



بررسی تحلیلی و عددی تیرهای ساندویچی هدفمند^۱ تحت بار موضعی و خواص وابسته به دما

جمال صیدی^۱، یونس محمدی^{۲*}

^۱ مربی، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد ایلام، ایلام

^۲ استادیار، دانشکده مهندسی صنایع و مکانیک، دانشگاه آزاد اسلامی واحد قزوین، قزوین

تاریخ دریافت: ۱۳۹۲/۰۶/۰۹؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۳/۰۸/۰۴؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۴/۰۹/۲۲

چکیده

تحلیل تیرهای ساندویچی با رویه‌های هدفمند تحت بارهای موضعی از نوع فرورفتگی (indentation) در شرایط دمایی مختلف انجام شده است. برای رویه‌های هدفمند، از تئوری برشی مرتبه اول و برای توزیع خواص در رویه‌ها از توابع توانی^۲ استفاده شده، تمامی خواص، وابسته به دما می‌باشند. دو مقیاس طول انتشار بار برای تیر ساندویچی مذکور، تعریف و در شرایط مختلف به صورت تحلیلی و همچنین با استفاده از المان محدود (ANSYS) محاسبه شده‌اند که رفتار تیر ساندویچی تحت بارهای موضعی با طول موج‌های مختلف را توصیف می‌کنند. این مقیاس‌های طول انتشار، وابسته به خواص مادی و خواص هندسی تیر ساندویچی می‌باشند و مشخص می‌کنند، زمانی که یک بار خارجی بر رویه بالایی تیر وارد می‌شود، چه طولی از رویه‌ها و هسته را تحت تاثیر خود قرار می‌دهند. نتایج تئوری محاسبه شده در این تحقیق، با نتایج المان محدود و همچنین در شرایط خاص با نتایج محققان دیگر مقایسه و هماهنگی قابل قبولی بین آن‌ها مشاهده می‌شود.

کلمات کلیدی: تیر ساندویچ؛ خواص وابسته به دما؛ بارگذاری موضعی؛ رویه‌های هدفمند.

Analytical and Numerical Survey of FG Sandwich Beams under Local Loading and Temperature-Dependent Properties

J. Seyyedi¹, and Y. Mohammadi^{2*}

¹ Department of Mech. Eng., Islamic Azad Univ., Ilam Branch, Ilam, Iran.

² Assist. Prof., Department of Indust. And Mech. Eng., Islamic Azad Univ., Qazvin Branch, Qazvin, Iran.

Abstract

The analysis of sandwich beams with the FG face sheets loaded by central indenter in various temperature conditions is carried out in this work. Property distribution in the FG face sheets is according to the power law function of FGMs; their properties are temperature-dependent. In this model, the first-order shear deformation theory is used for the FG face sheets, while 3D elasticity is used for the flexible core. Two spreading length scales are introduced and calculated for defined sandwich beams, characterizing the behavior of sandwich beams under local loads. These spreading-length scales, which are two functions of the beam material and geometrical properties, characterize the length over which a load on the upper surface of a beam is spread out by the face sheets and the core. The theoretical predictions in this work are compared with the FEM results by ANSYS and the results published in the literature for special cases; a reasonable agreement was found between them.

Keywords: Sandwich Beam; Temperature-Dependent Properties; Local Loading; Functionally Graded Face Sheets.

¹ Functionally Graded Material

² Power Law Function

۱- مقدمه

در سال‌های اخیر، تحقیقات گسترده‌ای روی مواد هدفمند صورت گرفته است. مواد هدفمند، موادی هستند که با تغییر در ریز ساختار آن‌ها می‌توان از آن‌ها برای اهداف خاصی مانند، کنترل تغییرات شدید دما استفاده کرد [۱]. این مواد، دارای کاربردهای بسیار زیادی در عرصه‌های مختلف شامل، مهندسی مکانیک، عمران، هوا فضا، بیومکانیک، انرژی هسته‌ای و مهندسی دریا است. مواد هدفمند از لحاظ میکروسکوپی ناهمگن هستند و معمولاً مرکب از دو ماده شامل، یک فلز و یک سرامیک است. این مواد، معمولاً به عنوان سپر حرارتی در محیط‌های با دماهای بالا استفاده می‌شوند [۲ و ۱].

تیرهای ساندویچی با هسته تراکم پذیر که تحت بارهای موضعی قرار دارند، نسبت به تیرهای تراکم ناپذیر، بیشتر در معرض واماندگی قرار دارند [۳]. اکنون اگر این تیر تحت شرایط دمایی نیز قرار داشته باشد، آنگاه رویه‌های تیر ساندویچی، باید توانایی تحمل آن حرارت را داشته باشند. یک نوع ساختار جدید و مفید از تیر ساندویچی، می‌تواند یک تیر ساندویچی با هسته تراکم پذیر و رویه‌های ساخته شده از مواد هدفمند باشد [۴] که در این مقاله، به تحلیل این نوع از تیرهای ساندویچی پرداخته شده است.

تحلیل پانل‌های ساندویچی سنتی با استفاده از مدل‌های کلاسیک خطی و غیرخطی توسط محققانی مانند آلن [۵]، پلانتما [۶]، زنگرت [۷] و وینسون [۸] شروع شد و پس از آن توسط محققانی دیگر همچون، نور [۹] و لیبرسکیو [۱۰] ادامه یافت. این پانل‌های ساندویچی سنتی، معمولاً از رویه‌های کاملاً فلزی و هسته تراکم ناپذیر ساخته می‌شدند. در مدل‌های کلاسیک، برای پیش بینی رفتار پانل‌های ساندویچی تحت بارهای غیرموضعی، مانند بارهای خمشی و ارتعاشات آزاد، از تئوری‌های تک لایه معادل^۱ بر پایه تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول [۱۱] و یا بر پایه تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم [۱۲]، برای کل ضخامت تیر ساندویچی استفاده شده است؛ اما این مدل‌های سنتی در تحلیل تیرهای ساندویچی جدید که دارای هسته انعطاف پذیر می‌باشند، به خصوص تحت بارهای موضعی مانند بار

فرورفتگی^۲ دچار خطای بسیاری خواهند شد [۳]. پتراس و ساتکلایف [۱۳]، از طریق آزمایش و به طور تجربی نشان دادند که جابه‌جایی‌های خارج از صفحه و درون صفحه‌ای هسته در پانل‌های ساندویچی جدید با هسته انعطاف پذیر، مخصوصاً در نواحی نزدیک به بارهای موضعی، با توابع غیرخطی بدست می‌آیند. از آنجا که مدل‌های کلاسیک پانل‌های ساندویچی، جابه‌جایی‌های درون صفحه‌ای هسته را با توابع خطی و جابه‌جایی‌های خارج از صفحه هسته را ثابت در نظر می‌گیرند، بنابراین نیاز به یک مدل جدید احساس شد که توانایی تحلیل پانل‌های ساندویچی جدید را داشته باشد.

فروستیگ و باروچ [۱۴]، برای اولین بار و با استفاده از اصول تغییرات به توسعه یک تئوری مرتبه بالا برای پانل‌های ساندویچی پرداختند که انعطاف پذیری عرضی هسته را نیز در نظر می‌گرفت. در سال‌های بعد، آن‌ها و همچنین محققان دیگر از این تئوری مرتبه بالا برای تحلیل پانل‌های ساندویچی تحت شرایط مختلف استفاده کردند. در سال‌های اخیر، تئوری مرتبه بالای فروستیگ با انجام اصلاحاتی توسط محمدی و خلیلی [۱۵] برای تحلیل استاتیکی تیرهای ساندویچی تحت بارهای موضعی و پس از آن توسط خلیلی و محمدی [۴] برای تحلیل ارتعاشات آزاد صفحات ساندویچی، استفاده شده است.

هدف از این مطالعه، پیش‌بینی رفتار تیرهای ساندویچی با رویه‌های هدفمند و هسته انعطاف پذیر تحت بارهای موضعی و همچنین تحت شرایط دمایی با در نظر گرفتن وابستگی خواص رویه‌ها به دما است. در این مقاله، تئوری مرتبه بالای فروستیگ، دچار اصلاحاتی شده، از این تئوری اصلاح شده برای تحلیل تیر ساندویچی استفاده شده است. این اصلاحات عبارتند از: (۱) با توجه به وجود دماهای بالا در این تحقیق، تمامی خواص رویه‌های هدفمند، وابسته به دما در نظر گرفته شده‌اند (۲) به منظور دقت بیشتر در محاسبه جابه‌جایی‌های رویه‌های هدفمند، از میدان جابه‌جایی برشی مرتبه اول به جای میدان جابه‌جایی کلاسیک استفاده شده است.

² Indentation¹ Equivalent Single Layer

۲- روابط ریاضی

در این مقاله، از یک تئوری مرتبه بالای اصلاح شده سازه‌های ساندویچی استفاده شده است. یک تیر ساندویچی به طول L و پهنای واحد، شامل یک هسته به ضخامت h_c و دو رویه هدفمند به ضخامت‌های h_t و h_b به ترتیب برای رویه‌های بالایی و پایینی را مطابق با شکل ۱ (الف) در نظر می‌گیریم. تیر ساندویچی از یک سو تحت یک بار موضعی با شدت q_t بر رویه بالایی خود قرار گرفته و از سوی دیگر نیز، تحت افزایش دمای یکنواخت قرار دارد.

با توجه به شدت تغییرات دما در این تحقیق، تمامی خواص رویه‌های هدفمند و هسته وابسته به دما در نظر گرفته شده‌اند. تغییرات هر یک از خواص رویه‌ها و هسته، مانند مدول الاستیسیته، ضریب پواسون و یا ضریب انبساط حرارتی، با یک تابع درجه سوم بر حسب دما [۱۶] تعریف می‌شوند:

$$P = C_0(C_{-1}T^{-1} + 1 + C_1T + C_2T^2 + C_3T^3) \quad (1)$$

که در آن P معرف هر یک از خواص رویه‌ها یا هسته؛ C_0, C_1, C_2, C_3 ثوابت منحصر به فرد برای هر ماده؛ و T مقدار دما است.

با توجه به دو بعدی بودن مدل، از تغییرات در راستای ضخامت صرف‌نظر شده است. با فرض تغییر شکل‌ها و دوران‌های کوچک، میدان جابه‌جایی رویه‌های هدفمند بر اساس تئوری برشی مرتبه اول^۱ ورق‌ها به صورت روابط (۲-۳) تعریف شده‌اند [۱۲]:

$$u_j(x, z) = u_{0j}(x) + z_j \psi_x^j(x) \quad (2)$$

$$w_j(x, z) = w_{0j}(x) \quad (3)$$

که در آن، $z = t$ معرف رویه بالایی و $z = b$ معرف رویه پایینی؛ u_{0j} و w_{0j} ، تغییر شکل‌های صفحه میانی رویه‌ها به ترتیب در جهات x و z و ψ_x^j چرخش بردار نرمال صفحه میانی هر یک از رویه‌ها حول محور y است. با استفاده از این میدان جابه‌جایی، روابط سینماتیک رویه‌های هدفمند را می‌توان به فرم روابط (۴-۵) بدست آورد:

$$\epsilon_{xx}^j(x, z) = u_{0j,x}(x) + z_j \psi_{x,x}^j(x) \quad (4)$$

$$\gamma_{xz}^j(x) = w_{0j,x}(x) + \psi_x^j(x) \quad (5)$$

که در آن، i به معنی مشتق جزئی نسبت به i است. روابط سینماتیک هسته نیز، به صورت روابط (۶-۷) تعریف می‌شود:

$$\epsilon_{zz}^c(x, z_c) = w_{c,z_c}(x, z_c) \quad (6)$$

$$\gamma_{xz}^c(x, z_c) = u_{c,z_c}(x, z_c) + w_{c,x}(x, z_c) \quad (7)$$

که در آن، u_c و w_c تغییر شکل‌های هسته به ترتیب در جهات x و z می‌باشند. در این مدل فرض شده است که همواره اتصال کامل بین رویه‌ها و هسته برقرار باشد؛ بنابراین، چهار شرط سازگاری به صورت روابط (۸-۱۱) بیان می‌شوند [۱۷]:

$$u_c(z_c = 0) = u_{0t} + \frac{h_t}{2} \psi_x^t \quad (8)$$

$$u_c(z_c = h_c) = u_{0b} - \frac{h_b}{2} \psi_x^b \quad (9)$$

$$w_c(z_c = 0) = w_{0t} \quad (10)$$

$$w_c(z_c = h_c) = w_{0b} \quad (11)$$

با برقرار کردن معادلات نیوتن برای شکل ۱ (ب)، معادلات تعادل تیر ساندویچی به صورت روابط (۱۲-۱۹) به دست می‌آیند:

$$N_{xx,x}^t + \tau_{zz}^c(z_c = 0) = 0 \quad (12)$$

$$N_{xx,x}^b - \tau_{zz}^c(z_c = h_c) = 0 \quad (13)$$

$$Q_{x,x}^t + \sigma_{zz}^c(z_c = 0) + q_t = 0 \quad (14)$$

$$Q_{x,x}^b - \sigma_{zz}^c(z_c = h_c) = 0 \quad (15)$$

$$M_{xx,x}^t - Q_x^t + \tau_{zz}^c(z_c = 0) \frac{h_t}{2} = 0 \quad (16)$$

$$M_{xx,x}^b - Q_x^b + \tau_{zz}^c(z_c = h_c) \frac{h_b}{2} = 0 \quad (17)$$

$$\tau_{zz,z_c}^c = 0 \quad (18)$$

$$\sigma_{zz,z_c}^c + \tau_{xz,x}^c = 0 \quad (19)$$

که در آن، N_{xx}^j و M_{xx}^j به ترتیب، منتجه‌های تنش و ممان رویه‌ها؛ Q_x^j توزیع نیروی برشی بر واحد طول در راستای x هر یک از رویه‌ها؛ و τ_{xz}^c تنش برشی هسته است، اکنون با استفاده از دو معادله از معادلات تعادل (۱۸) و (۱۹)، روابط سینماتیک هسته و سه معادله از معادلات سازگاری (۸)، (۱۰) و (۱۱)، روابط تحلیلی برای تنش نرمال در راستای z هسته، σ_{zz}^c و جابه‌جایی‌های افقی و عمودی هسته، w_c و u_c بدست می‌آیند که به منظور خلاصه‌سازی در اینجا آورده نشده‌اند. برای جایگذاری منتجه‌های تنش، منتجه‌های ممان و نیروی برشی بر واحد طول برای هر یک از رویه‌های هدفمند می‌توان از روابط (۲۰-۲۲) استفاده کرد:

$$N_{xx}^j = A_{11}^j u_{0j,x} + B_{11}^j \psi_{x,x}^j - N_{xx}^{Tj} \quad (20)$$

¹ First Order Shear Deformation

صفحه میانی هر یک از رویه‌ها حول محور y ، ψ_x^t و ψ_x^b ؛ و تنش برشی عرضی هسته، τ_{xz}^c . شش معادله از معادلات حاکم، با جایگذاری روابط (۲۰) تا (۲۲) در شش معادله تعادل (۱۲) تا (۱۷) بدست می‌آیند. هفتمین معادله حاکم نیز با استفاده از جابه‌جایی در راستای x هسته، u_c و معادله سازگاری در سطح مشترک رویه پایینی و هسته، رابطه (۹) بدست می‌آید. این هفت معادله به شرح روابط (۲۵-۳۱) می‌باشند:

$$A_{11}^t u_{0t,xx} + B_{11}^t \psi_{x,xx}^t + \tau_{xz}^c = 0 \quad (25)$$

$$A_{11}^b u_{0b,xx} + B_{11}^b \psi_{x,xx}^b - \tau_{xz}^c = 0 \quad (26)$$

$$A_{55}^t k(w_{0t,xx} + \psi_{x,x}^t) + \frac{E_c}{h_c} (w_{0b} - w_{0t}) + \tau_{xz,x}^c \frac{h_c}{2} + q_t = 0 \quad (27)$$

$$A_{55}^b k(w_{0b,xx} + \psi_{x,x}^b) - \frac{E_c}{h_c} (w_{0b} - w_{0t}) + \tau_{xz,x}^c \frac{h_c}{2} = 0 \quad (28)$$

$$B_{11}^t u_{0t,xx} + D_{11}^t \psi_{x,xx}^t - A_{55}^t k(w_{0t,x} + \psi_x^t) + \tau_{xz}^c \frac{h_t}{2} = 0 \quad (29)$$

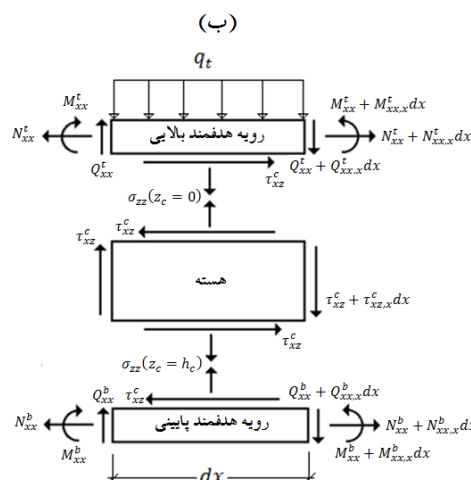
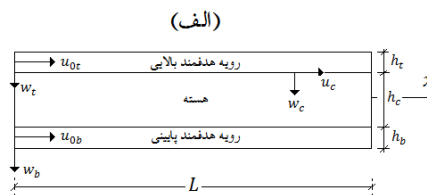
$$B_{11}^b u_{0b,xx} + D_{11}^b \psi_{x,xx}^b - A_{55}^b k(w_{0b,x} + \psi_x^b) + \tau_{xz}^c \frac{h_b}{2} = 0 \quad (30)$$

$$\frac{\tau_{xz}^c h_c}{G_c} - \frac{\tau_{xz,xx}^c h_c^3}{12E_c} - \frac{h_c}{2} (w_{0t,x} + w_{0b,x}) + \frac{1}{2} (h_t \psi_x^t + h_b \psi_x^b) + u_{0t} - u_{0b} = 0 \quad (31)$$

که در آن، k ضریب تصحیح برشی بوده، مطابق با فرضیات میندلین برابر با $\pi^2/12$ در نظر گرفته شده است [۱۹]. این دستگاه معادلات به طور عددی برای هر نوع شرایط مرزی دلخواه قابل حل است، اما در حالت خاص برای شرایط مرزی ساده، به روش تحلیلی نیز قابل حل است.

۴- شرایط مرزی ساده

شرایط مرزی ساده روی تیر ساندویچی به نحوی اعمال شده است که اولاً از جابه‌جایی عمودی هسته در جهت ضخامت آن در لبه‌های تیر جلوگیری شده، ثانیاً رویه‌ها تحت شرایط تکیه‌گاهی ساده قرار گرفته است. برای این شرایط تکیه‌گاهی ساده روی تیر ساندویچی، یک حل تحلیلی وجود دارد. با توجه به این شرایط تکیه‌گاهی ساده و همچنین بار موضعی وارد بر رویه بالایی، هفت مجهول مسئله را می‌توان با سری‌های فوریه برحسب توابع مثلثاتی در راستای x به صورت روابط (۳۲) بیان کرد:



شکل ۱- (الف) هندسه و دستگاه مختصات؛ (ب) نیروهای خارجی و داخلی

$$M_{xx}^j = B_{11}^j u_{0j,x} + D_{11}^j \psi_{x,x}^j - M_{xx}^{Tj}, (j = t, b) \quad (21)$$

$$Q_x^j = A_{55}^j \gamma_{xz}^j \quad (22)$$

که در آن، A_{11}^j ، B_{11}^j ، D_{11}^j و A_{55}^j ، ضرایب ماتریس‌های سختی کششی، خمشی و کوپلینگ رویه‌ها می‌باشند و برای هر یک از رویه‌های هدفمند و برای توزیع توانی خواص در مواد هدفمند، در پیوست (الف) تعریف شده‌اند [۱۸]. همچنین، N_{xx}^{Tj} و M_{xx}^{Tj} به ترتیب، منته‌های تنش حرارتی و ممان حرارتی رویه‌های هدفمند می‌باشند و به صورت روابط (۲۳-۲۴) تعریف می‌شوند:

$$N_{xx}^{Tj} = \int_{-h_j/2}^{h_j/2} \left(\frac{E_j(z_j, T)}{1-\nu_j(z_j, T)} \cdot \alpha_j(z_j, T) \cdot T \right) dz_j \quad (23)$$

$$M_{xx}^{Tj} = \int_{-h_j/2}^{h_j/2} \left(\frac{E_j(z_j, T)}{1-\nu_j(z_j, T)} \cdot \alpha_j(z_j, T) \cdot T \cdot z_j \right) dz_j \quad (24)$$

۳- معادلات حاکم

معادلات حاکم بر تیر ساندویچی هدفمند تعریف شده در شکل ۱، در نهایت برحسب هفت مجهول بدست می‌آیند. این هفت مجهول عبارت‌اند از: جابه‌جایی‌های صفحه میانی هر یک از رویه‌ها، u_{0t} ، u_{0b} و w_t و w_b ؛ مولفه‌های دورانی

$C_{\sigma zb}^m$ به معنی، آن است که هیچ درصدی از بار خارجی q_t به سطح مشترک رویه بالایی-هسته و همچنین به سطح مشترک رویه پایینی-هسته نرسیده است و یا به عبارت دیگر، تمامی بار توسط رویه بالایی تحمل شده است؛ اما در عوض مقادیر نزدیک به یک برای ضرایب $C_{\sigma zt}^m$ و $C_{\sigma zb}^m$ به معنی، حداکثر انتقال بار از رویه بالایی به هسته و از هسته به رویه پایینی است. لازم به ذکر است، ضرایب انتقال بار نمی‌توانند دقیقاً برابر با یک باشند، زیرا $C_{\sigma zt}^m = 1$ به معنی تحمل نشدن هیچ باری توسط رویه بالایی و $C_{\sigma zb}^m = 1$ به معنی تحمل نشدن هیچ باری توسط رویه بالایی و هسته است که غیرممکن است.

۵- مقیاس‌های طول انتشار^۱ بار

در این بخش، از تئوری تیر ساندویچی مرتبه بالای اصلاح شده به منظور محاسبه میزان انتقال بار فرورفتگی خارجی از رویه بالایی به هسته و سپس از هسته به رویه پایینی تیر ساندویچی استفاده شده است. فرض شده است که بار خارجی بتواند تا جایی افزایش یابد که سازه رفتار الاستیک از خود نشان می‌دهد؛ بنابراین، نتایج این مدل می‌تواند برای تخمین لحظه واماندگی تیرهای ساندویچی ساخته شده از رویه‌های هدفمند و هسته ایزوتروپیک مفید باشد.

طول انتشار بار، اولین بار توسط پتراس و ساتکلایف [۱۳]، تنها برای سطح مشترک رویه بالایی و هسته و برای تیرهای ساندویچی با رویه‌های ایزوتروپیک معرفی شد. در این تحقیق، مقادیر مقیاس طول انتشار برای تیرهای ساندویچی با رویه‌های هدفمند و همچنین هم در سطح مشترک رویه بالایی و هسته، λ_t و هم در سطح مشترک رویه پایینی و هسته λ_b ، تعریف و محاسبه شده است. این دو پارامتر، مشخص‌کننده میزان تحمل تیر ساندویچی با رویه‌های هدفمند تحت بار موضعی فرورفتگی و همچنین تحت شرایط دمایی است.

بارهای خارجی با نیم طول موج‌های کوچکتر از λ_t توسط رویه بالایی پخش و گسترده شده، مقدار کمتری از آن به هسته می‌رسد، اما برای طول موج‌های بزرگتر از λ_t درصد بیشتری از بار خارجی بدون تغییر از رویه بالایی عبور کرده،

$$\begin{bmatrix} u_{0j}(x) \\ w_{0j}(x) \\ \psi_x^j(x) \\ \tau_{xz}^c(x) \end{bmatrix} = \sum_{m=1}^M \begin{bmatrix} C_{uj}^m \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \\ C_{wj}^m \sin\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \\ C_{\psi j}^m \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \\ C_{\tau}^m \cos\left(\frac{m\pi}{L}x\right) \end{bmatrix} \quad (32)$$

که در آن، C_{uj}^m ، C_{wj}^m ، $C_{\psi j}^m$ و C_{τ}^m ضرایب فوریه می‌باشند و باید در ادامه محاسبه شوند. ضمناً، بار خارجی وارد بر رویه هدفمند بالایی نیز، به شکل سری فوریه رابطه (۳۲) انتخاب شده است:

$$q_t(x) = \sum_{m=1}^M C_{qt}^m \sin(\alpha_m x) \quad (33)$$

که در آن، ثابت C_{qt}^m وابسته به توزیع بار خارجی است. پس از جایگذاری تمامی مجهولات مسئله برحسب سری‌های فوریه، از رابطه (۳۲)، در معادلات حاکم (۲۵) تا (۳۱)، دستگاه معادلات حاکم بر مسئله به فرم ماتریسی بدست می‌آید. این معادله ماتریسی با استفاده از نرم افزار MATLAB حل شده است و بردار ضرایب بدست می‌آیند که شامل، هفت ضریب فوریه مجهول، یعنی C_{ut}^m ، C_{ub}^m ، C_{wt}^m ، C_{wb}^m ، $C_{\psi t}^m$ ، $C_{\psi b}^m$ و C_{τ}^m است.

اکنون با جایگذاری توزیع بار خارجی از رابطه (۳۳) و مجهولات مسئله از رابطه (۳۲) در رابطه تنش نرمال بین رویه‌ها و هسته [۲۰]، رابطه تنش نرمال بین رویه پایینی و هسته و همچنین بین رویه بالایی و هسته برحسب بار خارجی q_t بدست می‌آیند.

$$\sigma_{zz}^c(z_c = 0) = C_{\sigma zt}^m \cdot q_t(x) \quad (34)$$

$$\sigma_{zz}^c(z_c = h_c) = C_{\sigma zb}^m \cdot q_t(x) \quad (35)$$

که در آن، $C_{\sigma zt}^m$ و $C_{\sigma zb}^m$ ضرایب بی بعد انتقال بار به ترتیب در سطح مشترک رویه بالایی-هسته و در سطح مشترک رویه پایینی-هسته نام دارند و به صورت روابط (۳۶-۳۷) بدست آمده‌اند:

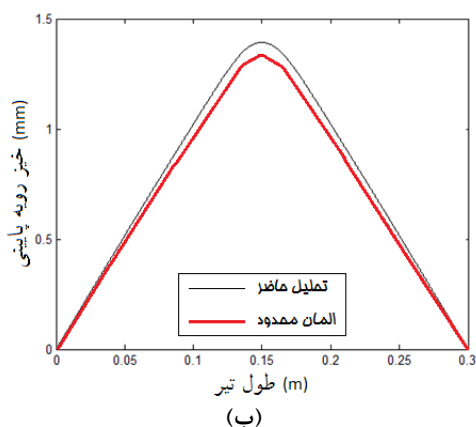
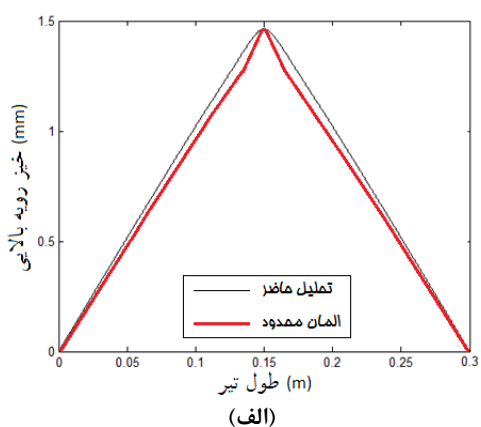
$$C_{\sigma zt}^m = \frac{E_c}{h_c} (C_{wb}^m - C_{wt}^m) - \frac{h_c \pi}{2(L/m)} C_{\tau}^m \quad (36)$$

$$C_{\sigma zb}^m = \frac{E_c}{h_c} (C_{wb}^m - C_{wt}^m) + \frac{h_c \pi}{2(L/m)} C_{\tau}^m \quad (37)$$

این دو ضریب بی‌بعد وابسته به خواص مادی و هندسی تیر ساندویچی و نیز وابسته به L/m ، نیم طول موج جمله m ام از سری‌های فوریه، می‌باشند. این ضرایب انتقال بار از مقدار صفر، برای L/m های کوچک، تا مقادیر نزدیک به یک، برای L/m های بزرگ، تغییر می‌کنند $\left(0 \leq (C_{\sigma zt}^m, C_{\sigma zb}^m) < 1\right)$. مقدار صفر برای ضرایب $C_{\sigma zt}^m$ و

^۱ Spreading Length Scale

در این بخش و به منظور صحت سنجی نتایج، تیر ساندویچی متقارنی از نوع A با ضخامت ۱ mm برای هر رویه؛ ضخامت ۱۸/۵۵ mm برای هسته؛ پهنای ۶۰ mm؛ طول ۳۰۰ mm که تحت بار ۱۲۵ KN/m در ۴ mm از قسمت میانی خود قرار دارد، در نظر گرفته شده است. مدول الاستیسیته و مدول برشی هسته به ترتیب ۵۲/۵ و ۲۱ مگا پاسکال و مدول‌های الاستیسیته آلومینیوم و آلومینا نیز به ترتیب، ۷۰ GPa و ۳۸۰ GPa در نظر گرفته شده است. نتایج عددی در این بخش شامل، محاسبه جابه‌جایی‌های طولی و عرضی رویه‌های هدفمند، تنش برشی هسته و تنش‌های نرمال در سطح مشترک رویه بالایی و هسته و در سطح مشترک رویه پایینی و هسته است. شکل‌های ۳ و ۴ به ترتیب، جابه‌جایی‌های طولی و عرضی رویه‌های هدفمند و شکل ۵ نیز، تنش‌های برشی هسته را برای تیر ساندویچی نوع A تعریف شده در این بخش نشان می‌دهند.



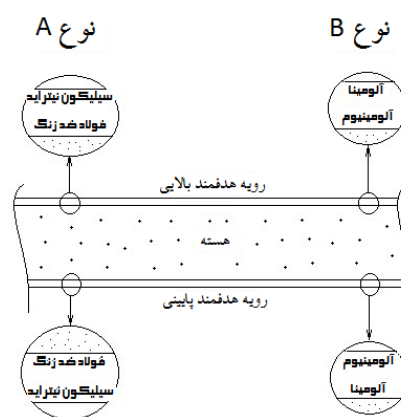
شکل ۳- مقایسه نتایج (الف) خیز رویه بالایی (ب) خیز رویه پایینی (p=1)

به هسته منتقل می‌شود. به طور مشابه، برای نیم طول موج‌های کوچکتر از λ_b ، بارهای خارجی توسط رویه بالایی و هسته پخش و گسترده شده، مقدار اندکی از آن ممکن است به رویه پایینی برسد، اما برای طول موج‌های بزرگتر از λ_b درصد بیشتری از بار خارجی بدون تغییر از رویه بالایی و هسته عبور کرده، به رویه پایینی منتقل می‌شود.

۶- صحت سنجی

به منظور صحت سنجی نتایج تحلیل تیرهای ساندویچی با رویه‌های هدفمند تحت بار فرورفتگی، نتایج عددی بدست آمده از روابط تحلیلی ارائه شده در این مقاله، با نتایج بدست آمده از تحلیل المان محدود تیر ساندویچی، مدل‌سازی شده در نرم افزار ANSYS، مقایسه شده است. نتایج اراده شده در این بخش، با فرض توزیع توانی خواص در رویه‌های هدفمند، روابط پیوست (الف)، بدست آمده است.

در این مقاله، نتایج عددی برای دو نوع تیر ساندویچی A و B، نشان داده شده در شکل ۲، بدست آمده است. تیر ساندویچی نوع A، دارای رویه‌های هدفمند ساخته شده از آلومینیوم و آلومینا و تیر ساندویچی نوع B، دارای رویه‌های هدفمند ساخته شده از فولاد و سیلیکون نیتراید است، اما هر دو نوع تیر ساندویچی، دارای هسته فوم سبک وزنی با سلول‌های بسته^۱ می‌باشند. ضمناً، هر دو تیر ساندویچی تحت بار موضعی q_t وارد بر رویه بالایی خود قرار داشته، همچنین تحت تکیه‌گاه ساده در لبه‌های رویه‌ها قرار گرفته اند.

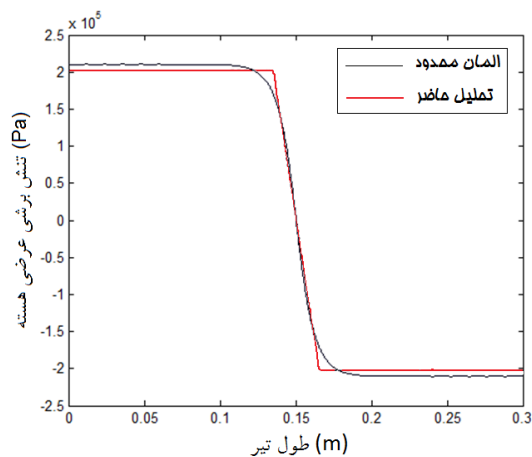


شکل ۲- تعریف ساندویچ‌های نوع A و B

¹ Closed cells

در یک حالت خاص نیز، یک مقایسه بین نتایج تحلیل حاضر با نتایج مرجع [۱۳] انجام شده است. در این حالت خاص، فرض شده است که خواص رویه‌ها در جهت ضخامت آن‌ها ثابت و پارامترهای مادی و هندسی تیر ساندویچی مشابه با فرضیات مرجع [۱۳] باشد که در جدول ۱ نیز آورده شده است.

در جدول ۲، مقایسه‌ای بین مقادیر مقیاس طول انتشار بالایی، λ_t ، محاسبه شده توسط تحلیل حاضر و محاسبه شده توسط مرجع [۱۳] انجام شده است. جدول ۲ نشان می‌دهد، حداکثر اختلاف بین نتایج مرجع [۱۳] با نتایج تحلیل حاضر ۴/۵٪ است که این مطلب از هماهنگی مناسب بین آن‌ها حکایت دارد.



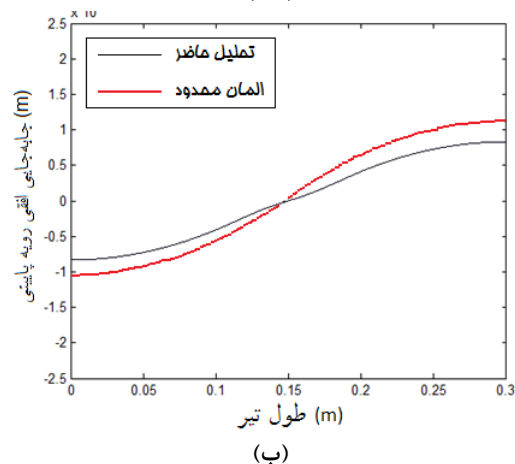
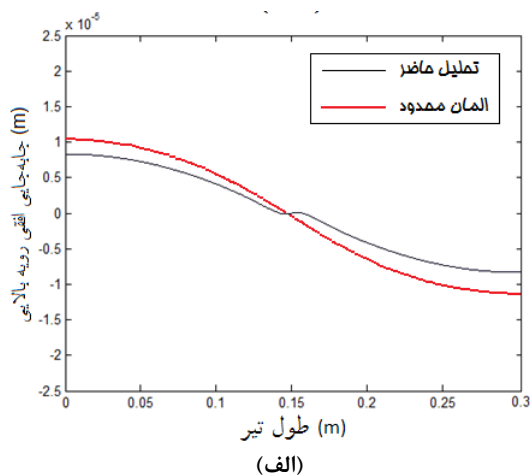
شکل ۵- مقایسه نتایج تحلیلی و المان محدود تنش‌های برشی هسته (p=1)

جدول ۱- مقادیر پارامترهای مادی و هندسی از مرجع [۱۳]

پارامتر	چگالی هسته	مدول یانگ	ضخامت رویه‌ها	ضخامت هسته
مقدار	۴۸Kg/m ³	۱ GPa	۰/۳۸۱ mm	۲/۵ mm

جدول ۲- مقایسه طول‌های انتشار بالایی در یک حالت خاص

تغییرات	مقیاس طول انتشار بالایی	
	تحلیل حاضر [۱۳]	اختلاف
مثال پایه: مقادیر جدول ۱	۱/۵۴۵	۱/۶
چهار برابر شدن ضخامت رویه بالایی	۴/۲	۴/۴
چهار برابر شدن ضخامت هسته	۲/۰۶۱	۲/۱
صد برابر شدن مدول یانگ رویه بالایی	۵/۰۰۱	۵



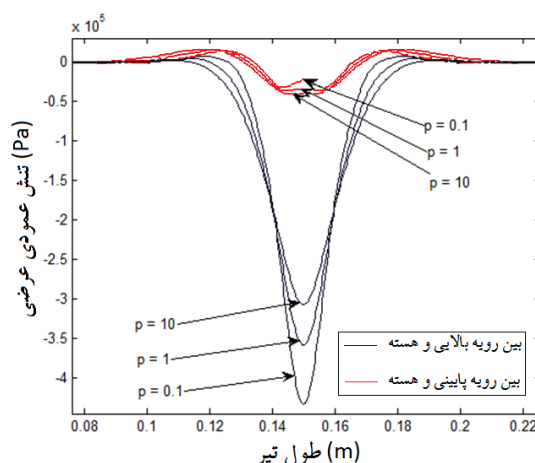
شکل ۴- مقایسه نتایج (الف) جابه‌جایی افقی رویه بالایی (ب) جابه‌جایی افقی رویه پایینی (p=1)

نتایج شکل‌های ۳ تا ۵ برای تغییرات توانی خواص در رویه‌های هدفمند و با توان $p=1$ ترسیم شده است. در هر یک از این شکل‌ها، نتایج بدست آمده از روش تحلیلی ارائه شده در این مقاله، با نتایج المان محدود محاسبه شده از نرم افزار ANSYS، برای توزیع خطی خواص (p=1) در رویه‌های هدفمند، مقایسه شده است. مشاهده می‌شود که حداکثر اختلاف بین نتایج المان محدود و نتایج مدل تحلیلی پیشنهاد شده در این تحقیق، مربوط به جابه‌جایی عرضی رویه‌های هدفمند بالایی و پایینی است که به ترتیب در حدود ۵/۵٪ و ۵/۳٪ می‌باشند، شکل‌های ۳(a) و ۳(b). بنابراین، می‌توان بیان کرد که نتایج تحلیل، دارای تطابق خوبی با نتایج المان محدود می‌باشند.

۷- نتایج عددی

شکل ۶، میزان فرورفتگی هر مقطع دلخواه از تیر ساندویچی نوع A را برای سه مقدار متفاوت توان تابع توانی، p ، در رویه‌های هدفمند نشان می‌دهد. بنا به انتظار، فرورفتگی‌ها در ناحیه اعمال بار، متمرکز شده است. مشاهده می‌شود که توزیع خواص رویه‌های هدفمند با توان‌های برابر با ۰/۱ و ۱۰ به ترتیب، دارای بیشترین و کمترین فرورفتگی هستند؛ زیرا در رویه‌های هدفمند با توزیع توانی خواص، زمانی که توان برابر با ۰/۱ در نظر گرفته شود، میانگین مدول الاستیسیته به سمت مدول الاستیسیته آلومینیوم و زمانی که توان برابر با ۱۰ انتخاب شود، میانگین مدول الاستیسیته به سمت مدول الاستیسیته آلومینا گرایش پیدا می‌کند. از آنجا که مدول الاستیسیته آلومینیوم بسیار کوچکتر از مدول الاستیسیته آلومینا است، بنابراین فرورفتگی‌های بیشتری به ازای توان ۰/۱ در مقایسه با توان ۱۰ دیده می‌شود.

با رسم تغییرات ضرایب انتقال بار، $C_{\sigma z b}^m$ و $C_{\sigma z t}^m$ ، برحسب نیم طول موج بار خارجی سینوسی وارد بر رویه هدفمند بالایی، L/m ، به ترتیب می‌توان مقیاس طول انتشار بالایی، λ_t و مقیاس طول انتشار پایینی، λ_b ، را بدست آورد. نیم طول موج بار در نقطه عطف هر یک از منحنی‌ها، برابر با مقیاس طول انتشار، λ_t یا λ_b ، خواهد بود [۱۳]. مقیاس‌های طول انتشار بالایی، λ_t و مقیاس‌های طول انتشار پایینی، λ_b ، برای شرایط هندسی و مادی مختلف در جدول ۳ محاسبه شده است.



شکل ۶- تغییرات فرورفتگی در طول تیر برای سه توزیع متفاوت خواص در رویه‌های هدفمند

جدول ۳- طول های انتشار تیر ساندویچی نوع A در شرایط

هندسی و مادی مختلف ($p=1$)

تغییرات	طول انتشار بالایی (mm)	طول انتشار پایینی (mm)
مثال پایه: مقادیر جدول ۴	۲۰/۱۳	۱۹/۵۷
دو برابر شدن ضخامت هسته	۲۳/۸۱	۲۳/۳۹
دو برابر شدن چگالی هسته	۱۶/۸۹	۱۶/۴۱
دو برابر شدن ضخامت رویه بالایی	۲۵/۷۵	۲۳/۲۹
دو برابر شدن ضخامت رویه پایینی	۲۲/۴۵	۲۳/۰۹
دو برابر شدن ضخامت هر دو رویه	۳۳/۶۱	۳۳/۰۹
دو برابر شدن طول تیر	۲۰/۰۶	۱۹/۵۷

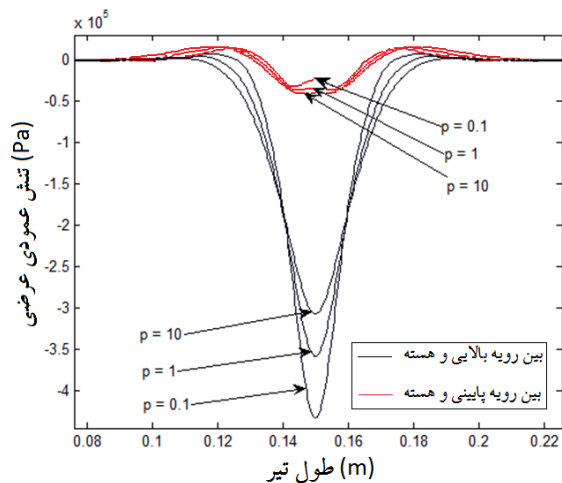
جدول ۴- یک مثال عددی از تیر ساندویچی نوع A

طول تیر	ضخامت هر رویه	چگالی هسته	ضخامت هسته
۶۰ mm	۱/۵۲۴ mm	۱۴۴ Kg/m ³	۱۰ mm

با توجه به نتایج جدول ۳، افزایش ضخامت رویه بالایی، h_t ، افزایش ضخامت رویه پایینی، h_b ، و یا افزایش ضخامت هسته، h_c ، سبب افزایش مقادیر مقیاس‌های طول انتشار، λ_t و λ_b و یا به عبارت دیگر، باعث افزایش توانایی تیر ساندویچی در پخش و گسترده کردن بار خارجی می‌شود. تاثیر ضخامت رویه بالایی بر مقدار λ_t بیشتر از تاثیر ضخامت هسته و تاثیر ضخامت پایینی است؛ یعنی ضخامت رویه بالایی، h_t ، موثرترین پارامتر بر مقدار طول انتشار بالایی، λ_t است و یا به عبارت دیگر، تیرهای ساندویچی با رویه‌های بالایی ضخیم‌تر، دارای توانایی بیشتری در گسترش بار خارجی روی ناحیه بزرگتری از هسته می‌باشند؛ اما برای تغییر در مقدار مقیاس طول انتشار پایینی، λ_b ، تاثیر h_t کمی بیشتر از تاثیر h_b و h_c است؛ همچنین تاثیر از تاثیر h_t و h_b در این حالت خاص است؛ همچنین نتایج جدول ۳ نشان می‌دهند که اولاً افزایش چگالی هسته، ρ_c ، باعث کاهش مقیاس‌های طول انتشار می‌شود و ثانیاً تاثیر طول تیر، L ، بر مقیاس‌های طول انتشار بسیار محدود است. مقادیر طول‌های انتشار تیر ساندویچی نوع B در شرایط مادی و هندسی مختلف و برای دو دمای ۳۰۰ و ۱۰۰۰ درجه کلوبین را می‌توان در جدول ۵ مشاهده کرد. با مقایسه طول‌های انتشار تیرهای ساندویچی نوع A و B، از جداول ۳ و ۵، مشاهده می‌شود که در شرایط یکسان، طول‌های انتشار ساندویچ‌های نوع B بین ۶ تا ۸/۵ درصد بیشتر از طول‌های

توسط رویه بالایی پخش و گسترده می‌شود، اما همان بار خارجی برای رسیدن به رویه پایینی علاوه بر رویه بالایی توسط هسته نیز گسترده خواهد شد؛ بنابراین، در این شرایط همواره مقدار تنش‌های نرمال در سطح مشترک رویه بالایی-هسته، بیشتر از مقدار تنش‌های نرمال در سطح مشترک رویه پایینی-هسته است، همانطور که در شکل ۷ نیز مشاهده می‌شود.

در مجموع، منحنی‌های $C_{\sigma_{zt}}^m$ و $C_{\sigma_{zb}}^m$ برحسب نیم طول موج بار خارجی، L/m ، به منظور محاسبه طول‌های موج بحرانی، λ_t و λ_b ، استفاده می‌شوند که برای L/m های کوچکتر از این مقادیر، بار خارجی تا حد زیادی توسط رویه



شکل ۷- تغییرات تنش‌های نرمال در سطح مشترک رویه‌ها و هسته برای مقادیر مختلف p

انتشار ساندویچی‌های نوع A هستند. که این به دلیل سفت‌تر بودن رویه‌های هدفمند نوع B، شامل سیلیکون نیتراید و فولاد، نسبت به رویه‌های هدفمند نوع A، شامل آلومینا و آلومینیوم است؛ یعنی افزایش سفتی رویه‌ها، باعث افزایش λ_t و λ_b خواهد شد.

درصد کاهش طول‌های انتشار، λ_t و λ_b ، در اثر افزایش ۷۰۰ درجه‌ای دما برای تیرهای ساندویچی نوع B در جدول ۵ نشان داده شده است. نتایج جدول ۵ نشان می‌دهد که با افزایش دما از ۳۰۰ به ۱۰۰۰ درجه کلونین، λ_t و λ_b در شرایط مختلف مادی و هندسی به طور میانگین در حدود ۶ درصد کاهش می‌یابند. این به دلیل در نظر گرفتن وابستگی خواص رویه‌ها به دما در این مقاله است که افزایش دما، باعث کاهش سفتی رویه‌ها و در نتیجه کاهش طول‌های انتشار شده است.

در شکل ۷، تغییرات تنش نرمال در سطح مشترک رویه هدفمند بالایی و هسته، σ_{zz}^t ، و همچنین تغییرات تنش نرمال در سطح مشترک رویه هدفمند پایینی و هسته، σ_{zz}^b ، در طول تیر ساندویچی نوع A ترسیم شده است. این تغییرات برای سه مقدار مختلف توان تابع ترسیم شده‌اند. از شکل ۷ مشاهده می‌شود که در محل اعمال بار، مقادیر σ_{zz}^t به مراتب بیشتر از مقادیر σ_{zz}^b است؛ زیرا با توجه به توضیحات بخش ۴، مقدار ضرایب انتقال بار، $C_{\sigma_{zt}}^m$ و $C_{\sigma_{zb}}^m$ ، توصیف می‌کنند که بار خارجی به ترتیب چگونه به هسته و به رویه پایینی انتقال می‌یابد. اضافه بر آن، نتایج جدول ۳ نیز نشان می‌دهد که در حالت کلی و در شرایط یکسان همواره مقادیر $C_{\sigma_{zb}}^m$ کوچکتر از $C_{\sigma_{zt}}^m$ است، زیرا بار خارجی q_t برای رسیدن به هسته تنها

جدول ۵- طول‌های انتشار تیر ساندویچی نوع B در شرایط هندسی، مادی و دمایی مختلف ($p=1$)

تغییرات	طول انتشار بالایی (mm)			طول انتشار پایینی (mm)		
	دما = 1000°K	دما = 300°K	درصد کاهش	دما = 1000°K	دما = 300°K	درصد کاهش
مثال پایه: مقادیر جدول ۴	۲۰/۴۳	۲۱/۷۱	-۵/۹٪	۱۹/۹۳	۲۱/۱۹	-۵/۹٪
دو برابر شدن ضخامت هسته	۲۴/۲۳	۲۵/۸۵	-۶/۳٪	۲۳/۷۳	۲۵/۲۱	-۵/۹٪
دو برابر شدن چگالی هسته	۱۷/۱۹	۱۸/۲۷	-۵/۹٪	۱۶/۷۱	۱۷/۷۹	-۶/۱٪
دو برابر شدن ضخامت رویه بالایی	۲۶/۰۱	۲۷/۲۹	-۴/۷٪	۲۳/۶۱	۲۵/۰۵	-۵/۷٪
دو برابر شدن ضخامت رویه پایینی	۲۲/۸۳	۲۴/۳۵	-۶/۲٪	۲۳/۴۹	۲۴/۹۳	-۵/۸٪
دو برابر شدن ضخامت هر دو رویه	۳۴/۱۱	۳۶/۲۹	-۶/۰٪	۳۳/۶۳	۳۵/۸۱	-۶/۱٪
دو برابر شدن طول تیر	۲۰/۴۶	۲۱/۷۰	-۵/۷٪	۱۹/۹۰	۲۱/۱۴	-۵/۹٪

ضخامت هسته و ضخامت رویه پایینی. (۷) خصوصیات هندسی تیر ساندویچی که سبب افزایش λ_b می‌شوند، به ترتیب اهمیت عبارت‌اند از: ضخامت هسته، ضخامت رویه بالایی و ضخامت رویه پایینی. (۸) اندازه طول تیر، L ، تاثیر بسیار محدودی روی مقادیر طول‌های انتشار، λ_t و λ_b ، دارد.

(۹) افزایش چگالی هسته، سبب کم شدن مقادیر λ_t و λ_b می‌شود. (۱۰) با افزایش سفتی رویه‌های هدفمند، طول‌های انتشار افزایش می‌یابند.

پیوست (الف)

با فرض توزیع توانی خواص در رویه‌های هدفمند، برخی از ضرایب ماتریس‌های سفتی مورد نیاز در این تحقیق عبارت اند از:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} A_{11}^t \\ B_{11}^t \\ D_{11}^t \end{Bmatrix} &= \int_{-\frac{h_t}{2}}^{\frac{h_t}{2}} \frac{(E_m(T) - E_{ce}(T)) \left(\frac{z_t + h_t/2}{h_t} \right)^p + E_{ce}(T)}{1 - \left((v_m(T) - v_{ce}(T)) \left(\frac{z_t + h_t/2}{h_t} \right)^p + v_{ce}(T) \right)} \begin{Bmatrix} 1 \\ z_t \\ z_t^2 \end{Bmatrix} dz_t \\ \begin{Bmatrix} A_{11}^b \\ B_{11}^b \\ D_{11}^b \end{Bmatrix} &= \int_{-\frac{h_b}{2}}^{\frac{h_b}{2}} \frac{(E_m(T) - E_{ce}(T)) \left(\frac{-z_b + h_b/2}{h_b} \right)^p + E_{ce}(T)}{1 - \left((v_m(T) - v_{ce}(T)) \left(\frac{-z_b + h_b/2}{h_b} \right)^p + v_{ce}(T) \right)} \begin{Bmatrix} 1 \\ z_b \\ z_b^2 \end{Bmatrix} dz_b \\ A_{55}^t &= \int_{-\frac{h_t}{2}}^{\frac{h_t}{2}} \frac{(E_m(T) - E_{ce}(T)) \left(\frac{z_t + h_t/2}{h_t} \right)^p + E_{ce}(T)}{2 \left(1 + (v_m(T) - v_{ce}(T)) \left(\frac{z_t + h_t/2}{h_t} \right)^p + v_{ce}(T) \right)} dz_t \\ A_{55}^b &= \int_{-\frac{h_b}{2}}^{\frac{h_b}{2}} \frac{(E_m(T) - E_{ce}(T)) \left(\frac{-z_b + h_b/2}{h_b} \right)^p + E_{ce}(T)}{2 \left(1 + (v_m(T) - v_{ce}(T)) \left(\frac{-z_b + h_b/2}{h_b} \right)^p + v_{ce}(T) \right)} dz_b \end{aligned}$$

۹- سپاسگزاری

این تحقیق با حمایت‌های مالی دانشگاه آزاد اسلامی واحد ایلام انجام شده است.

۱۰- مراجع

- [1] Hui SS, Li SR (2008) Postbuckling of sandwich plates with FGM face sheets and temperature-dependent properties. Composites: Part B 39: 332-344.

بالایی و هسته تغییر خواهد یافت. این تحلیل که در این مقاله براساس رفتار الاستیک تیرهای ساندویچی انجام شده است، اجازه درک رفتار تیر ساندویچی تحت بار خارجی مفروض را به ما خواهد داد.

۸- نتیجه گیری

در این مقاله، برای تحلیل رفتار تیر ساندویچی با رویه‌های هدفمند و با خواص وابسته به دما تحت بارهای موضعی از یک تئوری تیر ساندویچی مرتبه بالای اصلاح شده استفاده شده است. قابلیت و توانایی این تئوری در تحلیل تیرهای ساندویچی با رویه‌های هدفمند و هسته انعطاف پذیر که تحت بارهای موضعی و حرارتی قرار گرفته اند، با نتایج المان محدود بررسی و تایید شده است. تاثیر طول موج بار خارجی بر رفتار تیر ساندویچی مطالعه شده، دو پارامتر طول انتشار λ_t و λ_b به ترتیب برای سطح مشترک رویه بالایی-هسته و سطح مشترک رویه پایینی-هسته تعریف شده است. این دو پارامتر از مشخصه‌های هر تیر ساندویچی است که رفتار آن در برابر بارهای موضعی را توصیف می‌کند. با توجه به نتایج بدست آمده در این تحقیق، برخی از دستاوردهای مهم را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

(۱) افزایش هر چه بیشتر دما، سبب کم شدن مقادیر طول‌های انتشار، λ_t و λ_b می‌شود.
(۲) زمانی که نیم طول موج بار خارجی کوچکتر از λ_t باشد، بار خارجی توسط رویه بالایی روی قسمتی از هسته گسترده می‌شود.
(۳) برای نیم طول موج‌های بزرگتر از λ_t ، درصد زیادی از بار خارجی بدون تغییر و به طور موضعی به هسته منتقل خواهد شد.

(۴) اگر نیم طول موج بار خارجی کوچکتر از λ_b باشد، آنگاه رویه بالایی و هسته، سبب پخش شدن بار خارجی روی قسمتی از رویه پایینی می‌شوند.

(۵) اگر نیم طول موج‌های بار خارجی بزرگتر از λ_b باشند، درصد نسبتاً زیادی از بار خارجی تقریباً بدون تغییر از رویه بالایی و هسته عبور کرده، به طور موضعی به رویه پایینی منتقل می‌شود.

(۶) خصوصیات هندسی تیر ساندویچی که باعث افزایش λ_t می‌شوند، به ترتیب اهمیت عبارت‌اند از: ضخامت رویه بالایی،

- [13] Petras A, Sutcliffe MPF (1999) Indentation resistance of sandwich beams. *J Comp Struc*: 413-424.
- [14] Frostig Y, Baruch M, Vilnay O, et al. (1992) A high order theory for the bending of sandwich beams with a flexible core. *J ASCE EM Division* 118(5): 1026-1043.
- [15] Mohammadi Y, Khalili SMR (2011) Effect of geometrical and mechanical properties on behavior of sandwich beams with functionally graded face sheets under indentation loading. *J Materials: Design and Applications* 225: 231-244.
- [16] Reddy JN (1998) *Thermo mechanical behavior of functionally graded materials*. Texas.
- [17] Malekzadeh K, Khalili MR, Mittal RK (2005) Local and global damped vibrations of sandwich plates with a viscoelastic soft flexible core: an improved high-order approach. *J Sand Struc Mater* 7(5): 431-456.
- [18] Chi SH, Chung YL (2006) Mechanical behavior of functionally graded material plates under transverse load—Part I: Analysis. *J Solids and Struct* 43: 3657-3674.
- [19] Mindlin RM (1951) Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates. *J Appl Mech* 18: 31-38.
- [20] Malekzadeh K, Khalili MR, Olsson R, et al. (2006) Higher-order dynamic response of composite sandwich panels with flexible core under simultaneous low- velocity impacts of multiple small masses. *J Solids and Struct* 43: 6667-6687.
- [2] Zhao J, Li Y, Ai X (2008) Analysis of transient thermal stress in sandwich plate with functionally graded coatings. *Thin Solid Films* 516: 7581-7587.
- [3] Frostig Y, Baruch M (1996) Localized load effects in high-order bending of sandwich panels with flexible core. *J Engrg Mech* 122(11): 1069-1076.
- [4] Khalili SMR, Mohammadi Y (2012) Free vibration analysis of sandwich plates with functionally graded face sheets and temperature-dependent material properties: A new approach. *Euro J of Mech A/Solid* 35: 61-74.
- [5] Allen HG (1969) *Analysis and Design of Structural Sandwich Panels*. Pergamon Press, London.
- [6] Plantema FJ (1966) *Sandwich Construction*. Wiley, New York.
- [7] Zenkert D (1995) *An Introduction to Sandwich Construction*. Chameleon Press Ltd, London.
- [8] Vinson JR (1999) *The Behavior of Sandwich Structures of Isotropic and Composite Materials*. Technomic Publishing Co. Inc, Lancaster.
- [9] Noor AK, Burton WS, Bert CW (1996) Computational models for sandwich panels and shells. *Appl Mech Rev* 49: 155-199.
- [10] Librescu L, Hause T (2011) Recent developments in the modeling and behavior of advanced sandwich constructions: a survey. *Comp Struc* 48(1): 1-17.
- [11] Mindlin RD (1951) Influence of transverse shear deformation on the bending of classical plates. *J Appl Mech* 8: 18-31.
- [12] Reddy JN (1984) *Energy Principles and Variational Methods in Applied Mechanics*. Wiley & Sons, New York.