



## تصحیح اثر مودهای پیرانرژی و غیربقایی در مدل رتبه کاسته جریان ناپایای تراکم‌ناپذیر با بهره‌گیری از اعمال معادله پیوستگی

محمد کاظم مؤیدی<sup>۱\*</sup>

<sup>۱</sup> استادیار، آزمایشگاه پژوهشی دینامیک سیالات محاسباتی، بخش مهندسی مکانیک، دانشگاه قم

تاریخ دریافت: ۱۳۹۴/۰۳/۳۰؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۴/۰۶/۲۷؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۴/۰۸/۳۰

### چکیده

در این پژوهش، از روش تجزیه متعامد بهینه به منظور توسعه یک مدل رتبه کاسته جهت شبیه‌سازی میدان‌های جریان ناپایای تراکم‌ناپذیر استفاده شده است. معادلات حاکم بر دینامیک جریان سیال پس از تصویرسازی در فضای مودها، منجر به ایجاد یک سامانه دینامیکی می‌شوند. به دلیل اختلاف سطح انرژی مودهای میدان و وجود اختلاف سطح انرژی زیاد مودها، می‌توان سیستم دینامیکی حاصل را به یک مدل رتبه‌کاسته با مقداری خطای تبدیل کرد. مدل‌های رتبه‌کاسته استاندارد، به دلایل گوناگونی دقت مناسب در پیش‌بینی تغییرات زمانی میدان جریان را ندارند. از جمله این دلایل، می‌توان به عدم ارضای معادله پیوستگی توسط مودهای میدان اشاره کرد. دقت مدل رتبه‌کاسته با استفاده از اضافه‌کردن اثر معادله پیوستگی، به صورت یک ترم استهلاک به معادلات اندازه حرکت افزایش یافته که توسط نویسنده مقاله حاضر، ارائه شده است. مدل حاصل می‌تواند با دقتی مناسب و با سرعتی بالا، تغییرات زمانی میدان جریان را پیش‌بینی کند. نتایج حاصل از مدل پیشنهادی، با شبیه‌سازی‌های حاصل از حل عددی مستقیم مقایسه شده که افزایش دقت و سرعت چشمگیری در محاسبات را نشان می‌دهد.

**کلمات کلیدی:** جریان ناپایا؛ روش تجزیه متعامد بهینه؛ مدل رتبه کاسته؛ معادله پیوستگی؛ مودهای غیربقایی.

## Calibration of Effects of Non-Divergence Free and High Level Energy Modes in POD Reduced Order Model of Incompressible Flows using Adjoint Continuity Equation

M. K. Moayyedi<sup>1,\*</sup>

<sup>1</sup> Assistant Professor, CFD Research Laboratory, Department of Mechanical Engineering, University of Qom, Qom, Iran.

### Abstract

In this work, the POD method is used for the development of a reduced order model of the unsteady incompressible flow fields. After projection of the governing equations along the POD modes, a low-dimensional dynamical system is achieved. Due to variations in the energy levels of the POD modes and large differencing in the energy modes, the outcome dynamical system can be converted to a reduced order model with a few amount of error. The standard low-dimensional models, due to some reasons, can not accurately predict time variations in the flow field. One of the reasons for this is thenon-divergence of the free modes. The accuracy of the dynamic system is improved using a combined form of continuity and linear momentum equations proposed by the author. The reduced order model obtained can predict time variations in the flow field with a fast computational speed and a relatively good accuracy. The results obtained from this low-dimensional model are compared with the direct numerical simulation data, showing a good accuracy and a salient simplicity in computations.

**Keywords:** Unsteady Flow; Proper Orthogonal Decomposition; Reduced Order Model; Continuity Equation; Divergence Free Modes.

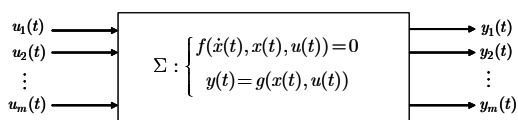
## ۱- مقدمه

استفاده از الگوی‌های کارآ و سریع در مدل‌سازی مسائل مکانیک سیالات، به عنوان هدفی همیشگی پیش‌روی پژوهشگران این حوزه به شمار می‌رود. از ابتدایی‌ترین الگوها می‌توان، به فرضیهٔ پرناتل در تقسیم‌بندی میدان جریان سیال، به دو بخش جریان لایه مرزی و جریان پتانسیل اشاره کرد. الگوهای کاهش مرتبه، به منظور کاهش درجات آزادی و پیچیدگی‌ها در مباحث پایه‌ای مکانیک سیالات نیز متداول بوده که از آن جمله، می‌توان به کاهش مرتبهٔ معادلات اندازه حرکت و دستیابی به معادلات لایه مرزی به منظور تحلیل جریان در ناحیه لایه مرزی اشاره کرد. این الگو تا دهه‌های اخیر نیز ادامه داشته، در تحلیل جریان‌های آشفتنه نیز، می‌توان اثرات آنرا مشاهده کرد، مانند مدل‌های شبیه‌سازی گردابه‌های جدا شده<sup>۱</sup> که میدان جریان را به دو بخش نواحی نزدیک دیواره و نواحی دورتر از دیواره تقسیم‌بندی می‌کنند. توسعه مدل‌های رتبه‌کاسته برای حل مسائل مکانیک سیالات، در ابتدا محدود به استفاده از الگوی‌های جریان پتانسیل می‌شد. روشن است، تحلیل جریان‌های لزج با بهره‌گیری از این مدل‌ها، جواب‌های مناسبی را نتیجه نخواهد داد. روش تجزیهٔ متعامد بهینه، یکی از روش‌های مناسب به منظور توسعه مدل‌های رتبه‌کاسته بر پایهٔ معادلات حاکم بر جریان لزج است. این روش با محاسبهٔ یک مجموعه از بردارهای پایه که می‌توانند ساختارهای پرنانژی سیستم را تسخیر کنند، آغاز و در صورت انتقال معادلات حاکم به فضای برداری تشکیل شده از این بردارهای پایه، می‌توان با کمک آن دینامیک حاکم بر میدان را با تعداد ابعاد کمتر و با دقتی مناسب بازسازی کرد. در یک تعریف کلی، باید گفت که این روش یک دستگاه مختصات  $n$  بعدی متعامد ایجاد می‌کند که نسبت به همه دستگاه‌های مختصات متعامد  $n$  بعدی دیگری تقریب بهتری را نتیجه می‌دهد که برای توصیف دسته نمایه از یک میدان مفروض می‌توانند مورد استفاده قرارگیرند. بدین ترتیب می‌توان توصیف رتبه‌کاسته از سامانه‌های دینامیکی با بعد بی‌نهایت ارائه کرد که با تعداد جملات معلوم بهینه باشد. البته، لازم به ذکر است که این بهینگی، از دید باز یافت انرژی در مدل رتبه‌کاسته است. این

روش ابتدا و به صورت مستقل توسط کارهونن و لوو، به عنوان روشی جهت تحلیل داده‌های آماری که دارای نوعی الگو<sup>۲</sup> بودند، مطرح شد [۱]. با مطرح شدن روش نمایه توسط سیرویش، این روش به عنوان ابزاری کارآمد، به منظور ایجاد مدل‌های رتبه‌کاسته برای سامانه‌های دینامیکی پیچیده‌ای نمایان شد که داده‌هایی از تجربه و یا حل‌های عددی مستقیم دارند. استفاده از روش POD - نمایه<sup>۳</sup>، در تحلیل و بازسازی میدان‌های جریان پایا و ناپایا تاکنون با موفقیت‌های بسیاری انجام گرفته است [۶-۲]. استفاده از این روش، به منظور مدل‌سازی جریان‌های ناپایا با رویکرد سامانهٔ دینامیکی، مورد توجه بسیاری قرار گرفته، لیکن مشکلاتی نیز در توسعهٔ این مدل‌ها وجود دارد. از جمله می‌توان، به عدم دستیابی به نتایج مطلوب و دقت نامناسب سامانهٔ دینامیکی در پیش‌بینی تغییرات زمانی میدان جریان اشاره کرد. این موضوع، می‌تواند ناشی از دلایلی از جمله، عدم انتخاب مناسب نمایه‌ها، دقت پایین حل عددی و یا ناتوانی سامانهٔ دینامیکی در کاهش سطح انرژی مودهای پرنانژی‌تر باشد. در این خصوص، روش‌هایی جهت افزایش دقت سامانه‌های دینامیکی پیشنهاد شده که می‌توان به روش فلویر و همکارانش [۹] اشاره کرد. آن‌ها با استفاده از حل یک مسألهٔ بهینه‌سازی و ترکیب آن با معادلات حاکم، به جواب‌های مناسبی دست یافتند. همچنین با استفاده از حل همزمان مسألهٔ بهینه‌سازی به صورت یک مسألهٔ کمکی<sup>۴</sup>، پاسخ زمانی سامانهٔ دینامیکی حاکم بر مسائلی را نیز دقیق‌تر بدست آوردند که فیزیک پیچیده‌تری دارند. کاپلت از چند روش مختلف که همگی بر اساس حل یک مسألهٔ بهینه‌سازی بود، به منظور بهبود بخشیدن پاسخ سامانهٔ دینامیکی حاکم برای مسائل دو و سه بعدی مورد نظر استفاده کرد [۱۰]. نوآک نیز از ترم اصلاح که به منظور افزایش دقت سامانهٔ دینامیکی بکار می‌رود، به عنوان جایگزینی برای ترم فشار حذف‌شده در معادلهٔ سامانهٔ دینامیکی استفاده کرد [۱۱]. در این مقاله، هدف استفاده از این روش برای مدل‌سازی میدان جریان ناپایا است. روندی که در این پژوهش بکار گرفته شده، ترکیب معادلهٔ پیوستگی با معادلهٔ اندازه حرکت به منظور جبران عدم

<sup>2</sup> Pattern<sup>3</sup> Snapshot<sup>4</sup> Adjoint<sup>1</sup> Detached Eddy Simulation (DES)

که  $u$  ورودی،  $y$  خروجی و  $x$  متغیر حالت سیستم است، بنابراین سامانه دینامیکی، به صورت یک سیستم ورودی-خروجی نمایش داده می‌شود (شکل ۱).



شکل ۱- نمایی از یک سیستم دینامیکی با ورودی و خروجی معلوم

در نتیجه پیچیدگی این سیستم با تعداد متغیرهای حالت آن مشخص خواهد شد (به عنوان مثال  $n$  بعد برای بردار فضای حالت). معادله (۱) به صورت زیر نیز قابل بازنویسی خواهد بود:

$$F\left(\frac{dx}{dt}, x, u\right) = 0.$$

بنابراین مدل‌سازی رتبه‌کاسته می‌تواند به منظور کاهش ابعاد بردار فضای حالت مطرح شده، درحالی‌که خصوصیات رابطه بین ورودی و خروجی حفظ شود. به بیان دیگر، یک سامانه دینامیکی جدید به صورت رابطه (۲) بدست خواهد آمد:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{x}}{dt} &= \hat{f}(\hat{x}, u), \\ y &= \hat{g}(\hat{x}, u), \end{aligned} \quad (2)$$

به نحوی که  $\hat{x}$  ابعاد خیلی کمتر از  $n$  (ابعاد بردار فضای حالت اصلی) خواهد بود. به طور کلی، یک مدل رتبه‌کاسته باید دارای ویژگی‌های باشد:

۱. ویژگی‌های سیستم دینامیکی اصلی با یک تقریب کم حفظ شود (مانند پایداری).
  ۲. روند کاهش مرتبه بایستی از نظر محاسباتی کارا باشد.
- بازسازی یک مدل که بتواند بهترین تقریب را از سامانه دینامیکی اصلی داشته باشد (میزان خطا کم باشد).

### ۳- توسعه مدل دینامیکی رتبه‌کاسته با استفاده از روش POD - گالرکین

اگر مدهای جریان معادله پیوستگی را ارضاء کنند، معادلات حاکم بر دینامیک جریان تراکم‌ناپذیر، به معادلات اندازه حرکت کاهش یافته که این معادلات در فرم برداری و بی‌بعد به صورت رابطه (۳) است:

$$\frac{D\bar{u}}{Dt} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \bar{u}. \quad (3)$$

ارضای معادله بقای جرم توسط مدهای POD و ایجاد یک عبارت استهلاک، در معادله مدل دینامیکی رتبه‌کاسته است.

### ۲- مدل‌سازی رتبه‌کاسته

تعاریف متفاوتی وابسته به مفهوم و موضوع، از مدل‌سازی رتبه‌کاسته وجود دارد. در اصل مدل‌سازی رتبه‌کاسته در حوزه سیستم و تئوری کنترل، توسعه داده شده که در خصوص ویژگی‌های سامانه‌های دینامیکی و کاربرد روش‌های کاهش مرتبه، به منظور کاهش پیچیدگی‌های مسئله با حفظ رفتار ورودی و خروجی آنها بحث می‌کند. امروزه بحث مدل‌سازی رتبه‌کاسته، به عنوان یک موضوع پژوهشی جذاب در مباحث سیستم، کنترل و تحلیل‌های عددی مطرح است.

مبانی اولیه روش‌های کاهش مرتبه در ریاضیات، به کار فوریه در سال ۱۸۰۷ برمی‌گردد که ایده تقریب یک تابع با بهره‌گیری از توابع مثلثاتی را مطرح کرد. در مسائل جبرخطی، لانکوز مسئله کاهش مرتبه یک ماتریس به یک فرم سه‌قطری را مطرح کرد. بعدها آرنولد پی‌برد که می‌توان یک ماتریس را با استفاده از یک ماتریس کوچکتر و با تقریب مناسب از ماتریس اصلی تخمین زد. روش‌های اساسی در مدل‌سازی رتبه‌کاسته در ۸۰ و ۹۰ قرن پیش معرفی شدند. در این خصوص، می‌توان به روش متوازن‌سازی اشاره کرد که توسط مور در سال ۱۹۸۱ پیشنهاد شد یا گلوور که مقالات مشهوری در زمینه کاهش نرم‌هنکل چاپ کرد و در نهایت در سال ۱۹۸۷ روش تجزیه متعامد بهینه توسط سیرویش مطرح شد. برای فهم دقیق از مدل‌سازی رتبه‌کاسته، نیاز به فهم دقیق از مدل‌های توسعه‌یافته در علوم محاسباتی شامل، معادلات دیفرانسیلی با مشتقات جزئی و معمولی و با شرایط مرزی مناسب است. نمونه‌ای از این معادلات شامل، معادلات ناویر-استوکس در دینامیک سیالات است. هنگامیکه معادلات دیفرانسیلی با مشتقات جزئی برای تشریح رفتار یک سیستم به کار می‌روند، اغلب به صورت معادلاتی با متغیرهای مستقل زمانی و مکانی مطرح شده که پس از جداسازی مکانی، به صورت یک سیستم معادلات دیفرانسیلی معمولی در زمان بدست خواهند آمد؛ در نتیجه بررسی‌ها تنها روی این سیستم معادلات محدود شده که به شکل یک سامانه دینامیکی با ابعاد محدود خواهد بود.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= f(x, u), \\ y &= g(x, u), \end{aligned} \quad (1)$$

معادله (۷) برای محاسبه تغییرات زمانی ضرایب مودال حل شده، نتایج حاصل به عنوان ضرایب موردنیاز در رابطه (۵) برای بازسازی متغیر میدان جریان بکار خواهند رفت. لازم به ذکر است که در این پژوهش، از روش رانگ-کوتای مرتبه چهار به منظور انتگرال‌گیری زمانی معادله سامانه دینامیکی استفاده شده که روش دقیقی جهت حل مسائل متغیر در زمان است.

### ۳-۲- ناپایداری مدل رتبه کاسته

مدل‌های رتبه کاسته استاندارد که از تصویرسازی معادلات اندازه حرکت جریان تراکم‌ناپذیر در راستای موده‌های میدان جریان حاصل می‌شوند، ممکن است دقت بالایی در پیش‌بینی تغییرات زمانی میدان جریان نداشته باشند. این موضوع، می‌تواند ناشی از دلایلی باشد:

۱. عدم وجود رابطه‌ای مستقیم بین ضرایب مودال حاصل از میدان سرعت با میدان فشار و در نتیجه تقریب حذف اثرات ترم فشار
۲. دقت نامناسب موده‌های محاسبه شده (مانند عدم ارضای معادله پیوستگی توسط موده‌های تجزیه متعامد بهینه)
۳. ناپایداری‌های ناشی از حذف موده‌های با اعداد موج بالا
۴. دقت پایین نمایه‌های ورودی که در نتیجه معادلات بقاء را بطور کامل ارضاء نخواهند کرد.

روش‌های گوناگونی برای جبران این خطاها پیشنهاد شده، قابل طرح است؛ از جمله اصلاح روش محاسبه موده‌های میدان، اصلاح فرضیات بکار رفته به منظور توسعه سیستم دینامیکی و استفاده از روش‌های جبران‌ساز به منظور اصلاح خطای ناشی از رفتار سیستم دینامیکی [۱۶].

### ۳-۳- ناپایداری مدل رتبه کاسته. اصلاح مدل رتبه کاسته جریان تراکم‌ناپذیر با استفاده از اعمال

#### معادله پیوستگی

اگر موده‌های تجزیه متعامد بهینه، معادله پیوستگی را ارضاء نکنند، آنگاه اثر ترم فشار در معادله سیستم دینامیکی قابل حذف نبوده، می‌تواند سبب بروز ناپایداری در رفتار مدل شود. ترم فشار پس از تصویرسازی معادلات اندازه حرکت و بر اساس تئوری انتگرال گاوس، به شکل رابطه (۸) تجزیه خواهد شد.

$$(\nabla p, \Phi^k) = -(\nabla \cdot \Phi^k, p)_\Omega + (\Phi^k, p)_\Gamma, \quad (8)$$

بردارهای سرعت، بصورت حاصل جمع یک بخش متوسط‌گیری<sup>۱</sup> شده زمانی و یک بخش اغتشاشی<sup>۲</sup> به صورت رابطه (۴) نوشته می‌شود:

$$\vec{u} = \vec{u} + \vec{u}', \quad (4)$$

ترم اول، یک میانگین از تغییرات زمانی بردارهای سرعت بوده، بخش دوم ترم اغتشاشی که با استفاده از بسط موده‌های جریان به شکل رابطه (۵) نوشته می‌شود:

$$\vec{u}' = \sum_{i=1}^N a^i(t) \Phi^i(\vec{x}), \quad (5)$$

به طوری که:

$$a^i(t) = \begin{bmatrix} a^i(t) & 0 \\ 0 & b^i(t) \end{bmatrix},$$

$$\Phi^i(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \Phi_u^i(\vec{x}) \\ \Phi_v^i(\vec{x}) \end{bmatrix}$$

در روابط فوق  $a^i(t)$  ضریب مودال و  $\Phi_u^i(\vec{x})$  مود متناسب با معادله اندازه حرکت در جهت  $x$  و  $b^i(t)$  و  $\Phi_v^i(\vec{x})$  ترتیب، ضریب مودال و شکل مود متناسب با معادله اندازه حرکت در جهت  $y$  است.

### ۳-۱- تصویرسازی گالریکن و معادله سامانه دینامیکی

با بازنویسی معادلات حرکت برای جریان تراکم‌ناپذیر با استفاده از روابط (۴)، (۵) و با فرض اینکه مشتق زمانی مقادیر بخش متوسط‌گیری شده صفر باشد، روابط جدیدی به شکل زیر حاصل خواهد شد:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\vec{u}+\vec{u}')}{\partial t} + ((\vec{u}+\vec{u}') \cdot \nabla)(\vec{u}+\vec{u}') &= \\ -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2(\vec{u}+\vec{u}'), & \\ \frac{\partial \vec{u}'}{\partial t} + ((\vec{u}+\vec{u}') \cdot \nabla)(\vec{u}+\vec{u}') &= \\ -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2(\vec{u}+\vec{u}'), & \end{aligned} \quad (6)$$

اگر معادلات حاصل در راستای موده‌های جریان تصویر شوند، یک دسته معادله دیفرانسیلی مرتبه اول برحسب زمان برای ضرایب مودال بدست آمده که سیستم دینامیکی نامیده شده، معادله آن به صورت زیر است:

$$\frac{da^k}{dt} + A_{kij} a^j a^k + B_{ki} a^k + C_k = 0, \quad (7)$$

ضرایب معادله (۷) به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned} A_{kij} &= (\Phi^i \cdot \nabla \Phi^j, \Phi^k), \\ B_{ki} &= (\nabla^2 \Phi^i, \Phi^k) - (\vec{u} \cdot \nabla \Phi^i, \Phi^k) - (\Phi^i \cdot \nabla \vec{u}, \Phi^k) - (\nabla p, \Phi^k), \\ C_k &= (\nabla^2 \vec{u}, \Phi^k) - (\vec{u} \cdot \nabla \vec{u}, \Phi^k). \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Mean

<sup>2</sup> Fluctuation

ضریب  $\alpha$  عبارتست از وزن معادله پیوستگی که بایستی مقدار آن بصورت بهینه تخمین زده شود. در این پژوهش، به منظور محاسبه این ضریب از روش بهینه‌سازی مبتنی بر کمینه‌سازی گرادیان متغیر موردنظر برای یافتن مقدار بهینه آن استفاده شده‌است.

#### ۴-۳- اصلاح سامانه دینامیکی رتبه‌کاسته با استفاده از مدل خطی گذرا

مدل رتبه‌کاسته اصلاح‌شده، علیرغم بازسازی اثر موده‌های غیربقیایی، به دلایل دیگری از جمله، ناپایداری‌های ذاتی موجود در این مدل‌ها، جایگزین نشدن اثر ترم فشار روی مرزها، حذف موده‌های با اعداد موج بالا و ...، باز هم دقت بالایی در پیش‌بینی تغییرات زمانی میدان جریان ندارد، به منظور بهبود پیش‌بینی زمانی مدل رتبه‌کاسته یک ترم خطی، به صورت رابطه (۱۳) به معادله سامانه دینامیکی اضافه می‌شود:

$$\frac{d\mathbf{a}^k}{dt} + \mathbb{A}_{kij}\mathbf{a}^k\mathbf{a}^k + (\mathbb{B}_{ki} + \alpha\mathbb{B}_{ki}^{\text{mass}} + \mathbb{B}'_{ki})\mathbf{a}^k + \mathbb{C}_k = 0, \quad (13)$$

ترم اضافه شده فوق، ترم اصلاح<sup>۲</sup> نامیده شده، به منظور افزایش دقت سامانه دینامیکی بکار می‌رود. در مرجع [۱۶]، به عنوان جایگزینی برای ترم فشار استفاده شده‌است. این ترم می‌تواند مانند یک عبارت استهلاکی در معادله حاکم بر مدل دینامیکی عمل کرده، اثرات موده‌های پرنرزی را کمتر کند که گاهی سامانه دینامیکی توانایی کاهش سطح انرژی آنها را ندارد. این می‌تواند ناشی از این علت باشد که سیستم دینامیکی به اندازه کافی دارای استهلاک نبوده، این افزودگی در سطح انرژی موده‌ها، باعث واگرایی در پاسخ حاصل از مدل دینامیکی می‌شود. در این شرایط ترم اصلاح همچون عبارت استهلاک مصنوعی در معادله حاکم بر مدل عمل کرده، سبب می‌شود که سیستم دینامیکی رفتار واقعی مسئله را پیش‌بینی کند.

#### ۴-۳-۱- محاسبه عبارت اصلاح با استفاده از روش کمینه‌سازی کمترین مربعات

روشی که برای محاسبه ضرایب ترم اصلاح خطی ارائه می‌شود، استفاده از حل یک مساله بهینه‌سازی محلی در بازه

بخش اول، اثر تغییرات میدان فشار در نقاط داخلی حجم کنترل مفروض و عبارت دوم، اثر توزیع فشار روی مرزهای میدان جریان است. اگر موده‌های میدان جریان بقیایی<sup>۱</sup> باشند، آنگاه در معادله پیوستگی صدق کرده، بدین معنی که:

$$(\nabla \cdot \Phi^k) = 0, \quad (9)$$

در این صورت، عبارت اول در معادله (۸) حذف و معادله مذکور به شکل رابطه (۱۰) تبدیل خواهد شد:

$$(\nabla p, \Phi^k) = (\Phi^k, p)_{\Gamma}, \quad (10)$$

وجود شرایط مرزی همگن روی مرزهای میدان جریان می‌تواند سبب حذف اثر عبارت سمت راست معادله (۱۰) شود. این بدین معنی است که یا مقدار فشار روی مرزهای صفر بوده (فشار نسبی) و یا توزیع آن به نحوی است که حاصل ضرب داخلی عبارت سمت راست معادله (۱۰) صفر شود؛ لیکن ویژگی‌های فیزیکی و محاسباتی موجود در برخی مسائل ممکن است، سبب عدم احراز شرایط ذکرشده در خصوص عبارت فشار شده، در نتیجه این جمله از معادله سیستم دینامیکی (ضرایب معادله (۷)) قابل حذف نیست. این می‌تواند به این دلیل باشد که موده‌های جریان معادله پیوستگی را ارضاء نکرده و یا توزیع فشار روی مرزهای میدان به‌گونه‌ای است که اثرات آن قابل صرف‌نظر نمی‌باشد؛ بنابراین در این شرایط می‌بایست ترم فشار به نحوی محاسبه یا جایگزین شود، در غیر این صورت، بقای موجود در معادلات اندازه حرکت از بین رفته، منجر به ایجاد ناپایداری در رفتار سیستم دینامیکی حاکم بر رفتار مسئله می‌شود. روشی که در این پژوهش پیشنهاد شده، اعمال اثر معادله پیوستگی همچون یک عبارت مجازی یا ترم استهلاک در معادله سیستم دینامیکی، به منظور جایگزینی اثر موده‌های بقیایی (اصلاح اثر ترم اول معادله (۸)) به صورت رابطه (۱۱) است:

$$\frac{d\mathbf{a}^k}{dt} + \mathbb{A}_{kij}\mathbf{a}^k\mathbf{a}^k + (\mathbb{B}_{ki} + \alpha\mathbb{B}_{ki}^{\text{mass}})\mathbf{a}^k + \mathbb{C}_k = 0, \quad (11)$$

در رابطه فوق  $\mathbb{B}_{ki}^{\text{mass}}$  ضریب اثر معادله پیوستگی بوده که به معادلات اندازه حرکت اضافه شده و از رابطه (۱۲) بدست می‌آید:

$$\mathbb{B}_{ki}^{\text{mass}} = \begin{bmatrix} \left( \frac{\partial \phi_u^i}{\partial x}, \phi_u^k \right) & \left( \frac{\partial \phi_v^i}{\partial y}, \phi_u^k \right) \\ \left( \frac{\partial \phi_u^i}{\partial x}, \phi_v^k \right) & \left( \frac{\partial \phi_v^i}{\partial y}, \phi_v^k \right) \end{bmatrix}, \quad (12)$$

<sup>2</sup> Calibration

<sup>1</sup> Divergence free

زمان بوده که توسط نویسنده پیشنهاد شده و بر اساس رابطه (۱۴) می‌باشد [۷]:

$$J = \sum_{i=1}^N [\hat{a}^i(t) - \hat{a}^i(t)]^2, \quad (14)$$

در رابطه ۱۴،  $\hat{a}^i(t)$  مشتق ضرایب مودال حاصل از حل عددی مستقیم نسبت به زمان بوده که با استفاده از یک روش جداسازی مرتبه چهارم محاسبه می‌شود.  $\hat{a}^i(t)$  شیب تغییرات زمانی ضرایب مودال حاصل از مدل رتبه‌کاسته استاندارد بوده که برابر مجموع عبارات معادله سیستم دینامیکی (رابطه (۷))، به جز مشتق زمانی ضرایب مودال است. در الگوی پیشنهادی در مرجع [۱۶]، از تکنیک کمینه‌سازی محلی برای محاسبه ضریب عبارت اصلاح استفاده شده است. این به این دلیل است که نمایه‌های مورد استفاده برای محاسبه مودهای تجزیه متعامد بهینه از یک حل دقیق بدست آمده، فواصل زمانی آنها معادل با گام زمانی سیستم دینامیکی است. دقت الگوی مورد استفاده در نتایج ارائه شده این مقاله، به خوبی اثبات می‌شود. مطالعات حاصل از این پژوهش نشان می‌دهد، اگر گام زمانی مدل کمتر از فواصل زمانی نمایه‌ها انتخاب شود، ضرایب اصلاح می‌توانند پایداری سیستم دینامیکی را حفظ کنند.

### ۵-۳- جداسازی معادله مدل رتبه‌کاسته و محاسبه ضرایب مدل

مشتقات وابسته به ضرایب مدل رتبه‌کاسته (معادله (۷)) با روش تفاضل مرکزی مرتبه دوم محاسبه شده، برای انتگرال‌گیری زمانی معادلات سیستم دینامیکی، از روش رانگ-کوتای چهار مرحله‌ای مرتبه چهارم صریح به کار رفته است. مطالعه پیرامون گام زمانی نشان می‌دهد که گام زمانی بکاررفته (مساوی با گام زمانی استفاده‌شده برای تولید نمایه‌های ورودی) برای این مسئله، به اندازه کافی کوچک بوده، سامانه دینامیکی رفتار نسبتاً پایداری را نشان می‌دهد. مشتقات زمانی بکاررفته برای مسئله کمینه‌سازی نیز با استفاده یک روش با دقت مرتبه چهارم محاسبه شده‌اند.

### ۶-۳- بازسازی سامانه دینامیکی رتبه‌کاسته

روشن است در یک فرآیند حل مودال با افزایش تعداد مودها، مدل حاصل از دقت بالاتری در مقایسه با حل عددی برخوردار خواهد بود. اگر مودهای سیستم بر اساس اختلاف

$\kappa = \frac{\sum_{i=1}^{N_r} \lambda_i}{\sum_{i=1}^{N_{total}} \lambda_i}, \quad (15)$	
--	--

در رابطه (۱۵)،  $\lambda$  مقادیر ویژه حاصل از حل مسأله مقدار ویژه برای ماتریس داده‌ها است. معیاری که در این پژوهش در نظر گرفته شده بدین صورت است که هرگاه مقدار  $\kappa$ ، برابر با ۹۹/۹٪ شد، آنگاه  $N_r$  تعداد مودهای مورد نیاز برای ایجاد مدل رتبه‌کاسته را نشان می‌دهد.

### ۴- شبیه‌سازی عددی میدان جریان

نمایه‌های استفاده شده برای محاسبه مودهای جریان و در نهایت بازسازی سامانه دینامیکی با استفاده از یک مدل عددی مستقیم جریان تراکم‌ناپذیر دوبعدی که براساس یک روش حجم محدود توسعه یافته، ایجاد شده‌اند [۱۵].

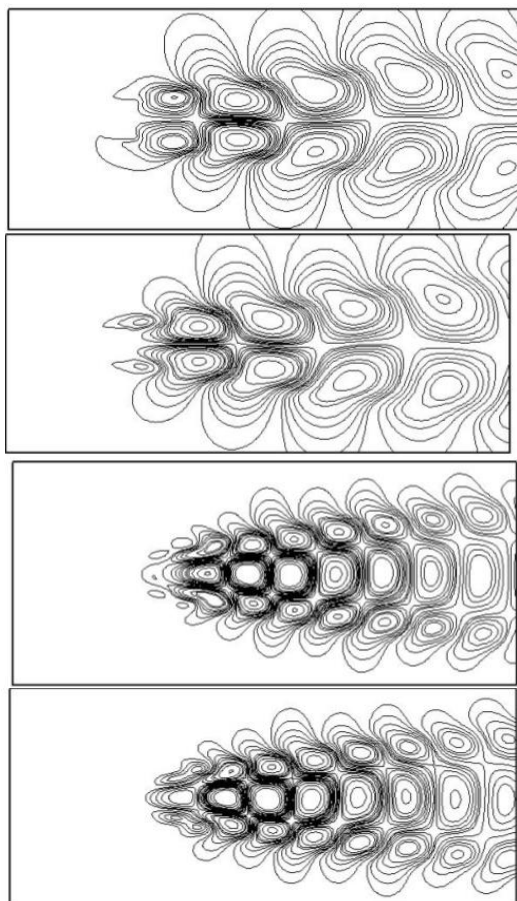
### ۵- نتایج

در این قسمت، به ارائه و بررسی نتایج پژوهش پرداخته می‌شود. نتایج برای جریان تراکم‌ناپذیر ناپایا پیرامون یک سیلندر مربع شکل در عدد رینولدز ۱۰۰ ارائه می‌شود. به منظور بررسی صحت نتایج حاصل از مدل رتبه‌کاسته، داده‌های حاصل از مدل با نتایج شبیه‌سازی عددی مستقیم مقایسه شده‌اند.

یک دسته ۷۵ تایی از حل میدان جریان در زمان‌های مختلف، با گام‌های زمانی مساوی و در یک بازه زمانی معین به عنوان ورودی در نظر گرفته شده است. لازم به ذکر است که این بازه زمانی، یک سیکل نوسانی کامل بوده که طول آن از نمودار تغییرات زمانی انرژی جنبشی کل میدان جریان یا ضرایب بی‌بعد (مانند ضریب برآ) بدست می‌آید. پس از انجام یک حل مقدار ویژه، مودهای جریان استخراج شده که در

<sup>1</sup> Fraction number

مودهای بقایی در مقایسه با نتایج مدل استاندارد، از دقت بالاتری در مقایسه با نتایج حاصل از حل عددی مستقیم برخوردار است.



شکل ۲- خطوط همتراز چهار مود پراثری تر مؤلفه افقی سرعت

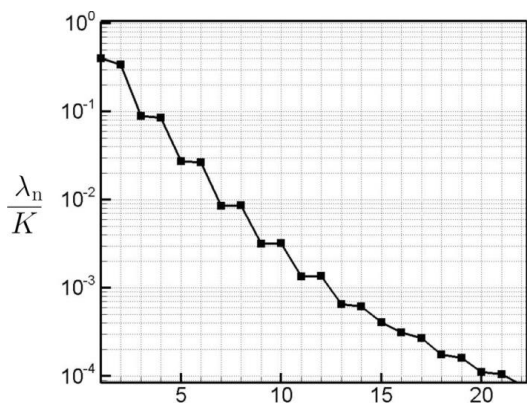
جدول ۱- مقایسه میزان انرژی مودهای پراثری تر مؤلفه افقی سرعت

شماره مود	میزان انرژی	انرژی جنبشی کل (عدد سهم)
۱	٪۳۹	٪۳۹
۲	٪۴۰/۵	٪۷۹/۵
۳	٪۷/۵	٪۸۷
۴	٪۷/۶۵	٪۹۴/۶۵
۵	٪۱/۸۵	٪۹۶/۵
۶	٪۳/۴	٪۹۹/۹

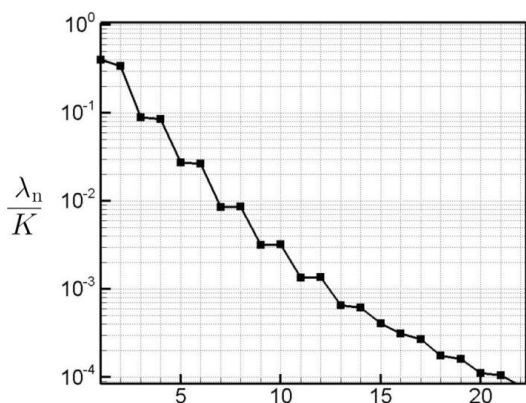
شکل‌های ۲ و ۳ به ترتیب، خطوط همتراز چهار مود پراثری تر مؤلفه افقی و عمودی سرعت نمایش داده شده‌است. شکل‌های ۴ و ۵ طیف انرژی مودهای جریان برای مؤلفه افقی و عمودی سرعت را نشان می‌دهند. همانطور که در این شکل‌ها نیز مشخص است، یک جفت‌شدگی<sup>۱</sup> بین مودها وجود دارد که ناشی از تقارن آنها است. در توضیح این مطلب می‌توان گفت با توجه به روند متعامد سازی گرام - اشمیت [۱۴] در فضایی که بر مودهای جریان متعامد باشد، یک فرآیند بیشینگی به منظور محاسبه مودها تکرار می‌شود و در این راه، یک سری توابع متعامد قابل محاسبه هستند که همان مودهای جریان می‌باشند. این توابع همچون مودهای فوریه بوده که علاوه بر تعامد، دارای یک نوع تقارن<sup>۲</sup> نیز می‌باشند. در جدول ۱ میزان انرژی جنبشی مودهای اول تا پنجم مؤلفه افقی سرعت و انرژی کل به ازای اضافه شدن هر مود جدید آورده شده‌است. همانطور که مشخص است، تنها با استفاده از ۲ مود اول، تقریباً ۸۰ درصد انرژی جنبشی کل سیستم تسخیر شده، در حالی که ۳ مود باقیمانده تنها در حدود ۱۷ درصد انرژی کل را تغییر می‌دهند. در شکل ۶، نمودار انرژی نسبی مودها برای هر دو مؤلفه سرعت، یعنی میزان انرژی که تعداد خاصی از مودها از میدان تسخیر می‌کنند، نشان داده شده‌است. این نمودار، تصویر کننده عدد سهم مودها است و با توجه به روش ارائه شده در بخش (۶.۳)، تعداد مودهای مورد نیاز برای ایجاد مدل رتبه‌کاسته محاسبه می‌شود. برای این مسئله، شش مود به منظور بازسازی مدل رتبه‌کاسته جهت شبیه‌سازی میدان جریان، مورد استفاده قرار گرفته‌است. پس از بازسازی مدل رتبه‌کاسته بصورت یک سامانه دینامیکی و با استفاده از یک شرط اولیه که برابر با مقدار ضرایب مودال در اولین گام زمانی است، پیشروی زمانی با استفاده از مدل اصلاح شده انجام می‌گیرد. در شکل ۷، نرخ تغییرات زمانی چهار ضریب مودال اول (مرتبه‌بندی شده بر حسب سطح انرژی) برای مؤلفه افقی سرعت در بازه زمانی معادل با یک چرخه نوسان کامل نمایش داده شده‌است. همانطور که در شکل مشخص است، نتایج حاصل از مدل رتبه‌کاسته اصلاح شده برای

<sup>۱</sup> Duality

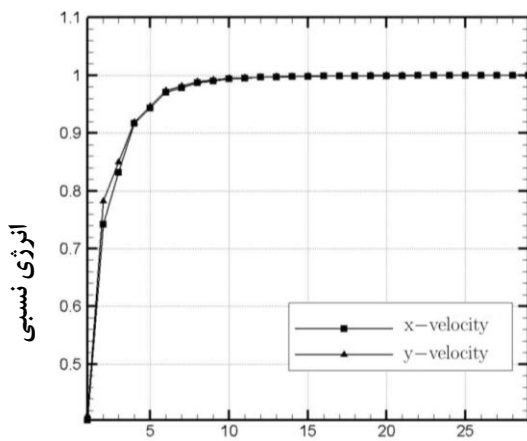
<sup>۲</sup> Symmetry



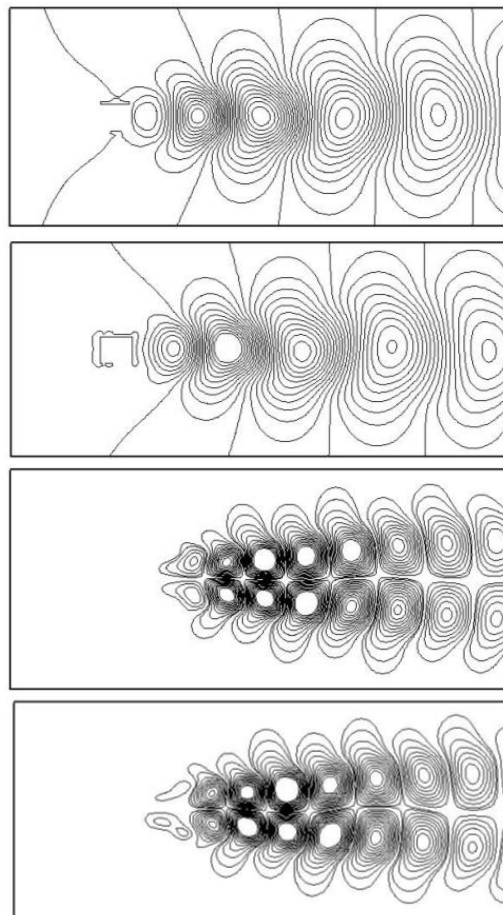
شماره مود  
شکل ۴- طیف انرژی مودهای مؤلفه افقی سرعت



شماره مود  
شکل ۵- طیف انرژی مودهای مؤلفه عمودی سرعت



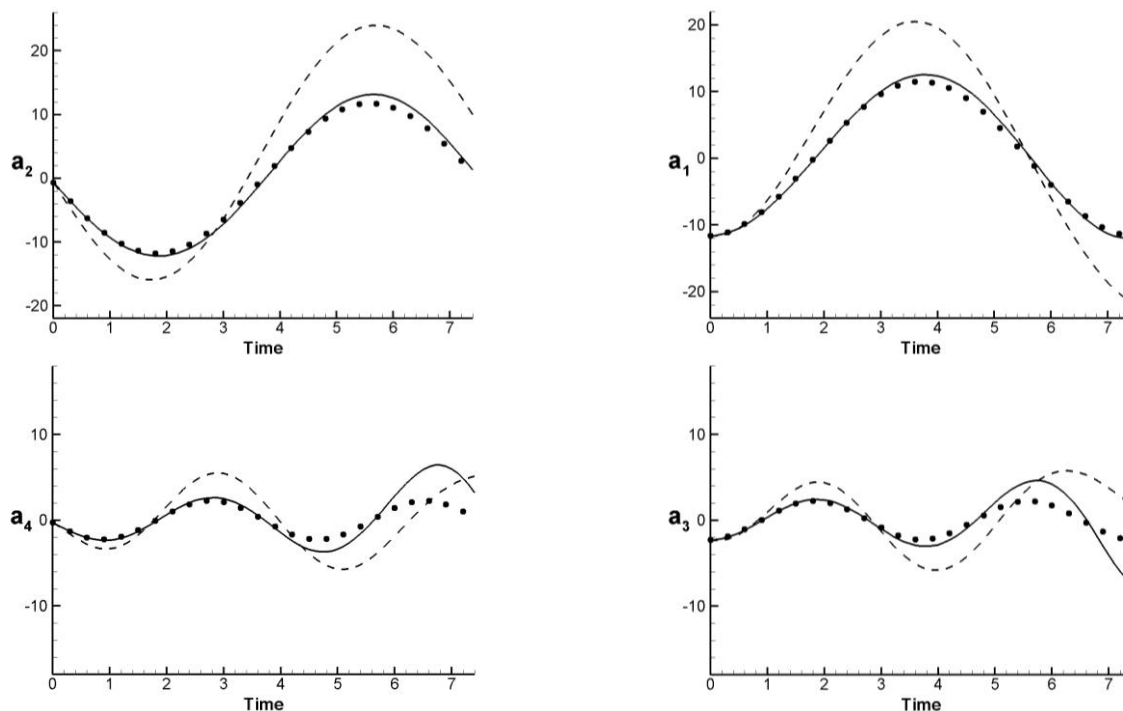
شماره مود  
شکل ۶- انرژی نسبی مودهای مؤلفه‌های میدان سرعت



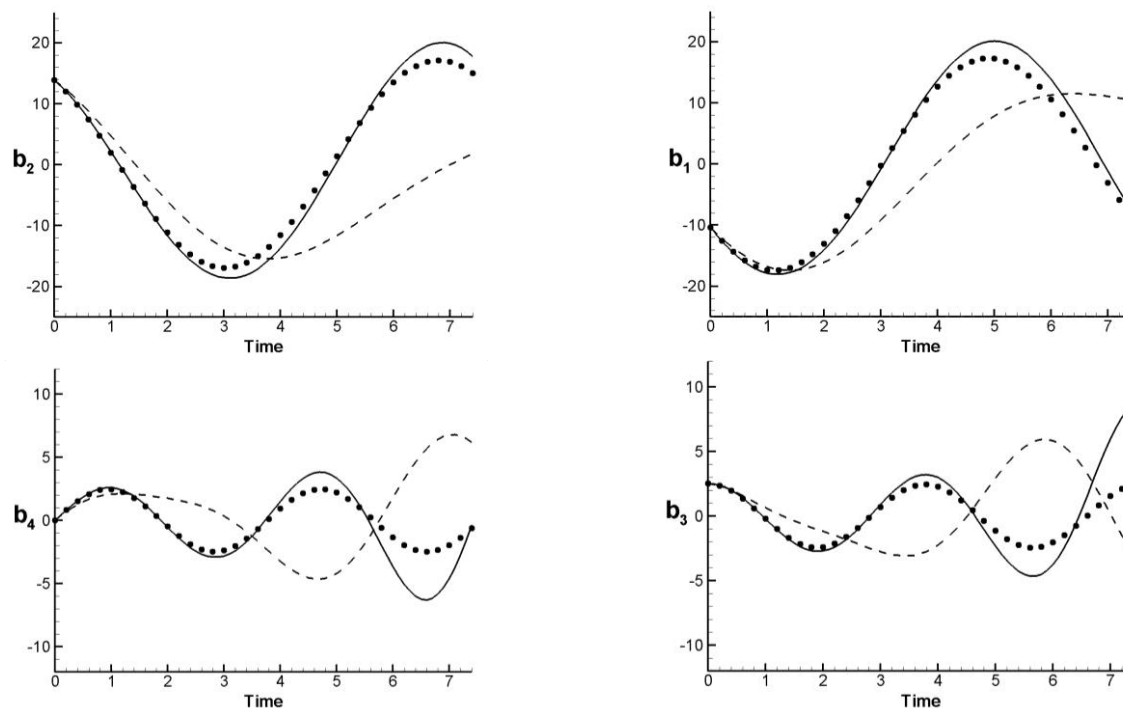
شکل ۳- خطوط هم‌تراز چهار مود پرنرژی تر مؤلفه عمودی سرعت

شکل ۸، تغییرات زمانی چهار ضریب مودال اول برای مؤلفه عمودی سرعت را نشان می‌دهد که نتایج حاصل از مدل رتبه‌کاسته اصلاح شده برای مودهای بقایی دقت بالاتری در مقایسه با مدل رتبه‌کاسته استاندارد، برای شبیه‌سازی میدان جریان نمایش می‌دهد. روشن است دلیل این موضوع، اصلاح بخشی از عبارات هم‌ارز ترم گرادین فشار تصویرسازی شده در راستای مودهای جریان است. در این شرایط، بقای موجود در معادله اندازه حرکت به صورت دقیق‌تری برقرار شده، در نتیجه رفتار مدل رتبه‌کاسته حاصل نیز پایدارتر خواهد شد. در شکل ۹، تغییرات زمانی چهار ضریب مودال اول مؤلفه افقی سرعت حاصل از مدل رتبه‌کاسته اصلاح شده (بهینه سازی شده) در مقایسه با مدل

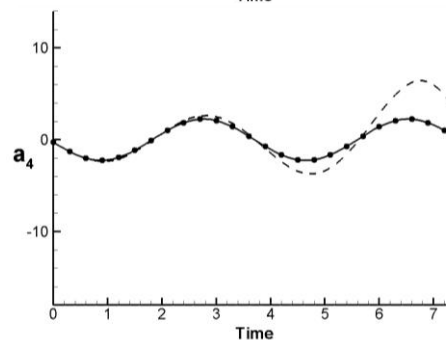
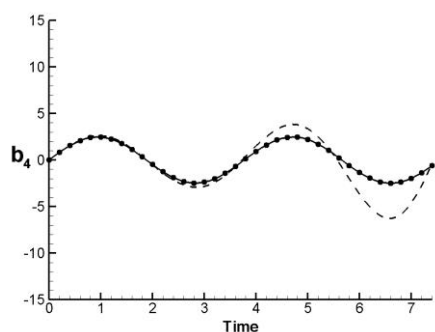
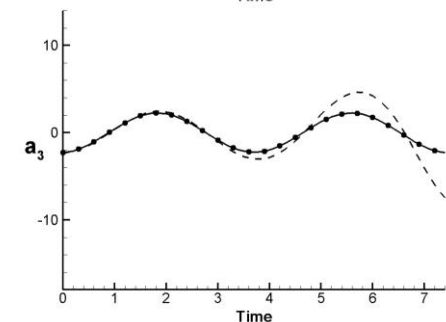
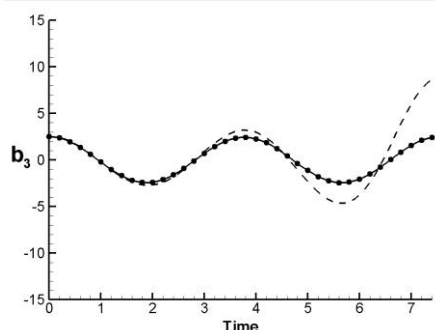
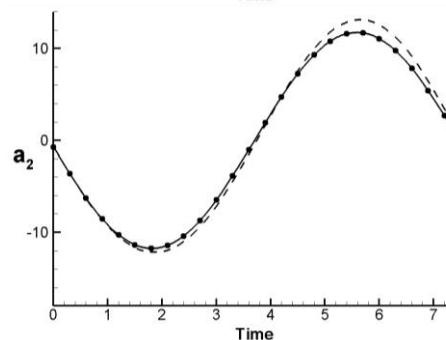
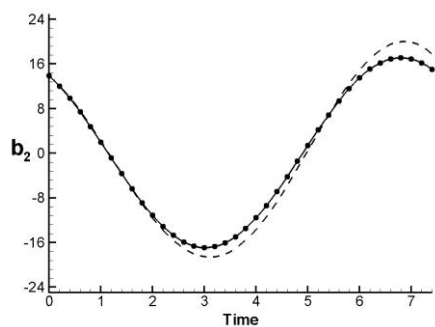
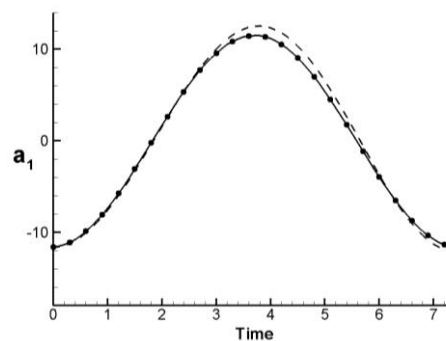
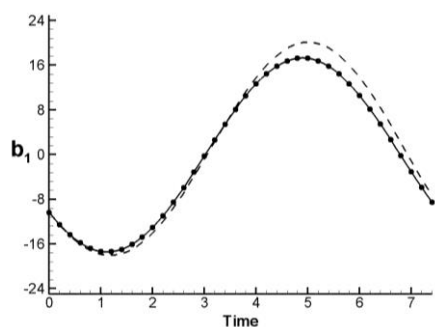




شکل ۷- مقایسه تغییرات زمانی چهار ضریب مودال پرنرزی تر برای معادله اندازه حرکت در راستای  $x$  (خطوط پیوسته انتگرال گیری از مدل رتبه کاسته اصلاح شده برای مودهای بقایی، خط چین مدل رتبه کاسته استاندارد و نقاط حاصل از شبیه سازی عددی مستقیم)



شکل ۸- مقایسه تغییرات زمانی چهار ضریب مودال پرنرزی تر برای معادله اندازه حرکت در راستای  $y$  (خطوط پیوسته انتگرال گیری از مدل رتبه کاسته اصلاح شده برای مودهای بقایی، خط چین مدل رتبه کاسته استاندارد و نقاط حاصل از شبیه سازی عددی مستقیم)



شکل ۱۰- مقایسه تغییرات زمانی ضرایب مودال برای معادله اندازه حرکت در راستای  $y$  (خطوط پیوسته) انتگرال‌گیری از مدل رتبه‌کاسته بهینه‌سازی شده، خط‌چین مدل رتبه‌کاسته اصلاح‌شده برای مدهای بقایی و نقاط حاصل از شبیه‌سازی عددی مستقیم)

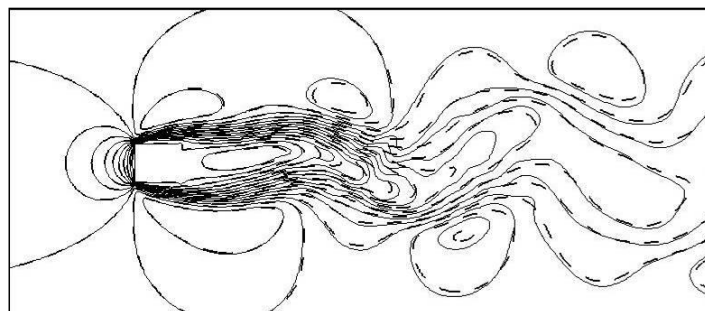
شکل ۹- مقایسه تغییرات زمانی ضرایب مودال برای معادله اندازه حرکت در راستای  $x$  (خطوط پیوسته) انتگرال‌گیری از مدل رتبه‌کاسته بهینه‌سازی شده، خط‌چین مدل رتبه‌کاسته اصلاح‌شده برای مدهای بقایی و نقاط حاصل از شبیه‌سازی عددی مستقیم)

### ۶- نتیجه‌گیری

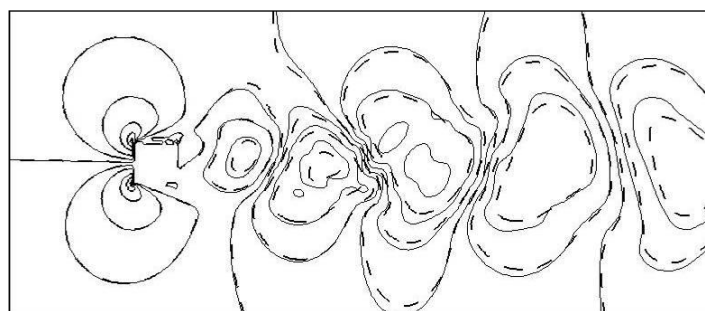
استفاده از الگوهای کاهش مرتبه به منظور تحلیل سریع‌تر و کم هزینه‌تر فرآیندهای فیزیکی، همواره مورد توجه پژوهشگران بوده‌است. کاربرد الگوهای رتبه‌کاسته مبتنی بر تبدیل معادلات بقای حاکم بر پدیده‌های فیزیکی که بر اساس روش تجزیه متعامد بهینه در سال‌های اخیر توسعه بسیار یافته‌است. این پژوهش، به ارائه یک شکل جدید از اصلاح مدل دینامیکی رتبه‌کاسته بر پایه روش تجزیه متعامد بهینه و اثبات قابلیت و توانایی آن برای مدل‌سازی میدان جریان برای یک مسئله کلاسیک مکانیک سیالات (جریان ناپایای تراکم‌ناپذیر حول یک سیلندر مربع شکل) می‌پردازد. در این راستا با استفاده از روش تجزیه متعامد بهینه مودهای میدان جریان محاسبه شده و با تصویرسازی معادلات بقای جرم و اندازه حرکت خطی در راستای مودهای POD، سامانه دینامیکی حاصل به یک مسئله مقدار اولیه تبدیل می‌شود. به منظور کاهش اثر مودهای غیربقایی که در معادله پیوستگی صدق نمی‌کنند، معادله بقای جرم جریان تراکم‌ناپذیر به صورت یک معادله کمکی و با اثر ایجاد عبارت استهلاکی به معادله بقای اندازه حرکت اضافه می‌شود. برای اصلاح اثر حذف ترم فشار و میراکردن اثرات حذف مودهای با اعداد موج بالا، که سامانه دینامیکی توانایی مناسب در کاهش انرژی آنها را ندارد، از یک عبارت اصلاح خطی که با بهره‌گیری از یک روش کمینه‌سازی محلی بدست آمده، استفاده شده‌است. به علاوه، با استفاده از یک روند کاهش مرتبه از تعداد مود کمتری به منظور بازسازی سامانه دینامیکی استفاده شده‌است. از دو روش تشریح شده به منظور انتگرال‌گیری در بازه زمانی کوتاه برای مسئله مذکور بهره گرفته شده که افزایش دقت نتایج و کاهش زمان چشمگیری را در مقایسه با شبیه‌سازی عددی مستقیم نشان می‌دهد.

رتبه‌کاسته اصلاح‌شده برای مودهای بقایی آورده شده‌است. همانطور که مشخص است، نتایج حاصل از مدل رتبه‌کاسته اصلاح شده از دقت بسیار بالایی در مقایسه با نتایج حاصل از حل عددی مستقیم برخوردار است. مقایسه‌ای بین تغییرات ضرایب مودال مؤلفه عمودی سرعت حاصل از مدل رتبه‌کاسته بهینه‌سازی شده، مدل رتبه‌کاسته اصلاح‌شده برای مودهای بقایی با نتایج حاصل از حل عددی مستقیم در شکل ۱۰ نشان داده شده‌است. واضح است که نتایج حاصل از مدل رتبه‌کاسته اصلاح‌شده با روش بهینه‌سازی در مقایسه با نتایج حاصل از حل عددی مستقیم، دقت بسیار بالای این مدل را نشان می‌دهد.

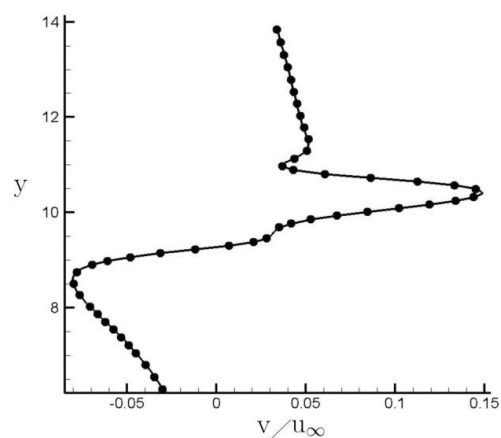
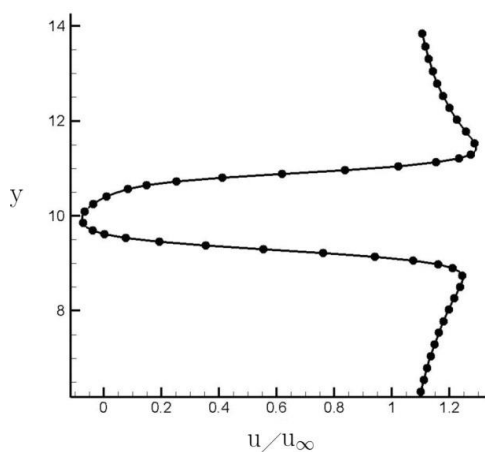
در شکل‌های ۱۱ و ۱۲، خطوط هم‌تراز مؤلفه افقی سرعت در زمان  $t = 5$ ، حاصل از حل عددی مستقیم و شبیه‌سازی با مدل رتبه‌کاسته اصلاح‌شده برای مودهای بقایی نشان داده شده که همگرایی نسبی نتایج حاصل از مدل با داده‌های حل عددی مستقیم را نمایش می‌دهد. شکل ۱۳ توزیع مؤلفه عمودی سرعت در راستای عمود بر جهت جریان ورودی، در  $t = 5$  و  $x = 0.135L$  نمایش می‌دهد. لازم به ذکر است که  $L$ ، طول محدوده محاسباتی در شبیه‌سازی عددی مستقیم جریان بوده، نقطه موردنظر در ناحیه دنباله (پشت جسم) قرار گرفته‌است. همانطور که در این شکل واضح است، نتایج حاصل از مدل رتبه‌کاسته اصلاح شده دقت آنرا با استفاده از یک معیار کیفی اثبات می‌کند. شکل ۱۴ مقایسه‌ای بین مقادیر محاسبه‌شده برای ضریب برآ و ضریب پسا برحسب زمان حاصل از حل عددی مستقیم و نتایج حاصل از مدل دینامیکی رتبه‌کاسته اصلاح‌شده برای مودهای بقایی صورت گرفته است. همانطور که در شکل مشخص است، داده‌های حاصل از مدل رتبه‌کاسته، تطابق نسبتاً بالایی را در مقایسه با داده‌های حاصل از حل عددی مستقیم نشان می‌دهند.



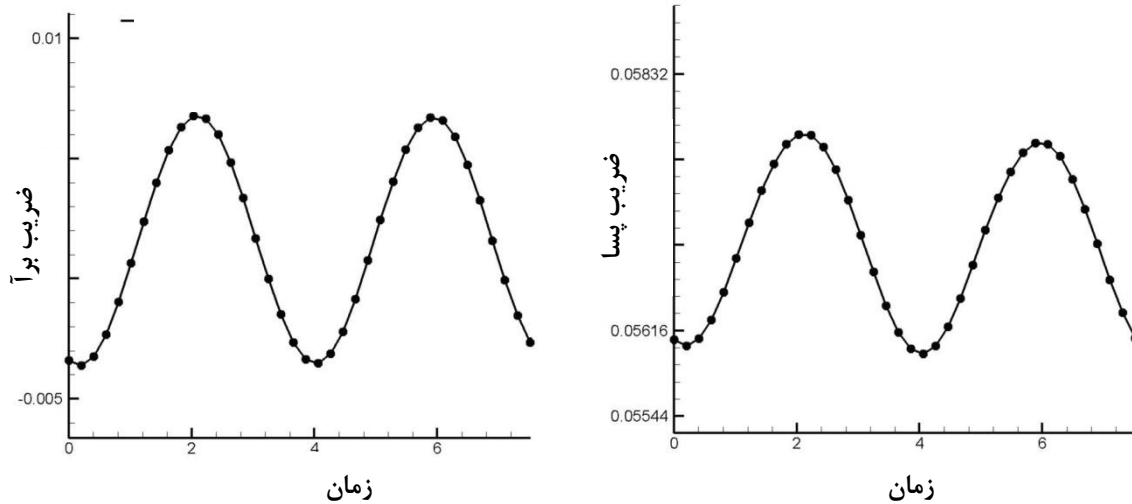
شکل ۱۱- خطوط همتراز مولفه افقی سرعت در  $t=5$  خطوط پیوسته نتایج حاصل از انتگرال گیری از مدل رتبه کاسته اصلاح شده برای موده‌های بقایی و خط چین حاصل از شبیه سازی عددی مستقیم



شکل ۱۲- خطوط همتراز مولفه عمودی سرعت در  $t=5$  خطوط پیوسته نتایج حاصل از انتگرال گیری از مدل رتبه کاسته اصلاح شده برای موده‌های بقایی و خط چین حاصل از شبیه سازی عددی مستقیم



شکل ۱۳- توزیع مولفه افقی سرعت (چپ) و مولفه عمودی سرعت (راست) در  $t=5$  و  $x=0.35L$ ، خط نتایج حاصل از انتگرال گیری از مدل رتبه کاسته اصلاح شده با روش بهینه سازی و نقاط حاصل از شبیه سازی عددی مستقیم



شکل ۱۴- توزیع ضریب برآ (چپ) و ضریب پسا (راست) بر حسب زمان خط نتایج حاصل از انتگرال‌گیری از مدل رتبه‌کاسته اصلاح‌شده با روش بهینه‌سازی و نقاط حاصل از شبیه‌سازی عددی مستقیم.

#### ۷- مراجع

- [7] Moayyedi MK, Taeibi-Rahni M, Sabetghadam F (2009) Calibrated low-dimensional dynamical model for simulation of unsteady incompressible flows. The 12<sup>th</sup> Fluid Dynamics Conference, Nooshirvani University of Technology, Babol, (In Persian).
- [8] Sabetghadam F, Moayyedi MK, Taeibi-Rahni M (2010) A fast approach for calibration of low-dimensional dynamical model for simulation of unsteady incompressible flows. The 9<sup>th</sup> Iranian Aerospace Society Conference, Azad University Science and Research Branch, Tehran, (In Persian).
- [9] Favier J, Cordier L, Kourta A, Iollo A (2006) Calibrated POD reduced-order models of massively separated flows in the perspective of their control. ASME Joint U.S.-European Fluids Engineering Summer Meeting, Miami, Florida, USA.
- [10] Couplet M, Basdevant C, Sagaut P (2005) Calibrated reduced-order POD-galerkin system for fluid flow modeling. J Comput Phys 207: 192–220.
- [11] Noack BR, Papas P, Monkewitz PA (2005) The need for a pressure-term representation in empirical galerkin models of incompressible shear flows. J Fluid Mech 523: 339-365.
- [12] Galletti B, Bottaro A, Bruneau CH, Iollo A (2007) Accurate model reduction for transient and forced wakes. European J Mech- B/Fluids 26: 354-366.
- [13] Holmes P, Lumley JL, Berkooz G (1996) turbulence, coherent structures, dynamical systems
- [1] Everson R , Sirovich L (1995) the karhunen-loeve for gappy data. J Opt Soc Am 12: 1657-1664.
- [2] Bui-Thanh T, Damodaran M, Wilcox K (2004) Aerodynamic data reconstruction and inverse design, using proper orthogonal decomposition. AIAA J 42(8): 1505-1516.
- [3] Sabetghadam F, Esfahanian V, Eftekhari M (2004) Application of POD/SVD in coherent structures extraction of a homogenous-statistical turbulent field. the 9<sup>th</sup> Fluid Dynamic Conference, Shiraz University.
- [4] Sabetghadam F, Taeibi-Rahni M, Moayyedi MK (2008) Application of low-dimensional POD in gappy data reconstruction of unsteady flow fields. The 1<sup>st</sup> Iranian Aerospace Society Special Symposium on Unsteady Aerodynamics, Sharif University of Technology, (In Persian).
- [5] Taeibi-Rahni M, Sabetghadam F, Moayyedi MK (2010) Low-dimensional proper orthogonal decomposition modelling as a fast approach of aerodynamic data estimation. J Aerospace Eng 23(1): 44-54.
- [6] Taeibi-Rahni M, Sabetghadam F, Moayyedi MK (2008) Analysis of compressible flow around 2D bodies using proper orthogonal decomposition methods. The 7<sup>th</sup> Iranian Aerospace Society Conference, Sharif University of Technology, (In Persian).

- with arbitrary shapes. PhD Dissertation, Department of Aerospace Engineering, Sharif University of Technology (In Persian).
- [16] Moayyedi MK, Taeibi-Rahni M, Sabetghadam F (2012) Calibrated low-dimensional POD model for simulation of the unsteady incompressible flows. *Aerodynamics and Fluid Mechanics Journal* 1(1): 35-45, (In Persian).
- and symmetry. *Cambridge Monographs on Mechanics*, Cambridge University Press.
- [14] Sabetghadam F, Taeibi-Rahni M, Moayyedi MK (2008) Gappy low-dimensional POD: a powerful tool for data reconstruction of unsteady flow fields. *CFD J* 17(3): 156-164.
- [15] Moayyedi MK (2009) Low-dimensional POD simulation of the unsteady flows around bodies