



بررسی اثرات غیرخطی بر روی پاسخ فرکانسی سیستم دیسک پره‌دار

احسان رئیسی استبرق^{۱*} و سعید ضیایی‌راد^۲

^۱ مربی، عضو هیات علمی دانشگاه جیرفت

^۲ استاد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان

چکیده

در این مقاله به بررسی اثرات غیرخطی بر روی رفتار ارتعاشی سیستم دیسک پره‌دار نامیزان پرداخته می‌شود. این نامیزانی در سیستم ناشی از تفاوت پارامترهای ماده‌ای یا هندسی هر پره می‌باشد. مقادیر نامیزانی که غیر قابل کنترل (به علت وجود تولرانس‌های ساخت) و غیرقابل پیش‌بینی هستند، می‌توانند به‌صورتی در سیستم القا شوند که پاسخ سیستم را تا حداکثر مقدار ممکن افزایش دهند. نوآوری این مقاله در نظر گرفتن پارامترهای غیرخطی در بدست آوردن پاسخ فرکانسی سیستم‌های نامیزان می‌باشد.

در تحقیق حاضر، ابتدا مدل غیرخطی ارائه شده و معادله حرکت آن نوشته شده‌است. سپس از روش اختلالات کوچک که برای حل مسائل غیرخطی کاربرد دارد، استفاده شده است. در اینجا با به کار بردن روش مقیاس چندگانه معادلات حل شده‌اند و پاسخ حالت دائم سیستم‌های نامیزان مورد بررسی قرار گرفته است. در ادامه پاسخ حالت دائم سیستم‌های میزان و نامیزان مقایسه شده‌اند. در نهایت نتایج حاصل از حل عددی معادلات، برای مدل متقارن دایره‌ای سه، پنج و هشت درجه آزادی بررسی شده است. نتایج نشان می‌دهد وجود نامیزانی در سیستم می‌تواند ماکزیمم پاسخ فرکانسی و محل اتفاق افتادن آن را تغییر دهد. همچنین باعث ایجاد پدیده پرش در پاسخ فرکانسی سیستم شود که برای سیستم نامطلوب است.

کلمات کلیدی: سیستم‌های غیرخطی؛ نامیزانی ماده‌ای یا هندسی؛ روش اختلالات کوچک؛ روش مقیاس چندگانه؛ پاسخ دائم.

۱- مقدمه

سیستم می‌تواند از بین برود. مقادیر نامیزانی که اصولاً غیر قابل کنترل (به علت وجود تولرانس‌های ساخت) و غیرقابل پیش‌بینی هستند می‌توانند به‌گونه‌ای در سیستم القا شوند که باعث افزایش پاسخ فرکانسی سیستم شوند. نایفه^۱ [۱]

دیسک پره‌دار در سیستم‌های مختلف مهندسی، مانند فن‌ها، پمپ‌ها، توربین‌های ژنراتور و موتورهای جت کاربرد فراوان دارد. در حالت ایده‌آل این سیستم‌ها در حالت میزان یا تقارن دایره‌ای قرار دارند. اما در عمل همواره اختلافات تصادفی و کوچک بین پره‌ها وجود دارد. به این ترتیب تقارن دایره‌ای

^۱ Nayfeh

قسمت نوک پره، نامیزان شد. به منظور بررسی درستی نتایج حاصل از حل تحلیلی برای شکل مودها، افزایش در دامنه پاسخ فرکانسی و تغییر فرکانس طبیعی به دلیل وجود نامیزانی در سیستم دیسک پره‌دار، نتایج بدست آمده با نتایج بدست آمده از آزمایش مقایسه شد.

ریواس^{۱۰} و همکاران [۱۱] در سال ۲۰۰۳ به مطالعه و اندازه‌گیری ماکزیمم دامنه پاسخ فرکانسی سیستم دیسک پره‌دار در حالت پایا به دلیل وجود نامیزانی در سیستم پرداختند. روش بهینه‌سازی پیشنهاد شده برای بررسی سیستم نامیزان به‌عنوان یک تقریب فیزیکی از بدترین خواص مربوط به پره‌هاست که باعث می‌شود ماکزیمم دامنه برای یک پره خاص تحت نامیزانی اتفاق بیفتد. این روش بهینه‌سازی برای دو مدل کاهش‌یافته سیستم دیسک پره‌دار و مدل یک درجه آزادی سیستم با در نظر گرفتن پارامترهای مختلف همچون کوپلینگ بین پره‌ها، در نظر گرفتن دمپر و مرتبه تحریک موتور مورد استفاده قرار گرفت.

جونز^{۱۱} و کرس^{۱۲} [۱۲] در سال ۲۰۰۳ به بررسی وجود نامیزانی در سیستم دیسک پره‌دار با استفاده از تابع انتقال پرداختند، که تابع پاسخ فرکانسی توسط فرکانس‌های طبیعی و فرکانس‌های آنتی رزونانس^{۱۳} توصیف می‌شد. با این تعریف فرکانس آنتی رزونانس به عنوان یک فاکتور مهم در اندازه‌گیری ماکزیمم پاسخ فرکانسی سیستم مطرح شد. آن‌ها با فرموله کردن پاسخ فرکانسی با استفاده از مقادیر ویژه ماتریس کاهش‌یافته سیستم، دو حالت زیر را مورد بررسی قرار دادند: (۱) تاثیر وجود نامیزانی موجود در یک پره خاص، بر روی پاسخ فرکانسی سایر پره‌ها (۲) در نظر گرفتن مرتبه تحریک N و N/2 برای موتور به منظور رسیدن به ماکزیمم پاسخ فرکانسی.

کریستین^{۱۴} و سانتوس^{۱۵} [۱۳] خصوصیات دینامیکی پره‌های نامیزان روتور را بررسی کردند. آن‌ها در ادامه سیستم میزان و نامیزان را تحلیل و نتایج را با هم مقایسه کردند.

پدیده‌های منحصربه‌فرد در پاسخ دینامیکی سیستم‌های غیرخطی را به‌طور کامل بررسی کرده‌است. او وقوع پدیده‌هایی مانند پرش^۱ که تنها در سیستم‌های واقعی مشاهده می‌شوند را به‌طور ریاضی اثبات کرد. وقوع پدیده پرش تنها در سیستم‌های غیرخطی قابل اثبات است. همچنین پدیده محلی‌سازی مودهای غیرخطی مورد مطالعه قرار گرفته که به معرفی مفهوم مودهای نرمال و غیرخطی^۲ منجر شده‌است. تئوری اصلی برای مودهای نرمال و غیرخطی توسط روزنبرگ مطرح شد، که برای معرفی مفهوم مودهای نرمال در یک سیستم کنسرواتو خطی به کار گرفته شد [۲].

لین^۳ و میگنولت^۴ [۳] تاثیر تفاوت بین ضریب استهلاک پره‌ها را بر روی پاسخ فرکانسی سیستم بررسی کردند. آن‌ها به این نتیجه رسیدند که نامیزانی موجود در پره‌ها می‌تواند باعث افزایش دامنه پاسخ پره‌ها نسبت به حالت میزان شود. همچنین آن‌ها اثر پارامترهای ساختاری بر روی پراکندگی دامنه پره‌ها^۵ را بررسی کردند.

بررسی ارتعاشات غیرخطی سیستم‌های متقارن توسط واکاکیس^۶ [۴] و دیگران [۵-۷] انجام شده است. سامارانیک^۷ و همکاران [۸] در سال ۲۰۰۰ یک سیستم متقارن دایره‌ای چنددرجه آزادی دارای کوپلینگ ضعیف را برای بدست آوردن رزونانس اولیه مطالعه کردند. در سال ۲۰۰۱ یک روش تقریبی برای محاسبه توابع پاسخ فرکانسی توسط سکرترو^۸ [۹] و همکاران معرفی شد.

جاج^۹ و همکاران [۱۰] تست بررسی تاثیر وجود نامیزانی اتفاقی را بر روی پاسخ اجباری سیستم دیسک پره‌دار در سال ۲۰۰۱ انجام دادند. هدف از این آزمایش بررسی پدیده محلی‌سازی و بدست آوردن ماکزیمم پاسخ اجباری سیستم دیسک پره‌دار بود. برای انجام این تست از یک مدل دوازده پره‌ای استفاده کردند. سیستم با نابرابر کردن وزن پره‌ها در

¹ Jump

² Nonlinear Normal Modes (NNMs)

³ Lin

⁴ Mignolet

⁵ Scatter of blade amplitudes

⁶ Vakakis

⁷ Samaranyake

⁸ Sextro

⁹ Judge

¹⁰ Rivas

¹¹ Jones

¹² Cross

¹³ Antiresonant Frequencies

¹⁴ Christensen

¹⁵ Santos

همچنین وابستگی کنترل سیستم دیسک پره‌دار به سرعت-های متفاوت چرخش و شکل مودها را به صورت تحلیلی بررسی کردند.

یان^۱ و همکاران [۱۴] به بررسی و انجام آزمایش بر روی یک سیستم دیسک پره‌دار در سال ۲۰۰۸ پرداختند و نامیزانی را در سختی مربوط به پرها در نظر گرفتند و سپس نتایج مربوط به آزمایش خود را با نتایج تحلیلی مقایسه کردند. بیچکوفسکی^۲ [۱۵] در سال ۲۰۰۹ از روش کاهش مرتبه برای تخمین عمر روتور استفاده کرد. مدل مورد استفاده برای پیش‌بینی فرکانس، تغییرات تنش، تاثیرات نامیزانی و جنس متفاوت پرها به کار گرفته شد. ضیایی راد و همکاران [۱۶] در سال ۲۰۱۰ به بررسی سیستم دیسک پره‌دار نامیزان پرداختند و روش‌هایی برای کاهش پاسخ سیستم نامیزان ارائه کردند. همچنین رئیس و همکاران [۱۷] با استفاده از شبکه عصبی و الگوریتم ژنتیک ماکزیمم پاسخ سیستم نامیزان را محاسبه کردند.

در این مطالعه به‌طور خاص، در ادامه بررسی‌های انجام شده بر روی سیستم دیسک پره‌دار نامیزان، این تاثیرات برای حالت کلی از سیستم‌های تقارن دایره‌ای با فرض وجود نامیزانی‌های ناشی از پارامترهای ماده‌ای یا هندسی بررسی شده‌است. ابتدا مدل مورد نظر شامل N پاندول غیرخطی ارائه شده و معادله حرکت آن نوشته شده‌است. سپس از روش اختلالات کوچک استفاده شده و با به کار بردن روش مقیاس چندگانه معادلات حل شده‌اند. در ادامه پاسخ حالت دائم این سیستم‌ها مورد بررسی قرار گرفته است. پاسخ حالت دائم سیستم‌های میزان و نامیزان مقایسه شده و پدیده‌های خاص غیرخطی احتمالی در این سیستم‌ها معرفی شده است. اگر یک سیستم پیوسته داشته باشیم برای حل مسئله باید ابتدا از روش‌های گسسته‌سازی مانند روش المان محدود استفاده کنیم و سیستم را به یک سیستم گسسته تبدیل کنیم. اگر بخواهیم مسئله را با دقت بالا حل کنیم باید از همین ماتریس‌ها به‌طور کامل استفاده نماییم. اما یک سیستم گسسته دیسک پره‌دار دارای ماتریس‌های جرم، سختی و

ضریب استهلاک است که به دلیل بزرگ بودن ابعاد ماتریس-ها و زیاد بودن حجم محاسبات برای حل این گونه مسائل از روش‌های کاهش مرتبه استفاده می‌کنیم. از جمله روش‌های کاهش مرتبه می‌توان روش ترکیب مودهای تشکیل دهنده را نام برد که بر اساس خردکردن سیستم واقعی به زیر سازه‌ها می‌باشد. سیستم دیسک پره‌دار در حالت واقعی (نامیزان)، به دو زیر سیستم خرد می‌شود که عبارتند از سیستم در حالت میزان که حالت ایده‌آل می‌باشد و جملاتی که موجب نامیزانی سیستم می‌شوند. زیر سیستمی که موجب نامیزانی می‌شود ماتریس جرم و سختی دارد که هر دو از اختلاف بین ماتریس‌های جرم و سختی سیستم واقعی و سیستم ایده‌آل تشکیل می‌شوند. این روش‌ها با تشکیل ماتریس قطری جرم و بلوک قطری سختی سیستم را کاهش می‌دهند. در نهایت برای حل این سیستم کاهش‌یافته می‌توانیم از روش مقیاس چندگانه استفاده می‌کنیم.

۲- ارائه مدل غیر خطی

حل مسائل غیرخطی بسیار به مسئله مورد مطالعه بستگی دارد، به‌طوری‌که برای هر مدل، حل مخصوص به خود ارائه می‌شود. در نتیجه پیش از هر چیز باید مدل دینامیکی مناسبی برای نمایش سیستم مورد نظر معرفی نماییم.

همان‌طور که در شکل ۱ نشان داده شده، در این مقاله از یک مدل متمرکز دیسک پره‌دار استفاده شده است. این سیستم از N پاندول غیرخطی تشکیل شده‌است که هر کدام با میله بدون جرم به زمین متصل شده‌اند. هر پاندول با استفاده از یک فنر خطی با دو پاندول مجاور درگیر شده است. همچنین یک فنر غیرخطی با جمله غیرخطی مکعبی نیز هر پاندول را به زمین متصل کرده است. در ادامه برای تحلیل اجباری سیستم یک مستهلک کننده خطی پاندول را به زمین متصل می‌کند. نکته‌ای که سیستم را از لحاظ دایره‌ای متقارن می‌سازد این است که پاندول اول و آخر به هم متصل هستند.

¹ Yan

² Beachkofski

³ CaseStudy

نیروهای خارجی اعمالی به هر عضو هارمونیک با دامنه کوچک می‌باشد. در این مطالعه هدف بررسی تاثیر نامیزانی‌های کوچک بر سیستم‌های غیرخطی تقارن دایره‌ای است. برای این هدف پارامتر نامیزانی را بدون کاستن کلیت مسئله، در پارامترهای سختی اتصال به زمین، کوپلینگ و جرم هر پاندول و حتی در ضریب استهلاک در نظر می‌گیریم. با فرض اینکه اولین پاندول دارای مشخصات اسمی است تغییرات پارامترهای فیزیکی پاندول‌های دیگر را نسبت به پاندول اول به ترتیب زیر در نظر می‌گیریم (همان‌طور که از فرضیات رابطه (۴) مشخص می‌شود دو طرف تساوی دارای بعد یکسان هستند):

$$\begin{aligned} \frac{k_n}{k_1} &= 1 + \varepsilon \hat{k}_n + O(\varepsilon^2), \quad \frac{m_n}{m_1} = 1 + \varepsilon \hat{m}_n + O(\varepsilon^2) \\ \frac{c_n}{\sqrt{m_1} \sqrt{k_1}} &= 2\xi \varepsilon + O(\varepsilon^2), \quad \frac{K_n}{k_1} = \varepsilon \hat{K} + O(\varepsilon^2) \\ \frac{\mu_n}{k_1} &= \hat{\mu} + O(\varepsilon), \quad \frac{F_n / m_n}{k_1 / m_1} = f_n \varepsilon^{\frac{3}{2}} \cos(\Omega \tau) + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (۴)$$

که در رابطه (۴) پارامتر \hat{k}_n و \hat{m}_n به ترتیب نامیزانی سختی و جرمی می‌باشند. همچنین ε پارامتر بی‌بعد و کوچکی است. در معادلات (۴) فرض شده‌است که نامیزانی‌ها، نیروی استهلاک، دامنه نیروی هارمونیک و سختی کوپلینگ کوچک و از مرتبه پایین‌تر می‌باشد.

با استفاده از بسط تیلور برای ε ‌های کوچک داریم:

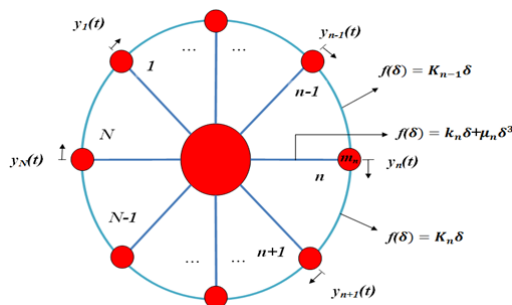
$$\begin{aligned} \frac{2\xi \varepsilon + O(\varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \hat{m}_n + O(\varepsilon^2)} &= 2\xi \varepsilon + O(\varepsilon^2), \\ \frac{1 + \varepsilon \hat{k}_n + O(\varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \hat{m}_n + O(\varepsilon^2)} &= 1 + \varepsilon (\hat{k}_n - \hat{m}_n) + O(\varepsilon^2), \\ \frac{\varepsilon \hat{K} + O(\varepsilon^2)}{1 + \varepsilon \hat{m}_n + O(\varepsilon^2)} &= \varepsilon \hat{K} + O(\varepsilon^2), \\ \frac{\hat{\mu} + O(\varepsilon)}{1 + \varepsilon \hat{m}_n + O(\varepsilon^2)} &= \hat{\mu} + O(\varepsilon) \end{aligned} \quad (۵)$$

با جایگذاری روابط (۴) و (۵) در معادله (۳) و فرض نوسانات

کوچک و محدود ($y_n = \varepsilon^{1/2} x_n$) داریم:

$$\begin{aligned} x_n'' + 2\xi \varepsilon x_n' + [1 + \varepsilon (\hat{k}_n - \hat{m}_n)] x_n &+ \varepsilon \hat{K} (2x_n - x_{n-1} - x_{n+1}) \\ + \varepsilon \hat{\mu} x_n^3 + O(\varepsilon^2) &= f_n \varepsilon \cos(\Omega \tau) \end{aligned} \quad (۶)$$

که در آن $n = 1, \dots, N$ می‌باشد.



شکل ۱- مدل دینامیکی برای سیستم غیرخطی تقارن دایره‌ای

۱-۲- فرمولاسیون مسئله

معادله حرکت برای پاندول شماره n در مدل نشان‌داده شده در شکل ۱ مطابق رابطه (۱) است:

$$\begin{aligned} m_n \ddot{y}_n + c_n \dot{y}_n + k_n y_n + K_n (y_n - y_{n+1}) \\ + K_{n-1} (y_n - y_{n-1}) + \mu_n y_n^3 = F_n \end{aligned} \quad (۱)$$

که در آن $m_n, c_n, k_n, K_n, \mu_n$ و y_n به ترتیب جرم، ضریب استهلاک، سختی خطی درگیر با زمین، سختی خطی کوپلینگ، سختی غیرخطی (مرتبه سوم) درگیر با زمین و جابجایی عضو nام سیستم می‌باشند. در رابطه (۱) مشتقات برحسب زمان می‌باشد. از تغییر متغیر زیر برای بی‌بعد کردن معادلات استفاده می‌کنیم:

$$\tau = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} t \quad (۲)$$

با استفاده از این تغییر متغیر و جایگذاری در معادله (۱) رابطه بدون بعد زیر بدست می‌آید که در آن مشتقات نسبت به پارامتر τ می‌باشند:

$$\begin{aligned} y_n'' + \frac{c_n}{\sqrt{m_1} \sqrt{k_1}} \times \frac{m_1}{m_n} y_n' + \frac{k_n m_1}{k_1 m_n} y_n + \\ \frac{K_n m_1}{k_1 m_n} (y_n - y_{n+1}) + \frac{K_{n-1} m_1}{k_1 m_n} (y_n - y_{n-1}) \\ + \frac{\mu_n m_1}{k_1 m_n} y_n^3 = \frac{m_1 F_n}{k_1 m_n} \end{aligned} \quad (۳)$$

در این مطالعه از روش اختلالات کوچک برای مسائل غیر خطی به‌منظور حل معادله (۳) استفاده شده است [۱۸].

۲-۲- حل مسئله به روش مقیاس چندگانه^۱

یکی از روش‌های حل معادلات غیرخطی روش مقیاس چندگانه است [۱] که برای حل معادلات (۶) استفاده شده- است. برای استفاده از این روش ابتدا متغیرهای زمانی مستقل زیر تعریف می‌شوند:

$$T_0 = \tau, \quad T_1 = \varepsilon\tau, \quad T_2 = \varepsilon^2\tau, \dots \quad (7)$$

برای اعمال تغییر متغیر بالا بر معادله (۶) برای اپراتور $\frac{d}{d\tau}$ داریم:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} &= \frac{\partial}{\partial T_0} \frac{dT_0}{d\tau} + \frac{\partial}{\partial T_1} \frac{dT_1}{d\tau} + \dots = \\ &= \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + O(\varepsilon^2) = \\ &= D_0 + \varepsilon D_1 + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (8)$$

به همین ترتیب برای مشتقات مراتب بالاتر داریم:

$$\frac{d^2}{d\tau^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + O(\varepsilon^2) \quad (9)$$

همچنین پاسخ معادله (۶) را بر اساس روش مقیاس چندگانه به صورت بسط زیر در نظر می‌گیریم [۱]:

$$\begin{aligned} x_n(\tau, \varepsilon) &= x_n(T_0, T_1, \dots) \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \varepsilon^p x_{n,p}(T_0, T_1, \dots) \\ &= x_{n,0}(T_0, T_1) + \varepsilon x_{n,1}(T_0, T_1) + O(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (10)$$

با جایگذاری معادلات (۷) تا (۱۰) در معادله (۶) داریم:

$$\begin{aligned} (D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1)(x_{n,0}(T_0, T_1) + \varepsilon x_{n,1}(T_0, T_1)) &+ 2\varepsilon \xi \varepsilon (D_0 + \varepsilon D_1)(x_{n,0}(T_0, T_1) + \varepsilon x_{n,1}(T_0, T_1)) \\ &+ [1 + \varepsilon(\hat{k}_n - \hat{m}_n)](x_{n,0}(T_0, T_1) + \varepsilon x_{n,1}(T_0, T_1)) + 2\varepsilon \hat{K}(x_{n,0}(T_0, T_1) + \varepsilon x_{n,1}(T_0, T_1)) \\ &- \varepsilon \hat{K}(x_{n-1,0}(T_0, T_1) + \varepsilon x_{n-1,1}(T_0, T_1)) - \varepsilon \hat{K}(x_{n+1,0}(T_0, T_1) + \varepsilon x_{n+1,1}(T_0, T_1)) \\ &+ \varepsilon \hat{\mu}(x_{n,0}(T_0, T_1) + \varepsilon x_{n,1}(T_0, T_1))^3 + O(\varepsilon^2) = f_n \varepsilon \cos(\Omega \tau) \end{aligned} \quad (11)$$

برای حل معادله (۱۱)، مرتبه‌های مختلف معادله (ضرایب $\varepsilon^0, \varepsilon^1, \dots$) را تفکیک می‌کنیم. به این ترتیب معادله زیر برای بزرگترین مقیاس یعنی ε^0 بدست می‌آید:

$$D_0^2 x_{n,0}(T_0, T_1) + x_{n,0}(T_0, T_1) = 0 \quad n = 1, \dots, N \quad (12)$$

به همین ترتیب با استفاده از جداسازی و ساده‌سازی، معادله (۱۱) برای مرتبه بعدی (ε^1) به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} D_0^2 x_{n,1}(T_0, T_1) + 2D_0 D_1 x_{n,0}(T_0, T_1) + x_{n,1}(T_0, T_1) \\ + 2\xi D_0 x_{n,0}(T_0, T_1) + (\hat{k}_n - \hat{m}_n) x_{n,0}(T_0, T_1) \\ + 2\hat{K} x_{n,0}(T_0, T_1) - \hat{K} x_{n-1,0}(T_0, T_1) - \hat{K} x_{n+1,0}(T_0, T_1) \\ + \hat{\mu} x_{n,0}^3(T_0, T_1) = f_n \cos(\Omega \tau) \end{aligned} \quad (13)$$

بدلیل تاثیر بسیار کم مراتب بالاتر پاسخ، به مرتبه اول و دوم اکتفا می‌کنیم. برای این هدف ابتدا پاسخ معادله (۱۲) را برای همه اجزا بدست می‌آوریم. به دلیل ضعیف بودن کوپلینگ بین اجزا، این معادلات برای هر عضو دیکوپله می‌باشد و پاسخ آن به صورت زیر است:

$$x_{n,0}(T_0, T_1) = A_n(T_1) e^{jT_0} + \bar{A}_n(T_1) e^{-jT_0} \quad (14)$$

که در آن $j = \sqrt{-1}$ می‌باشد. برای بدست آوردن پاسخ مرتبه دوم نیروی هارمونیک خارجی را به شکل زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$f_n \cos(\Omega \tau) = \frac{f_n}{2} (e^{j\Omega \tau} + e^{-j\Omega \tau}) \quad (15)$$

با جایگذاری معادلات (۱۴) و (۱۵) در معادله (۱۳)، نهایتاً معادله دیفرانسیل (۱۳) به شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} D_0^2 x_{n,1} + x_{n,1} &= -2j(D_1 A_n + \xi A_n) e^{jT_0} \\ &- (2\hat{K} + \hat{k}_n - \hat{m}_n) A_n e^{jT_0} + \hat{K} A_{n-1} e^{jT_0} \\ &+ \hat{K} A_{n+1} e^{jT_0} - \hat{\mu} A_n^3 e^{3jT_0} - 3\hat{\mu} A_n^2 \bar{A}_n e^{jT_0} \\ &+ \frac{f_n}{2} e^{j\Omega \tau} + \text{Complex Conjugate} \end{aligned} \quad (16)$$

بدون کاستن از کلیت مسئله از فرض زیر برای فرکانس تحریک اطراف فرکانس طبیعی سیستم برای تحلیل پاسخ اطراف رزونانس استفاده می‌کنیم:

$$\Omega = 1 + \sigma \varepsilon \rightarrow \Omega \tau = T_0 + \sigma T_1 \quad (17)$$

که در آن پارامتر σ انحراف فرکانس تحریک از فرکانس طبیعی می‌باشد.

با جایگذاری رابطه (۱۷) در معادله (۱۶) خواهیم داشت:

¹ Multiple Scale Method

معادلات (۲۱) و (۲۲) دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطی مرتبه اول هستند که مجموعاً γ_n معادله و γ_n مجهول (n تا a_n و n تا β_n) می‌باشند. پس از حل این مجموعه دستگاه از روش‌های عددی پاسخ نهایی هر عضو را به صورت

$$x_n = \frac{a_n}{2} (e^{j(\beta_n + T_0)} + e^{-j(\beta_n + T_0)}) = \frac{a_n}{2} e^{j(\beta_n + T_0)} + CC$$

خواهیم داشت که در شرایط خاص یک پاسخ هارمونیک خواهد بود.

برای حل عددی پاسخ حالت دائم معادلات (۲۱) و (۲۲) معمولاً از تغییر متغیر زیر استفاده می‌شود:

$$\gamma_n = \sigma T_1 - \beta_n \quad (23)$$

با اعمال معادله (۲۳) در معادلات (۲۱) و (۲۲) و بازنویسی آن‌ها خواهیم داشت:

$$a'_n = -\xi a_n + \hat{K} \frac{a_{n-1}}{2} \sin(\gamma_n - \gamma_{n-1}) + \hat{K} \frac{a_{n+1}}{2} \sin(\gamma_n - \gamma_{n+1}) + \frac{f_n}{2} \sin(\gamma_n) \quad (24)$$

$$a_n \gamma'_n = \sigma a_n - (2\hat{K} + \hat{k}_n - \hat{m}_n) \frac{a_n}{2} - 3\hat{\mu} \frac{a_n^3}{8} + \hat{K} \frac{a_{n-1}}{2} \cos(\gamma_n - \gamma_{n-1}) + \hat{K} \frac{a_{n+1}}{2} \cos(\gamma_n - \gamma_{n+1}) + \frac{f_n}{2} \cos(\gamma_n) \quad (25)$$

برای حل حالت دائم این معادلات، a'_n و γ'_n را برابر با صفر قرار می‌دهیم که پاسخ آن دامنه نهایی پاسخ سیستم است و به صورت زیر قابل بیان است:

$$x_n = a_n \cos(\Omega \tau + \gamma_n) \quad (26)$$

معادلات ساده‌شده بالا پس از اعمال فرض معادله (۱۷) تنها برای فرکانس‌های تحریک اطراف رزونانس معتبر هستند. اما در سیستم‌های غیرخطی پاسخ سیستم تنها در اطراف فرکانس طبیعی دارای ماکزیمم پاسخ نیست (برخلاف سیستم‌های خطی) بلکه ابر رزونانس و زیر رزونانس و رزونانس‌های دیگر هم گاهی در این سیستم‌ها تجربه خواهند شد.

$$D_0^2 x_{n+1} + x_{n+1} = [-2j(D_1 A_n + \xi A_n) - (2\hat{K} + \hat{k}_n - \hat{m}_n) A_n + \hat{K} A_{n-1} + \hat{K} A_{n+1}] e^{jT_0} \quad (18)$$

همانطور که می‌دانیم در شرایطی که ضریب e^{jT_0} در معادله بالا صفر نباشد، عامل وجود آورنده جمله تکین وجود دارد و پاسخ بینهایت است. در نتیجه این ضریب از لحاظ فیزیکی باید برابر صفر باشد:

$$-2j(D_1 A_n + \xi A_n) - (2\hat{K} + \hat{k}_n - \hat{m}_n) A_n + \hat{K} A_{n-1} + \hat{K} A_{n+1} - 3\hat{\mu} A_n^2 \bar{A}_n + \frac{f_n}{2} e^{j\sigma T_1} = 0 \quad (19)$$

معادله (۱۹) دستگاه معادله دیفرانسیل غیرخطی مرتبه اول است که متغیر مستقل آن T_1 و متغیرهای وابسته آن A_n بطوریکه $n = 1, \dots, N$ می‌باشد. همچنین هر معادله با معادله قبلی و بعدی خود کوپله است.

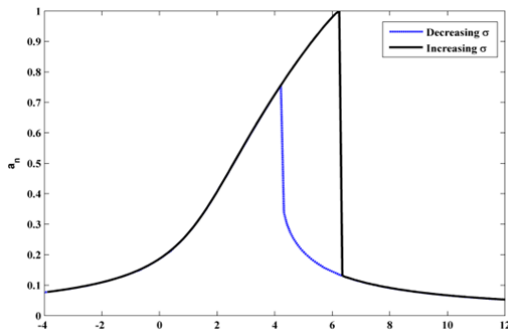
یک جواب عمومی پیشنهاد شده برای معادله (۱۹) به شکل زیر است که ضرایب a_n و β_n تابعی از T_1 می‌باشند:

$$A_n = \frac{a_n}{2} e^{j\beta_n} \quad (20)$$

با جایگذاری معادله (۲۰) در معادله (۱۹) و با ضرب معادله حاصل در ضریب $e^{-j\beta_n}$ و سپس با استفاده از معادله اوپلر ($e^{j\alpha} = \cos(\alpha) + j \sin(\alpha)$) در نهایت یک دستگاه معادله دیفرانسیل موهومی داریم که با جداسازی جمله حقیقی و موهومی، هر معادله به دو معادله مجزا مانند زیر تبدیل می‌شود:

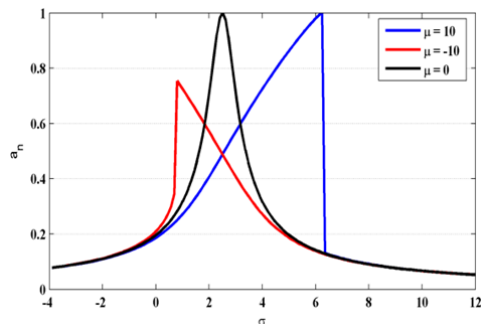
$$-(a'_n + \xi a_n) + \hat{K} \frac{a_{n-1}}{2} \sin(\beta_{n-1} - \beta_n) + \hat{K} \frac{a_{n+1}}{2} \sin(\beta_{n+1} - \beta_n) + \frac{f_n}{2} \sin(\sigma T_1 - \beta_n) = 0 \quad (21)$$

$$a_n \beta'_n - (2\hat{K} + \hat{k}_n - \hat{m}_n) \frac{a_n}{2} - 3\hat{\mu} \frac{a_n^3}{8} + \hat{K} \frac{a_{n-1}}{2} \cos(\beta_{n-1} - \beta_n) + \hat{K} \frac{a_{n+1}}{2} \cos(\beta_{n+1} - \beta_n) + \frac{f_n}{2} \cos(\sigma T_1 - \beta_n) = 0 \quad (22)$$

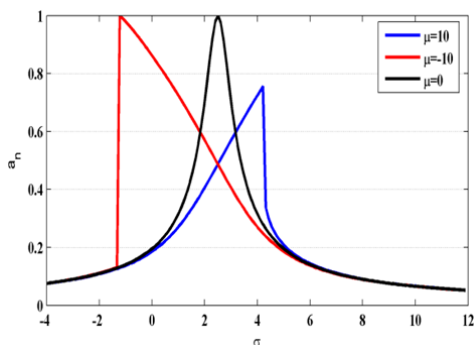


شکل ۲- دامنه پاسخ حالت دائم (SS)، برحسب پارامتر انحراف فرکانس طبیعی

در شکل‌های ۳ و ۴ پاسخ پره برای مقادیر مختلف پارامتر غیرخطی، μ ، یعنی برای $\mu = -10, 0, 10$ ، رسم شده و با هم مقایسه شده‌اند. شکل ۳ به ازای افزایش σ و شکل ۴ به ازای کاهش σ رسم شده است.



شکل ۳- دامنه پاسخ حالت دائم (SS)، با مقادیر مختلف ضریب غیر خطی μ ، در حالت افزایش فرکانس



شکل ۴- دامنه پاسخ حالت دائم (SS)، با مقادیر مختلف ضریب غیر خطی μ ، در حالت کاهش فرکانس

۳- نتایج عددی

در این قسمت نتایج مدل متقارن دایره‌ای و سه، پنج و هشت درجه‌آزادی بررسی شده و تاثیر نامیزانی بر خواص کلی پاسخ حالت دائم مورد بررسی قرار گرفته است.

۳-۱- نتایج عددی برای سیستم یک درجه آزادی

در این قسمت ابتدا نتایج عددی، برای نشان دادن خواص کلی سیستم غیرخطی ارائه شده و پدیده‌های آن برای سیستم مرتبه اول که به تنهایی ارتعاش می‌کند بررسی می‌شود. برای سیستم مرتبه اول معادلات (۲۴) و (۲۵) به شکل هستند:

$$\begin{cases} 2\xi a_n = f_n \sin(\gamma_n) \\ a_n [(\hat{k}_n - \hat{m}_n - 2\sigma) + 3\hat{\mu} \frac{a_n^2}{4}] = f_n \cos(\gamma_n) \end{cases} \quad (27)$$

$$\rightarrow (2\xi)^2 a_n^2 + a_n^2 [(\hat{k}_n - \hat{m}_n - 2\sigma) + 3\hat{\mu} \frac{a_n^2}{4}]^2 = f_n^2$$

حل حالت دائم مسئله با حل یک معادله تک متغیره درجه سه قابل حل است.

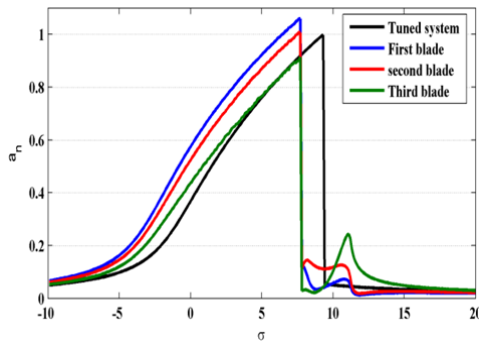
شکل ۲ پاسخ معادله (۲۷) یعنی دامنه پاسخ، a_n ، را برحسب پارامتر انحراف فرکانس طبیعی، σ ، نشان می‌دهد. برای بدست آوردن پاسخ معادله از پارامترهای زیر استفاده شده است:

$$\hat{K}_1 = \hat{k}_1 - \hat{m}_1 = 5, \xi = 0.50, \hat{\mu} = 10, f_1 = 1$$

آنچه که در شکل ۲ قابل توجه است تفاوت پاسخ فرکانسی در حالت افزایش فرکانس تحریک، نسبت به حالتی است که فرکانس تحریک کاهش می‌یابد. در اثر این تفاوت رفتاری، پدیده پرش^۱ اتفاق می‌افتد که بسیار خطرناک است. زیرا پیوستگی پاسخ فرکانسی را برهم می‌زند. آنچه که از شکل ۲ قابل مشاهده است، برای معادله (۲۷) در فاصله σ بین ۴ تا ۶ سه پاسخ حالت دائم وجود دارد که یک دسته از آن‌ها عملاً بدون کاربرد است یعنی هرگز دامنه پاسخ به آن همگرا نمی‌شود. دسته دیگر مربوط به حالتی است که فرکانس در حال زیاد شدن است و دسته آخر هنگامی اتفاق می‌افتد که فرکانس تحریک کاهش می‌یابد.

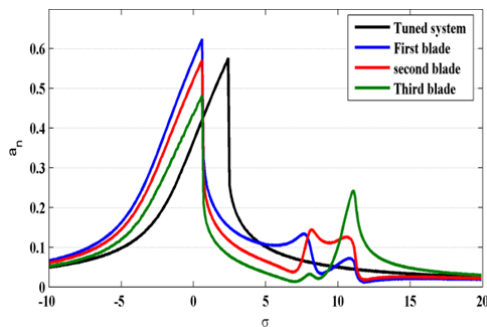
^۱ Jumping

پاسخ اجباری سیستم دارد. پدیده پرش سه بار پی در پی اتفاق افتاده که بسیار خطرناک است. همچنین محل اتفاق افتادن ماکزیمم پاسخ و اندازه آن نیز تغییر کرده که مشابه با سیستم‌های خطی عمل می‌کند. شکل ۶ برای حالت افزایش فرکانس تحریک است و شکل ۷ برای کاهش فرکانس تحریک رسم شده است.



شکل ۶- دامنه پاسخ، a_n ، برای هر سه پره در حالت نامیزان با افزایش فرکانس تحریک

همانطور که از روش اختلالات برمی‌آید، پارامترهای استفاده شده در این نتایج کاملاً نسبی می‌باشند. برای مثال اگر ε از مرتبه منفی دو باشد، همه پارامترهای مرتبه دوم در واقع دارای ضریب 10^{-2} هستند. درحالی‌که همه پارامترهای مرتبه اول برابر با خود آن پارامترها می‌باشند. به همین علت از پارامتر استهلاک برابر با 0.5 در همه محاسبات استفاده شد. پارامترهای نامیزانی در ظاهر تفاوت زیادی دارند ولی در عمل این تفاوت‌ها در حدود مرتبه منفی دو و ناچیز است.



شکل ۷- دامنه پاسخ، a_n ، برای هر سه پره در حالت نامیزان با کاهش فرکانس تحریک

۲-۳- نتایج عددی برای سیستم سه درجه آزادی

به منظور ایجاد یک الگوی اتفاقی نامیزانی، پارامتر جدید زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\hat{K}_n = 2\hat{K} + \hat{k}_n - \hat{m}_n \quad (28)$$

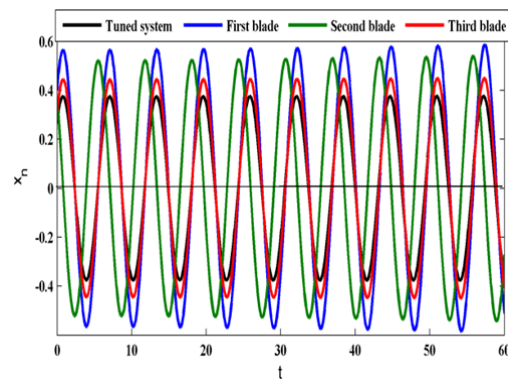
با فرض پارامترهای زیر برای سیستم سه درجه آزادی:

$$\varepsilon = 10^{-3}, \quad \xi = 0.50, \quad \hat{\mu} = 25, \quad \hat{K} = 7,$$

$$\hat{K}_1 = 7, \quad \hat{K}_2 = 10, \quad \hat{K}_3 = 16$$

$$\sigma = 0 \rightarrow \Omega = 1, \quad f_n = 1 \quad n = 1, 2, 3$$

و حل معادله (۶) نمودار شکل ۵ بدست می‌آید که پاسخ پره-ها برای سیستم سه درجه آزادی در حالت میزان و نامیزان را نسبت به زمان نشان می‌دهد.



شکل ۵- دامنه پاسخ، x_n ، برای هر سه پره در حالت نامیزان نسبت به زمان

پاسخ سیستم سه درجه آزادی در حالت میزان دقیقاً مانند سیستم یک درجه آزادی است. زیرا نیروهای تحریک دارای فاز یکسان می‌باشند. برای سیستم میزان مقدار پارامتر \hat{K}_n برابر با $\hat{K}_1 = \hat{K}_2 = \hat{K}_3 = 14$ است و بقیه پارامترهای سیستم به صورت زیر هستند:

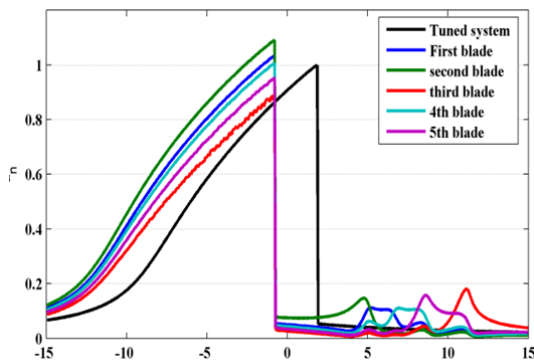
$$\xi = 0.50, \quad \hat{\mu} = 25, \quad \hat{K} = 7, \quad f_n = 1 \quad n = 1, 2, 3$$

اما برای حالت نامیزان مقادیر پارامتر \hat{K}_n به صورت زیر فرض شده‌اند:

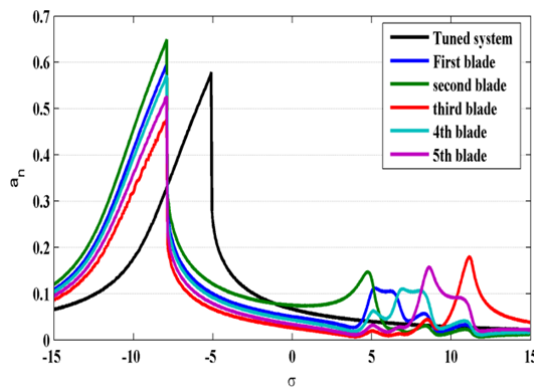
$$\hat{K}_1 = 7, \quad \hat{K}_2 = 10, \quad \hat{K}_3 = 16$$

شکل‌های ۶ و ۷ پاسخ‌های سه پره را برای حالت نامیزان شده نشان می‌دهند که برای مقایسه پاسخ سیستم میزان نیز آورده شده‌است. نامیزانی در این سیستم‌ها نیز تاثیر زیادی در

$\hat{K}_1 = 5, \hat{K}_2 = 1, \hat{K}_3 = 16, \hat{K}_4 = 7, \hat{K}_5 = 11$
سیس پاسخ معادله‌های (۲۴) و (۲۵) را برای پارامترهای عددی بیان شده محاسبه می‌کنیم. شکل‌های ۸ و ۹ پاسخ‌های پنج پره را برای حالت نامیزان شده نشان می‌دهد. همان‌طور که مشخص است نامیزانی در این سیستم‌ها نیز تاثیر زیادی در پاسخ اجباری سیستم خواهد داشت. پدیده پرش در سیستم نامیزان در فرکانس‌های خاصی اتفاق می‌افتد که برای سیستم بسیار خطرناک است. شکل ۸ برای حالت افزایش فرکانس تحریک است و شکل ۹ برای کاهش فرکانس تحریک رسم شده است.



شکل ۸- دامنه پاسخ، a_n ، برای هر پنج پره در حالت نامیزان با افزایش فرکانس تحریک



شکل ۹- دامنه پاسخ، a_n ، برای هر پنج پره در حالت نامیزان با کاهش فرکانس تحریک

همان‌طور که از شکل‌های ۶ و ۷ پیداست ماکزیمم پاسخ فرکانسی در حالت نامیزان از حالت میزان بیشتر است. در حالتی که سیستم میزان است ماکزیمم پاسخ فرکانسی برای هر سه پره یکسان است. ماکزیمم پاسخ پره‌ها در حالت افزایش فرکانس تحریک (۰/۹۹۷۸) بیشتر از ماکزیمم پاسخ پره‌ها در حالت کاهش فرکانس تحریک (۰/۵۷۶۶) است. اما در حالتی که سیستم نامیزان است ماکزیمم پاسخ پره‌ها متفاوت است و بیشترین پاسخ مربوط به پره‌ای است که نسبت به بقیه پره‌ها نامیزان‌تر است، که در این سیستم پره اول نامیزان‌تر است و دارای ماکزیمم پاسخ فرکانسی می‌باشد. با بدست آوردن دامنه پاسخ پره‌ها از شکل ۶ و ۷ برای حالت $\sigma = 0$ و همچنین بدست آوردن ماکزیمم دامنه پاسخ از شکل ۵ برای پره‌ها در حالت میزان و نامیزان، جدول ۱ بدست می‌آید که برای مقایسه بین دو روش انتگرال‌گیری مستقیم و روش ارائه شده در این تحقیق استفاده می‌شود. همان‌طور که از جدول ۱ مشخص است جواب‌ها با تقریب بسیار خوبی قابل قبول هستند، که کارایی روش به کار رفته را نشان می‌دهد، و صحت جواب‌های بدست آمده را تایید می‌کند.

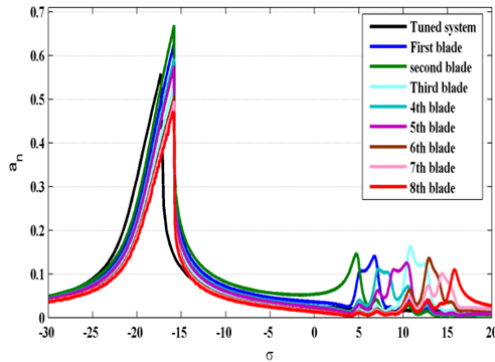
جدول ۱- مقایسه نتایج بدست آمده از دو روش انتگرال‌گیری مستقیم و روش ارائه شده در این تحقیق

| نوع سیستم پاسخ | دامنه انتگرال‌گیری مستقیم | روش ارائه شده | تفاوت % |
|----------------|---------------------------|---------------|---------|
| میزان a_n | ۰/۳۷۶۴ | ۰/۳۶۷۷ | ۲/۳ |
| نامیزان | a_1 | ۰/۵۸۶۸ | ۲/۱ |
| | a_2 | ۰/۵۴۰۸ | ۳/۲ |
| | a_3 | ۰/۴۴۹۲ | ۲/۷ |

۳-۳- نتایج عددی برای سیستم پنج درجه آزادی

برای سیستم با پنج درجه آزادی معادلات حاکم بر سیستم به روش عددی حل شده‌اند. برای سیستم میزان مقدار پارامتر \hat{K}_n برابر با $\hat{K}_1 = \hat{K}_2 = \hat{K}_3 = \hat{K}_4 = \hat{K}_5 = 14$ است و بقیه پارامترهای سیستم به صورت زیر هستند:

$\xi = 0.50, \hat{\mu} = 25, \hat{K} = 7, f_n = 1 \quad n = 1, 2, 3, 4, 5$
اما برای حالت نامیزان مقادیر پارامتر \hat{K}_n به صورت زیر فرض شده‌اند:



شکل ۱۱- دامنه پاسخ، a_n ، برای هر هشت پره در حالت نامیزان با کاهش فرکانس تحریک

۴- نتیجه و جمع‌بندی

آنچه که در نتایج بدست‌آمده برای سیستم‌های نامیزان قابل توجه است تفاوت پاسخ فرکانسی در حالت افزایش فرکانس تحریک، نسبت به حالتی است که فرکانس تحریک کاهش می‌یابد. در اثر این تفاوت رفتاری پدیده پرش اتفاق می‌افتد که بسیار خطرناک است، زیرا پیوستگی پاسخ فرکانسی را برهم می‌زند. روش اختلالات کوچک و روش مقیاس چندگانه به عنوان روشی موثر در تحلیل دینامیکی سیستم‌های غیرخطی، برای تحلیل مدل متمرکز متقارن دایره‌ای و غیرخطی بکار گرفته شد. کارایی این روش توسط انتگرال‌گیری مستقیم بررسی شد. مقایسه جواب‌ها نشان می‌دهد که جواب‌ها تطابق قابل قبولی با یکدیگر دارند. وجود پدیده‌های منحصر به فرد در پاسخ سیستم‌های غیرخطی (مانند پدیده پرش در پاسخ فرکانسی)، ضرورت در نظر گرفتن جملات غیرخطی در تحلیل دینامیکی این سیستم‌ها را آشکار می‌سازد. قابل توجه است که این پدیده‌ها که در عمل هم دیده می‌شوند، بدون در نظر گرفتن جملات غیرخطی قابل توجیه نیست. با اعمال نامیزانی بر سیستم‌های غیرخطی احتمال اتفاق افتادن پدیده پرش در پاسخ فرکانسی با افزایش تعداد درجات آزادی افزایش یافت. در این سیستم‌ها در اثر تفکیک مودها در اثر نامیزانی پرش‌های متعدد اتفاق افتاد که بسیار خطرناک است و مطالعه دینامیکی سیستم‌های متقارن دایره‌ای و نامیزان را ضروری نشان می‌دهد. نامیزانی در این سیستم‌ها تاثیر زیادی در پاسخ اجباری خواهد داشت. در سیستم سه درجه آزادی پدیده پرش سه بار پی در پی اتفاق

۳-۴- نتایج عددی برای سیستم هشت درجه آزادی

برای سیستم با هشت درجه آزادی معادلات حاکم بر سیستم به روش عددی و با استفاده از کد نویسی در نرم‌افزار متلب حل شده‌اند. در این حالت مقدار پارامتر برای سیستم میزان برابر ۱۴ فرض شده است، ($\hat{K}_1 = \dots = \hat{K}_8 = 14$). بقیه پارامترهای سیستم به صورت زیر هستند:

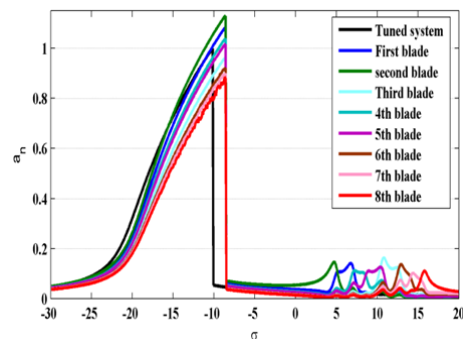
$$\xi = 0.50, \quad \hat{\mu} = 25, \quad \hat{K} = 7, \quad f_n = 1 \quad n = 1, 2, \dots, 8$$

اما برای حالت نامیزان مقادیر پارامتر \hat{K}_n به صورت اتفاقی و بین ۴ تا ۲۴ انتخاب شده‌اند، که این مقادیر برای سیستم هشت درجه آزادی در جدول ۲ آورده شده‌اند.

جدول ۲- مقادیر پارامتر \hat{K}_n برای سیستم هشت درجه

| آزادی در حالت نامیزان | | | | | | | | |
|-----------------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|-------------|
| \hat{K}_8 | \hat{K}_7 | \hat{K}_6 | \hat{K}_5 | \hat{K}_4 | \hat{K}_3 | \hat{K}_2 | \hat{K}_1 | \hat{K}_n |
| ۲۴ | ۲۲ | ۲۰ | ۱۱ | ۹ | ۱۶ | ۱ | ۴ | مقدار |

سپس پاسخ معادله‌های (۲۴) و (۲۵) را برای پارامترهای عددی بیان شده محاسبه می‌کنیم. شکل‌های ۱۰ و ۱۱ پاسخ‌های هشت پره را برای حالت نامیزان شده نشان می‌دهد. نامیزانی در این سیستم‌ها نیز تاثیر زیادی در پاسخ اجباری سیستم خواهد داشت و ماکزیمم پاسخ و همچنین محل اتفاق افتادن ماکزیمم پاسخ را تغییر می‌دهد، همچنین پدیده پرش نیز در شکل‌ها قابل مشاهده است. شکل ۱۰ برای حالت افزایش فرکانس تحریک و شکل ۱۱ برای کاهش فرکانس تحریک رسم شده است.



شکل ۱۰- دامنه پاسخ، a_n ، برای هر هشت پره در حالت نامیزان با افزایش فرکانس تحریک

- [9] Sextro W, Popp K, Krzyzynski T (2001) Localization in nonlinear mistuned systems with cyclic symmetry. *Nonlinear Dyn.* 25: 207–220.
- [10] Judge J, Pierre C, Mehmed O (2001) Experimental investigation of mode localization and forced response amplitude magnification for a mistuned bladed disk. *J. Eng. Gas Turb. Power.* 123: 940–950.
- [11] Rivas-Guerra AJ, Mignolet MP (2003) Maximum amplification of blade response due to mistuning: localization and mode shape aspects of the worst disks. *J. Turbomach.* 125: 442–454.
- [12] Jones K, Cross C (2003) On anti-resonance in the forced response of mistuned bladed disks. *Shock Vib.* 10(2): 135–146.
- [13] Christensen R.H, Santos IF (2005) Control of rotor-blade coupled vibrations using shaft-based actuation. 11th International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics, OuroPreto Brazil. *Shock Vib.* 13(4–5): 255–271.
- [14] Yan YJ, Cui PL, Hao HN (2008) Vibration mechanism of a mistuned bladed-disk. *J Sound Vib.* 317: 294–307.
- [15] Beachkofski BK (2009) Probabilistic rotor life assessment using reduced order models. *Shock Vib.* 16(6): 581–591.
- [16] Rahimi M, Ziaei-Rad S (2010) Uncertainty treatment in forced response calculation of mistuned bladed disk. *Math Comput Simulat.* 80: 1746–1757.
- [۱۷] رئییسی استبرق احسان، ضیایی راد سعید، دهقان حسین (۱۳۹۰) استفاده از شبکه عصبی و الگوریتم ژنتیک در بدست آوردن ماکزیمم پاسخ سیستم نامیزان. مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها، شماره ۱: ۳۷–۴۶
- [18] King M.E, Layne PA (1998) Dynamics of nonlinear cyclic systems with structural irregularity. *Nonlinear Dyn.* 15: 225–244.
- افتاده است. همچنین محل اتفاق افتادن ماکزیمم پاسخ و اندازه آن نیز تغییر می‌کند، که برای عملکرد سیستم مطلوب نیست.

مراجع

- [1] Nayfeh AH (1995) *Non-linear oscillations*. Wiley, New York.
- [2] Rosenberg RM (1966) On nonlinear vibrations of systems with many degrees of freedom. *Advances in Applied Mech.* 9: 155–242.
- [3] Lin CC, Mignolet MP (1996) Effects of damping and damping mistuning on the forced vibration response of bladed disks. *J Sound Vib.* 193: 525–543.
- [4] Vakakis AF (1990) Analysis and identification of linear and nonlinear normal modes in vibrating systems. Ph.D. Thesis, California Institute of Technology, Pasadena, CA.
- [5] Yoo HH, Kim JY, Inman DJ (2003) Vibration localization of simplified mistuned cyclic structures undertaking external harmonic force. *J Sound Vib.* 261: 859–870.
- [6] Samaranayake S, Bajaj AK (1997) Subharmonic oscillations in harmonically excited mechanical systems with cyclic symmetry. *J Sound Vib.* 206(1): 39–60.
- [7] Samaranayake S, Bajaj AK, Nwokah ODI (1995) Amplitude modulated dynamics and bifurcations in the resonant response of a structure with cyclic symmetry. *Acta Mech.* 109: 101–125.
- [8] Samaranayake S, Samaranayake G, Bajaj AK (2000) Resonant vibrations in harmonically excited weakly coupled mechanical systems with cyclic symmetry. *Chaos, Solitons and Fractals.* 11: 1519–1534.