



تعیین ضریب شدت تنش در استوانه‌های حاوی ترک محیطی تحت شوک حرارتی غیر کلاسیک

امید عاصمی^۱ و محمدباقر نظری^{۲*}^۱ دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده مکانیک، دانشگاه شاهرود^۲ استادیار، دانشکده مکانیک، دانشگاه شاهرود

تاریخ دریافت: ۱۳۹۳/۰۶/۰۳؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۴/۰۵/۱۲؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۴/۰۶/۰۲

چکیده

در این مقاله، ضریب شدت تنش برای استوانه‌ای شامل، یک ترک محیطی کامل تعیین شده است که تحت شوک حرارتی غیرفوریه‌ای (هذلولوی) قرار دارد. معادلات حاکم، غیرکوپل در نظر گرفته شده، ضریب شدت تنش مد I با روش تابع وزنی استخراج شده است. حل تحلیلی معادله هدایت گرمایی با روش تبدیل هنکل محدود بدست آمده با روش جداسازی متغیرها مقایسه شده است. نتایج، رفتار متفاوت ترک تحت شوک حرارتی هذلولوی، نسبت به مدل فوریه را نشان می‌دهد. در ترک‌های کوتاه، ضریب شدت تنش بیشینه برای مدل‌های فوریه و هذلولوی تقریباً برابر است؛ اما در ترک‌های با طول بیشتر، ضریب شدت تنش مدل هذلولوی از مدل فوریه، به‌طور قابل ملاحظه‌ای بزرگتر است؛ همچنین در مدل هذلولوی، ضریب شدت تنش بیشینه در هر لحظه قبل از رسیدن پیشانی موج به سطح خارجی برای ترکی اتفاق می‌افتد که پیشانی موج تنش در موقعیت نوک آن قرار دارد. مطابق نتایج، در نظر گرفتن مدل مناسب هدایت گرمایی در طراحی سازه‌ها تحت بار حرارتی گذرا، اهمیت ویژه‌ای دارد.

کلمات کلیدی: ضریب شدت تنش؛ هدایت گرمایی غیر کلاسیک؛ تبدیل هنکل محدود؛ روش تابع وزنی؛ استوانه جدار ضخیم.

Evaluation of the stress intensity factor for circumferential cracked cylinders under non-classical thermal shock

O. Asemi¹ and M. B. Nazari^{2,*}¹ MSc Student, Mech. Eng., Shahrood Univ., Shahrood, Iran² Assist. Prof., Mech. Eng., Shahrood Univ., Shahrood, Iran

Abstract

In this paper, the stress intensity factor for a circumferential crack in a thick-walled cylinder is derived analytically and numerically which is subjected to the non-Fourier (hyperbolic) thermal shock. The uncoupled thermoelasticity governing equations for an uncracked cylinder are solved analytically. The weight function method is implemented to obtain the stress intensity factor. The non-dimensional hyperbolic heat equation is solved using finite Hankel transform and separation of variables method. Results show the different behavior of the crack under hyperbolic thermal shock. For relatively short cracks, the maximum stress intensity factor of Fourier and hyperbolic models is closed. But for longer cracks, the stress intensity factor of the hyperbolic model is significantly greater than Fourier model. Moreover, the maximum stress intensity factor in hyperbolic model occurs for a crack the peak of stress wave reaches to its tip. According to the results, assumption of adequate heat conduction model for structure design under transient thermal loading is critical.

Keywords: Stress Intensity Factor; Non-classic Heat Conduction; Finite Hankel Transform; Weight Function Method; Thick-walled Cylinder.

۱- مقدمه

در بسیاری از کاربردهای صنعتی مدرن، کاربرد منابع گرمایی مثل، لیزر و امواج میکرو در زمان کوتاه و یا با فرکانس بالا دیده می‌شود. ذوب سطحی [۱] و پوشش‌دهی فلزات با نانوسرامیک‌ها [۲] از آن جمله‌اند. در چنین مواردی، توزیع دمای حاصل از قانون فوریه که منجر به سرعت بی‌نهایت امواج حرارتی می‌شود، به‌اندازه کافی دقیق نیست. آزمایش‌ها نشان می‌دهد، در تختال نازکی که تحت گرمایش با لیزر قرار گرفته است، دمای اندازه‌گیری شده در زمان‌های نزدیک به اعمال شوک حرارتی، حدود 300°C بیشتر از دمایی است که با استفاده از قانون فوریه پیش‌بینی می‌شود [۳]. برای تصحیح مدل فوریه، ورنه [۴] و کاتانو [۵]، تئوری هدایت گرمایی هذلولوی را به طور مستقل ارائه کردند. این رابطه شامل، یک تأخیر زمانی برای شار حرارتی است که برای تغییر دما مطابق با شرایط مرزی یا اولیه اعمالی ضرورت دارد. رابطه‌ی ساختاری هدایت گرمایی هذلولوی به‌صورت رابطه (۱) است:

$$q(t + \tau) = -K\nabla T \quad (1)$$

که در آن، q بردار شار حرارتی، T میدان دما و τ زمان آسایش حرارتی است که با توجه به سرعت موج حرارتی و ضریب پخش حرارتی تعیین می‌شود.

از طرف دیگر، تنش‌های حرارتی در تحلیل و طراحی سازه‌های تحت گرادیان دما - به‌خصوص در حضور ترک - به‌طور ویژه مورد توجه قرار دارند. وجود کوچکترین ترک یا عیب می‌تواند کارکرد یک سازه یا ماشین در معرض دما/گراییان دما را مختل کند [۶]. سازه‌های مدور مثل لوله‌ها در بسیاری از کاربردها مثل، دستگاه‌های تولید و انتقال اشعه ایکس و لیزر، راکتورهای شیمیایی و هسته‌ای تحت تنش‌های حرارتی قابل توجه قرار می‌گیرند. ارزیابی دقیق ایمنی و تخمین عمر این سازه‌ها، مستلزم بررسی رفتار ترک در آن‌ها است. نقص اتصال لوله‌ها به یکدیگر، معمولاً به‌صورت یک ترک محیطی (مطابق شکل ۱) مدل می‌شود.

در بخشی از تحقیقات منتشر شده، ضریب شدت تنش برای یک ترک محیطی داخل استوانه، با روش‌های تحلیلی به دست آمده است. نید و اردگن^۳، استوانه‌ای حاوی یک ترک محیطی را در نظر گرفتند که معادله الاستیسیته حاکم بر آن، با اعمال شرایط مرزی به یک دستگاه معادلات انتگرالی تکین تبدیل می‌شود [۷]؛ همچنین، نید با روش مذکور، ضریب شدت تنش حرارتی گذرا برای یک استوانه حاوی ترک محیطی را به‌دست آورد [۸]. ظهور^۴ نیز، یک رابطه‌ی تحلیلی برای ضریب شدت تنش در استوانه حاوی ترک محیطی و تحت بارگذاری محوری ارائه کرد [۹].

بخش عمده‌ای از مطالعات انجام شده درباره رفتار ترک در لوله‌ها و مخازن تحت فشار با استفاده از روش‌های المان محدود و المان مرزی و با کاربرد روش‌های عددی تعیین ضریب شدت تنش مانند انتگرال J [۱۰] انجام شده است. گربرنر^۵ با استفاده از روش المان محدود، ضریب شدت تنش برای استوانه‌ای شامل، یک ترک محیطی و تحت بار محوری را محاسبه کرد [۱۱]. چن^۶ نیز با کاربرد روش‌های المان محدود و تفاضل محدود ضریب شدت تنش در استوانه‌ای با ترک محیطی را به طور عددی به دست آورد [۱۲].

از آنجایی که در بیشتر موارد، کاربرد حل‌های تحلیلی ارائه شده با دشواری‌هایی همراه است و از طرفی، روش‌های عددی برای هر مسأله با شرایط مرزی، خصوصیات هندسی یا مادی متفاوت باید تکرار شود تا مقادیر شدت تنش جدید به دست آیند. به‌علاوه، گزارش‌ها نشان می‌دهد در برخی موارد، نتایج عددی تعیین میدان دمای هذلولوی با نتایج تحلیلی تا ۴۰٪ اختلاف دارد [۱۳] که در محاسبه ضریب شدت تنش تأثیر به‌سزایی دارد. در مسأله‌ی با الگو مشخص ترک، ترجیح داده می‌شود از روش تابع وزنی استفاده شود.

روش تابع وزنی، یک ابزار موثر برای تعیین ضریب شدت تنش با توجه به توزیع تنش در جسم بدون ترک است. اگر تابع وزنی برای یک جسم دارای ترک معلوم باشد، با انتگرال-گیری از حاصل ضرب تابع وزنی و توزیع تنش در جسم بدون ترک روی سطح ترک، می‌توان ضریب شدت تنش را به‌دست

³ Nied , Erdogan

⁴ Zahoor

⁵ Grebner

⁶ Chen

¹ Cattaneo

² Verrotte

تابع وزنی، تغییرات زمانی ضریب شدت تنش را ارائه کرده‌اند. طبق این نتایج، ضریب شدت تنش حاصل از قانون هدایت گرمایی هذلولوی از مقادیر متناظر با قانون فوریه بزرگتر است. هو و چن^۳ [۱۹]، ضرایب شدت تنش را برای یک ترک محدود موازی با مرز در یک باریکه تحت شوک حرارتی هذلولوی به‌دست آورده‌اند. ونگ و هان [۲۰] نیز، ضریب شدت تنش برای یک ترک سکه‌ای واقع در فصل مشترک محدود بین دو باریکه از جنس مواد مرکب را ارائه کرده‌اند. چن و هو [۲۱]، ضرایب شدت تنش برای یک سیستم هسته/پوشش را به‌طور تحلیلی به‌دست آورده‌اند که یک ترک محدود در هسته و موازی با مرز پوشش در نظر گرفته شده است. ونگ [۲۲]، رابطه‌ای تحلیلی برای ضریب شدت تنش برای یک ترک سکه‌ای کوچک در یک استوانه توپر ارائه کرده است. اخیراً، نظری و عاصمی [۲۳]، ضریب شدت تنش برای گوشه و عمق یک ترک نیم‌بیضی طولی در لوله جدار ضخیم را به‌دست آورده‌اند.

بنابر اطلاع نویسندگان، تاکنون تعیین ضریب شدت تنش در استوانه‌های جدار ضخیم حاوی ترک محیطی تحت بارگذاری حرارتی هذلولوی گزارش نشده است. در این مقاله، ضریب شدت تنش برای یک ترک محیطی داخل یک استوانه جدار ضخیم با کاربرد روش تابع وزنی و یک عبارت تحلیلی تعیین و با انتگرال‌گیری عددی ارزیابی شده است که تحت بارگذاری حرارتی غیرکلاسیک (هذلولوی) قرار دارد.

۲- میدان‌های ترموالاستیسیته حاکم

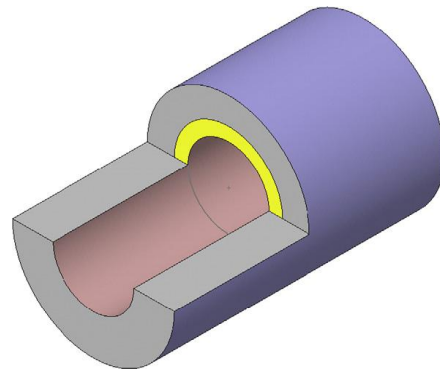
معادلات حاکم بر میدان‌های دما و تنش در یک استوانه بدون ترک با شعاع‌های داخلی R_i و خارجی R_o و به اندازه کافی بلند تحت بارگذاری مکانیکی و حرارتی بصورت متقارن محوری، به‌صورت رابطه (۲-۳) است.

$$K \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \tau_0 \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} - \beta \frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad (3)$$

که، $\alpha, \beta = \alpha(1+\nu)/(1-\nu)$ ضریب انبساط حرارتی، ν ضریب پواسون، u میدان جابجایی و T میدان دما است. در این روابط، از کوپل میدان‌های کرنش و دما و همچنین نیروهای

آورد. کاربرد تابع وزنی، تعیین ضریب شدت تنش برای یک ترک را به‌طور مستقل از هندسه و ابعاد امکان‌پذیر می‌سازد. برای استوانه‌ای شامل، یک ترک محیطی داخلی، توابع وزنی متعددی پیشنهاد شده است که دقت نتایج، کاربرد اغلب آن‌ها را به موارد خاص محدود می‌سازد.



شکل ۱- یک ترک محیطی کامل در سطح داخلی یک استوانه جدار ضخیم [۱۴]

مشی و واتانابی^۱ براساس تئوری پوسته‌ها و مدل‌سازی بخش ضعیف شده‌ی استوانه با فنر، یک تابع وزنی برای ترک محیطی در استوانه‌های جدار نازک ارائه نموده‌اند [۱۵ و ۱۶]. نبوی و قاجار با کاربرد نتایج المان محدود، یک تابع وزنی چندجمله‌ای [۱۴] برای محدوده وسیعی از نسبت قطرهای خارجی به داخلی استوانه و یک تابع متعالی [۱۷] برای یک نسبت قطر مشخص را برای ترک محیطی به دست آوردند. ایشان با کاربرد توابع وزنی مذکور، یک عبارت تحلیلی برای ضریب شدت تنش حرارتی پایا به دست آوردند که منجر به نتایجی با دقت قابل قبول می‌شود.

در مورد کاربردهای هدایت گرمایی هذلولوی، گزارش‌هایی منتشر شده است. سعدالدین و ترابی [۱۳]، با کاربرد انتقال حرارت غیرفوریه‌ای در استوانه‌ها، توزیع دمای دوبعدی را با استفاده از روش جداسازی متغیرها ارائه کرده‌اند. چانگ و ونگ^۲ [۱۹]، ضریب شدت تنش برای یک ترک لبه‌ای عمودی در یک محیط نیمه‌بی‌نهایت را به‌دست آورده‌اند که تحت شوک حرارتی هذلولوی قرار دارد. ایشان با حل تحلیلی میدان دما و تنش و سپس با انتگرال‌گیری از رابطه

¹ Meshii, Watanabe

² Chang, Wang

³ Hu, Chen

اینرسی صرف‌نظر شده است. شرایط مرزی و اولیه دمایی به- صورت زیر است.

$$T(R_i, t) = T_0 \quad (۴-الف)$$

$$T(R_o, t) = 0 \quad (۴-ب)$$

$$T(r, 0) = 0 \quad (۴-ج)$$

$$\frac{\partial T(r, 0)}{\partial t} = 0 \quad (۴-د)$$

همچنین، اعمال فشار داخلی p_i و خارجی p_o یکنواخت به استوانه به صورت شرایط مرزی مکانیکی بیان می‌شود.

$$\sigma_r(R_i, t) = -p_i \quad (۵-الف)$$

$$\sigma_r(R_o, t) = -p_o \quad (۵-ب)$$

با در نظر گرفتن متغیرهای بی بعد زیر،

$$t^* = t/\tau \quad (۶-الف)$$

$$r^* = r/l_0 \quad (۶-ب)$$

که در آن،

$$l_0 = \sqrt{K\tau/\rho c} \quad (۷)$$

معادله هدایت گرمایی (۲) به صورت رابطه (۸) بیان می‌شود.

$$\frac{1}{r^*} \frac{\partial}{\partial r^*} \left(r^* \frac{\partial T}{\partial r^*} \right) = \frac{\partial^2 T}{\partial t^{*2}} + \frac{\partial T}{\partial t^*} \quad (۸)$$

الف- روش تبدیل انتگرال هنکل محدود

معادله با مشتقات جزئی هدایت گرمایی (۸) با اعمال تبدیل هنکل محدود به یک معادله دیفرانسیل معمولی برحسب زمان تبدیل می‌شود.

تبدیل هنکل محدود برای تابع $f(r, t)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} \bar{F}(\lambda_n, t) &= H[f(r, t); \lambda_n] \\ &= \int_{R_i}^{R_o} r f(r, t) K(r, \lambda_n) dr \end{aligned} \quad (۹)$$

که در آن، λ_n پارامتر تبدیل و $K(r, \lambda_n)$ هسته تبدیل است. پس از تبدیل هنکل محدود، معادله هدایت گرمایی (۸) به صورت رابطه (۱۰) بیان می‌شود.

$$\frac{d^2 \bar{F}}{dt^{*2}} + \frac{d\bar{F}}{dt^*} + \lambda_n^2 \bar{F} = T_0 R_i K(R_i, \lambda_n) \quad (۱۰)$$

که در آن، هسته تبدیل $K(r, \lambda_n)$ براساس معادله حاکم و شرایط مرزی به صورت رابطه (۱۱) تعیین می‌شود.

$$\begin{aligned} K(r^*, \lambda_n) &= J_0(\lambda_n r^*) Y_0(\lambda_n R_i^*) \\ &- J_0(\lambda_n R_i^*) Y_0(\lambda_n r^*) \end{aligned} \quad (۱۱)$$

پارامتر تبدیل λ_n نیز، ریشه‌های مثبت معادله (۱۲) است.

$$J_0(\lambda_n R_o^*) Y_0(\lambda_n R_i^*) - J_0(\lambda_n R_i^*) Y_0(\lambda_n R_o^*) = 0 \quad (۱۲)$$

از طرفی، عبارت غیرهمگنی (طرف راست) معادله (۱۰) با توجه به خصوصیات تابع بسل ساده می‌شود.

$$T_0 R_i K(R_i, \lambda_n) = -\frac{2}{\pi} T_0 \quad (۱۳)$$

حل معادله (۱۰) به صورت رابطه (۱۴) است.

$$\begin{aligned} \bar{K}(t^*, \lambda_n) &= -\frac{4}{\pi \sqrt{4\lambda_n^2 - 1}} T_0 \int_0^{t^*} e^{-\frac{t^* - \tau}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{4\lambda_n^2 - 1}}{2} (t^* - \tau)\right) d\tau \end{aligned} \quad (۱۴)$$

تبدیل هنکل معکوس به صورت رابطه (۱۵) است.

$$\begin{aligned} f(r, t) &= H^{-1}[\bar{F}(\lambda_n, t); r] \\ &= \sum a_n K(r, \lambda_n) \bar{F}(\lambda_n, t) \end{aligned} \quad (۱۵)$$

ضرایب a_n با توجه به تعامد حل‌های معادله اشتروم-لیوویل تعیین می‌شود.

$$a_n = \frac{1}{\int_{R_i}^{R_o} K^2(r, \lambda_n) dr} \quad (۱۶)$$

با استفاده از تبدیل هنکل معکوس، توزیع دما به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} T(r^*, t^*) &= \sum a_n K(r^*, \lambda_n) \bar{F}(\lambda_n, t) \\ &= -2\pi T_0 \sum \frac{1}{\sqrt{4\lambda_n^2 - 1}} \frac{\lambda_n^2 J_0^2(\lambda_n R_o^*)}{J_0^2(\lambda_n R_i^*) - J_0^2(\lambda_n R_o^*)} \\ &\quad (J_0(\lambda_n r^*) Y_0(\lambda_n R_i^*) - J_0(\lambda_n R_i^*) Y_0(\lambda_n r^*)) \\ &\quad \int_0^{t^*} e^{-\frac{t^* - \tau}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{4\lambda_n^2 - 1}}{2} (t^* - \tau)\right) d\tau \end{aligned} \quad (۱۷)$$

ب- روش جداسازی متغیرها

میدان دما با استفاده از روش جداسازی متغیرها نیز برحسب متغیرهای بی بعد t^* و r^* حاصل می‌شود.

$$T(r^*, t^*) = S(r^*) + \sum \Lambda_n(\lambda_n r^*) f_n(t^*) \quad (۱۸)$$

که در آن،

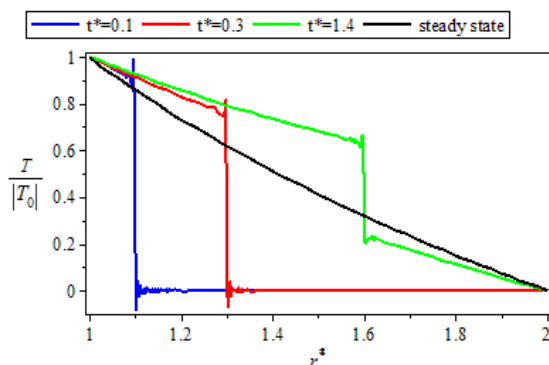
$$S(r^*) = T_1 \frac{\ln(r^*/R_o^*)}{\ln(R_i^*/R_o^*)} \quad (۱۹-الف)$$

$$\omega_n = \sqrt{\lambda_n^2 - 0.25} \quad (۱۹-ب)$$

$$\begin{aligned} \Lambda_\mu(\lambda_n r^*) &= J_0(\lambda_n R_i^*) Y_\mu(\lambda_n r^*) \\ &- J_\mu(\lambda_n r^*) Y_0(\lambda_n R_i^*) \end{aligned} \quad (۱۹-ج)$$

$$\begin{aligned} \Omega_n(t^*) &= e^{-t^*/2} (a_n \cos(\omega_n t^*) \\ &+ b_n \sin(\omega_n t^*)) \end{aligned} \quad (۱۹-د)$$

متغیرهای بی‌بعد، سرعت موج گرما برابر واحد است؛ بنابراین، در $t^*=1$ موج گرما که از سطح داخلی شروع به حرکت کرده است؛ به سطح خارجی می‌رسد و به‌خاطر تغییر محیط به داخل استوانه منعکس می‌شود. توزیع دما برای $t^*=1.4$ برگشت موج گرمایی پس از برخورد با سطح خارجی استوانه را نشان می‌دهد. استهلاك موج گرمایی به‌صورت کاهش ارتفاع پیشانی موج از نکات قابل ذکر است که در مقایسه منحنی‌های مربوط به $t^*=10$ و $t^*=30$ دیده می‌شود. دمای یک نقطه مشخص از استوانه در مدل فوریه، بطور پیوسته و در مدل هذلولوی، به‌صورت نوسانی حول دمای پایا تغییر می‌کند. وجود استهلاك سبب می‌شود، پس از چند رفت و برگشت موج گرما، دما به حالت پایا برسد. نزدیک شدن توزیع دمای هذلولوی به توزیع دمای فوریه‌ای در توزیع دمای متناظر با $t^*=10$ دیده می‌شود. با توجه به پارامترهای بی‌بعد (۶)، هرچه زمان آسایش حرارتی، t ، بزرگتر باشد؛ توزیع دما دیرتر به حالت پایا می‌رسد. منحنی‌ها با در نظر گرفتن ۳۰۰ جمله رابطه تحلیلی دما (رابطه (۱۸)) رسم شده است.



شکل ۳- توزیع دما در دیواره استوانه طبق مدل هدایت گرمایی هذلولوی

رابطه تعادل برحسب جابجایی در جهت r به‌صورت بی‌بعد در رابطه (۲۲) قابل بیان است.

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial r^{*2}} + \frac{1}{r^*} \frac{\partial u^*}{\partial r^*} - \frac{u^*}{r^{*2}} - \beta \frac{\partial T}{\partial r^*} = 0 \quad (22)$$

که در آن،

$$u^* = u/l_0 \quad (23)$$

توزیع تنش حرارتی طولی در استوانه به‌صورت رابطه (۲۴) است [۲۴].

در رابطه (۱۹-د)، ضرایب a_n و b_n با توجه به خاصیت تعادل حل‌های معادله دیفرانسیل اشتروم-لیوویل بدست می‌آید.

$$a_n = \frac{\int_{R_i}^{R_o} r^* S(r^*) \Lambda_0(\lambda_n r^*) dr^*}{\int_{R_i}^{R_o} r^* (\Lambda_0(\lambda_n r^*))^2 dr^*} \quad (20-f)$$

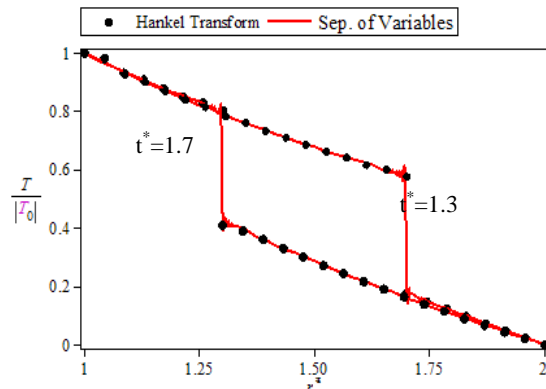
$$= -T_1 \pi^2 J_0^2(\lambda_n R_o^*) \left(\frac{2}{\pi} + \frac{\Lambda_0(\lambda_n R_o^*)}{\ln(R_i^*/R_o^*)} \right) / 2 \left(J_0^2(\lambda_n R_i^*) - J_0^2(\lambda_n R_o^*) \right)$$

$$b_n = \frac{a_n}{2\omega_n} \quad (20-b)$$

ضرایب λ_n نیز، ریشه‌های معادله مشخصه زیر هستند.

$$\Lambda_0(\lambda_n R_o^*) = J_0(\lambda_n R_i^*) Y_0(\lambda_n R_o^*) - J_0(\lambda_n R_o^*) Y_0(\lambda_n R_i^*) = 0 \quad (21)$$

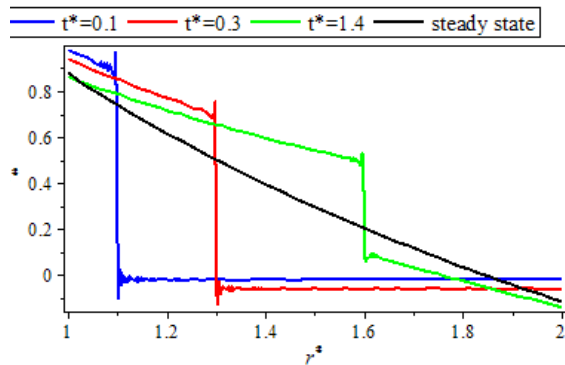
در شکل ۲، توزیع دما دو روش تبدیل هنکل محدود و جداسازی متغیرها برای زمان‌های $t^*=1.3$ و $t^*=1.7$ با هم مقایسه شده است. همانطور که در شکل دیده می‌شود، نتیجه دو روش، انطباق قابل قبولی با یکدیگر دارد.



شکل ۲- مقایسه توزیع دما در دیواره استوانه با استفاده از روش‌های تبدیل هنکل و جداسازی متغیرها

در شکل ۳، توزیع دما در استوانه برای زمان‌های مختلف رفتار موجی با سرعت محدود آن را نشان می‌دهد. در اینجا فرض می‌شود، شوک حرارتی، به‌صورت کاهش دمای سطح داخلی استوانه اعمال شود. دمای سطح خارجی در دمای محیط می‌ماند. سرعت محدود موج گرمایی در توزیع دما برای $t^*=0.1$ به‌خوبی مشهود است. در نقاط ناحیه اثر موج گرمایی، دما تغییر کرده است؛ در حالی که نقاط بین پیشانی موج و سطح خارجی استوانه، هنوز در دمای اولیه قرار دارند. قبل از رسیدن موج گرما به سطح خارجی برای اولین بار، شرط مرزی دمایی آن روی توزیع دما اثری ندارد. با توجه به

نیروی اتفاق می‌افتد؛ اما موقعیت ناپیوستگی در نمودارهای توزیع دما و تنش یکسان است.



شکل ۵- توزیع تنش طولی در دیواره استوانه طبق مدل هدایت گرمایی هذلولوی

۳- روش تابع وزنی

روش تابع وزنی توسط باکتر [۲۵] و رایس [۲۶]، به‌طور جداگانه ارائه و یک روش کارآمد برای تعیین ضریب شدت تنش است. اگر برای جسم دارای ترکی با هندسه و ناحیه بارگذاری معلوم تابع وزنی مشخص باشد؛ برای هر بارگذاری دلخواه با یک انتگرال‌گیری روی سطح ترک ضریب شدت تنش قابل محاسبه است.

$$K = \int_0^a m(x, a) \sigma(x) dx \quad (27)$$

در ابتدا تابع وزنی براساس بازشدگی سطح ترک متناظر با بارگذاری‌های مرجع بیان شد [۲۶] که خود نیاز به حل تحلیلی مساله دارد. برای حل مشکل فوق، روش‌های مختلفی از جمله تابع تقریبی بازشدگی سطح ترک [۲۷] و توابع وزنی تقریبی - معمولاً قابل کاربرد برای یک هندسه خاص - پیشنهاد شده است. گلینکا و شن [۲۸]، یک تابع وزنی تقریبی جامع شامل، چهار جمله برای ترک‌های تحت بارگذاری مود I پیشنهاد کرده‌اند. این تابع وزنی شامل، یک جمله تکین در نوک ترک با مرتبه ۰/۵ و سه جمله دیگر با سه ضریب مجهول است که معمولاً با استفاده از دو بارگذاری مرجع و شرط مرزی جابه‌جایی تعیین می‌شود.

$$\sigma_z(r^*, t^*) = \frac{E\alpha}{(1-\nu)} \left\{ \frac{2\nu}{R_o^{*2} - R_i^{*2}} \left[\frac{T_1}{\ln(R_i^*/R_o^*)} \left(\frac{R_o^{*2} - R_i^{*2}}{4} \right) - \frac{1}{2} R_i^{*2} \ln(R_i^*/R_o^*) \right] + C_1 - C_2 \right\} - T \quad (24)$$

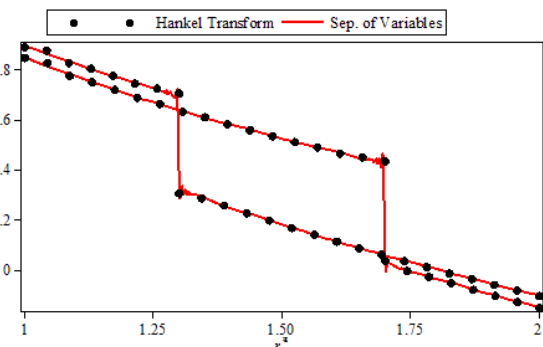
که در آن،

$$C_1 = \Omega_n(t^*) J_0(\lambda_n R_i^*) / \lambda_n (R_o^* Y_1(\lambda_n R_o^*) - R_i^* Y_1(\lambda_n R_i^*)) \quad (25\text{-الف})$$

$$C_2 = \Omega_n(t^*) Y_0(\lambda_n R_i^*) / \lambda_n (R_o^* J_1(\lambda_n R_o^*) - R_i^* J_1(\lambda_n R_i^*)) \quad (25\text{-ب})$$

در شکل ۴ توزیع تنش طولی حاصل از توزیع دمای دو روش تبدیل هنکل و جداسازی متغیرها با هم مقایسه شده که در آن، تنش طولی به‌صورت رابطه (۲۶) بی‌بعد شده است.

$$\sigma^* = \sigma_z / (E\alpha T_1 / (1-\nu)) \quad (26)$$



شکل ۴- مقایسه توزیع تنش طولی در دیواره استوانه با استفاده از روش‌های تبدیل هنکل و جداسازی متغیرها

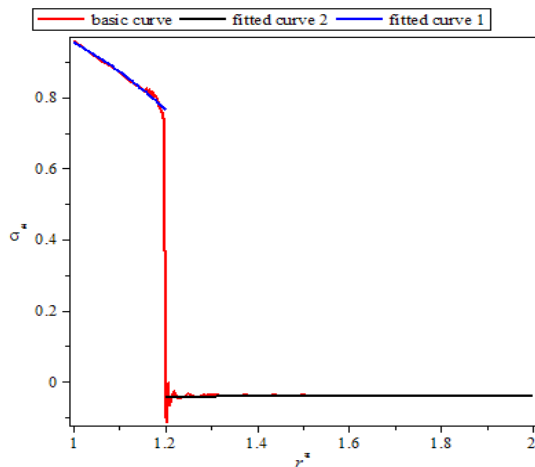
اثر اختلاف جزئی توزیع دما در دو روش، در انطباق توزیع تنش طولی دیده می‌شود. تغییرات تنش حرارتی طولی بی‌بعد در استوانه برای زمان‌های مختلف در شکل ۵ نشان داده شده است. تنش طولی ناشی از توزیع دمای غیرفوری‌ای با تنش حاصل از توزیع دمای فوری‌ای، تفاوت قابل توجهی دارد. اثر سرعت محدود موج تنش در نمودارها مشهود است. در زمان‌های ابتدایی اعمال شوک حرارتی، تنش کششی در دیواره داخلی تا موقعیت پیشانی موج تنش به‌وجود می‌آید و در قسمتی از بخش دیگر، دیواره تنش طولی فشاری است؛ اما در مدل فوری‌ه، تنش طولی در تمام نقاط کششی است. به محض اعمال شرط مرزی دمایی، تنش طولی تمام نقاط برخلاف دما تغییر می‌کند. این مساله به‌خاطر اعمال شرایط

دیگر برآزش منحنی‌های چندجمله‌ای بر عبارت تنش حرارتی در هر زمان است. تقریب‌های قطعه‌ای خطی تابع تنش [۲۹]، قطعه‌ای درجه دو [۳۰ و ۳۱] و درجه سه [۳۲] تاکنون بکار برده شده است. در اینجا، به منظور بیان یک عبارت تحلیلی برای ضریب شدت تنش از برآزش دو منحنی درجه دوم بر کل عبارت تنش محیطی - مشابه [۳۰] - استفاده شده است. این تقریب به خصوص در زمان‌های ابتدایی اعمال شوک حرارتی قابل قبول است. اگر موقعیت ناپیوستگی ρ باشد، توزیع تنش طولی به دو بخش قبل و بعد از ناپیوستگی تقسیم می‌شود تا برآزش منحنی دقیق‌تری صورت گیرد.

$$\sigma_{z1} = A_1 r^2 + B_1 r + C_1, R_i \leq r \leq R_i + \rho \quad (الف-۳۳)$$

$$\sigma_{z2} = A_2 r^2 + B_2 r + C_2, R_i + \rho \leq r \leq R_i + a \quad (ب-۳۳)$$

فرآیند برآزش منحنی بر توزیع تنش در شکل ۶ برای یک زمان خاص نشان داده شده است. در این شکل، یک منحنی درجه دوم بین $r^*=1$ تا $r^*=1.2$ و یک منحنی دیگر از $r^*=1.2$ تا $r^*=2$ بر توزیع تنش طولی برآزش شده است.



شکل ۶- برآزش دو منحنی درجه دو بر توزیع تنش طولی در دیواره استوانه ($\rho^*=1.2$)

با توجه به برآزش منحنی، عبارت تحلیلی ضریب شدت تنش به صورت رابطه (۳۴) به دست می‌آید.

$$K_A = \int_{R_i}^{R_i+\rho} \sigma_{z1} m(r, a) dr + \int_{R_i+\rho}^{R_i+a} \sigma_{z2} m(r, a) dr = A_1 f_1(a, \rho) + B_1 f_2(a, \rho) + C_1 f_3(a, \rho) + A_2 f_4(a, \rho) + B_2 f_5(a, \rho) + C_2 f_6(a, \rho) \quad (۳۴)$$

$$m(r, a) = \sqrt{\frac{2}{\pi(R_i + a - r)}} + M_1 \sqrt{\frac{2}{\pi a}} + M_2 \sqrt{\frac{2}{\pi a}} \sqrt{(R_i + a - r)} + M_3 \left[\frac{2}{\pi a} (R_i + a - r) \right] \quad (۲۸)$$

ثابت‌های مجهول ($i=1, 2, 3$) M_i با در نظر گرفتن دو بارگذاری مرجع و شرط صفر بودن مشتق دوم تابع وزنی در دهانه ترک $r=R_i$ تعیین می‌شوند [۲۸]. معمولاً بارگذاری یکنواخت به اندازه یک و بارگذاری خطی با حداکثر اندازه یک در نوک ترک به عنوان بارگذاری‌های مرجع در نظر گرفته می‌شود.

$$\sigma_{r1}(r) = 1 \quad (الف-۲۹)$$

$$\sigma_{r2}(r) = \left(\frac{r - R_i}{a} \right) \quad (ب-۲۹)$$

متناظر با هر بارگذاری، ضریب شدت تنش مرجع به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$K_{r1} = \sqrt{\pi a} Y_1 \quad (الف-۳۰)$$

$$K_{r2} = \sqrt{\pi a} Y_2 \quad (ب-۳۰)$$

در این روابط، Y_1 و Y_2 ضرایب تصحیح هندسه جسم است. با در نظر گرفتن ضرایب شدت تنش مرجع (۲۹) و اعمال شرط صفر بودن مشتق دوم تابع وزنی در دهانه ترک، ثابت‌های مجهول ($i=1, 2, 3$) به صورت زیر تعیین می‌شود.

$$M_1 = -\sqrt{2}\pi(-Y_1 + 3Y_2) - \frac{24}{5} \quad (الف-۳۱)$$

$$M_2 = 3 \quad (ب-۳۱)$$

$$M_3 = 3\sqrt{2}\pi(Y_1 - 2Y_2) + \frac{8}{5} \quad (ج-۳۱)$$

ضرایب تصحیح هندسه Y_1 و Y_2 به صورت توابعی از عمق نسبی ترک (a/t) و ضخامت دیواره (R_o/R_i) بصورت توابع متعالی برای $R_o/R_i=1.25$ و به صورت یک تابع چندجمله‌ای به ترتیب در مراجع [۱۴] و [۱۷] آمده است.

با معلوم بودن تنش حرارتی به صورت یک تابع از r و تابع وزنی، می‌توان ضریب شدت تنش حرارتی را تعیین کرد.

$$K = \int_{R_i}^{R_i+a} m(r, a) \sigma_{zz}(r) dr \quad (۳۲)$$

انتگرال‌گیری تحلیلی از رابطه (۲۷) به دلیل پیچیدگی عبارت تنش طولی امکان‌پذیر نیست. برای حل این مشکل، انتگرال‌گیری عددی در دو ناحیه توسط مفتخر و گلینکا [۲۸] و همچنین کشیاک و دیگران [۲۹] ارائه شده است. راه حل

که در آن،

۴- مثال‌های عددی

به‌علت در دسترس نبودن نتایج مشابه منتشرشده، امکان ارزیابی مستقیم نتایج وجود ندارد. به همین دلیل، ضریب شدت تنش به دو روش محاسبه شده است. روش اول، استفاده از رابطه تحلیلی ۳۴ که با کاربرد منحنی‌های درجه دوم برازش شده بر توزیع تنش (رابطه ۳۳) به‌دست آمده است. روش دوم، انتگرالگیری عددی از رابطه تابع وزنی (رابطه ۳۴) که در آن از رابطه دقیق تنش (رابطه ۲۴) استفاده شده است. مقایسه نتایج با مقادیر گزارش شده در جدول ۱، دقت روش انتگرال‌گیری عددی -با توجه به رفتار مجانبی توابع وزنی در نوک ترک- در حالت پایا را نشان می‌دهد. ضریب شدت تنش با دو رابطه هدایت گرمایی فوریه‌ای و هذلولوی به دست آمده که باید در حالت پایا برهم منطبق شوند و سپس با مقادیر منتشر شده مقایسه شده است.

در اینجا، فرض شده است سطح داخلی استوانه تحت فشار $p_i=10\text{MPa}$ و کاهش دمای $T(R_i,0)=-100^\circ\text{C}$ و سطح خارجی آن تحت فشار $p_o=0/1\text{MPa}$ قرار دارد. خصوصیات ماده نیز به‌صورت ضریب پواسون $\nu=0/3$ ، مدول برشی $\mu=80\text{MPa}$ ، ضریب انبساط حرارتی $1/^\circ\text{C}$ (۶) $\alpha=12(10^{-6}\text{m}^2/\text{s})$ و ضریب پخش حرارتی $\kappa=10^{-6}$ با نسبت شعاع خارجی به داخلی $R_o/R_i=2$ در نظر گرفته شده است. نزدیکی مقادیر محاسبه شده با نتایج دیگر، دقت روش انتگرال‌گیری عددی را تایید می‌کند. در بارگذاری مکانیکی-حرارتی پایا، ضریب شدت تنش بی‌بعد با افزایش طول ترک کاهش می‌یابد که به‌دلیل فشاری بودن تنش حرارتی در لایه‌های میانی استوانه است. در جدول ۱، داده‌ها به‌صورت رابطه (۳۷) بی‌بعد شده‌اند.

در ادامه، تغییرات ضریب شدت تنش حرارتی برای مدل هدایت گرمایی هذلولوی و هندسه‌های مختلف ترک به-صورت نمودار ارائه شده است که در آن، ضریب شدت تنش به‌صورت رابطه (۳۸) بی‌بعد شده است.

$$K_N = \frac{K}{E\alpha T_0 \sqrt{l_0} / (1 - \nu)} \quad (38)$$

در شکل ۷، ضریب شدت تنش عمق ترک با استفاده از دو روش تحلیلی (رابطه ۳۴) و انتگرال‌گیری عددی از تابع

$$\begin{aligned} f_1 &= \sqrt{8a/\pi} (1 - \sqrt{1 - \rho^*}) \\ &+ \sqrt{a/\pi} \rho^* M_1 + \sqrt{8a/9\pi} (1 - \sqrt{(1 - \rho^*)^3}) M_2 + \sqrt{2a/\pi} \rho^* \\ &(1 - 0.5\rho^*) M_3 \\ f_2 &= \sqrt{8a^3/9\pi} (1 - \sqrt{1 - \rho^*}) ((2 + 3R_i^*) \\ &- \rho^* \sqrt{1 - \rho^*}) + \sqrt{a^3/2\pi} \rho^* (\rho^* + 2R_i^*) M_1 \\ &+ \sqrt{8a^3/225\pi} ((2 + 5R_i^*) \\ &- (2 + 3\rho^* + 5R_i^*) \sqrt{(1 - \rho^*)^3}) M_2 \\ &+ \sqrt{a^3/18\pi} \rho^* ((3 - 2\rho^*) \rho^* \\ &+ 3(2 - \rho^*) R_i^*) M_3 \\ f_3 &= \sqrt{8a^5/225\pi} ((8 + 20R_i^* + 15R_i^{*2}) \\ &- \sqrt{1 - \rho^*} (8(1 + R_i^*)^2 \\ &+ 4(1 + R_i^*)(\rho^* + R_i^*) + 3(\rho^* + R_i^*)^2) \\ &- \sqrt{2a^5/9\pi} (R_i^{*3} - (\rho^* + R_i^*)^3) M_1 \\ &+ \sqrt{8a^5/105^2\pi} ((8 + 28R_i^* + 35R_i^{*2}) \\ &- \sqrt{1 - \rho^*} ((8 + 4\rho^*) + 3\rho^{*2} (1 - 5\rho^*) \\ &+ 14R_i^* (2 + \rho^* - \rho^{*2}) + 35R_i^{*2} \\ &(1 - \rho^*)) M_2 - \sqrt{a^5/72\pi} \\ &4(1 + R_i^*) ((R_i^{*3} - (\rho^* + R_i^*)^3) \\ &+ 3((\rho^* + R_i^*)^4 - R_i^{*4})) M_3 \\ f_4 &= \sqrt{8a(1 - \rho^*)/\pi} + \sqrt{2a/\pi} \\ &(1 - \rho^*) M_1 + \sqrt{8a/9\pi} \sqrt{(1 - \rho^*)^3} M_2 \\ &+ \sqrt{a^3/2\pi} (1 - \rho^*)^3 M_3 \\ f_5 &= \sqrt{2a^3/9\pi} \sqrt{1 - \rho^*} (2 + \rho^* + 3R_i^*) \\ &+ \sqrt{a^3/2\pi} (1 - \rho^*) (1 + \rho^* + 2R_i^*) M_1 \\ &+ \sqrt{8a^3/225\pi} \sqrt{(1 - \rho^*)^3} (2 + 3\rho^* \\ &+ 5R_i^*) M_2 + \sqrt{a^3/18\pi} (1 - \rho^*)^2 \\ &(1 + 2\rho^* + 3R_i^*) M_3 \\ f_6 &= \sqrt{8a^5/225\pi} \sqrt{1 - \rho^*} (8 + 4\rho^* + 3\rho^{*2} \\ &+ 20R_i^* + 10R_i^*\rho^* + 15R_i^{*2}) \\ &+ \sqrt{2a^5/9\pi} ((1 + R_i^*)^3 - (\rho^* + R_i^*)^3) M_1 \\ &+ \sqrt{8a^5/105^2\pi} \sqrt{1 - \rho^*} (8 + 4\rho^* + 3\rho^{*2} \\ &- 15\rho^{*3} + 14(2 + \rho^* - 3\rho^{*2}) + 35R_i^{*2} \\ &(1 - \rho^*)) M_2 + \sqrt{a^5/72\pi} ((1 + R_i^*)^4 \\ &- 4(1 + R_i^*)(\rho^* + R_i^*)^3 \\ &+ 3(\rho^* + R_i^*)^4) M_3 \end{aligned} \quad (35)$$

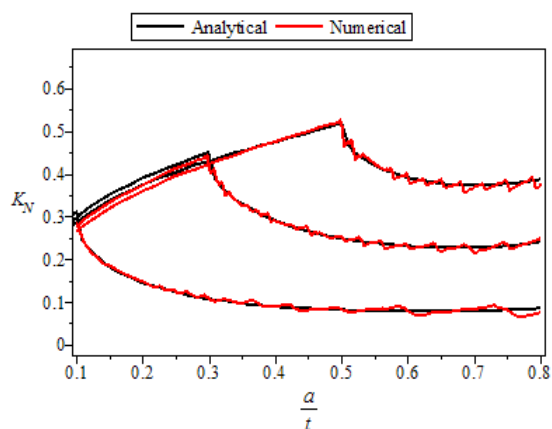
در این روابط،

$$\rho^* = \rho/a \quad (36\text{-الف})$$

$$R_i^* = R_i/a \quad (36\text{-ب})$$

مرزی دمایی روی سطح خارجی، نمی‌توان به‌عنوان عاملی برای کنترل رفتار ترک استفاده کرد.

از طرف دیگر، در زمان‌های ابتدایی اعمال شوک افزایش ضریب شدت تنش با طول ترک، سبب گسیختگی سازه در صورت رشد ترک می‌شود. این مساله باید در طراحی لوله‌ها و مخازن تحت گرادیان دما با کدهای صنعتی لحاظ شود که تنش‌های حرارتی به‌عنوان تنش‌های ثانویه در نظر گرفته می‌شوند.



شکل ۷- مقایسه ضریب شدت تنش حاصل از روش تحلیلی (رابطه (۳۴)) و انتگرال‌گیری عددی

در شکل ۸ ضریب شدت تنش برای نسبت قطره‌های مختلف با یکدیگر مقایسه شده است؛ بطور کلی، ضریب شدت تنش در استوانه‌های نازک‌تر از استوانه‌های ضخیم‌تر بزرگتر است. به‌عبارت دیگر، وجود نقص در استوانه‌های جدار نازک بحرانی‌تر است. براساس نتایج شکل ۸، در زمان‌های اولیه، اعمال شوک حرارتی رفتار ترک‌های کوتاه ($a/t < 0.15$) مشابه است. به‌عبارت دیگر، در این هنگام ضخامت دیواره استوانه (R_o/R_i) بر ضریب شدت تنش ترک‌های کوتاه اثر چندانی ندارد؛ همچنین، ضریب شدت تنش در ترک‌های بلند به مرور زمان افزایش می‌یابد. این مساله در استوانه‌های نازک‌تر بیشتر به چشم می‌خورد، به‌طوری‌که از یک زمان مشخص به بعد، ضریب شدت تنش بیشینه متناظر با ترک با طول بیشتر است (شکل ۸ پایین)؛ بنابراین، وجود نقصی کوچک در استوانه‌ها خصوصاً با دیواره نازک تحت شوک حرارتی هذلولوی می‌تواند سریع‌تر از مدل فوریه، منجر به گسیختگی سازه شود.

وزنی برای سه زمان مشخص $t^* = 0.1, 0.3, 0.5$ و برحسب عمق نسبی ترک (a/t) مقایسه شده است.

جدول ۱- ضریب شدت تنش برای توزیع تنش پایا

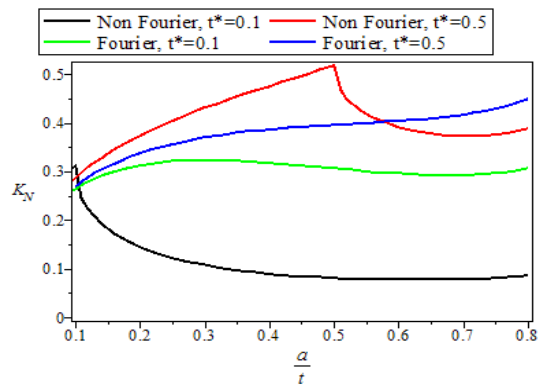
a/t	K_N	
	هدایت گرمایی فوری‌ای	هدایت گرمایی غیرفوری‌ای
۰/۱	۳۱/۶۷	۳۱/۷۹
۰/۲	۲۸/۴۳	۲۸/۳۵
۰/۳	۲۵/۷۰	۲۵/۶۱
۰/۴	۲۳/۴۴	۲۳/۳۵
۰/۵	۲۱/۶۰	۲۱/۵۲
۰/۶	۲۰/۲۵	۲۰/۱۶
۰/۷	۱۹/۴۸	۱۹/۴۰
۰/۸	۱۹/۷۱	۱۹/۶۳

*مقادیر از نمودار خوانده شده است.

نتایج، تطابق قابل قبولی با یکدیگر دارند. البته در مورد نتایج انتگرال‌گیری عددی، دو نکته قابل ذکر است. مقدار ضریب شدت تنش بیشینه در روش عددی، کمتر از روش تحلیلی به‌دست می‌آید. به‌طوری‌که، در $t^* = 0.1$ ضریب شدت تنش بیشینه در روش تحلیلی حدود $0.7/5$ ، بزرگتر از روش عددی است. برای ترک‌های عمیق، نتایج انتگرال‌گیری عددی با نوسان همراه است.

در یک زمان مشخص در ابتدای اعمال شوک حرارتی، سرعت محدود موج دما باعث تغییر دمای بخشی از دیواره داخلی و به تبع آن ایجاد تنش‌های کششی در این بخش می‌شود؛ در نتیجه، برای ترک‌هایی که پیشانی موج تنش از نوک آنها عبور کرده است، ضریب شدت تنش متناسب با طول ترک افزایش می‌یابد؛ اما در ترک‌هایی که موج تنش به نوک آنها نرسیده است، تنش در بخشی از سطح انتهایی ترک، بین محل پیشانی موج و نوک ترک- فشاری است که باعث بسته شدن سطوح ترک و کاهش ضریب شدت تنش با افزایش طول ترک می‌شود؛ بنابراین، در زمان‌های ابتدایی اعمال شوک حرارتی برای یک ترک ضریب شدت تنش بیشینه، زمانی اتفاق می‌افتد که پیشانی موج تنش به نوک آن برسد. قبل از رسیدن موج گرما به سطح خارجی، شرایط مرزی دمایی سطح خارجی روی دما و در نتیجه ضریب شدت تنش اثری ندارد؛ بنابراین، در صورت رشد ترک از شرط

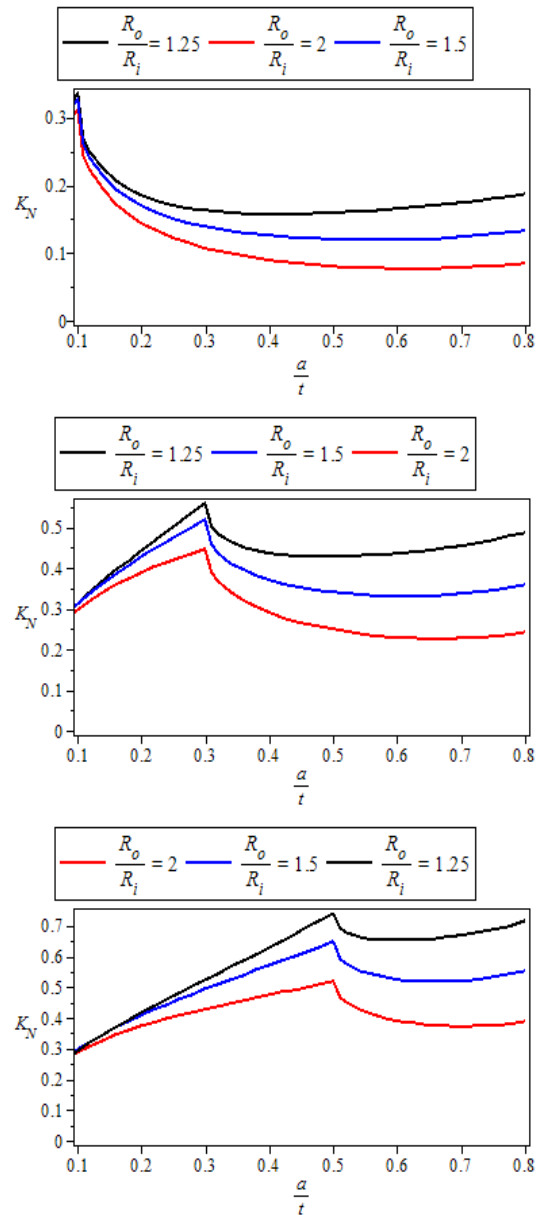
ترک‌های عمیق در مدل فوریه زودتر تحت تاثیر شوک حرارتی قرار می‌گیرند؛ اما با گذشت زمان ضریب شدت تنش مدل هذلولوی سریع‌تر از مدل فوریه افزایش می‌یابد. به‌طوری‌که، در $t^*=0.5$ ترک‌های با طول $a/t < 0.575$ ، ضریب شدت تنش مدل هذلولوی بزرگتر از مدل فوریه است. در جدول ۲ مقدار و موقعیت ضریب شدت تنش بیشینه برای دو مدل در زمان‌های مشخص با هم مقایسه شده است. برای مدل هذلولوی، بیشینه ضریب شدت تنش در موقعیت ناپیوستگی موج تنش اتفاق می‌افتد و با سرعت موج گرما در دیواره جابجا می‌شود؛ اما برای مدل فوریه، بجز در $t^*=0.1$ مقدار ضریب شدت تنش با طول ترک متناسب است و مقدار بیشینه برای طول ترک نسبی 0.8 اتفاق می‌افتد.



شکل ۹- مقایسه ضریب شدت تنش حاصل از مدل‌های هدایت گرمایی فوریه و هذلولوی

جدول ۲- ضریب شدت تنش حداکثر و محل وقوع آن برای دو مدل فوریه و هذلولوی در زمان‌های مختلف

زمان (t^*)	هدایت گرمایی هذلولوی	عمق ترک (a/t)	هدایت گرمایی فوریه‌ای	عمق ترک (a/t)
۰/۱	۰/۳۱۱۵	۰/۱	۰/۳۲۲	۰/۲۷۴
۰/۳	۰/۴۴۷۹	۰/۳	۰/۴۲۸۵	۰/۸
۰/۵	۰/۵۱۸۳	۰/۵	۰/۴۴۵۸	۰/۸
۰/۷	۰/۶۰۲۴	۰/۷	۰/۴۴۸۳	۰/۸
۱/۳	۰/۶۱۳۳	۰/۷	۰/۴۴۸۷	۰/۸
۱/۸	۰/۳۸۴۲	۰/۲	۰/۴۴۸۷	۰/۸



شکل ۸- اثر نسبت قطر روی ضریب شدت تنش در زمان‌های $t^*=0.1$ (بالا)، $t^*=0.3$ (وسط) و $t^*=0.5$ (پایین)

در شکل ۹، ضریب شدت تنش مدل‌های فوریه و هذلولوی در زمان‌های مختلف با هم مقایسه شده است. طبق نتایج، بیشینه ضریب شدت تنش در مدل هذلولوی در $t^*=0.1$ با مدل فوریه تقریباً برابر است؛ اما در طول ترک کمتری اتفاق می‌افتد. همچنین، بجز ترک‌های با طول نسبی تقریباً 0.8 ، ضریب شدت تنش مدل فوریه به‌طور قابل ملاحظه‌ای بزرگتر از مدل هذلولوی است. طبق این نتایج،

- Ia:Sciences de la Terre et des Planets, 246: 3154–3155.
- [6] Sevostianov I., Kachanov M (2000) Anisotropic conductivities of plasma sprayed thermal barrier coatings in relation to the microstructure. *J. Thermal Spray Tech*, 9(4): 478–482.
- [7] Nied HF, Erdogan F (1983) Transient thermal stress problem for a circumferentially cracked hollow cylinder, *J. of Thermal Stresses*, 6: 1–14.
- [8] Nied HF (1984) Thermal shock in a circumferentially cracked hollow cylinder with cladding, *Eng Fract Mech* 20:113–137.
- [9] Zahoor A (1985) Closed form expressions for fracture mechanics analysis of cracked pipes, *ASME J Press Ves Tech* 107: 203–205.
- [10] Miyamoto H, Kikuchi M (1986) The behavior of cracks under thermal transient loading. *Eng Fract Mech* 23(1): 37–60.
- [11] Grebner H (1985) Finite element calculation of stress intensity factors for complete circumferential surface cracks at the outer wall of a pipe, *Int J Fract* 27: R99–R102.
- [12] Chen YZ (2000) Stress intensity factors in a finite length cylinder with a circumferential crack, *Int J Press Ves Pip* 77: 439–444.
- [13] Torabi M, Saedodin S (2011) Analytical and numerical solutions of hyperbolic heat conduction in cylindrical coordinates *J. Thermophys Heat Transfer* 25(2): 239–253.
- [14] Nabavi SM, Ghajar R (2010) Analysis of thermal stress intensity factors for cracked cylinders using weight function method. *Int J Eng Sci* 48: 1811–1823.
- [15] Meshii T, Watanabe K (1998) Closed-form stress intensity factor for an arbitrarily located inner circumferential surface crack in a cylinder subjected to axisymmetric bending loads, *Eng Fract Mech* 59: 589–597.
- [16] Meshii T, Watanabe K (2001) Stress intensity factor for a circumferential crack in a finite-length thin to thick-walled cylinder under an arbitrary biquadratic stress distribution on the crack surfaces, *Eng Fract Mech* 68: 975–986.
- [17] Petroski HJ, Achenbach JD (1978) Computation of the weight function from a stress intensity factor, *Eng Fract Mech* 10: 257–266.
- [18] Ghajar R, Nabavi SM (2010) Closed-form thermal stress intensity factors for an internal circumferential crack in a thick-walled cylinder. *Fatigue Fract Eng Mater* 33: 504–512.
- [19] Chang DM, Wang BL (2012) Transient thermal fracture and crack growth behavior in brittle media based on non-Fourier heat conduction, *Eng Fract Mech* 94: 29–36.
- [20] Hu KQ, Chen ZT (2012) Thermoelastic analysis of a partially insulated crack in a strip under thermal

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله، ضریب شدت تنش برای یک ترک محیطی کامل واقع در سطح داخلی یک استوانه جدار ضخیم به‌دست آمده است که تحت شوک حرارتی هذلولوی قرار دارد. نتایج این تحقیق، به این صورت قابل بیان است:

کاربرد برازش منحنی برای توزیع تنش نسبت به روش انتگرال‌گیری عددی منجر به نتایج پایدارتری می‌شود. البته، نتیجه دو روش، تطابق قابل قبولی با یکدیگر دارد.

در ابتدای اعمال شوک حرارتی، ضریب شدت تنش مدل فوریه در ترک‌هایی که موج تنش به نوک ترک آنها نرسیده است، از مدل هذلولوی بزرگتر است.

در ترک‌های کوتاه $a/t \approx 0.1$ ، ضریب شدت تنش بیشینه برای مدل‌های فوریه و هذلولوی تقریباً برابر است؛ اما در ترک‌های با طول بیشتر، ضریب شدت تنش مدل هذلولوی از مدل فوریه به‌طور قابل ملاحظه‌ای بزرگتر است.

در مدل هذلولوی و برای $0.1 < a/t < 0.8$ ، ضریب شدت تنش بیشینه در هر لحظه برای ترکی اتفاق می‌افتد که پیشانی موج تنش در موقعیت نوک آن قرار دارد.

با توجه به رفتار متفاوت ترک تحت بارگذاری‌های گرمایی فوریه‌ای و هذلولوی، در نظر گرفتن مدل مناسب برای هدایت گرمایی در تحلیل و طراحی سازه‌ها از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است.

۶- مراجع

- [1] Tang DW, Araki N (1996) Non-Fourier heat conduction in a finite medium under periodic surface thermal disturbance. *International J Heat Mass Trans*, 39(8): 1585–1590.
- [2] Zhang MY, Cheng GJ (2011) Pulsed laser coating of hydroxyapatite/titanium nanoparticles on Ti-6Al-4V substrate: Multiphysics simulation and experiments. *IEEE Trans NanoBiosci*, 99: 1-1.
- [3] Maurer MJ, Thompson HA (1973) Non-Fourier effects at high heat flux. *J. Heat Trans*, 95: 284–286.
- [4] Cattaneo C (1958) Sur une forme de l'équation de la chaleur éliminant le paradoxe d'une propagation instantanée. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Serie IIA: Sciences de la Terre et des Planets*, 247: 431–433.
- [5] Vernotte P (1958) Les paradoxes de la théorie continue de l'équation de la chaleur. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Serie*

- [29] Glinka G, Shen G (1991) Universal features of weight functions for cracks in mode I. *Eng Fract Mech* 40: 1135-1146.
- [30] Moftakhar AA, Glinka G (1992) Calculation of stress intensity factors by efficient integration of weight functions, *Eng Fract Mech* 43(5): 749-756.
- [31] Kiciak A, Glinka G, Burns DJ (2003) Calculation of stress intensity factors and crack opening displacements for cracks subjected to complex stress fields, *ASME J Press Ves Tech* 125: 261-266.
- [32] Shahani AR, Nabavi SM (2007) Transient thermal stress intensity factors for an internal longitudinal semi-elliptical crack in a thick-walled cylinder, *Eng Fract Mech* 74: 2585-2602.
- [33] Nabavi SM, Shahani AR (2009) Thermal stress intensity factors for a cracked cylinder under transient thermal loading, *Int J Press Ves Pip* 86: 153-163,.
- [34] Xu RX, Wu XR (1989) A weight function approach to stress intensity factors for half-elliptical surface cracks in cylindrical pressure vessels to a thermal shock, *Int J Press Ves Pip* 39: 375-409,.
- impact loading using the hyperbolic heat conduction theory. *Int J Eng Sci* 51: 144-160.
- [21] Wang BL, Han JC (2012) Non-Fourier heat conduction in layered composite materials with an interface crack, *Int J Eng Sci* 55: 66-75.
- [22] Chen ZT, Hu KQ (2014) Thermoelastic analysis of a cracked substrate bonded to a coating using the hyperbolic heat conduction theory. *J Thermal Stresses* 37: 270-291.
- [24] Wang BL (2013) Transient thermal cracking associated with non-classical heat conduction in cylindrical coordinate system. *Acta Mech Sinica* 29:211-8.
- [25] Nazari MB, Asemi O (2015) Stress intensity factor for a longitudinal semi-elliptical crack in a thick-walled cylinder under hyperbolic thermal loading. *Modares Mech Eng* 14(16): 143-151 (In Persian).
- [26] Hetnarski RB, Eslami MR (2009) *Thermal Stresses – Advanced Theory and Applications*, Springer.
- [27] Bueckner HF (1970) principle for the computation of stress intensity factors, *Z Angew Math Mech* 50: 129-146.
- [28] Rice JR (1972) remarks on elastic crack-tip stress fields. *Int J SolidsStruc* 8: 751-758,.