را می‌توان به شکل زیر بیان کرد [۱۳]:

$$V_{c1} = \left[1 - \left(\frac{x}{a} \right)^\alpha \right] \left[1 - \left(\frac{z}{h} \right)^\beta \right]$$

$$V_{c2} = \left[1 - \left(\frac{x}{a} \right)^\alpha \right] \left[\left(\frac{z}{h} \right)^\beta \right] \quad (۲)$$

$$V_{m1} = \left[\left(\frac{x}{a} \right)^\alpha \right] \left[1 - \left(\frac{z}{h} \right)^\beta \right]$$

$$V_{m2} = \left[\left(\frac{x}{a} \right)^\alpha \right] \left[\left(\frac{z}{h} \right)^\beta \right] \quad (۳)$$

که α و β ، ضرایب نسبت حجمی توانی به ترتیب در راستای X و Z هستند. خواص مادی در هر نقطه را می‌توان با استفاده از قانون خطی ترکیب مواد بدست آورد؛ لذا خاصیت مادی P مانند مدول الاستیسیته یا چگالی جرمی در ورق تابعی دو بعدی را می‌توان با ترکیب خطی کسر حجمی و خاصیت مادی مربوط به ماده اصلی تعیین کرد:

و $\Delta T = T - T_0$ گرادیان دما هستند، که T_0 دمای محیط است و مقدار آن در این تحقیق $T_0 = 300K$ فرض شده است. معادله انرژی پتانسیل ورق با در نظر گرفتن تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم از رابطه (۱۳) قابل محاسبه است.

$$U_p = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_{xy} \varepsilon_{xy} + \sigma_{xz} \varepsilon_{xz} + \sigma_{yz} \varepsilon_{yz}) dV \quad (13)$$

که در آن V معرف حجم کل ورق است. انرژی پتانسیل ناشی از استقرار ورق بر پایه الاستیک پسترناک نیز، به صورت رابطه (۱۴) بدست می‌آید.

$$U_f = \frac{1}{2} \int_A \left\{ K_w (w)^2 + K_p \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \right\} dA \quad (14)$$

که در آن K_w ضریب سفتی وینکلر بستر پسترناک و K_s ضریب سفتی برشی بستر پسترناک و A نیز، معرف سطح خنثای ورق هستند. انرژی پتانسیل کل ورق، از مجموع انرژی پتانسیل ورق و انرژی پتانسیل ناشی از بستر بدست می‌آید. انرژی جنبشی نیز برای ورق، از جنس مواد تابعی با در نظر گرفتن اینرسی دورانی به صورت رابطه (۱۵) بدست خواهد آمد. رابطه انرژی جنبشی برای ورق، تابعی مدرج از رابطه زیر، قابل محاسبه است.

$$T_p = \frac{1}{2} \int_V \rho(x, z) [\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2 + \dot{u}_3^2] dV \quad (15)$$

که نقطه بالای هر متغیر، نمایانگر مشتق جزئی آن متغیر نسبت به زمان t است. همانطور که قبلاً نیز اشاره شد، در رابطه (۱۵)، چگالی جرمی ρ مستقل از دما در نظر گرفته شده است.

۳-۱- شرایط مرزی ورق

شرایط مرزی کلاسیک ورق عبارتند از: شرط مرزی ساده، گیردار و آزاد که هر کدام بر مبنای شرایط مرزی هندسی و طبیعی یا نیرویی قابل بیان هستند. شرایط مرزی ساده که مرکب از شرایط مرزی هندسی و شرایط مرزی طبیعی در هرلبه از ورق است، به صورت روابط (۱۶-۱۷) معرفی می‌شوند:

$$v = w = \phi_y = N_x = M_x = 0 \quad \text{at } x = 0, a \quad (16)$$

$$u = w = \phi_x = N_y = M_y = 0 \quad \text{at } y = 0, b \quad (17)$$

$$u_1(x, y, z, t) = u(x, y, t) + \left(z - \frac{h}{2}\right) \phi_x - \frac{4}{3h^2} \left(z - \frac{h}{2}\right)^3 \left(\phi_x + \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial x} \right) \quad (7)$$

$$u_2(x, y, z, t) = v(x, y, t) + \left(z - \frac{h}{2}\right) \phi_y - \frac{4}{3h^2} \left(z - \frac{h}{2}\right)^3 \left(\phi_y + \frac{\partial w(x, y, t)}{\partial y} \right) \quad (8)$$

$$u_3(x, y, z, t) = w(x, y, t) \quad (9)$$

در معادلات (۷-۹)، $u(x, y, t)$ و $v(x, y, t)$ جابجایی‌های صفحه میانی ورق به ترتیب در راستاهای x و y و $w(x, y, t)$ جابجایی عرضی صفحه میانی در راستای z هستند. u_1 ، u_2 و u_3 نیز به ترتیب، نشان‌دهنده جابجایی‌های هر نقطه دلخواه از ورق در راستای محورهای x ، y و z می‌باشند. با توجه به مؤلفه‌های جابجایی (۷) تا (۹) و فرض کرنش خطی روابط بین کرنش‌ها و جابجایی‌های ورق به قرار زیر است.

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{0,x} \\ v_{0,y} \\ u_{0,y} + v_{0,x} \end{Bmatrix} + (z - h/2) \begin{Bmatrix} \phi_{x,x} \\ \phi_{y,y} \\ \phi_{x,x} + \phi_{y,y} \end{Bmatrix} - \frac{4}{3h^2} (z - h/2)^3 \begin{Bmatrix} \phi_{x,x} + w_{0,xx} \\ \phi_{y,y} + w_{0,yy} \\ \phi_{x,y} + 2w_{0,xy} + \phi_{y,x} \end{Bmatrix} \quad (10)$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_{0,x} + \phi_x \\ w_{0,y} + \phi_y \end{Bmatrix} - \frac{4}{h^2} (z - h/2)^2 \begin{Bmatrix} w_{0,x} + \phi_x \\ w_{0,y} + \phi_y \end{Bmatrix} \quad (11)$$

که کما (.) بکار رفته در روابط ایندکسی، به معنای مشتق جزئی نسبت به مؤلفه‌های دستگاه مختصات تعریف شده است. با توجه به قانون هوک روابط ساختاری ورق برای تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم به شکل زیر است:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{33} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yz} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Delta T \quad (12)$$

در رابطه (۱۲) $Q_{33} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)}$ و $Q_{12} = \nu Q_{11}$ ، $Q_{11} = \frac{E(z)}{1-\nu^2}$

معرفی می‌گردند. ν نسبت پواسون، α ضریب انبساط حرارتی

$$\Pi = \sum U_{\max} - \sum T_{\max} \quad (28)$$

با مینیمم کردن معادله (۲۸)، یک دستگاه معادلات جبری حاصل می‌شود که از حل آن ضرایب مجهول در توابع آزمون بدست می‌آیند.

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_{m,n}} = 0 \quad (29)$$

در این رابطه (۲۹) q بردار ثوابت مجهول توابع آزمون است. با توجه به شرایط مرزی معرفی شده توابع آزمون که شرایط مرزی هندسی ورق را ارضاء می‌نمایند، با استفاده از توابع مثلثاتی به صورت زیر معرفی می‌گردند:

۴-۱- شرایط مرزی ساده

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N u_{m,n}(t) \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (30)$$

$$v(x, y, t) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N v_{m,n}(t) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (31)$$

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\hat{M}} \sum_{n=1}^{\hat{N}} w_{m,n}(t) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (32)$$

$$\phi_x(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\hat{M}} \sum_{n=1}^{\hat{N}} \phi_{m,n}^1(t) \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (33)$$

$$\phi_y(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\hat{M}} \sum_{n=1}^{\hat{N}} \phi_{m,n}^2(t) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (34)$$

در این روابط m, n به ترتیب، تعداد نیم موج‌ها در راستاهای x و y می‌باشند، t بیانگر زمان و توابع $u_{m,n}(t), v_{m,n}(t), w_{m,n}(t), \phi_{m,n}^1(t)$ و $\phi_{m,n}^2(t)$ ثوابت مجهول توابع آزمون هستند که با کمینه‌سازی اختلاف ما بین انرژی‌های پتانسیل و کرنشی بدست می‌آیند. M, \hat{M}, N, \hat{N} ، تعداد جملات مورد نیاز توابع آزمون هستند که تقریب مناسبی از رفتار ورق را بیان می‌نمایند.

۴-۲- شرایط مرزی گیردار

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N u_{m,n}(t) \sin\left(\frac{2m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (35)$$

$$v(x, y, t) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N v_{m,n}(t) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{2n\pi y}{b}\right) \quad (36)$$

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\hat{M}} \sum_{n=1}^{\hat{N}} w_{m,n}(t) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (37)$$

$$\phi_x(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\hat{M}} \sum_{n=1}^{\hat{N}} \phi_{m,n}^1(t) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (38)$$

در این روابط N_x یا N_y و M_x یا M_y به ترتیب، نیروی عمودی و گشتاور خمشی بر واحد طول می‌باشند. که با جایگزینی معادلات ساختاری در روابط زیر و سپس انتگرال‌گیری در راستای ضخامت بدست می‌آیند:

$$(N_x, M_x, P_x) = \int_0^h \sigma_x(1, z, z^3) dz \quad (18)$$

$$(N_y, M_y, P_y) = \int_0^h \sigma_y(1, z, z^3) dz \quad (19)$$

$$N_{xy} = \int_0^h \sigma_{xy} dz \quad (20)$$

$$(Q_x, R_x) = \int_0^h \sigma_{xz}(1, z^2) dz \quad (21)$$

$$(Q_y, R_y) = \int_0^h \sigma_{yz}(1, z^2) dz \quad (22)$$

فرم دیگر شرایط مرزی ساده را با توجه به حرکت درون صفحه خنثای ورق را می‌توان به شکل زیر بیان کرد:

$$u = w = \phi_y = N_{xy} = M_x = 0 \quad \text{at } x = 0, a \quad (23)$$

$$v = w = \phi_x = N_{xy} = M_y = 0 \quad \text{at } y = 0, b \quad (24)$$

شرایط مرزی گیردار نیز که تنها شامل، شرایط مرزی هندسی در هر لبه هستند، به صورت رابطه (۲۵) معرفی می‌شوند:

$$u = v = w = \phi_x = \phi_y = 0, \quad \text{at } x = 0, a, \quad \text{و} \quad \text{at } y = 0, b \quad (25)$$

شرایط مرزی آزاد در هر لبه، فقط شرایط مرزی نیرویی یا طبیعی را شامل می‌شوند:

$$N_x = N_{xy} = P_x = Q_x = M_x = 0 \quad \text{at } x = 0, a \quad (26)$$

$$N_y = N_{xy} = P_y = Q_y = M_y = 0 \quad \text{at } y = 0, b \quad (27)$$

۴- روش انرژی ریلی- ریتز

در این روش که در واقع یک روش نیمه تحلیلی است، توابع مجهول با توجه به شرایط مرزی برحسب حاصلضرب یک سری توابع معلوم با ضرایب مجهول در نظر گرفته می‌شوند که این توابع، به عنوان توابع آزمون شناخته می‌شوند. سپس بر اساس روش انرژی ریلی- ریتز، تفاضل انرژی‌های جنبشی و پتانسیل سیستم (معادلات لاگرانژ) بدست آمده و با مینیمم کردن این تفاضل، ثوابت مجهول توابع آزمون بدست می‌آیند که با کمک این روش، فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای ارتعاشی ورق حاصل می‌شوند. برای ورق ساخته شده از مواد تابعی معادلات لاگرانژ به صورت زیر تعریف می‌گردند [۱۴]:

با چگالی $\rho=3800 \text{ Kg/m}^3$ ، ضریب پواسون $\nu=0.3$ و مدول الاستیسیته $E=380 \text{ GPa}$ مستقر بر بستر پسترناک برای نسبت اضلاع $a/b=1$ و نسبت ضخامت $h/a=0.05$ با شرایط مرزی ساده برای ضرایب بستر مختلف بدست آمده است. نتایج بدست آمده در این قسمت، با مراجع [۱، ۵، ۱۵] مقایسه شده است. مقادیر \bar{k}_s و \bar{k}_w از روابط $\bar{k}_s=k_s/A$ و $\bar{k}_w=k_w/A$ قابل محاسبه می‌باشند و نیز $A= Eh^3/12(1-\nu^2)$ است. با توجه به نتایج جدول ۳، ملاحظه می‌شود که با افزایش ضریب سختی بستر پسترناک مقادیر فرکانس پایه ورق افزایش می‌یابد. در شکل ۳ و شکل ۲ به ترتیب، نمودار تغییرات فرکانس پایه ورق مستقر بر بستر پسترناک واقع در محیطی با دمای $\Delta T=500 \text{ K}$ بر حسب تغییرات نسبت اضلاع و ضرایب نسبت حجمی توانی برای شرایط مرزی ساده و شرایط مرزی گیردار نمایش داده شده است. نسبت ضخامت برای ورق $h/a=0.15$ و ضرایب بستر $k_w=1000 \text{ M N/m}$ و $k_s=100 \text{ M N/m}$ فرض شده‌اند. در این شکل‌ها همان‌طور که قابل مشاهده است، با افزایش نسبت طول به عرض ورق مقدار فرکانس پایه ارتعاش ورق کمتر خواهد شد که این کاهش فرکانس رفته رفته با شیب کمتری صورت می‌گیرد؛ به طوری که تقریباً برای $a/b>5$ تغییرات فرکانسی نزدیک به صفر است؛ همچنین تغییرات فرکانس پایه ارتعاشی به نسبت اضلاع برای شرایط مرزی گیردار و شرایط مرزی ساده، شبیه به هم است که به دلیل افزایش سفتی سیستم به دلیل افزایش قیود هندسی در مرزهای ورق برای شرایط هندسی و فیزیکی یکسان، فرکانس پایه ورق با شرایط مرزی گیردار به مراتب بیشتر از فرکانس ورق با شرایط مرزی ساده است. در شکل ۴-۷، توزیع کسر حجمی به ترتیب، برای فلز نوع دوم، سرامیک نوع اول، سرامیک نوع دوم و فلز نوع اول برای ضرایب نسبت حجمی توانی مختلف نمایش داده شده است که در این شکل‌ها تاثیرات ضخامت ورق، طول ورق و ضرایب نسبت حجمی توانی بر کسرهای حجمی قابل مشاهده است.

در جدول ۴، تغییرات فرکانس پایه ورق بر حسب پارامترهای مختلف برای شرایط مرزی گیردار نمایش داده شده است. نسبت ضخامت به طول $h/a=0.2$ و نسبت طول به عرض ورق $a/b=1$ فرض شده‌اند. در این جدول، با افزایش

$$\phi_y(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\bar{M}} \sum_{n=1}^{\bar{N}} \phi_{m,n}^2(t) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (39)$$

شرایط مرزی گشتاور خمشی در ورق با مرزهای گیردار با فرض فنرهای پیچشی با سختی زیاد K که در امتداد مرز توزیع گردیده است، به عنوان انرژی پتانسیل اضافی لحاظ می‌شود که تقریب مناسبی از شرایط مرزی گیردار ایجاد می‌نماید. این انرژی پتانسیل U_R به صورت رابطه (۴۰) تعریف می‌شود.

$$U_R = \frac{1}{2} \int_0^b \kappa \left\{ \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=0} \right]^2 + \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=a} \right]^2 \right\} dy + \frac{1}{2} \int_0^a \kappa \left\{ \left[\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=0} \right]^2 + \left[\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=b} \right]^2 \right\} dx \quad (40)$$

جهت استخراج نتایج عددی مقدار ضریب سفتی پیچشی فنر برابر $k=10^8$ در نظر گرفته شده است.

۵- بحث و بررسی نتایج عددی

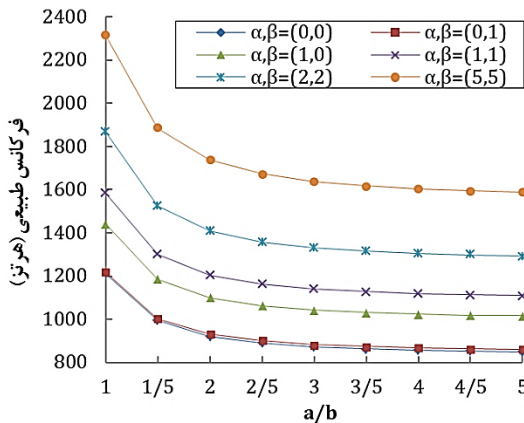
در جدول ۱، ضرایب وابسته دمایی برای چگالی و مدول الاستیسیته مواد تابعی دو بعدی بکار رفته در این پژوهش ارائه شده است [۶]. همچنین با توجه به تأثیر ناچیز تغییرات نسبت پواسون و ضریب انبساط حرارتی بر مقدار عددی فرکانس ورق، این مقادیر ثابت فرض شده‌اند ($\nu=0.24$ ، $\alpha=12 \times 10^{-6} \text{ 1/K}$). به علت اینکه اکثر تحقیقاتی که در این زمینه انجام گرفته است مربوط به ارتعاش ورق مستطیلی از جنس ماده تابعی مدرج یک بعدی است، لذا جهت صحت‌گذاری نتایج در این بخش، نتایج حاصل از ارتعاش ورق مستطیلی از جنس مواد تابعی مدرج در حالت یک بعدی در نظر گرفته شده و با نتایج بدست آمده توسط سایر محققان، مقایسه گردیده است. در جدول ۲، فرکانس‌های طبیعی بدون بعد $\tilde{\omega} = \omega h \sqrt{\rho_c/E_c}$ برای ورق از جنس مواد تابعی مدرج یک بعدی با نسبت ضخامت به طول $h/a=0.1$ ، نسبت اضلاع $a/b=1$ و $\Delta T=0$ برای ضریب توانی نسبت حجمی (β) مختلف با مراجع مختلف مقایسه شده است. همان‌طور که قابل مشاهده است، تطابق خوبی میان نتایج حاصله در این پژوهش و سایر مراجع وجود دارد. در جدول ۳، فرکانس‌های بی‌بعد $\tilde{\beta} = \omega b^2 \sqrt{\rho h/A} / \pi^2$ ورق ایزوتروپیک از جنس Al_2O_3

جدول ۱- ضرایب وابسته دمایی چگالی ρ (Kg/m³)، مدول الاستیسیته E (Gpa) و ضریب انبساط حرارتی ξ (1/k) مواد

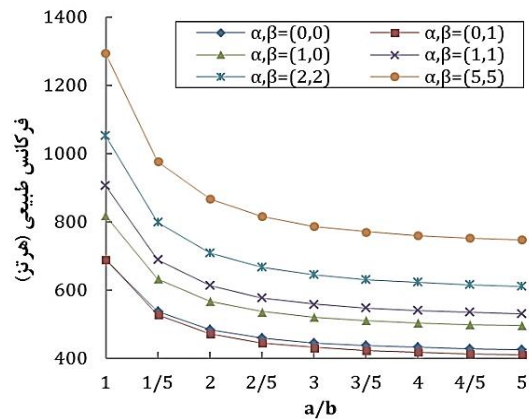
P_3	P_2	P_1	P_0	P_{-1}	ماده	موقعیت	
.	$-۶/۵۳۴ \times 10^{-۷}$	$۳/۰۷۹ \times 10^{-۴}$	۲۰۱/۰۴	.	SUS304	E_{M_1}	E
$-۳/۶۸۱ \times 10^{-1۰}$	$۱/۳۱۴ \times 10^{-۶}$	$-۱/۳۷۱ \times 10^{-۳}$	۲۴۴/۲۷	.	ZrO ₂	E_{C_1}	
.	.	$-۴/۵۸۶ \times 10^{-۴}$	۱۲۲/۵۶	.	Ti-6Al-4V	E_{M_2}	
$-۸/۹۴۶ \times 10^{-11}$	$۲/۱۶۰ \times 10^{-۷}$	$-۳/۰۷۰ \times 10^{-۴}$	۳۴۸/۴۳	.	Si ₃ N ₄	E_{C_2}	
.	.	.	۸۱۶۶	.	SUS304	ρ_{M_1}	ρ
.	.	.	۳۰۰۰	.	ZrO ₂	ρ_{C_1}	
.	.	.	۴۴۲۹	.	Ti-6Al-4V	ρ_{M_2}	
.	.	.	۲۳۷۰	.	Si ₃ N ₄	ρ_{C_2}	
.	.	$۸/۰۸۶ \times 10^{-۶}$	$۱۲/۳۳ \times 10^{-۶}$.	SUS304	ξ_{M_1}	ξ
.	$۹/۵۴۹ \times 10^{-۷}$	$-۱/۴۲۱ \times 10^{-۴}$	$۱۳/۳۰ \times 10^{-۶}$.	ZrO ₂	ξ_{C_1}	
.	$۳/۶۲۱ \times 10^{-۷}$	$۷/۴۸۳ \times 10^{-۴}$	$۷/۴۳ \times 10^{-۶}$.	Ti-6Al-4V	ξ_{M_2}	
.	.	$۹/۰۹۵ \times 10^{-۶}$	$۵/۸۷۲۳ \times 10^{-۶}$.	Si ₃ N ₄	ξ_{C_2}	

جدول ۲- مقایسه فرکانس‌های طبیعی بی بعد برای ورق مستطیلی تابعی با شرایط مرزی ساده

α							نتایج
۱۰	۸	۵	۲	۱	۰/۵	۰	
۳/۶۲۷۷	۳/۶۸۳۰	۳/۷۸۳۷	۴/۰۰۶۳	۴/۴۵۴۵	۴/۹۲۰۷	۵/۷۶۹۳	مرجع [۱]
۳/۵۹۲۳	۳/۶۴۱۰	۳/۷۲۱۸	۳/۹۴۷۴	۴/۳۴۷۴	۴/۸۲۰۹	۵/۶۷۶۳	مرجع [۲]
۳/۶۳۶۸۴	۳/۶۸۴۵۷	۳/۷۶۸۲۳	۴/۰۰۸۹۵	۴/۴۱۹۲۳	۴/۹۰۱۴۵	۵/۷۶۹۴۲	نتایج حاضر



شکل ۲- نمودار تغییرات فرکانس پایه ورق بر حسب تغییرات نسبت اضلاع برای شرایط مرزی گیردار



شکل ۳- نمودار تغییرات فرکانس پایه ورق بر حسب تغییرات نسبت اضلاع برای شرایط مرزی ساده

جدول ۳- مقایسه فرکانس‌های بی‌بعد ورق ایزوتروپیک مستقر بر بستر پسترناک برای ضرایب سختی بستر متفاوت و شرایط مرزی ساده

k_w, k_s (M N/m)				مراجع	h/a
(۵۰۰و۱۰)	(۱۰۰و۱۰)	(۵۰۰و۰)	(۱۰۰و۰)		
۳/۳۴۰۰	۲/۶۵۵۱	۳/۰۲۱۵	۲/۳۴۱۳	مرجع [۱]	۰/۰۱
۳/۳۴۰۰	۲/۶۵۵۱	۳/۰۲۱۵	۲/۳۴۱۳	مرجع [۱۵]	
۳/۳۳۹۸	۲/۶۵۵۱	۳/۰۲۱۴	۲/۳۴۱۳	مرجع [۵]	
۳/۳۴۰۰	۲/۶۵۵۲	۳/۰۲۱۵	۲/۳۴۱۴	نتایج حاضر	
(۱۰۰۰و۱۰)	(۲۰۰و۱۰)	(۱۰۰۰و۱۰)	(۲۰۰و۰)		
۳/۹۸۰۵	۲/۷۸۴۲	۳/۷۲۱۲	۲/۳۹۸۹	مرجع [۱]	۰/۱
۳/۹۸۰۵	۲/۷۸۴۲	۳/۷۲۱۲	۲/۳۹۸۹	مرجع [۱۵]	
۳/۹۵۶۶	۲/۷۷۵۶	۳/۷۰۰۸	۲/۳۹۵۱	مرجع [۵]	
۳/۹۸۰۵۳	۲/۷۸۴۲	۳/۷۲۱۲۶	۲/۳۹۸۹۳	نتایج حاضر	
(۱۰۰۰و۱۰)	(۱۰۰و۱۰)	(۱۰و۱۰)	(۰و۱۰)		
۲/۸۵۶۷	۲/۴۵۹۰	۲/۲۷۲۲	۲/۲۵۰۵	مرجع [۱]	۰/۲
۳/۸۵۶۷	۲/۴۵۹۱	۲/۲۷۲۲	۲/۲۵۰۵	مرجع [۱۵]	
۳/۷۱۱۱	۲/۴۳۰۰	۲/۲۵۳۹	۲/۲۳۳۴	مرجع [۵]	
۳/۸۵۶۷۶	۲/۴۵۹۲۹	۲/۲۷۲۵	۲/۲۵۰۷۹	نتایج حاضر	

توان حجمی در شکل ۸ نیز، همین امر است. در شکل ۹، تغییرات فرکانس پایه ورق برحسب دما برای ضرایب بستر مختلف با ضرایب نسبت حجمی توانی $\alpha=1, \beta=0$ ، نسبت ضخامت به طول $h/a=0.2$ و شرایط مرزی ساده نمایش داده شده است. با توجه به شکل ملاحظه می‌شود که با افزایش ضریب سختی وینکلر و ضریب سختی برشی، مقادیر فرکانسی ورق افزایش می‌یابد؛ همانگونه که قابل مشاهده است، تاثیر افزایش ضریب سختی برشی روی فرکانس پایه ورق، به مراتب بیشتر از تاثیر ضریب سختی وینکلر است. در جدول ۵، تغییرات فرکانس پایه ورق برحسب پارامترهای مختلف برای شرایط مرزی ساده نمایش داده شده است که ضرایب نسبت حجمی توانی $\alpha=1, \beta=0$ و نسبت طول به عرض ورق $a/b=1$ در نظر گرفته شده است. در این جدول مشاهده می‌شود که با افزایش نسبت ضخامت به طول ورق فرکانس، پایه ورق به شدت با افزایش روبرو می‌شود که این امر نیز، ناشی از افزایش سفتی ورق است.

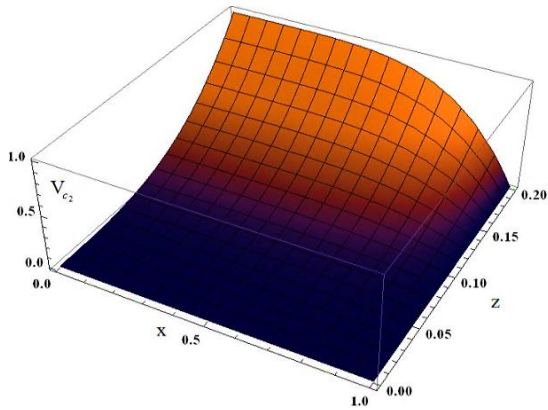
ضرایب توانی نسبت حجمی و ضرایب بستر، مقدار فرکانس پایه ورق افزایش و با افزایش درجه حرارت، فرکانس کاهش می‌یابد. در شکل ۸، تغییرات فرکانس پایه ورق مستقر بر بستر پسترناک بر حسب دما برای ضرایب نسبت حجمی توانی مختلف برای نسبت ضخامت به طول $h/a=0.2$ و ضرایب بستر $k_w=1000\text{ M N/m}, k_s=100\text{ M N/m}$ نمایش داده شده است که در این حالت، شرایط مرزی ساده در نظر گرفته شده است. در این شکل، افزایش دما سبب کاهش فرکانس پایه ورق می‌شود که تغییرات فرکانس برای تغییرات دمایی، کمتر از ۵۰ درجه کلونین ناچیز است. در این شکل نیز مشاهده می‌شود که هر چه مقدار ضریب توانی نسبت حجمی افزایش می‌یابد، مقدار فرکانس سیستم نیز افزایش می‌یابد. با افزایش نسبت توان حجمی، به سفتی ورق افزوده می‌شود و در واقع سیستم در حالی که جرم ثابتی دارد، سخت‌تر گشته و به همین علت فرکانس‌های ورق افزایش می‌یابد و علت رابطه مستقیم بین فرکانس و نسبت

جدول ۴- تغییرات فرکانس پایه ی ورق بر حسب پارامترهای مختلف برای شرایط مرزی گیردار

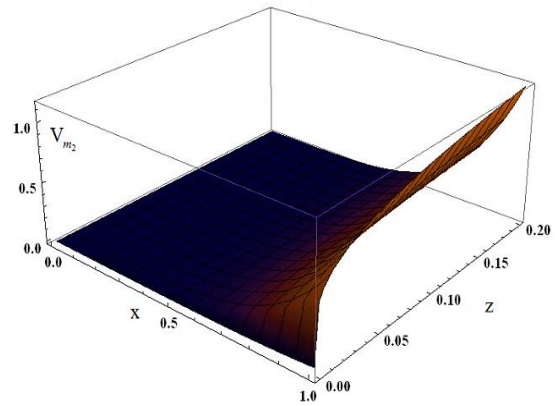
(α, β)						$\Delta T(K)$	$k_w, k_s (MN/m)$
(۵و۵)	(۲و۵)	(۲و۲)	(۱و۱)	(۱و۰)	(۰و۰)		
۲۵۰۵/۳۹	۲۰۸۸/۲۹	۲۰۲۵/۲۱	۱۷۲۱/۲۵	۱۵۸۷/۱۵	۱۲۹۶/۷۵	۳۰۰	
۲۴۶۳/۵۳	۲۰۵۱/۸۹	۱۹۷۶/۲۵	۱۶۶۶/۴۰	۱۴۸۰/۸۰	۱۲۳۵/۳۷	۵۰۰	(۰و۰)
۲۴۵۵/۰۷	۲۰۲۳/۷۶	۱۹۳۶/۹۵	۱۶۰۴/۰۶	۱۳۷۵/۵۵	۱۱۳۷/۱۱	۸۰۰	
۲۵۰۷/۹۳	۲۰۹۰/۵۴	۲۰۲۷/۵۹	۱۷۲۳/۶۳	۱۵۹۰/۲۷	۱۲۹۹/۹۴	۳۰۰	
۲۴۶۶/۱۱	۲۰۵۴/۱۷	۱۹۷۸/۶۹	۱۶۶۸/۸۵	۱۴۸۴/۱۴	۱۲۳۸/۷۲	۵۰۰	(۱۰۰و۱۰۰)
۲۴۵۷/۶۶	۲۰۲۶/۰۸	۱۹۳۹/۴۴	۱۶۰۶/۶۱	۱۳۷۹/۱۴	۱۱۴۰/۷۵	۸۰۰	
۲۵۱۵/۹۵	۲۰۹۷/۶۲	۲۰۳۵/۰۹	۱۷۳۱/۱۱	۱۶۰۰/۰۶	۱۳۰۹/۹۸	۳۰۰	
۲۴۷۴/۲۶	۲۰۶۱/۳۸	۱۹۸۶/۳۷	۱۶۷۶/۵۸	۱۴۹۴/۶۳	۱۲۴۹/۲۵	۵۰۰	(۲۵۰و۵۰)
۲۴۶۵/۸۴	۲۰۳۳/۳۸	۱۹۴۷/۲۷	۱۶۱۴/۶۳	۱۳۹۰/۴۲	۱۱۵۲/۱۸	۸۰۰	
۲۵۳۰/۷۰	۲۱۱۰/۶۵	۲۰۴۸/۸۷	۱۷۴۴/۸۵	۱۶۱۸/۰۱	۱۳۲۸/۳۴	۳۰۰	
۲۴۸۹/۲۶	۲۰۷۴/۶۳	۲۰۰۰/۴۹	۱۶۹۰/۷۶	۱۵۱۳/۸۳	۱۲۶۸/۴۹	۵۰۰	(۱۰۰۰و۱۰۰)
۲۴۸۰/۸۹	۲۰۴۶/۸۱	۱۹۶۱/۶۷	۱۶۲۹/۳۶	۱۴۱۱/۰۳	۱۱۷۳/۰۱	۸۰۰	

جدول ۵- تغییرات فرکانس پایه ورق بر حسب پارامترهای مختلف برای شرایط مرزی ساده

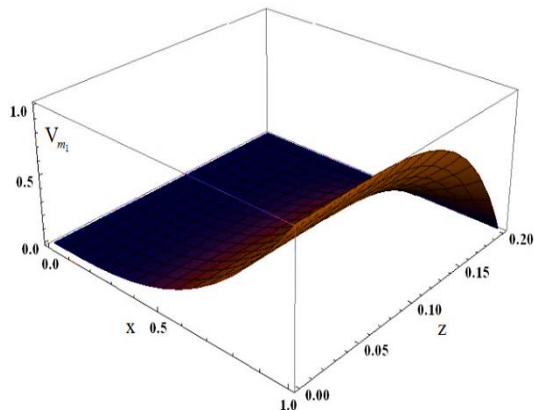
$\Delta T(K)$						h/a	$k_w, k_s (MN/m)$
۸۰۰	۷۰۰	۶۰۰	۵۰۰	۴۰۰	۳۰۰		
۲۳۸/۹۳۶	۲۴۴/۸۰	۲۵۱/۷۶۶	۲۶۰/۰۴۵	۲۶۹/۸۰۴	۲۸۱/۱۶۶	-/۰۵	
۴۶۶/۴۲۷	۴۷۷/۸۷۶	۴۹۱/۴۷۴	۵۰۷/۶۳۵	۵۲۶/۶۸۵	۵۴۸/۸۶۵	۰/۱	(۰و۰)
۶۷۴/۱۰۶	۶۹۰/۶۵۲	۷۱۰/۳۰۵	۷۳۳/۶۶۱	۷۶۱/۱۹۳	۷۹۳/۲۴۹	-/۱۵	
۸۵۷/۸۹	۸۷۸/۹۴۷	۹۰۳/۹۵۸	۹۳۲/۶۸۲	۹۶۸/۷۲۱	۱۰۰۹/۵۲	۰/۲	
۴۷۴/۴۶۹	۴۷۷/۴۴۹	۴۸۱/۰۵۸	۴۸۵/۴۴۲	۴۹۰/۷۳۹	۴۹۷/۰۷۶	-/۰۵	
۵۴۸/۳۳	۵۵۸/۱۰۵	۵۶۹/۷۹	۵۸۳/۷۸۷	۶۰۰/۴۲۶	۶۱۹/۹۷۴	۰/۱	(۲۵۰و۵۰)
۷۱۳/۴۵۷	۷۲۹/۱۱	۷۴۷/۷۵۳	۷۶۹/۹۷۴	۷۹۶/۲۵۲	۸۲۶/۹۵	-/۱۵	
۸۸۱/۰۷۷	۹۰۱/۵۹۳	۹۲۵/۹۹۲	۹۵۵/۰۳	۹۸۹/۳۱۳	۱۰۲۹/۲۹	۰/۲	



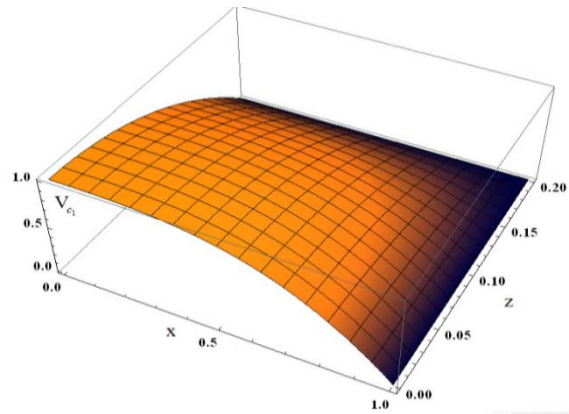
شکل ۵- توزیع کسر حجمی برای سرامیک نوع دوم به ازای $\alpha=5, \beta=3$



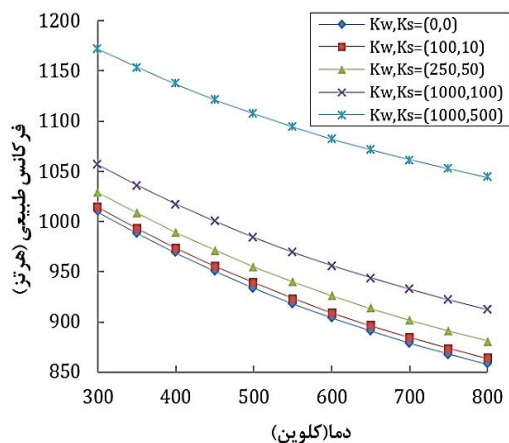
شکل ۴- توزیع کسر حجمی برای فلز نوع دوم به ازای $\alpha=5, \beta=0.2$



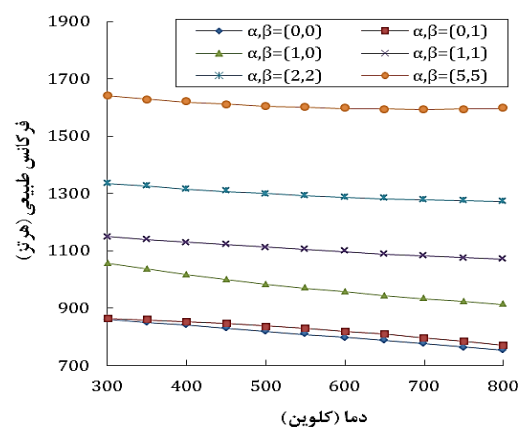
شکل ۷- توزیع کسر حجمی برای فلز نوع اول به ازای $\alpha=3, \beta=5$



شکل ۶- توزیع کسر حجمی برای سرامیک نوع اول به ازای $\alpha=3, \beta=2$



شکل ۹- تغییرات فرکانس پایه ی ورق بر حسب دما برای ضرایب بستر مختلف و شرایط مرزی ساده



شکل ۸- تغییرات فرکانس پایه ی ورق بر حسب دما برای ضرایب نسبت حجمی توانی مختلف و شرایط مرزی ساده

- [4] Hosseini-Hashemi S, Fadaee M, Atashipour SR (2011) Study on the free vibration of thick functionally graded rectangular plates according to a new exact closed-form procedure. *Compos Struct* 93(2): 722-735.
- [5] Zhou D, Cheung Y, Lo S, Au F (2004) Three - dimensional vibration analysis of rectangular thick plates on Pasternak foundation. *Int J Numer Meth Eng* 59(10): 1313-1334.
- [6] Kim YW (2005) Temperature dependent vibration analysis of functionally graded rectangular plates. *J Sound Vib* 284(3): 531-549.
- [7] Li Q, Iu V, Kou K (2009) Three-dimensional vibration analysis of functionally graded material plates in thermal environment. *J Sound Vib* 324(3): 733-750.
- [8] Qian L, Batra R, Chen L (2004) Static and dynamic deformations of thick functionally graded elastic plates by using higher-order shear and normal deformable plate theory and meshless local Petrov-Galerkin method. *Compos Part B-Eng* 35(6): 685-697.
- [9] Zhang DG (2013) Modeling and analysis of FGM rectangular plates based on physical neutral surface and high order shear deformation theory. *Int J Mech Sci* 68: 92-104.
- [10] Shen HS, Wang ZX (2012) Assessment of Voigt and Mori-Tanaka models for vibration analysis of functionally graded plates. *Compos Struct* 94(7): 2197-2208.
- [11] HS Shen (2016) *Functionally graded materials: nonlinear analysis of plates and shells*. CRC press.
- [12] Hosseini-Hashemi S, Fadaee M, Atashipour SR (2011) A new exact analytical approach for free vibration of Reissner-Mindlin functionally graded rectangular plates. *Int J Mech Sci* 53(1): 11-22.
- [13] Asemi K, Salehi M, Akhlaghi M (2013) Three dimensional static analysis of two dimensional functionally graded plates. *IJMECH* 2(2): 21-32.
- [14] Amabili M, Karazis K, Khorshidi K (2011) Nonlinear vibrations of rectangular laminated composite plates with different boundary conditions. *Int J Struct Stab Dy* 11(4): 673-695.
- [15] Xiang Y, Wang C, Kitipornchai S (1994) Exact vibration solution for initially stressed Mindlin plates on Pasternak foundations. *Int J Mech Sci* 36(4): 311-316.

۶- نتیجه گیری

در تحقیق حاضر، به بررسی تأثیرات محیط حرارتی بر ارتعاشات آزاد ورق مستطیلی از جنس مواد تابعی مدرج دو بعدی مستقر بر بستر پسترناک پرداخته شد. جهت تحلیل ارتعاش ورق، از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم استفاده شده است. شرایط مرزی مورد استفاده، برای حالت‌های ساده و گیردار است. با بررسی نتایج عددی به طور خلاصه نتایج زیر بدست آمدند:

با افزایش نسبت اضلاع ورق، مقدار فرکانس پایه ارتعاش کم خواهد شد.

با افزایش ضخامت ورق، مقدار فرکانس پایه ورق نیز افزایش می‌یابد.

با افزایش ضریب سختی وینکلر و ضریب سختی برشی، مقادیر فرکانس افزایش می‌یابد.

تأثیر ضریب سختی برشی روی فرکانس پایه ورق، به مراتب بیشتر از تأثیر ضریب سختی وینکلر است.

هر چه مقدار ضرایب توانی نسبت حجمی افزایش یابد، مقدار فرکانس پایه ورق نیز افزایش می‌یابد.

با افزایش دما، فرکانس پایه ورق با کاهش روبرو می‌شود.

همچنین مشاهده می‌شود، فرکانس ارتعاشی برای حالت گیردار، بیشتر از حالت ساده است.

۷- مراجع

- [1] Hosseini-Hashemi S, Taher HRD, Akhavan H, Omid M (2010) Free vibration of functionally graded rectangular plates using first-order shear deformation plate theory. *Appl Math Model* 34(5): 1276-1291.
- [2] Zhao X, Lee Y, Liew KM (2009) Free vibration analysis of functionally graded plates using the element-free kp-Ritz method. *J Sound Vib* 319(3): 918-939.
- [3] Talha M, Singh B (2010) Static response and free vibration analysis of FGM plates using higher order shear deformation theory. *Appl Math Model* 34(12): 3991-4011.