



محاسبه سفتی و تنش ناشی از نامیزانی در کوپلینگ‌های چند دیافراگمی با استفاده از روش تحلیلی

حسین لکزیان^{۱*} و رامین حقیقی خوشخو^۲

^۱ استادیار، تهران - دانشگاه صنعتی مالک اشتر

^۲ استادیار، تهران - دانشگاه شهید بهشتی

تاریخ دریافت: ۱۳۹۲/۰۶/۲۶؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۵/۰۳/۰۸؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۵/۰۵/۰۲

چکیده

کوپلینگ‌های دیافراگمی، نوع ویژه‌ای از کوپلینگ‌های انعطاف‌پذیر تجهیزات دوار هستند که به منظور کاهش بارهای منتقل شده به تجهیزات و تنش‌های ایجاد شده در دیافراگم‌ها ناشی از نامیزانی، بجای یک دیافراگم ضخیم، بصورت چند دیافراگم نازک طراحی می‌شوند. با توجه به تعدد بارهای وارده به این کوپلینگ‌ها و نیاز به تحلیل‌های متنوع همچون، استاتیکی، دینامیکی، مودال، حرارتی، خزش و خستگی و ترکیب آن‌ها با یکدیگر و همچنین نیاز به سطح پایین تنش در عین انعطاف پذیر بودن آن‌ها، فرآیند طراحی آن‌ها پیچیده، زمانبر و بصورت تکراری انجام می‌گیرد. بسیاری از این آنالیزها، تنها با ابزار المان محدود قابل حل است. در عین حال، چنانچه بتوان حل تحلیلی برای برخی از آن‌ها ارائه داد، ضمن کاهش زمان فرآیند طراحی، بهینه‌سازی بسیار ساده‌تر و سریع‌تر خواهد بود. در این تحقیق، ضمن یافتن حل تحلیلی دقیق برای محاسبه تغییر شکل و تنش در دیافراگم‌ها تحت نامیزانی محوری و زاویه‌ای، روابط دقیقی برای محاسبه سفتی محوری و زاویه‌ای کوپلینگ‌های چند دیافراگمی ارائه می‌شود. در پایان، با مقایسه حل تحلیلی و حل المان محدود، صحت حل تحلیلی نشان داده شده، بحرانی‌ترین نقطه دیافراگم‌ها از لحاظ سطح تنش که در طراحی خستگی بایستی مبنای طراحی قرار گیرد، نیز تعیین می‌شود.

کلمات کلیدی: کوپلینگ چند دیافراگمی؛ حل تحلیلی؛ نامیزانی؛ ورق گرد سوراخدار.

Calculation of Stiffness and Stresses Due to Misalignment in Multiple Diaphragm Couplings Using Analytical Method

H. Lexian^{1,*}, R.H. Khoshkhou²

¹ Assis. Prof., Mech. Eng., Malek Ashtar Univ., Tehran, Iran

² Assis. Prof., Mech. Eng., Shahid Beheshti Univ., Tehran, Iran

Abstract

Multiple diaphragm couplings are a special type of flexible couplings of rotary equipments. These couplings are designed in multiple thin diaphragms instead of thick one to reduce the loads transmitted to the equipments and stresses induced to the diaphragms in misalignment. Because of need for different analyzes, such as static and dynamic analysis, modal, thermal, creep, fatigue and combination of these, and low stresses and flexibility, the design process of diaphragm coupling are complex, time consuming and usually performed iteratively. In many of these analyzes, the finite element solution is practically the only solution method. However, if we give analytical solutions for some of the analysis, the design process will be simpler and finding the optimum design is much faster. In this paper the exact analytical solutions for calculation of deformations and stresses in the diaphragms under axial and angular misalignment are presented and close-form solutions for axial and angular stiffness are obtained. In the end we confirm accurate analytical solutions by comparing the finite element results and determine the most critical point in the fatigue design of diaphragms.

Keywords: Multiple Diaphragm Coupling; Analytical Solution; Misalignment; Annular Plate.

۱- مقدمه

با توجه به اینکه هیچگاه نمی‌توان محور دو تجهیز دوار مقابل یکدیگر را بصورت کامل میزان کرد، در اتصال آن‌ها باید از کوپلینگ‌های انعطاف‌پذیر استفاده کرد و در صورت اتصال صلب محور آن‌ها، با ایجاد نیروها و گشتاورهای بیش از حد در یاتاقان‌ها، ضمن کاهش بازده مکانیکی تجهیزات، عمر تجهیزات کاهش یافته، احتمال شکست زودرس افزایش می‌یابد. کوپلینگ‌های انعطاف‌پذیر متنوعی همانند، مینیاتوری، زنجیری، چرخ‌دنده‌ای، تسمه فلزی، یونیورسال، فنر لایه‌ای، پینی، الاستومری، دیافراگمی و دیسکی موجود است که برای کاربردهای دارای سرعت دورانی و توان انتقالی همزمان بالا، همانند موتورهای جت، کشتی و توربین‌های گازی، فقط از سه نوع چرخ‌دنده‌ای، دیافراگمی و دیسکی استفاده می‌شود [۱-۴].

هر مجموعه دیسک یا دیافراگم و همچنین هر چرخ‌دنده (به صورت جفت داخلی و خارجی)، فقط قادر به تحمل مقدار کوچکی نامیزانی زاویه‌ای است و توانایی تحمل نامیزانی جانبی را ندارد؛ بنابراین برای جبران نامیزانی جانبی، باید از دو مجموعه دیسک، دیافراگم و یا چرخ‌دنده استفاده کرد که این دو مجموعه، توسط قطعه جداکننده به هم متصل می‌شوند.

کوپلینگ‌های چرخ‌دنده‌ای در اثر نامیزانی زاویه‌ای بیش از حد، نیروهای بسیار بالایی تولید می‌کنند. بطور مثال، کوپلینگ‌های چرخ‌دنده‌ای تا ۳۵ برابر ممان بیشتر و تا ۴ الی ۵ برابر، نیروی محوری بیشتری را نسبت به کوپلینگ‌های دیافراگمی ایجاد می‌کنند. در مقابل کوپلینگ‌های دیسکی و دیافراگمی، نسبت به کوپلینگ چرخ‌دنده‌ای گران‌قیمت‌تر است، اما دارای عمر نامحدود و قابلیت اعتماد بیشتری است [۴].

تا دهه ۱۹۶۰ و حتی ۱۹۷۰ میلادی، بیشتر کوپلینگ‌های موتورهای جت، کشتی و توربین گازی، چرخ‌دنده‌ای بودند که به دلایل مختلفی همچون، نیاز به روغنکاری، ایجاد نیروها و ممان‌های زیاد، محدودیت دمای کاری، ارتعاشات زیاد در سرعت‌های بالا و فاصله زمانی کوتاه تعمیرات و تعویض به دلیل سایش زیاد بین دنده‌ها، دنیا به سمت کوپلینگ‌های دیسکی و دیافراگمی حرکت کرده است [۱].

وزن کوپلینگ از اهمیت بسزایی برخوردار است. هرچه قدر مرکز جرم اجزای کوپلینگ به محل یاتاقان‌ها نزدیکتر باشد، باعث ایجاد گشتاور وزنی کمتری می‌شود که این گشتاور، مستقیماً بر سرعت بحرانی روتور و در نتیجه بر حساسیت ماشین به نابالانسی تأثیر می‌گذارد؛ بنابراین با افزایش گشتاور وزنی اجزای کوپلینگ نسبت به یاتاقان‌ها، سرعت بحرانی روتور کاهش می‌یابد. به همین دلیل، حتی امکان اجزای کوپلینگ از مواد مقاوم سبک همانند، آلیاژهای تیتانیوم انتخاب می‌شود [۲ و ۴].

معمولاً صلابت خمشی و سفتی محوری کوپلینگ‌های دیسکی، بیشتر از کوپلینگ‌های دیافراگمی است؛ در نتیجه نیروهای محوری و ممان‌های خمشی ایجاد شده در کوپلینگ‌های دیسکی، بیشتر از کوپلینگ‌های دیافراگمی است [۴]؛ لذا نظر به وزن کم، انعطاف‌پذیری عالی، عمر بینهایت، عدم نیاز به روغنکاری و تعمیر و نگهداری خاص، کوپلینگ دیافراگمی یک انتخاب مناسب برای کوپل تجهیزات دوار با سرعت و قدرت بالا همچون، موتور جت و کشتی و توربین گازی است.

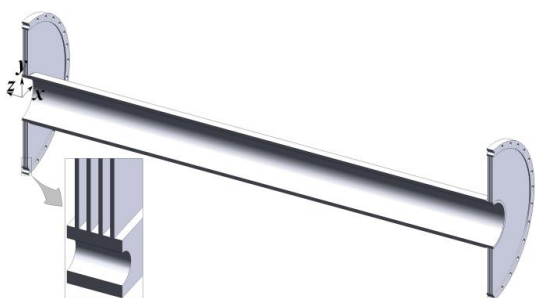
در کوپلینگ‌های دیافراگمی، همان‌طور که در شکل ۱ نشان داده شده است، هر طرف کوپلینگ، معمولاً از یک مجموعه چند دیافراگمی تشکیل شده است و همواره با افزایش تعداد دیافراگم‌ها با قید ثابت ماندن ضخامت کل مجموعه، تنش در دیافراگم‌ها و صلابت خمشی کوپلینگ کاهش می‌یابد [۴].

در شرایط کارکرد واقعی، یک کوپلینگ دیافراگمی تحت بارهای متعددی قرار دارد که با توجه به ماهیت یک کوپلینگ انعطاف‌پذیر، نیروهای ناشی از نامیزانی یکی از اصلی‌ترین بارهای وارد بر کوپلینگ و تجهیزات است. در شکل ۱، نمایی برش خورده از یک کوپلینگ دیافراگمی نشان داده شده است. هر انتهای کوپلینگ، از یک یا چند ورق نازک گرد یا دیافراگم انعطاف‌پذیر تشکیل شده است که مجموعه دو دیافراگم در دو طرف کوپلینگ، توسط مجموعه جداکننده که نسبت به دیافراگم‌ها تقریباً صلب است، به یکدیگر متصل می‌شوند. همچنین انتهای محور هر تجهیز دوار، با استفاده از اتصال فلانجی به لبه خارجی مجموعه دیافراگم مربوطه متصل می‌شود. مطابق شکل مذکور، کوپلینگ از دو مجموعه چهار دیافراگمی در دو انتها و قطعه استوانه‌ای جداکننده

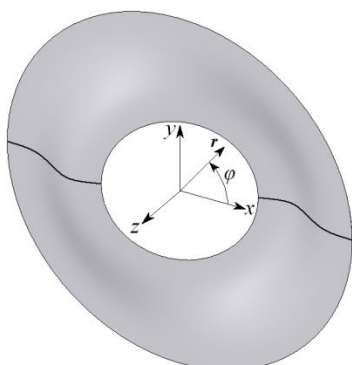
که هر طرف کوپلینگ دارای بیش از یک دیافراگم باشد، تغییر شکل دیافراگم‌ها تحت نامیزانی زاویه‌ای، پیچیده‌تر از حالت فوق است.

نامیزانی جانبی در کوپلینگ نیز، در عمل منجر به رفتاری مشابه رفتار کوپلینگ تحت نامیزانی زاویه‌ای می‌شود [۱]؛ لذا برای مطالعه رفتار دیافراگم‌ها تحت نامیزانی، کافی است رفتار آنها فقط تحت نامیزانی محوری و زاویه‌ای بررسی شود.

هدف از این تحقیق، ارائه یک روش تحلیلی دقیق برای محاسبه سفتی محوری و خمشی و همچنین توزیع تنش در دیافراگم‌ها تحت دو نامیزانی محوری و زاویه‌ای است. در این مسیر پس از استخراج حل دقیق با استفاده از فرضیات منطقی و قابل قبول، با استفاده از حل المان محدود نشان داده می‌شود که فرضیات در نظر گرفته شده صحیح بوده، حل تحلیل ارائه شده برای تغییر شکل دیافراگم‌ها تحت نامیزانی محوری و زاویه‌ای، یک حل دقیق است. بطوریکه این حل تحلیلی، کمک شایانی به طراحی ساده‌تر و سریع‌تر کوپلینگ‌های دیافراگمی خواهد کرد.



شکل ۱- نمایی برش خورده از یک کوپلینگ چهار دیافراگمی



شکل ۲- خمش نامنتقارن ناشی از نامیزانی زاویه‌ای یک دیافراگم

تشکیل شده است که با توجه به انعطاف‌پذیر بودن دیافراگم‌ها، می‌توان تمامی اجزای یک کوپلینگ غیر از دیافراگم‌ها را صلب در نظر گرفت؛ لذا هر دیافراگم را می‌توان همانند یک ورق گرد سوخدار نازک در نظر گرفت که در دو لبه بصورت گیردار به دیسک‌های صلبی متصل شده‌است.

برخلاف وجود چند شرکت پیشرو غربی در طراحی، ساخت و تولید کوپلینگ‌های دیافراگمی، با توجه به کاربرد استراتژیک این کوپلینگ‌ها در موتورهای جت، کشتی، توربین‌های گازی و نیروگاه‌های هسته‌ای، تحقیقات منتشر شده در زمینه طراحی کوپلینگ‌های مذکور، انگشت‌شمار است [۵]. پژوهش‌های منتشر شده یا بصورت ارائه روابط تقریبی برای محاسبه کلی تنش‌ها [۶] و تنش تحت گشتاور پیچشی منتقل شده بوده [۷ و ۸] و یا ارائه روابط تحلیلی دقیق برای حالت ساده نامیزانی محوری نیم‌کوپلینگ تک‌دیافراگمی است [۹]. در مرجع [۱۰] نیز، با فرض اینکه شعاع دایره سطح میانی دیافراگم پس از تغییر شکل بدون تغییر باقی می‌ماند، تنش‌های یک نیم‌کوپلینگ تک‌دیافراگمی تحت نامیزانی زاویه‌ای تقریب زده شده است. البته تحقیقاتی در زمینه تحلیل المان محدود این کوپلینگ‌ها، تحت نامیزانی و طراحی خستگی آن‌ها نیز منتشر شده است [۱۱ و ۱۲]. در تمامی این پژوهش‌ها، نیم‌کوپلینگ‌ها بصورت تک دیافراگمی در نظر گرفته شده است، حال آنکه اکثراً این نوع کوپلینگ‌ها، چند دیافراگمی می‌باشند [۲].

در حالت کلی، سه نوع نامیزانی محوری، زاویه‌ای و جانبی بر کوپلینگ‌های انعطاف‌پذیر اعمال می‌شود. نامیزانی محوری، سبب جابجایی دیافراگم‌ها در راستای محور قطعه جداکننده می‌شود که منجر به خمش منتقارن دیافراگم‌ها می‌شود.

در یک کوپلینگ با یک دیافراگم در هر طرف آن، نامیزانی جانبی منجر به تغییر شکل زاویه‌ای دیافراگم می‌شود و می‌توان تغییر شکل زاویه‌ای دیافراگم به اندازه θ را بصورت خمش نامنتقارن یک ورق گرد که در مرکز آن یک دیسک صلب قرار گرفته است، در نظر گرفت (شکل ۲). در حالت عمومی، یافتن یک حل تحلیلی دقیق برای خمش نامنتقارن ورق گرد سوخدار، غیر ممکن است و بایستی از روش‌های تقریبی همانند، روش‌های مبتنی بر استفاده از سری‌های ریاضی و مثلثاتی [۱۳]، استفاده از تبدیل‌های ریاضی [۱۴] و [۱۵] و یا روش‌های حل عددی بهره جست [۱۶]؛ اما در حالتی

۲- نامیزانی محوری

در نامیزانی محوری یک طرف کویلینگ به اندازه δ_a می‌توان تغییر شکل هر دیافراگم را همانند خمش متقارن یک ورق نازک گرد سوراخدار در نظر گرفت؛ بطوری‌که در لبه داخلی و خارجی گیردار بوده، لبه داخلی تحت جابه‌جایی δ_a قرار گرفته است. با توجه به اینکه ضخامت دیافراگم نسبت قطر آن بسیار کوچک است، لذا فرض شرایط تنش صفحه‌ای بر آن صادق بوده، می‌توان با استفاده از تئوری کلاسیک ورق یا همان تئوری کیرشلف، تغییر شکل آنرا بدست آورد. چنانچه شعاع داخلی و خارجی دیافراگم به ترتیب b و a ، ضخامت آن h و همچنین مدول الاستیک و نسبت پواسون آن E و ν باشد، معادله دیفرانسیل حاکم بر تغییر شکل آن در مختصات استوانه‌ای عبارت از رابطه (۱) است [۱۶]:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right) \left(\frac{d^2 u_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_z}{dr}\right) = \frac{p(r)}{D} \quad (1)$$

که در آن $p(r)$ ، بار گسترده بر واحد سطح و $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ است. با توجه به اینکه بار گسترده خارجی صفر است، لذا حل خصوصی معادله (۱) صفر است و حل فقط شامل حل عمومی است. همچنین شرایط مرزی حاکم بر مسأله عبارت از روابط (۲-۳) است:

$$at \ r = a: \begin{cases} u_z = 0 \\ \frac{du_z}{dr} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$at \ r = b: \begin{cases} u_z = \delta_a \\ \frac{du_z}{dr} = 0 \end{cases} \quad (3)$$

بر مبنای شرایط مرزی فوق حل معادله (۱)، به صورت رابطه (۴) حاصل می‌شود:

$$u_z(r) = \frac{\delta_a}{(a^2-b^2)^2-4a^2b^2(\ln\frac{a}{b})^2} \left\{ (a^2-r^2)(a^2-b^2) - 2r^2 \left(a^2 \ln\frac{a}{r} + b^2 \ln\frac{r}{b} \right) + 2a^2b^2 \ln\frac{a}{b} \left(1 - 2 \ln\frac{a}{r} \right) \right\} \quad (4)$$

همچنین ممان خمشی و نیروی برشی در نقاط مختلف ورق عبارتند از [۱۶]:

$$M_r = -D \left(\frac{d^2 u_z}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{du_z}{dr} \right) \quad (5)$$

$$M_\phi = -D \left(\frac{1}{r} \frac{du_z}{dr} + \nu \frac{d^2 u_z}{dr^2} \right) \quad (6)$$

$$Q_r = -D \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du_z}{dr} \right) \right) \quad (7)$$

با داشتن نیروی برشی در لبه داخلی ورق، می‌توان نیروی لازم برای ایجاد جابه‌جایی δ_a در لبه داخلی آنرا بصورت رابطه (۸) محاسبه کرد:

$$F_a = 2\pi b Q_r|_{r=b} = 16\pi D \delta_a \left\{ \frac{a^2-b^2}{(a^2-b^2)^2-4a^2b^2(\ln a/b)^2} \right\} \quad (8)$$

حال می‌توان سفتی محوری هر دیافراگم را بصورت رابطه (۹) محاسبه کرد:

$$k_a = \frac{F_a}{\delta_a} = 16\pi D \left\{ \frac{a^2-b^2}{(a^2-b^2)^2-4a^2b^2(\ln a/b)^2} \right\} \quad (9)$$

با داشتن ممان‌های خمشی از معادلات (۵) و (۶) می‌توان، نوشت تنش‌ها را به صورت روابط (۱۰-۱۱) محاسبه کرد [۱۶]:

$$\sigma_r = \frac{12M_r z}{h^3} \quad (10)$$

$$\sigma_\phi = \frac{12M_\phi z}{h^3} \quad (11)$$

که در آن پارامتر z از وسط دیافراگم در راستای ضخامت سنجیده می‌شود و تغییرات آن در بازه $[-h/2, +h/2]$ است. با جایگذاری رابطه (۴) در (۵) و (۶) و سپس حاصل آن در (۱۰) و (۱۱)، تنش‌های دیافراگم تحت نامیزانی محوری به اندازه δ_a عبارت از رابطه (۱۳) است:

$$\sigma_r = \frac{2E\delta_a z(a^2-b^2)}{(1-\nu^2)[(a^2-b^2)^2-4a^2b^2(\ln\frac{a}{b})^2]} \left\{ (1+\nu) \left[2 \frac{a^2 \ln a - b^2 \ln b}{a^2-b^2} \right] + 2 \frac{a^2 b^2 (1-\nu) \ln\frac{a}{b}}{r^2(a^2-b^2)} - 2(1+\nu) \ln r - 2 \right\} \quad (12)$$

$$\sigma_\phi = \frac{2E\delta_a z(a^2-b^2)}{(1-\nu^2)[(a^2-b^2)^2-4a^2b^2(\ln\frac{a}{b})^2]} \left\{ (1+\nu) \left[2 \frac{a^2 \ln a - b^2 \ln b}{a^2-b^2} \right] - 2 \frac{a^2 b^2 (1-\nu) \ln\frac{a}{b}}{r^2(a^2-b^2)} - 2(1+\nu) \ln r - 2\nu \right\} \quad (13)$$

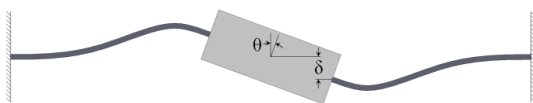
برای چند دیافراگم در هر طرف کویلینگ با قطر داخلی و خارجی یکسان، با توجه به اینکه مجموعه دیافراگم‌ها همانند فنرهای موازی عمل می‌کنند، سفتی محوری مجموعه دیافراگم‌ها در هر طرف کویلینگ عبارت از رابطه (۱۴) است:

$$k_{a_{total}} = \sum_{i=1}^{N_D} k_{a_i} = 16\pi \left\{ \frac{a^2-b^2}{(a^2-b^2)^2-4a^2b^2(\ln a/b)^2} \right\} \sum_{i=1}^{N_D} D_i \quad (14)$$

همچنین در هر دیافراگم، تابع جابه‌جایی از همان رابطه (۴) و تنش نیز از همان روابط (۱۲) و (۱۳) حاصل می‌شود.

۳- نامیزانی زاویه‌ای

با توجه به اینکه تغییر شکل دیافراگم‌ها در نامیزانی زاویه‌ای کویلینگ چند دیافراگمی بسیار پیچیده‌تر از تغییر شکل دیافراگم‌ها در نامیزانی محوری آن است، ابتدا تغییر شکل دیافراگم در نامیزانی زاویه‌ای کویلینگ تک دیافراگمی بررسی می‌شود.



شکل ۳- نمای برش خورده تغییر شکل دیافراگم تحت نامیزانی زاویه‌ای (کوپلینگ با یک دیافراگم در هر طرف آن)

$$u_z(r, \varphi) = \frac{\theta \cos \varphi}{2[a^2 - b^2 - \ln \frac{a}{b}(a^2 + b^2)]} \left\{ r^3 + 2(a^2 + b^2)r \ln \frac{a}{r} - \frac{a^2 b^2}{r} - (a^2 - b^2)r \right\} \quad (21)$$

پس از تعیین تابع تغییر شکل دیافراگم تحت نامیزانی زاویه‌ای مطابق رابطه (۲۱)، با توجه به فرض تنش صفحه‌ای، می‌توان توزیع تنش‌های نرمال را با استفاده از روابط (۱۰) و (۱۱) و تنش برشی را با استفاده از رابطه (۲۲) بدست آورد [۱۶]:

$$\tau_{r\varphi} = \frac{12M_{r\varphi}z}{h^3} \quad (22)$$

که گشتاورهای M_r ، M_φ و $M_{r\varphi}$ و نیروی برشی Q_r ، بصورت روابط (۲۳-۲۶) بدست می‌آیند [۱۶]:

$$M_r = -D \left[\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \varphi^2} \right) \right] \quad (23)$$

$$M_\varphi = -D \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \varphi^2} + \nu \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} \right] \quad (24)$$

$$M_{r\varphi} = -D(1-\nu) \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial \varphi} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} \right] \quad (25)$$

$$Q_r = -D \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \varphi^2} \right] \quad (26)$$

با جایگذاری از رابطه (۲۱) در روابط فوق، توزیع تنش در دیافراگم تحت نامیزانی زاویه‌ای بصورت روابط (۲۷-۲۹) حاصل می‌شود:

$$\sigma_r = \frac{((1+\nu)(a^2+b^2)r^2 + (1-\nu)a^2b^2 - (3+\nu)r^4)\theta z E \cos \varphi}{(1-\nu^2)(a^2 - b^2 - \ln \frac{a}{b}(a^2 + b^2))r^3} \quad (27)$$

$$\sigma_\varphi = \frac{((1+\nu)(a^2+b^2)r^2 - (1-\nu)a^2b^2 - (1+3\nu)r^4)\theta z E \cos \varphi}{(1-\nu^2)(a^2 - b^2 - \ln \frac{a}{b}(a^2 + b^2))r^3} \quad (28)$$

$$\tau_{r\varphi} = \frac{(r^4 - (a^2+b^2)r^2 + a^2b^2)\theta z E \sin \varphi}{(1+\nu)(a^2 - b^2 - \ln \frac{a}{b}(a^2 + b^2))r^3} \quad (29)$$

همچنین برای محاسبه صلابت خمشی دیافراگم که در محاسبه حداکثر گشتاور وارد شده به تجهیزات و همچنین محاسبه فرکانس طبیعی مرتبط با نامیزانی زاویه‌ای کوپلینگ از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است، کافی است گشتاورها و نیروهای وارد شده بر لبه دیسک صلب از طرف دیافراگم را به مرکز دیسک صلب منتقل کرد؛ لذا با توجه به جهت نیروی برشی و گشتاورها مطابق شکل ۴، گشتاور لازم برای

۳-۱- نامیزانی زاویه‌ای در کوپلینگ تک دیافراگمی

همان‌طور که در شکل ۲ نشان داده شده است، نامیزانی زاویه‌ای به اندازه θ در جهت محور y در یک کوپلینگ، دارای یک دیافراگم در هر طرف آن، سبب خمش نامتقارن دیافراگم می‌شود که با استفاده از تئوری کلاسیک ورق یا همان تئوری کیرشهف، معادله دیفرانسیل حاکم بر تغییر شکل آن عبارتست از [۱۶]:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \varphi^2} \right) = \frac{p(r, \varphi)}{D} \quad (15)$$

که همانند قبل در آن بار گسترده بر واحد سطح $p(r, \varphi)$ صفر بوده، لذا حلّ خصوصی معادله (۱۵) صفر است و حلّ فقط شامل، حلّ عمومی است. از طرفی با توجه به اینکه تغییر شکل ورق نامتقارن است، حل را می‌توان با استفاده از روش فوریه بصورت سری (۱۶) در نظر گرفت [۱۶]:

$$u_z(r, \varphi) = R_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} R_n(r) \cos n\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} R_n^*(r) \sin n\varphi \quad (16)$$

اما با توجه به تغییر شکل خاص دیافراگم تحت نامیزانی زاویه‌ای که در آن مرکز ورق هیچگونه جابجایی ندارد و تغییر شکل آن در محیط فقط از یک هارمونیک تشکیل شده است، حلّ (۱۶) را می‌توان برای حالت خاص این تحقیق بصورت رابطه (۱۷) در نظر گرفت:

$$u_z(r, \varphi) = R(r) \cos \varphi \quad (17)$$

حال با جایگذاری رابطه (۱۷) در (۱۵)، معادله دیفرانسیل حاکم بر مسأله بصورت رابطه (۱۸) ساده می‌شود:

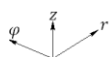
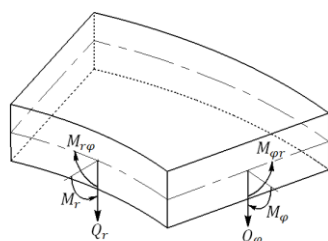
$$\frac{d^4 R}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 R}{dr^3} - \frac{3}{r^2} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{3}{r^3} \frac{dR}{dr} - \frac{3}{r^4} R = 0 \quad (18)$$

شرایط مرزی حاکم بر مسأله با توجه به شکل ۳ عبارت از روابط (۱۹-۲۰) است:

$$\text{at } r = a: \begin{cases} R = 0 \\ \frac{dR}{dr} = 0 \end{cases} \quad (19)$$

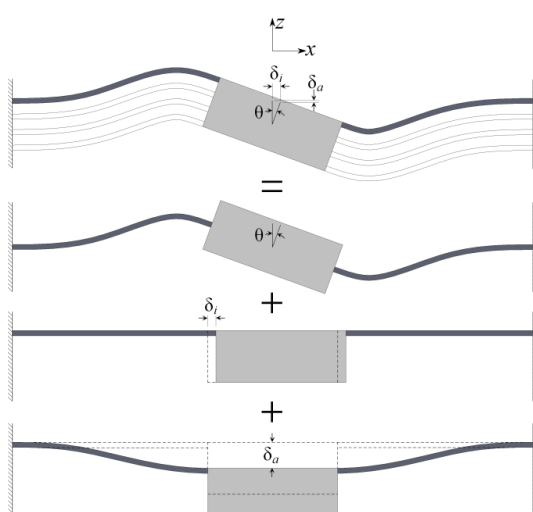
$$\text{at } r = b: \begin{cases} R = -\delta = -b \sin \theta \cong -b\theta \\ \frac{dR}{dr} = -\theta \end{cases} \quad (20)$$

معمولاً حداکثر نامیزانی مجاز کوپلینگ‌ها، کمتر از ۰/۷۵ درجه است [۱] و به همین دلیل در شرط مرزی اول معادله (۲۰)، با دقت بالایی می‌توان مقدار $\sin \theta$ را با θ جایگزین کرد. با حلّ معادله دیفرانسیل (۱۸) تحت شرایط مرزی فوق و سپس جایگذاری پاسخ در معادله (۱۷)، تابع تغییر شکل دیافراگم تحت نامیزانی زاویه‌ای عبارت از رابطه (۲۱) است:



شکل ۴- جهت گشتاورها و نیروهای داخلی در مختصات

استوانه‌ای



شکل ۵- تغییر شکل دیافراگم سایه‌دار در اثر نامیزانی

زاویه‌ای کوپلینگ چهار دیافراگمی (خمش متقارن با

بزرگنمایی ۱۰ برابر نشان داده شده است)

۳-۲- تغییر شکل صفحه‌ای دیافراگم

مطابق شکل ۶، تغییر شکل صفحه‌ای دیافراگم را می‌توان همانند تغییر شکل صفحه‌ای ورق گردی به شعاع خارجی a که در وسط آن دیسک صلبی به شعاع b قرار گرفته است، فرض کرد، بطوری‌که اتصال ورق هم در لبه خارجی و هم در لبه داخلی بصورت گیردار بوده، دیسک صلب به اندازه δ_i در جهت x جابه‌جا شده است.

معادلات دیفرانسیل حاکم بر تغییر شکل صفحه‌ای ورق در مختصات قطبی با توجه به صفر بودن نیروهای خارجی عبارت از رابطه (۳۴-۳۵) است [۱۶]:

چرخاندن دیسک صلب به اندازه θ در جهت محور y عبارتست از:

$$M_b = \int_0^{2\pi} \left\{ (M_r|_{r=b} \cos \varphi - M_{r\varphi}|_{r=b} \sin \varphi) - (Q_r|_{r=b} (b \cos \varphi)) \right\} (bd\varphi) \quad (30)$$

با جایگذاری تابع تغییر شکل بدست آمده از معادله (۲۱) در روابط (۲۳) الی (۲۶) و سپس جایگذاری در رابطه فوق و محاسبه انتگرال آن، صلابت خمشی ناشی از نامیزانی زاویه‌ای دیافراگم به صورت رابطه (۳۱) بدست می‌آید:

$$k_b = \frac{M_b}{\theta} = \frac{4\pi D(a^2+b^2)}{b^2-a^2+\ln\frac{a}{b}(a^2+b^2)} \quad (31)$$

اما نامیزانی زاویه‌ای در کوپلینگ چند دیافراگمی، پیچیده‌تر از حالت فوق است؛ بطوری‌که مطابق شکل ۵ مجاز کوپلینگ‌ها، کمتر از 0.75 درجه است [۱]، معمولاً نامیزانی زاویه‌ای سبب تغییر شکل دیافراگم در محدوده الاستیک شده، فرض خطی بودن و جمع آثار بر آن صادق است، لذا می‌توان تغییر شکل دیافراگم تحت نامیزانی زاویه‌ای را حاصل سه تغییر شکل نشان داده شده در شکل ۵ فرض کرد که عبارتند از: خمش نامتقارن دیافراگم به اندازه θ ، تغییر شکل صفحه‌ای آن به اندازه δ_i ، و خمش متقارن به اندازه δ_a که برای نمایش بهتر در شکل مذکور، میزان خمش متقارن با بزرگنمایی ۱۰ برابر نشان داده شده است. در اثر نامیزانی زاویه‌ای، هر طرف از کوپلینگ حول یک نقطه مشخص روی محور کوپلینگ می‌چرخد که در ادامه موقعیت نقطه مذکور که معروف به مرکز دوران است، تعیین می‌شود. چنانچه فاصله مرکز دیافراگم \bar{r}_m از مرکز دوران طرفی از کوپلینگ که شامل آن دیافراگم است، \bar{r}_j باشد، میزان تغییر شکل صفحه‌ای و خمش متقارن آن دیافراگم در اثر نامیزانی زاویه‌ای به اندازه θ عبارت از روابط (۳۲-۳۳) است:

$$\delta_i = \bar{r}_j \sin \theta \quad (32)$$

$$\delta_a = \bar{r}_j (\cos \theta - 1) \quad (33)$$

تابع تغییر شکل و تنش‌ها در خمش متقارن و نامتقارن دیافراگم در روابط بالا ارائه شده است و فقط کافی است، تابع تغییر شکل و تنش‌ها در تغییر شکل صفحه‌ای دیافراگم بدست آید که در ادامه بررسی می‌شود.

در حالت کلی، می‌توان بسط سری فوریه توابع Φ_r و Φ_φ را در روابط بالا قرار داده، حل مسئله را بدست آورد، اما با توجه به نوع خاص شرایط مرزی رابطه (۴۳)، می‌توان فقط از ترم مرتبه اول سری فوریه توابع Φ_r و Φ_φ ، بصورت رابطه (۴۶-۴۷) استفاده کرد:

$$\Phi_r(\varphi) = \cos \varphi \quad (46)$$

$$\Phi_\varphi(\varphi) = \sin \varphi \quad (47)$$

حال با جایگذاری روابط (۴۴) الی (۴۷) در روابط (۳۹) الی (۴۱)، کرنش‌ها عبارتند از:

$$\varepsilon_r = R'_r \cos \varphi \quad (48)$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{R_r + R_\varphi}{r} \cos \varphi \quad (49)$$

$$\gamma_{r\varphi} = \frac{rR'_\varphi - R_r - R_\varphi}{r} \sin \varphi \quad (50)$$

که در آن علامت ' نشان دهنده مشتق نسبت به r است. حال با قرار دادن روابط (۴۸) الی (۵۰) در روابط (۳۶) الی (۳۸)، تنش‌ها عبارت از روابط (۵۱-۵۳) است:

$$\sigma_r = E \frac{rR'_r + \nu R_r + \nu R_\varphi}{(1-\nu^2)r} \cos \varphi \quad (51)$$

$$\sigma_\varphi = E \frac{\nu rR'_r + R_r + R_\varphi}{(1-\nu^2)r} \cos \varphi \quad (52)$$

$$\tau_{r\varphi} = E \frac{rR'_\varphi - R_r - R_\varphi}{2(1+\nu)r} \sin \varphi \quad (53)$$

و در نهایت، با جایگذاری روابط (۵۱) الی (۵۳) در معادلات دیفرانسیل (۳۴) و (۳۵)، دستگاه معادلات دیفرانسیل (۵۴) حاصل می‌شود:

$$\begin{cases} 2r^2 R''_r + 2rR'_r + (1+\nu)rR'_\varphi - (3-\nu)(R_r + R_\varphi) = 0 \\ (1-\nu)r^2 R''_\varphi + (1-\nu)rR'_\varphi - (1+\nu)rR'_r - (3-\nu)(R_r + R_\varphi) = 0 \end{cases} \quad (54)$$

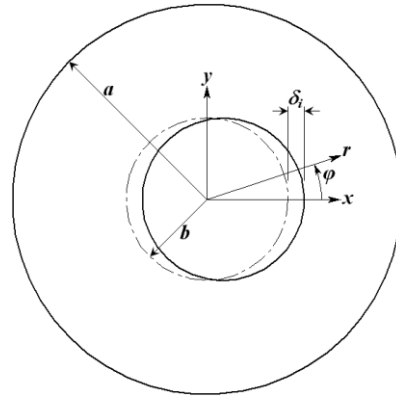
با حل دستگاه معادله فوق و با استفاده از شرایط مرزی روابط (۴۲) و (۴۳)، پاسخ در روابط (۵۵-۵۶) حاصل می‌شود:

$$R_r = \frac{\delta_i}{2r^2} \frac{2(3-\nu)^2(a^2+b^2)r^2 \ln\left(\frac{a}{r}\right) - (a^2-r^2)(1+\nu)[r^2(3\nu-1)+b^2(3-\nu)]}{(1+\nu)^2(b^2-a^2)+(3-\nu)^2 \ln\left(\frac{a}{b}\right)(a^2+b^2)} \quad (55)$$

$$R_\varphi = \frac{\delta_i}{2r^2} \frac{(a^2-r^2)(1+\nu)[r^2(5+\nu)+b^2(\nu-3)] - 2(3-\nu)^2(a^2+b^2)r^2 \ln\left(\frac{a}{r}\right)}{(1+\nu)^2(b^2-a^2)+(3-\nu)^2 \ln\left(\frac{a}{b}\right)(a^2+b^2)} \quad (56)$$

حال با جایگذاری روابط (۵۵) و (۵۶) در روابط (۵۱) الی (۵۳)، تنش‌ها بصورت روابط (۵۷-۵۹) حاصل می‌شوند:

$$\sigma_r = \frac{\delta_i E}{(1+\nu)r^3} \frac{(1+\nu)(3-\nu)a^2b^2 - (1+\nu)^2r^4 - (a^2+b^2)(9-\nu^2)r^2}{(1+\nu)^2(b^2-a^2)+(3-\nu)^2 \ln\left(\frac{a}{b}\right)(a^2+b^2)} \cos \varphi \quad (57)$$



شکل ۶- تغییر شکل صفحه‌ای ورق گرد سوراخدار

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} = 0 \quad (34)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + 2 \frac{\tau_{r\varphi}}{r} = 0 \quad (35)$$

با فرض کوچک بودن ضخامت دیافراگم، می‌توان از فرض تنش صفحه‌ای استفاده کرد، لذا روابط تنش-کرنش عبارتند از:

$$\sigma_r = E \frac{\varepsilon_r + \nu \varepsilon_\varphi}{1-\nu^2} \quad (36)$$

$$\sigma_\varphi = E \frac{\varepsilon_\varphi + \nu \varepsilon_r}{1-\nu^2} \quad (37)$$

$$\tau_{r\varphi} = \frac{E \gamma_{r\varphi}}{2(1+\nu)} \quad (38)$$

همچنین روابط کرنش-تغییر مکان در مختصات قطبی عبارت از (۳۹-۴۱) است [۱۶]:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad (39)$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \quad (40)$$

$$\gamma_{r\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \quad (41)$$

اما شرایط مرزی حاکم بر مسئله با توجه به اینکه قطر خارجی بصورت گیردار مقید شده، در قطر داخلی فقط جابه‌جایی در جهت محور x ، به اندازه δ_i اعمال شده است و جابه‌جایی در جهت محور y صفر است، با انتقال شرایط مرزی قطر داخلی به مختصات قطبی می‌توان نوشت:

$$at \ r = a: \begin{cases} u_r = 0 \\ u_\varphi = 0 \end{cases} \quad (42)$$

$$at \ r = b: \begin{cases} u_r = \delta_i \cos \varphi \\ u_\varphi = -\delta_i \sin \varphi \end{cases} \quad (43)$$

با استفاده از روش جدا کردن متغیرها، حل جابجایی به-صورت رابطه (۴۴-۴۵) در نظر گرفته می‌شود:

$$u_r(r, \varphi) = R_r(r) \times \Phi_r(\varphi) \quad (44)$$

$$u_\varphi(r, \varphi) = R_\varphi(r) \times \Phi_\varphi(\varphi) \quad (45)$$

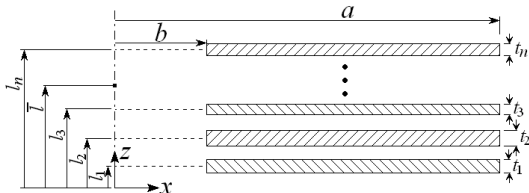
و با جایگذاری مقدار δ_i از رابطه (۳۲) برای مقادیر کوچک
 زاویه θ در معادله (۶۲) رابطه (۶۳) را داریم:

$$\sum (l_j - \bar{l}) t_j = 0 \quad (63)$$

و حال موقعیت محوری مرکز دوران عبارتست از:

$$\bar{l} = \frac{\sum l_j t_j}{\sum t_j} \quad (64)$$

با توجه به اینکه فرض شد، قطر داخلی و خارجی تمامی
 دیافراگم‌ها مشابه است، معادله فوق عملاً نشان‌دهنده مرکز
 سطح مقطع مجموعه دیافراگم‌های یک طرف کوپلینگ است.



شکل ۷- نیم مقطعی از دیافراگم‌های یک طرف کوپلینگ و
 موقعیت محوری آنها

۳-۴- سفتی خمشی کوپلینگ چند دیافراگمی

در اثر نامیزانی زاویه‌ای یک طرف کوپلینگ به اندازه θ ، ممان
 خمشی به اندازه M بر تجهیز مربوطه اعمال می‌شود که
 معمولاً حد این ممان، توسط سازنده تجهیز مشخص شده
 است؛ لذا تعیین سفتی خمشی هر طرف کوپلینگ، از اهمیت
 بسزایی برخوردار است. علاوه بر آن، معمولاً دومین فرکانس
 طبیعی کوپلینگ مربوط به تغییر شکل خمشی جداکننده
 کوپلینگ است که می‌توان آنرا همانند تغییر شکل خمشی
 یک تیر با تکیه‌گاه الاستیک در دو سر (بین تکیه‌گاه ساده و
 گیردار) مشابه سازی کرد؛ لذا مشخص بودن سفتی خمشی
 هر طرف کوپلینگ، در استخراج یک رابطه تحلیلی برای
 دومین فرکانس طبیعی کوپلینگ نیز تعیین کننده است.

چنانچه یک طرف کوپلینگ چند دیافراگمی تحت ممان
 خالص عمود بر محور کوپلینگ به اندازه M قرار گیرد، ممان
 خمشی ایجاد شده در اثر خمش نامتقارن هر دیافراگم و
 ممان ناشی از نیروهای صفحه‌ای ایجاد شده در اثر تغییر
 شکل صفحه‌ای هر دیافراگم، باعث حفظ تعادل می‌شود. لذا
 برای مقادیر کوچک θ ، با توجه به روابط (۳۱)، (۳۲) و (۶۱)،
 می‌توان رابطه (۶۵) را نوشت:

$$M = \sum \theta k_b + \sum k_i \delta_i (l_j - \bar{l}) = \left\{ \sum k_b + \sum k_i (l_j - \bar{l})^2 \right\} \theta \quad (65)$$

$$\sigma_\varphi = \frac{\delta_i E}{(1+\nu)r^3} \frac{(a^2+b^2)(1-\nu)(3-\nu)r^2 - 3(1+\nu)^2 r^4 - (1+\nu)(3-\nu)a^2 b^2}{(1+\nu)^2(b^2-a^2) + (3-\nu)^2 \ln\left(\frac{a}{b}\right)(a^2+b^2)} \cos \varphi \quad (58)$$

$$\tau_{r\varphi} = \frac{\delta_i E}{(1+\nu)r^3} \frac{(a^2+b^2)(1-\nu)(3-\nu)r^2 + (1+\nu)(3-\nu)a^2 b^2 - (1+\nu)^2 r^4}{(1+\nu)^2(b^2-a^2) + (3-\nu)^2 \ln\left(\frac{a}{b}\right)(a^2+b^2)} \sin \varphi \quad (59)$$

با داشتن تنش در لبه داخلی دیافراگم، می‌توان نیروی
 لازم برای ایجاد تغییر شکل به اندازه δ_i را به صورت رابطه
 (۶۰) محاسبه کرد:

$$F_i = - \int_0^{2\pi} \left[\sigma_r \cos \varphi - \tau_{r\varphi} \sin \varphi \right]_{r=b} t b d\varphi = \frac{4\pi \delta_i E t}{(1+\nu)^2(b^2-a^2) + (3-\nu)^2 \ln\left(\frac{a}{b}\right)(a^2+b^2)} (3-\nu)(a^2+b^2) t b d\varphi \quad (60)$$

که با استفاده از آن، سفتی صفحه‌ای دیافراگم عبارتست از:

$$k_i = \frac{F_i}{\delta_i} = \frac{4\pi E t}{(1+\nu)^2(b^2-a^2) + (3-\nu)^2 \ln\left(\frac{a}{b}\right)(a^2+b^2)} (3-\nu)(a^2+b^2) \quad (61)$$

۳-۳- مرکز دوران یک طرف کوپلینگ چند دیافراگمی

همانطور که در قبل اشاره شد، چنانچه یک طرف کوپلینگ
 چند دیافراگمی تحت ممان خالص عمود بر محور کوپلینگ
 قرار گیرد، مجموعه دیافراگم‌ها حول یک نقطه روی محور
 کوپلینگ که معروف به مرکز دوران است، می‌چرخد و رفتار
 مجموعه دیافراگم‌ها تحت ممان مذکور، مشابه رفتار آن‌ها
 تحت نامیزانی زاویه‌ای نشان داده شده در شکل ۵ است. برای
 مقادیر خیلی کوچک زاویه θ در شکل ۵، بر مبنای رابطه
 (۳۳) مقدار δ_a بسیار ناچیز و لذا نیروی محوری وارد شده بر
 هر دیافراگم، قابل صرف نظر کردن و نزدیک به صفر است.
 خمش نامتقارن دیافراگم‌ها نیز، باعث ایجاد ممان خالص شده
 که در جهت خنثی کردن ممان خالص خارجی عمل
 می‌کنند؛ اما تغییر شکل صفحه‌ای دیافراگم‌ها، باعث ایجاد
 نیروهای قابل توجه عمود بر محور کوپلینگ شده که با
 استفاده از اصل تعادل استاتیکی، بایستی جمع آن‌ها برابر با
 صفر شود. با توجه به اینکه معمولاً تمامی دیافراگم‌های واقع
 شده در یک طرف کوپلینگ دارای جنس، قطر داخلی و قطر
 خارجی یکسانی هستند، لذا چنانچه مطابق شکل ۷ موقعیت
 محوری مرکز هر دیافراگم l_j باشد و مرکز دوران آن در \bar{l}
 واقع شده باشد، بر مبنای رابطه (۶۰)، باید معادله (۶۲) برقرار
 باشد:

$$\sum F_i = 0 \Rightarrow \sum \delta_i t = 0 \quad (62)$$

۴- مدل سازی المان محدود

هرچند که معمولاً برای بررسی صحت یک حلّ عددی، آنرا با حلّ تحلیلی و یا نتایج تجربی مقایسه می‌کنند، اما در اینجا با توجه به تایید عمومی روش حلّ المان محدود، نتایج حلّ تحلیلی با نتایج حلّ المان محدود نرم‌افزار انسیس مقایسه شده و صحت حلّ تحلیلی نشان داده می‌شود. بدین منظور، یک مسأله نمونه انتخاب شده، نتایج حلّ تحلیلی برای دو نامیزانی محوری و زاویه‌ای با نتایج المان محدود مقایسه می‌شود.

مسأله مورد نظر یک طرف کویلینگ چهار دیافراگمی با قطر خارجی $2a = 200 \text{ mm}$ و قطر داخلی $2b = 100 \text{ mm}$ است که مطابق شکل ۵، ضخامت دیافراگم‌های اول الی چهارم $t_1 = 1 \text{ mm}$ و $t_2 = 2 \text{ mm}$ و $t_3 = t_4 = 2 \text{ mm}$ بوده، موقعیت محوری سطح میانی آن‌ها $l_1 = 0 \text{ mm}$ ، $l_2 = 3 \text{ mm}$ ، $l_3 = 6 \text{ mm}$ و $l_4 = 9 \text{ mm}$ است. جنس تمامی دیافراگم‌ها از فولاد با مدول الاستیک $E = 200 \text{ GPa}$ و نسبت پواسون $\nu = 0.3$ است و بصورت قراردادی تنش‌ها در دیافراگم اول و دوم در سطح $z = -0.5 \text{ mm}$ و در دیافراگم‌های سوم و چهارم در سطح $z = 1 \text{ mm}$ اندازه‌گیری می‌شود. مطابق رابطه (۶۴)، مرکز دوران یک طرف کویلینگ عبارتست از:

$$\bar{l} = \frac{(0 \times 1 + 3 \times 1 + 6 \times 2 + 9 \times 2)}{(1 + 1 + 2 + 2)} = 5.5 \text{ mm}$$

برای مدل سازی المان محدود، هر دیافراگم با ۲۰۰ المان در محیط و ۲۵ المان در شعاع و مجموعاً ۵۰۰۰ المان چهارضلعی پوسته مدل سازی شد. در مرکز دیافراگم‌ها، از یک لوله با قطر متوسط $D = 100 \text{ mm}$ و طول $L = 9 \text{ mm}$ و همچنین در موقعیت محوری $\bar{l} = 5.5 \text{ mm}$ از یک دیسک به قطر $D = 100 \text{ mm}$ استفاده شد و برای نشان دادن رفتار صلب لوله و دیسک، ضخامت آن‌ها بصورت مجازی $t = 1000 \text{ mm}$ در نظر گرفته شد که هریک از آن‌ها در راستای محیطی شامل، ۲۰۰ المان پوسته بودند. المان‌ریزی لوله به‌گونه‌ای انجام گرفت که در موقعیت محوری هر دیافراگم و دیسک صلب، دارای ۲۰۰ گره بود. سپس گره‌های واقع شده روی هم ادغام شدند. بدین ترتیب، مجموعه لوله و دیسک و اتصال آن‌ها به دیافراگم‌ها، همانند یک دیسک صلب عمل می‌کند که دیافراگم‌ها بصورت گیردار به آن متصل شده‌اند، همچنین تمامی درجات آزادی گره‌های واقع شده بر قطر خارجی دیافراگم‌ها نیز مقید شد که نشان دهنده اتصال

لذا سفتی خمشی یک طرف کویلینگ با دیافراگم‌های دارای قطر داخلی و خارجی و همچنین جنس یکسان، عبارت از رابطه (۶۶) است:

$$k_{b \text{ total}} = \frac{\pi E(a^2 + b^2)}{3(1 - \nu^2)[(a^2 + b^2) \ln(\frac{a}{b}) + b^2 - a^2]} \sum t_j^3 + \frac{4\pi E(3 - \nu)(a^2 + b^2)}{(1 + \nu)[(1 + \nu)^2(b^2 - a^2) + (3 - \nu)^2 \ln(\frac{a}{b})(a^2 + b^2)]} \sum t_j(l_j - \bar{l})^2 \quad (66)$$

۳-۵- تغییر شکل صفحه میانی و تنش دیافراگم

چنانچه مقدار نامیزانی زاویه‌ای کوچک باشد، تغییر شکل دیافراگم کوچک و کرنش‌ها در محدوده الاستیک بوده، لذا فرض خطی بودن و جمع آثار صادق بوده، می‌توان تغییر شکل دیافراگم را حاصل سه تغییر شکل نشان داده شده در شکل ۳ فرض کرد که با استفاده از روابط (۴)، (۲۱)، (۴۴) الی (۴۷)، (۵۵) و (۵۶) تغییر شکل سطح میانی دیافراگم در مختصات استوانه‌ای بصورت روابط (۶۷-۶۹) بیان می‌شود:

$$u_r(r, \varphi) = \frac{\delta_i \cos \varphi}{2r^2} \frac{2(3 - \nu)^2(a^2 + b^2)r^2 \ln(\frac{a}{r}) - (a^2 - r^2)(1 + \nu)[r^2(3\nu - 1) + b^2(3 - \nu)]}{(1 + \nu)^2(b^2 - a^2) + (3 - \nu)^2 \ln(\frac{a}{b})(a^2 + b^2)} \quad (67)$$

$$u_\varphi(r, \varphi) = \frac{\delta_i \sin \varphi}{2r^2} \frac{(a^2 - r^2)(1 + \nu)[r^2(5 + \nu) + b^2(\nu - 3)] - 2(3 - \nu)^2(a^2 + b^2)r^2 \ln(\frac{a}{r})}{(1 + \nu)^2(b^2 - a^2) + (3 - \nu)^2 \ln(\frac{a}{b})(a^2 + b^2)} \quad (68)$$

$$u_z(r, \varphi) = \frac{\delta_a}{(a^2 - b^2)^2 - 4a^2b^2(\ln(\frac{a}{b}))^2} \left\{ (a^2 - r^2)(a^2 - b^2) - 2r^2 \left(a^2 \ln \frac{a}{r} + b^2 \ln \frac{r}{b} \right) + 2a^2b^2 \ln \frac{a}{b} \left(1 - 2 \ln \frac{a}{r} \right) \right\} + \frac{\theta \cos \varphi}{2[a^2 - b^2 - \ln(\frac{a}{b})(a^2 + b^2)]} \left\{ r^3 + 2(a^2 + b^2)r \ln \frac{a}{r} - \frac{a^2b^2}{r} - (a^2 - b^2)r \right\} \quad (69)$$

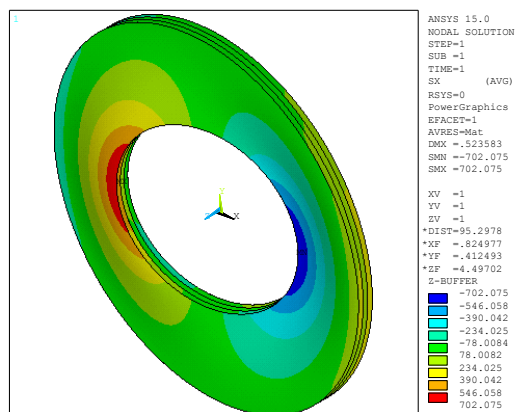
همچنین بر مبنای روابط (۱۲)، (۱۳)، (۲۷) الی (۲۹) و (۵۷) الی (۵۹)، تنش در دیافراگم عبارتست از:

$$\sigma_r(r, \varphi) = \sigma_{r_a} + \sigma_{r_b} + \sigma_{r_i} \quad (70)$$

$$\sigma_\varphi(r, \varphi) = \sigma_{\varphi_a} + \sigma_{\varphi_b} + \sigma_{\varphi_i} \quad (71)$$

$$\tau_{r\varphi}(r, \varphi) = \tau_{r\varphi_b} + \tau_{r\varphi_i} \quad (72)$$

که در آن σ_{r_a} و σ_{φ_a} به ترتیب، از روابط (۱۲) و (۱۳)، σ_{r_b} و σ_{φ_b} به ترتیب، از روابط (۲۷)، (۲۸) و (۲۹) و σ_{r_i} و σ_{φ_i} به ترتیب، از روابط (۵۷)، (۵۸) و (۵۹) بدست می‌آیند.



شکل ۹- کانتور تنش شعاعی مدل ۱ تحت نامیزانی زاویه‌ای به مقدار $\theta = 0.01 \text{ rad}$

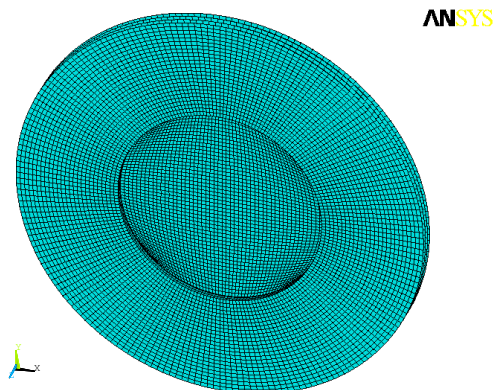
۵- نتایج

نتایج بدست آمده از روابط تحلیلی شامل، تابع تغییر شکل، توزیع تنش در دیافراگم‌ها و سختی آن‌ها تحت نامیزانی محوری و زاویه‌ای است. در این تحقیق مسئله نمونه ارائه شده در بالا، تحت دو نامیزانی محوری به اندازه $\delta_a = 1 \text{ mm}$ و زاویه‌ای به اندازه $\theta = 0.01 \text{ rad}$ قرار گرفته، نتایج روش تحلیلی با نتایج المان محدود برای دیافراگم‌های ۱ الی ۴ مقایسه می‌شود که در اشکال زیر با Diaph.1 الی Diaph.4 نشان داده می‌شوند.

۵-۱- بررسی رفتار دیافراگم‌ها تحت نامیزانی محوری

مقایسه پروفیل تغییر شکل دیافراگم‌ها در راستای شعاعی تحت نامیزانی محوری به اندازه $\delta_a = 1 \text{ mm}$ در شکل ۱۰ نشان داده شده است. مطابق معادله (۴)، تغییر شکل دیافراگم تحت نامیزانی محوری، مستقل از ضخامت آن است و با توجه به یکسان بودن قطر داخلی و خارجی دیافراگم‌ها و اینکه تمامی آن‌ها تحت نامیزانی محوری یکسان $\delta_a = 1 \text{ mm}$ قرار گرفته‌اند، لذا پروفیل تغییر شکل آن‌ها کاملاً مشابه یکدیگر است که این موضوع نیز در شکل ۱۰ مشاهده می‌شود. همچنین شیب تغییر شکل دیافراگم‌ها در قطر داخلی و خارجی صفر است که نشان از گیردار بودن اتصال آن‌ها در قطر داخلی و خارجی است. مقایسه نتایج عددی و تحلیلی در شکل مذکور، نشان از تطابق کامل آن‌ها و لذا صحت روش تحلیلی دارد.

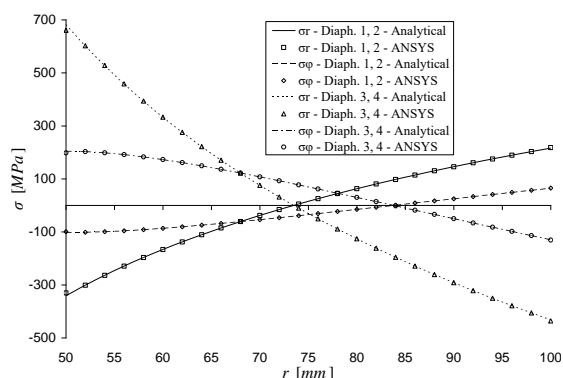
گیردار قطر خارجی دیافراگم‌ها به یک فلنج صلب است. نمایی از مدل المان محدود در شکل ۸ نشان داده شده است. در نامیزانی محوری، مرکز دیسک صلب تحت جابجایی محوری $\delta_a = 1 \text{ mm}$ قرار گرفت و در نامیزانی زاویه‌ای، مرکز دیسک صلب تحت چرخش $\theta = 0.01 \text{ rad}$ قرار گرفت.



شکل ۸- نمایی از مدل المان محدود پوسته یک طرف کوپلینگ شامل چهار دیافراگم

به منظور بررسی اثر تعداد المان‌ها بر نتایج حل المان محدود، علاوه بر مدل فوق (مدل ۱)، دو مدل دیگر با تعداد ۲۰ المان در شعاع و ۱۶۰ المان در محیط و مجموعاً ۳۲۰۰ المان برای هر دیافراگم (مدل ۲) و همچنین ۱۰ المان در شعاع و ۸۰ المان در محیط و مجموعاً ۸۰۰ المان برای هر دیافراگم (مدل ۳) نیز ساخته شد و هر سه مدل تحت نامیزانی زاویه‌ای به مقدار $\theta = 0.01 \text{ rad}$ قرار گرفت که کانتور تنش شعاعی مدل ۱ در شکل ۹ نشان داده شده است. سپس تغییر شکل عمود بر صفحه دیافراگم اول در $r = 70 \text{ mm}$ و $\varphi = 180 \text{ deg}$ بعنوان معیار مقایسه انتخاب شد. مقدار حاصل شده از حل تحلیلی رابطه (۶۹) $u_z = 0.36527 \text{ mm}$ مدل المان محدود ۳ $u_z = 0.36649 \text{ mm}$ مدل المان محدود ۲ $u_z = 0.36541 \text{ mm}$ و مدل المان محدود ۱ $u_z = 0.36529 \text{ mm}$ بود. مقایسه نتایج حاصل از مدل‌های مختلف المان محدود با حل تحلیلی نشان می‌دهد که با افزایش تعداد المان‌ها، نتایج حل عددی به نتایج حل تحلیلی نزدیک‌تر شده، لذا مدل ۱ برای مقایسه حل تحلیلی با حل المان محدود مناسب است.

همچنین سختی محوری بدست آمده از رابطه (۱۴)، مقدار $k_{a\text{total}} = 15147.8 \text{ N/mm}$ دارد که در نامیزانی محوری $\delta_a = 1 \text{ mm}$ باعث ایجاد نیروی $F_a = 15147.8 \text{ N}$ می‌شود. نیروی محوری لازم برای ایجاد نامیزانی محوری مذکور در مدل المان محدود نیز $F_a = 15145 \text{ N}$ است که با دقت بالایی بسیار نزدیک به مقدار تحلیلی است.

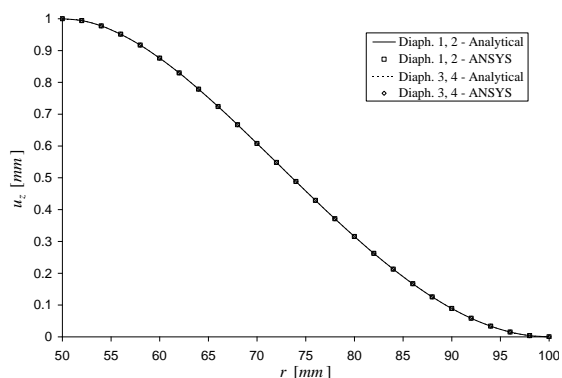


شکل ۱۱- تغییرات تنش دیافراگم‌ها در راستای شعاعی تحت نامیزانی محوری به اندازه $\delta_a = 1 \text{ mm}$

۵-۲- بررسی رفتار دیافراگم‌ها تحت نامیزانی زاویه‌ای

با توجه به تغییر شکل پیچیده دیافراگم‌ها تحت نامیزانی زاویه‌ای، می‌توان رفتار آن‌ها را هم در جهت شعاعی و هم در جهت محیطی بررسی کرد. در جهت محیطی می‌توان در یک شعاع متوسط رفتار دیافراگم‌ها را تحت نامیزانی زاویه‌ای بررسی کرد که در اینجا با توجه به داده‌های مدل المان محدود، شعاع $r = 74 \text{ mm}$ انتخاب شده است.

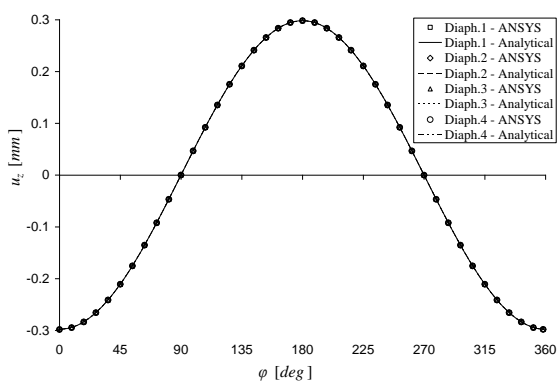
تغییر شکل صفحه‌ای هر چهار دیافراگم تحت نامیزانی زاویه‌ای به اندازه $\theta = 0.01 \text{ rad}$ در دو جهت شعاعی و محیطی به ترتیب، در شکل ۱۲ و ۱۳ نشان داده شده است. مطابق دو شکل مذکور، ضمن تطابق کامل نتایج تحلیلی و عددی، تغییر شکل صفحه‌ای هر دیافراگم در جهت محیطی شامل یک هارمونی کامل است. همچنین با توجه به روابط (۶۷) و (۶۸)، تغییر شکل صفحه‌ای دیافراگم‌ها مستقل از ضخامت آنها بوده، برای دیافراگم‌ها با قطر داخلی و خارجی و جنس یکسان، δ_i تعیین‌کننده اختلاف تغییر شکل صفحه‌ای آنها است که بر مبنای رابطه (۳۲)، هر دیافراگم که فاصله بیشتری از مرکز دوران داشته باشد، تغییر شکل صفحه‌ای بزرگتری خواهد داشت. با توجه به اینکه فاصله دیافراگم اول



شکل ۱۰- مقایسه پروفیل تغییر شکل دیافراگم‌ها در راستای شعاعی تحت نامیزانی محوری به اندازه $\delta_a = 1 \text{ mm}$

تغییرات تنش دیافراگم‌ها در راستای شعاعی تحت نامیزانی محوری به اندازه $\delta_a = 1 \text{ mm}$ در شکل ۱۱ نشان داده شده است. با توجه به یکسان بودن قطر داخلی و خارجی و جنس دیافراگم‌ها، مطابق معادله (۱۲) و (۱۳)، تنش در دیافراگم اول با دوم و همچنین سوم با چهارم یکسان بوده، همچنین با توجه به اینکه تنش‌ها در دیافراگم اول و دوم در سطح $z = -0.5 \text{ mm}$ و در دیافراگم‌های سوم و چهارم در سطح $z = 1 \text{ mm}$ اندازه‌گیری می‌شود، لذا تنش در دیافراگم سوم و چهارم دو برابر تنش متناظر در دیافراگم اول و دوم و با علامت مخالف است که این موضوع به روشنی در شکل ۱۱ مشاهده می‌شود (تنش‌های متناظر در یک نقطه روی محور طول‌ها همدیگر را قطع می‌کنند). همچنین نتایج عددی و تحلیلی بجز در قطر داخلی و خارجی دیافراگم‌ها، تطابق کامل دارد. با توجه به اینکه در حل المان محدود، تنش‌ها در نقاط انتگرال‌گیری عددی محاسبه می‌شوند و المان پوخته مورد استفاده، دارای یک نقطه انتگرال‌گیری گوسی در وسط صفحه المان و پنج نقطه در راستای ضخامت دارد، لذا تنش‌ها در وسط صفحه المان محاسبه می‌شوند و برای محاسبه تنش‌ها در گره‌ها، بایستی از میانمایی استفاده کرد، اما برای محاسبه تنش در گره‌های مرزی، همانند گره‌های واقع بر لبه داخلی و خارجی دیافراگم، بایستی از برونمایی استفاده کرد که دقتی کمتر از درونمایی دارد. به همین دلیل تنش‌های حاصل از حل المان محدود نسبت به تنش‌های حاصل از حل تحلیلی در لبه داخلی و خارجی دیافراگم، دارای خطای جزئی است.

خارجی مشابه، ترم خمش نامتقارن برای تمامی دیافراگم‌ها یکسان بوده، اما با توجه به وجود پارامتر δ_a ، ترم خمش متقارن برای هر دیافراگم متفاوت است، لذا با توجه به شکل ۱۴ می‌توان نتیجه گرفت که ترم خمش متقارن، تأثیر ناچیزی بر تغییر شکل عمودی دیافراگم دارد، بطوریکه می‌توان از آن صرف‌نظر کرد. بر مبنای رابطه (۳۳) نیز با توجه به مقادیر کوچک نامیزانی زاویه‌ای، همواره مقدار δ_a بسیار ناچیز و قابل صرف‌نظر کردن است. به همین دلیل در زوایای $\varphi = 90, 270 \text{ deg}$ که ترم خمش نامتقارن صفر است، جابه‌جایی عمودی دیافراگم‌ها نیز بسیار نزدیک به صفر است.

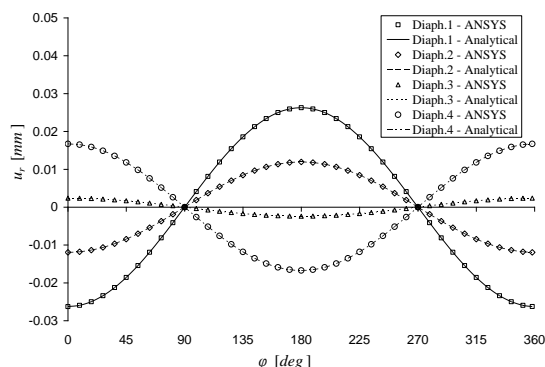


شکل ۱۴- تغییر شکل عمود بر صفحه دیافراگم‌ها تحت نامیزانی زاویه‌ای در شعاع $r = 74 \text{ mm}$

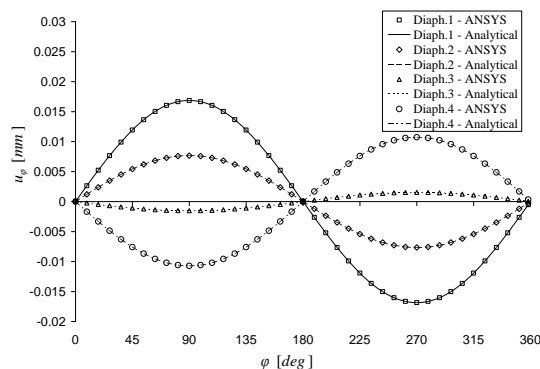
تنش شعاعی، محیطی و تنش برشی هر چهار دیافراگم تحت نامیزانی زاویه‌ای به اندازه $\theta = 0.01 \text{ rad}$ به ترتیب در شکل‌های ۱۵ الی ۱۷ نشان داده شده است. مطابق سه شکل مذکور، ضمن تطابق کامل نتایج عددی و تحلیلی، تمامی مؤلفه‌های تنش در محیط از یک هارمونی کامل تشکیل شده‌اند، اما مطابق روابط (۱۲) و (۱۳)، ترم تنش‌های نرمال شعاعی و محیطی ناشی از خمش متقارن، خاصیت هارمونیک نداشته و با توجه به شکل‌های ۱۵ و ۱۶، تنش‌های نرمال در زوایای $\varphi = 90, 270 \text{ deg}$ (که ترم‌های تنش ناشی از خمش نامتقارن و تغییر شکل صفحه‌ای صفر است)، بسیار ناچیز است، لذا در نامیزانی زاویه‌ای، اثر خمش متقارن در تنش‌های دیافراگم قابل صرف‌نظر کردن است.

همچنین از بررسی شکل‌های ۱۵ و ۱۶ مشخص می‌شود که بیشترین مقدار تنش‌های نرمال شعاعی و محیطی در

و چهارم از مرکز دوران به ترتیب $\Delta l = 5.5 \text{ mm}$ و $\Delta l = 3.5 \text{ mm}$ میلی‌متر است، لذا تغییر شکل صفحه‌ای دیافراگم اول بیشتر از چهارم بوده، دلیل علامت عکس تغییر شکل صفحه‌ای آن‌ها نیز، قرار گرفتن آن‌ها در دو طرف مرکز دوران است.



شکل ۱۲- تغییر شکل شعاعی دیافراگم‌ها تحت نامیزانی زاویه‌ای در شعاع $r = 74 \text{ mm}$



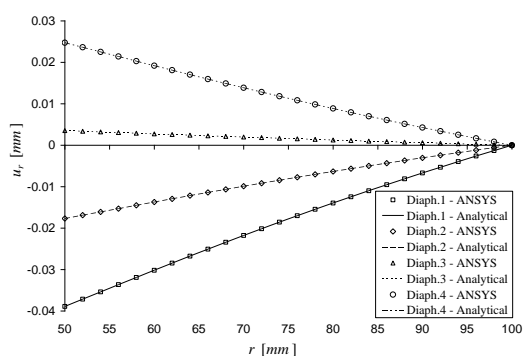
شکل ۱۳- تغییر شکل محیطی دیافراگم‌ها تحت نامیزانی زاویه‌ای در شعاع $r = 74 \text{ mm}$

تغییر شکل عمود بر صفحه هر چهار دیافراگم تحت نامیزانی زاویه‌ای به اندازه $\theta = 0.01 \text{ rad}$ در شکل ۱۴ نشان داده شده است. مطابق این شکل، ضمن تطابق کامل نتایج عددی و تحلیلی، تغییر شکل عمودی هر چهار دیافراگم با دقت بالایی بر یکدیگر منطبق است، اما با توجه به رابطه (۶۹)، تغییر شکل عمودی هر دیافراگم مستقل از ضخامت بوده، از دو ترم ناشی از خمش متقارن و خمش نامتقارن تشکیل شده است که برای دیافراگم‌ها با قطر داخلی و

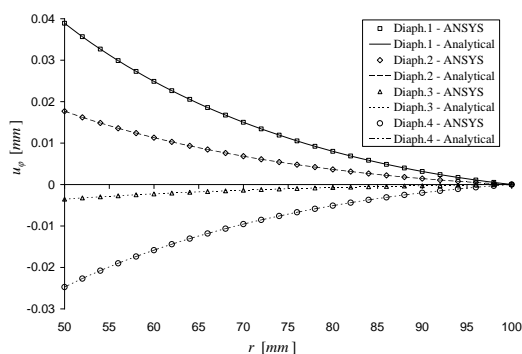
اما برای بررسی رفتار دیافراگم‌ها تحت نامیزانی زاویه‌ای در جهت شعاعی، مطابق شکل‌های ۱۲ الی ۱۷، زاویه $\varphi = 45 \text{ deg}$ انتخاب می‌شود که در آن هیچ یک از پارامترهای جابه‌جایی یا تنش صفر نیست.

مقایسه پروفیل تغییر شکل شعاعی و محیطی دیافراگم‌ها در زاویه $\varphi = 45 \text{ deg}$ تحت نامیزانی زاویه‌ای که به ترتیب در شکل‌های ۱۸ و ۱۹ نشان داده شد، حاکی از تطابق کامل نتایج عددی و تحلیلی است. همچنین مطابق بحثی که برای شکل‌های ۱۲ و ۱۳ آورده شد، در شکل ۱۸ و ۱۹ نیز مشاهده می‌شود که هر دیافراگم که فاصله بیشتری از مرکز دوران داشته باشد، تغییر شکل صفحه‌ای بزرگتری خواهد داشت.

مقایسه پروفیل تغییر شکل عمود بر صفحه دیافراگم‌ها در زاویه $\varphi = 45 \text{ [deg]}$ تحت نامیزانی زاویه‌ای که در شکل ۲۰ نشان داده شد، حاکی از تطابق کامل نتایج عددی و تحلیلی

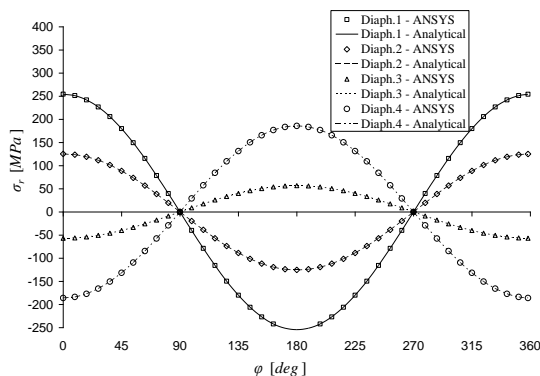


شکل ۱۸- تغییر شکل شعاعی دیافراگم‌ها تحت نامیزانی زاویه‌ای در زاویه $\varphi = 45 \text{ deg}$

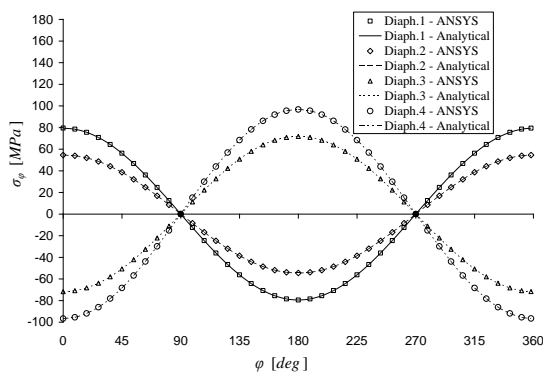


شکل ۱۹- تغییر شکل محیطی دیافراگم‌ها تحت نامیزانی زاویه‌ای در زاویه $\varphi = 45 \text{ deg}$

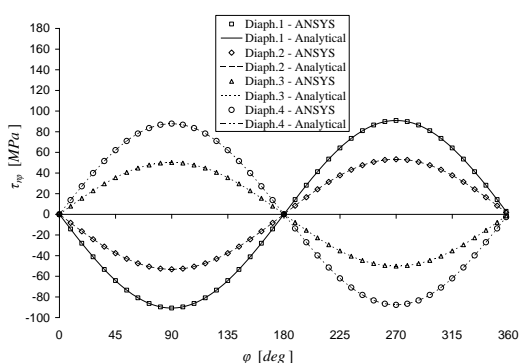
زوایای $\varphi = 0, 180 \text{ deg}$ و از بررسی شکل ۱۷ مشخص می‌شود که بیشترین مقدار تنش برشی در زوایای $\varphi = 90, 270 \text{ deg}$ حاصل می‌شود.



شکل ۱۵- تنش شعاعی دیافراگم‌ها تحت نامیزانی زاویه‌ای در شعاع $r = 74 \text{ mm}$



شکل ۱۶- تنش محیطی دیافراگم‌ها تحت نامیزانی زاویه‌ای در شعاع $r = 74 \text{ mm}$

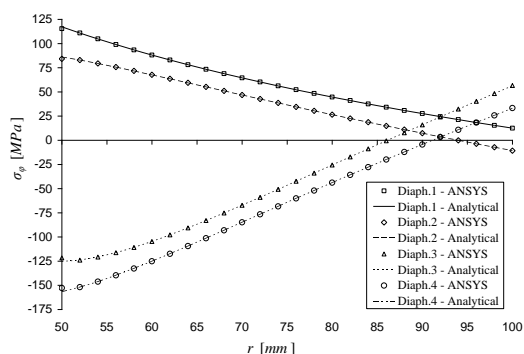


شکل ۱۷- تنش برشی دیافراگم‌ها تحت نامیزانی زاویه‌ای در شعاع $r = 74 \text{ mm}$

المان محدود نسبت به تنش‌های حاصل از حلّ تحلیلی در لبه داخلی و خارجی دیافراگم‌ها، دارای خطای جزئی است. همچنین همان‌طور که در توضیح شکل‌های ۱۵ و ۱۶ آمد، اثر خمش متقارن در تنش‌های دیافراگم قابل صرف‌نظر کردن است؛ بطوری‌که ترم حاصل از خمش متقارن در تنش شعاعی و محیطی دیافراگم کمتر از ۰/۰۳٪ است.

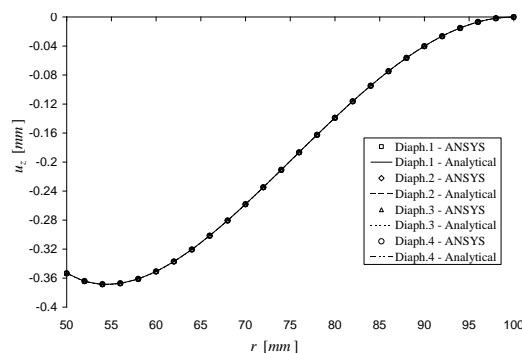
از بررسی شکل‌های ۲۱، ۲۲ و ۲۳ مشاهده می‌شود که قطر داخلی دیافراگم در مجموع دارای سطح تنش بالاتری است و در این مورد خاص، سطح تنش‌های دیافراگم چهارم که حاصل ضرب ضخامت در فاصله از مرکز دوران بیشتری دارد، نسبت به بقیه دیافراگم‌ها بالاتر است، اما با توجه به اینکه در روابط (۵۷) و (۵۸) ترم ضخامت وجود ندارد، ممکن است این قانون همیشه برقرار نباشد و برای شناسایی دیافراگم بحرانی، بهتر است، تنش‌ها در تمام فاصله شعاعی و در دو زاویه $\varphi = 0, 90 \text{ deg}$ برای تمامی دیافراگم‌ها بررسی شود؛ اما همان‌طور که در مورد این مثال خاص مشاهده می‌شود، احتمال اینکه نقطه بحرانی شکست در زاویه $\varphi = 0 \text{ deg}$ قطر داخلی دیافراگمی که حاصل ضرب ضخامت در فاصله از مرکز دوران بیشتری دارد، واقع شود بیشتر از دیگر نواحی دیافراگم‌ها است.

همچنین سختی خمشی بدست آمده از رابطه (۶۶)، مقدار $k_{btotal} = 123955 \text{ N.m/rad}$ دارد که در نامیزانی زاویه‌ای $\theta = 0.01 \text{ rad}$ ، باعث ایجاد گشتاور $M = 1239.6 \text{ N.m}$ می‌شود. گشتاور لازم برای ایجاد نامیزانی زاویه‌ای مذکور در مدل المان محدود نیز $M = 1239.7 \text{ N.m}$ نیوتن متر است که با دقت بالایی بسیار نزدیک به مقدار تحلیلی است.

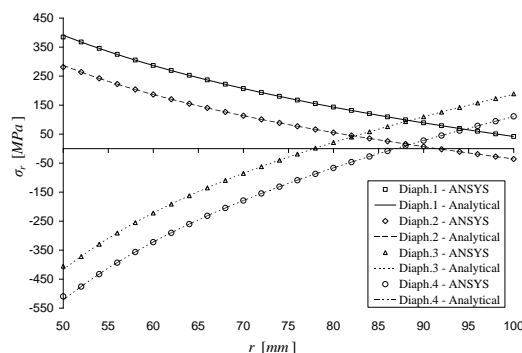


شکل ۲۲- تنش محیطی دیافراگم‌ها تحت نامیزانی زاویه‌ای در زاویه $\varphi = 45 \text{ deg}$

است. همچنین مشاهده می‌شود که پروفیل تغییر شکل عمودی تمامی دیافراگم‌ها، یکسان و منطبق بر هم است که مشابه بحثی که برای شکل ۱۴ آورده شد، این امر حاکی از آنست که ترم خمش متقارن تأثیر ناچیزی بر تغییر شکل عمودی دیافراگم دارد (کمتر از ۰/۰۵٪)، بطوری‌که می‌توان از آن صرف‌نظر کرد.



شکل ۲۰- تغییر شکل عمود بر صفحه دیافراگم‌ها تحت نامیزانی زاویه‌ای در زاویه $\varphi = 45 \text{ deg}$



شکل ۲۱- تنش شعاعی دیافراگم‌ها تحت نامیزانی زاویه‌ای در زاویه $\varphi = 45 \text{ deg}$

مقایسه تنش شعاعی، محیطی و تنش برشی حاصل از حلّ عددی و تحلیلی در زاویه $\varphi = 45 \text{ deg}$ تحت نامیزانی زاویه‌ای به اندازه $\theta = 0.01 \text{ rad}$ به ترتیب، در شکل‌های ۲۱، ۲۲ و ۲۳ نشان داده شده است که این مقایسه، بیانگر تطابق کامل داده‌ها بجز در قطر داخلی و خارجی دیافراگم‌ها است. مشابه بحثی که برای شکل ۱۱ ارائه شد، با توجه به اینکه در حلّ المان محدود برای محاسبه تنش در گره‌های مرزی، همانند گره‌های واقع بر لبه داخلی و خارجی دیافراگم، بایستی از برونمایی استفاده کرد، تنش‌های حاصل از حلّ

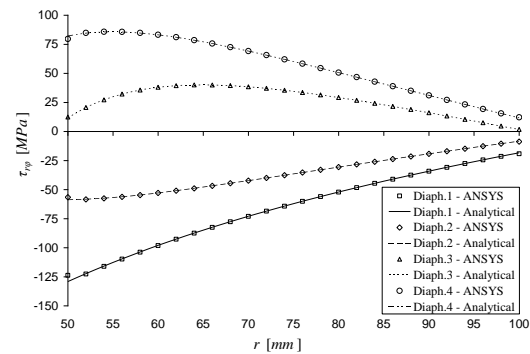
صفحه‌ای و تنش‌های آن‌ها و همچنین سختی خمشی کوپلینگ می‌شود.

۶. تحت نامیزانی زاویه‌ای، معمولاً حادثه‌ترین نقطه از لحاظ سطح تنش در قطر داخلی و زاویه $\varphi = 0 \text{ deg}$ دیافراگمی رخ می‌دهد که بیشترین حاصل ضرب ضخامت در فاصله از مرکز دوران را دارد، ولی برای شناسایی دقیق حادثه‌ترین نقطه باید تنش‌ها در تمام فاصله شعاعی و در دو زاویه $\varphi = 0, 90 \text{ deg}$ برای تمامی دیافراگم‌ها بررسی گردد.

۷. تنش‌های حاصل از حلّ المان محدود نسبت به تنش‌های حاصل از حلّ تحلیلی در لبه داخلی و خارجی دیافراگم، دارای خطا است و با توجه به اینکه نقطه بحرانی دیافراگم از لحاظ سطح تنش معمولاً در لبه داخلی آن واقع شده است، استفاده از نتایج حلّ المان محدود در طراحی دیافراگم، منجر به خطای طراحی می‌شود.

۷- مراجع

- [1] Piotrowski J (2007) Shaft alignment handbook. 3 edn. Taylor & Francis, Boca Raton.
- [2] Mancuso JR (1999) Couplings and Joints: design, selection & application. Taylor & Francis, New York.
- [3] Forsthoffer WE (2011) Best practice handbook for rotating machinery. Elsevier, Butterworth-Heinemann.
- [4] Corcoran J, Lyle D, McCormack P, Ortel T (2007) Advances in gas turbine couplings. Proceedings of the thirty-sixth turbomachinery symposium.
- [5] Ameridrives Couplings, A member of the ultra industrial motion group, ameriflex® diaphragm couplings high speed, high performance design. Access in 5th June 2016, <http://www.ameridrives.com>.
- [6] Youping ZZ, Xiaocheng C (1996) Calculation of stresses and rigidity for new type elastic diaphragm coupling. J Wuhan Automot Polytech Univ 2. (In Chinese)
- [7] Zhu KK, Zhu RP (2008) An analytic solution of stress and strain of diaphragm coupling under pure torsion. J Nat Sci 12. (In Chinese)
- [8] Xuan Q, Guo H (2004) The mechanics analysis and the twisting stress formula establish of the flexible diaphragm coupling. Mach Design Manu 04. (In Chinese)



شکل ۲۳- تنش برشی دیافراگم‌ها تحت نامیزانی زاویه‌ای در زاویه $\varphi = 45 \text{ deg}$

۶- نتیجه‌گیری

با نوشتن معادله دیفرانسیل حاکم بر رفتار دیافراگم‌ها تحت نامیزانی محوری و زاویه‌ای، حلّ تحلیلی برای دیافراگم‌ها ارائه شده، ضمن استخراج روابطی برای محاسبه دقیق سختی محوری و خمشی یک طرف کوپلینگ، روابطی برای تعیین تنش‌ها در دیافراگم‌ها بدست آمد. بررسی نتایج برای دیافراگم‌هایی با جنس و قطر داخلی و خارجی یکسان و ضخامت‌های ثابت ولی مختلف نشان می‌دهد که:

۱. تحت نامیزانی محوری، تغییر شکل تمامی دیافراگم‌ها مشابه است.
۲. تحت نامیزانی محوری، تنش در دیافراگم‌های مختلف متناسب با ضخامت آنهاست و همواره حادثه‌ترین نقطه از لحاظ سطح تنش ون میسر، در قطر داخلی دیافراگمی قرار دارد که بیشترین ضخامت را داراست.
۳. تحت نامیزانی محوری، فاصله بین دیافراگم‌ها تأثیری بر تغییر شکل و تنش در آن‌ها و همچنین سختی محوری کوپلینگ ندارد.
۴. تحت نامیزانی زاویه‌ای، تغییر شکل عمود بر صفحه دیافراگم‌ها یکسان است، ولی تغییر شکل صفحه‌ای آنها بشدت وابسته به فاصله آن‌ها از مرکز دوران است.
۵. تحت نامیزانی زاویه‌ای، افزایش فاصله بین دیافراگم‌ها بر تغییر شکل عمود بر صفحه آن‌ها بی‌تأثیر بوده، ولی باعث افزایش تغییر شکل

- [13] Kim K, Yoo CH (2010) Analytical solution to flexural responses of annular sector thin-plates. *Thin Wall Struct* 48(12): 879-887.
- [14] Tokovyy YV, Ma CC (2009) Analytical solutions to the planar non-axisymmetric elasticity and thermoelasticity problems for homogeneous and inhomogeneous annular domains. *Int J Eng Sci* 47(3): 413-437.
- [15] Aghdam MM, Mohammadi M, Erfanian V (2007) Bending analysis of thin annular sector plates using extended Kantorovich method. *Thin Wall Struct* 45(12): 983-990.
- [16] Ventsel E, Krauthammer T (2001) *Thin plates and shells, theory, analysis, and applications*. Marcel Dekker, New York.
- [9] Chen WP, Ma YM (2010) Performance analysis of the axial stiffness of diaphragm coupling. *Ship Eng* 01(In Chinese).
- [10] Zhu KK, Zhu RP (2008) An analytic solution to asymmetrical bending problem of diaphragm coupling. *Appl Math Mech-Engl* 29(12): 1643-1649.
- [11] Kazuya M, Mitsuo N, Hirokazu S (2003) Effect of the diaphragm shape of diaphragm coupling on shaft reaction force and moment. *Nihon Kikai Gakkai Nenji Taikai Koen Ronbunshu* 1: 333-334. (In Japanese)
- [12] He YL, Liao H, Du J, Zheng Q (2008) Strength and fatigue finite element analysis of diaphragm in diaphragm coupling. *Machin Electron* 05. (In Chinese)