



مدل‌سازی جریان در کانال با استفاده از تحلیل ایزوژئومتریکی

رامین امینی^۱، رضا مقصودی^{۲*}، ناصر ظریف مقدم باصفت^۳ و سید مهدی توکلی^۴^۱ استادیار دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود^۲ دانشجوی دکتری عمران، گرایش هیدرولیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود^۳ مدرس دانشکده فنی و حرفه‌ای شهید منتظری، مشهد^۴ استادیار دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود

تاریخ دریافت: ۱۳۹۳/۲/۲۹؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۳/۱۱/۲۶؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۴/۵/۲۷

چکیده

در این مقاله با استفاده از تحلیل ایزوژئومتریکی، دو نوع جریان مدل‌سازی می‌شوند. اولین مسئله، بررسی توزیع سرعت در کانال شیبدار با جریان یکنواخت و دومین مسئله، مدل‌سازی جریان غیرچرخشی اطراف یک مانع دایروی و مستطیلی است. در روش تحلیل ایزوژئومتریکی، توابع مجهول معادله دیفرانسیل و همچنین مدل‌سازی هندسه با استفاده از توابع نرَبز انجام می‌شود. به علت توانایی توابع نرَبز در ساخت منحنی‌ها و سطوح با دقت بالا، کانال‌های که دارای مرز پیچیده می‌باشند را می‌توان به راحتی با استفاده از این توابع مدل‌سازی کرد. در این مقاله از این خصوصیت مهم روش تحلیل ایزوژئومتریکی استفاده شده است. نتایج تحلیل ایزوژئومتریکی با روش اجزای محدود نیز مقایسه می‌شود و توانایی روش تحلیل ایزوژئومتریکی در برابر روش اجزای محدود، مورد بررسی قرار می‌گیرد. علاوه بر این اثرات تعدادی از پارامترهای روش تحلیل ایزوژئومتریکی مانند بی‌نظمی نقاط کنترل شبکه، بردارهای گرهی مختلف و تعداد نقاط کنترلی، مورد بحث و بررسی قرار گرفته است.

کلمات کلیدی: تحلیل ایزوژئومتریکی؛ توابع نرَبز؛ جریان در کانال؛ جریان غیرچرخشی.

Channels Flow Modeling using Isogeometric Analysis

R. Amini¹, R. Maghsoodi^{2*}, N. Z. Moghaddam³, and S. M. Tavakoli⁴¹ Assis. Prof., Civil. Eng., Shahrood Univ. of Tech., Shahrood, Iran.² PhD Student, Civil. Eng., Shahrood Univ. of Tech., Shahrood, Iran.³ Lecturer, Shahid Montazeri Technical and Vocational Univ., Mashhad, Iran.⁴ Assis. Prof., Civil. Eng., Shahrood Univ. of Tech., Shahrood, Iran.

Abstract

In this work, two types of flow are modeled by the isogeometric analysis (IA) method. The first problem involved is to find the velocity distribution of the uniform flow in a sloped channel, and the second one is the irrotational flow around the circular and rectangular obstacles. The formulation is derived, and its differences with the finite element (FE) method are explained. In the IA method, the unknown function of the governing differential equation and the domain boundaries are approximated by NURBS (non-uniform rational B-splines). Due to the ability of NURBS in constructing curves and surfaces with high precision, channels with complicated boundaries can easily be considered. The IA results are compared with the standard finite element, and their accuracy is demonstrated by means of several examples. Furthermore, the effects of some of the IA parameters such as the irregularity of the control point grid, different knot vectors, and number of control points are also discussed.

Keywords: IA (Isogeometric Analysis); NURBS (Non-Uniform Rational B-Splines); Channels Flow; Irrotational Flow.

۱- مقدمه

شده است. همچنین برخی از پارامترهای ایزوژئومتریکی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

در بخش بعدی به‌طور مختصر در مورد سطوح نریز توضیحاتی ارائه می‌شود. در بخش سوم، معادلات حاکم بر جریان یکنواخت در کانال شیبدار و جریان غیرچرخشی اطراف مانع دایروی و مستطیلی با توجه به شرایط مرزی معادلات بیان می‌شود. گسسته‌سازی این معادلات با روش تحلیل ایزوژئومتریکی در بخش ۴ پرداخته می‌شود. در بخش ۵ برای بررسی کارایی روش تحلیل ایزوژئومتریکی، دو مثال مورد بررسی قرار می‌گیرد و نتایج با روش اجزای محدود مقایسه می‌شود. و در بخش آخر، نتایج بدست آمده مورد بحث قرار می‌گیرد.

۲- سطوح نریز

با توجه به رشد و توسعه تولید هندسه به کمک کامپیوتر، تعریف هندسه و ساخت سطوح هندسه پیچیده امکان‌پذیر شده است [۱۲]. بدین منظور از اسپلاین‌ها، توابع نریز و ت-اسپلاین‌ها استفاده می‌شود. ایده اصلی روش تحلیل ایزوژئومتریکی، حل معادله دیفرانسیل به عنوان یک سطحی تصویر شده است که می‌تواند با مدل‌های اسپلاین‌ها به خوبی ساخته شود [۶ و ۷]. در پاراگراف‌های بعدی توضیح مختصری در مورد سطوح نریز داده می‌شود.

برای توضیحات کامل‌تر در مورد ب-اسپلاین‌ها و نریز می‌توان به مراجع مختلفی مانند [۱۲، ۱۵-۱۸] مراجعه کرد. در این قسمت، توضیحات مختصری در این مورد آورده می‌شود. در حالت کلی برای تعریف سطوح نریز به موارد زیر نیاز است [۱۳]:

- یک مجموعه $(n_1 + 1)(n_2 + 1)$ نقطه کنترلی $P_{i,j}$ که $i = 0, 1, \dots, n_1, j = 0, 1, \dots, n_2$
- دو بردار گرهی H, Ξ برای دو راستا که به ترتیب دارای m_1 و m_2 مولفه می‌باشند که $m_2 = n_2 + q + 1$ و $m_1 = n_1 + p + 1$
- توابع پایه با درجه p و q در راستای افقی و قائم.
- وزن‌های نقاط کنترلی برای تعریف نریز $w_{i,j}$ که $i = 0, 1, \dots, n_1, j = 0, 1, \dots, n_2$

در چند دهه اخیر روش‌های گوناگونی مانند، روش اجزای محدود^۱ و روش بدون شبکه^۲ برای حل معادلات حاکم بر مسائل مهندسی در حال توسعه و پیشرفت است. از جمله معایب این روش‌ها، می‌توان به تقریب هندسه و اقتناع کردن شرایط مرزی اشاره کرد. علاوه بر این، در برخی از مسائل مهندسی که هندسه در زمان‌های مختلف دچار تغییر می‌شود (مانند مسائلی که با دیدگاه لاگرانژی مدل‌سازی می‌شوند) استفاده از روش اجزای محدود کار بسیار سخت است.

برای غلبه بر این مشکلات و با الهام گرفتن از مدل‌سازی هندسی و طراحی به کمک کامپیوتر روش تحلیل ایزوژئومتریکی توسط هیوز و همکاران^۳ معرفی شد [۱]. در این روش برای مدل‌سازی از توابع نریز^۴ به عنوان توابع شکل استفاده می‌شود. در چند سال اخیر، روش تحلیل ایزوژئومتریکی^۵ در مکانیک سازه‌ها [۲-۶] همچنین مکانیک سیالات [۷-۱۱] به سرعت در حال توسعه است. با توجه به خصوصیات این روش، تحلیل ایزوژئومتریکی به‌عنوان جایگزینی مناسب برای روش‌های عددی می‌تواند در نظر گرفت.

روش تحلیل ایزوژئومتریکی علاوه بر داشتن خصوصیات روش‌های مانند اجزای محدود و روش بدون شبکه، دارای خصوصیات متمایز دیگری است. در این روش هندسه با استفاده از نقاط کنترلی اسپلاین گسسته‌سازی می‌شوند. در واقع نقشی که نقاط کنترلی انجام می‌دهد، مانند گره‌ها در روش اجزای محدود یا نقاط روش بدون شبکه می‌باشد. همچنین توابع پایه اسپلاین هم به عنوان تقریب توابع مجهول و هم برای ایجاد هندسه به کار می‌روند. در این تحقیق از روش تحلیل ایزوژئومتریکی برای مدل‌سازی دو نوع جریان کانال استفاده شده است. در ابتدا به مدل‌سازی جریان یکنواخت و سپس جریان غیرچرخشی اطراف مانع دایروی و مستطیلی می‌پردازیم. نتایج بدست آمده از روش تحلیل ایزوژئومتریکی با حل دقیق و روش اجزای محدود مقایسه

¹ Finite Element Method

² Meshless Method

³ Hughes et al

⁴ NURBS (Non-uniform Rational B-Splines)

⁵ IA (Isogeometric analysis)

برای درجات $p \geq 1$ برابر است با:

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (5)$$

به‌عنوان مثال، برای $p=0,1,2$ با بردار گرهی یکنواخت $\Xi = \{0,1,2,3,4,5,\dots\}$ توابع پایه به‌صورت شکل ۲ است. برای مطالعه بیشتر به مرجع [۱] مراجعه شود.

۳- معادلات دیفرانسیلی مسائل جریان در کانال

۳-۱- توزیع سرعت در مقطع کانال شیبدار با جریان یکنواخت

در شکل ۳، پروفیل سرعت در کانال با جریان یکنواخت و جریان آشفته با دبی یکسان با یکدیگر مقایسه شده است [۱۹].

معادله ممنتوم در راستای جریان در کانال شیبدار به‌صورت رابطه (۶) است:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(u^2 + \frac{P}{\rho} \right) + \frac{\partial}{\partial y} (uv) + \frac{\partial}{\partial y} (uw) = v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + g \sin \alpha \quad (6)$$

که u و v و w به ترتیب، مولفه‌های سرعت در راستای x ، y و z فشار، P شتاب ثقل، g چگالی، ρ شیب کانال و α ویسکوزیته جنبشی است. با توجه به اینکه جریان پایدار است داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (7)$$

و به علت یکنواخت بودن جریان:

$$\frac{\partial}{\partial x} u^2 = 0, \quad \frac{\partial}{\partial y} (uv) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} (uw) = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{P}{\rho} \right) = 0$$

بنابراین معادله‌ی ممنتوم جریان یکنواخت کانال شیبدار در راستای جریان در مسائل دو بعدی به‌صورت رابطه (۹) ساده می‌شود:

$$v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + g \sin \alpha = 0 \quad (9)$$

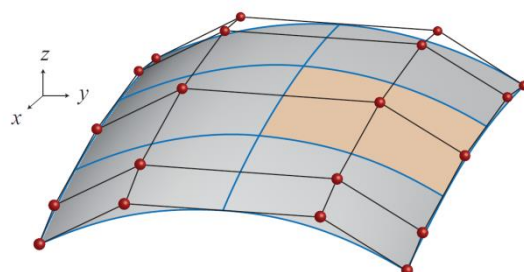
یک سطح نریز با درجه p در راستای ξ و درجه q در راستای η به صورت رابطه (۱) تعریف می‌شود:

$$S(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^{m_1} \sum_{j=0}^{m_2} R_{i,j}(\xi, \eta) P_{i,j} \quad (1)$$

که $\{P_{i,j}\}$ شبکه کنترلی و

$$R_{i,j}(\xi, \eta) = \frac{N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) w_{i,j}}{\sum_{k=0}^{m_1} \sum_{l=0}^{m_2} N_{k,p}(\xi) N_{l,q}(\eta) w_{k,l}} \quad 0 \leq \xi, \eta \leq 1 \quad (2)$$

که $\{w_{i,j}\}$ وزن‌ها، $N_{i,p}(\xi)$ و $N_{j,q}(\eta)$ توابع پایه ب-اسپلاین روی بردار گرهی تعریف می‌شوند. در شکل ۱، مثالی از سطح نریز نشان داده شده است [۱].



شکل ۱- مثالی از شبکه کنترلی و سطح نریز [۱]

۲-۱- بردارهای گرهی

بردارهای گرهی به‌صورت $\Xi = \{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{m_1}\}$ و $H = \{\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{m_2}\}$ تعریف می‌شوند. ξ_i و η_i به‌صورت $\xi_i \leq \xi_{i+1}, i=0,1,\dots,m_1$ و $\eta_i \leq \eta_{i+1}, i=0,1,\dots,m_2$ است. ξ_i و η_i گره، Ξ و H را بردار گرهی می‌نامند. هرگاه فاصله بین گره‌ها برابر باشد، بردار گرهی یکنواخت گفته می‌شود.

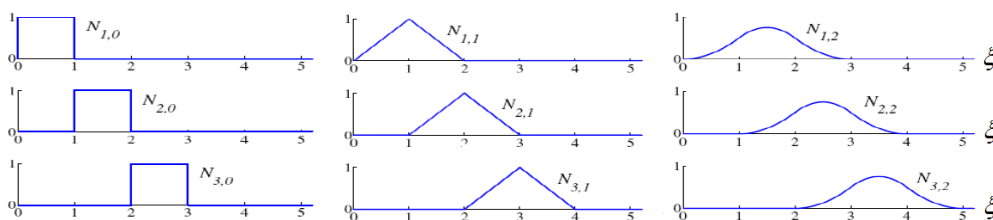
بردار گرهی باز استاندارد به‌صورت رابطه (۳) تعریف می‌شود:

$$\Xi = \left\{ \underbrace{a, \dots, a}_{p+1}, \xi_{p+1}, \dots, \xi_{m-p-1}, \underbrace{b, \dots, b}_{p+1} \right\} \quad (3)$$

۲-۲- توابع پایه

i امین تابع پایه ب-اسپلاین درجه p (مرتبه $p+1$) که به‌صورت $N_{i,p}(\xi)$ نشان داده می‌شود، برابر است با:

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{if } \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1}, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (4)$$



شکل ۲- مثالی از توابع پایه درجه صفر، یک و دو [۱]

۴- گسسته‌سازی معادلات با روش تحلیل ایزوژئومتریک

فرآیند حل مسائل جریان سیال در کانال را می‌توان به صورت زیر تقسیم‌بندی کرد. اولین مرحله، ساخت هندسه کانال با استفاده از توابع نرَبز است. با توجه به پیچیدگی هندسه می‌توان از چند وصله استفاده کرد. مرحله بعد، الهام گرفتن از مفهوم ایزوپارامتریک روش اجزای محدود است؛ بدین معنی که هندسه و متغیرهای مجهول مانند سرعت با استفاده از توابع نرَبز تقریب زده می‌شوند. سپس با استفاده از روش‌های استاندارد مانند باقیمانده‌های وزنی و یا روش‌های وردشی کمیت‌های تقریب زده شده در روابط بدست آمده جایگزین می‌شوند که باعث ایجاد یک دستگاه معادلات خطی می‌شود.

به‌طور کلی معادلات دیفرانسیلی (۹)، (۱۱) و (۱۲) را می‌توان به‌صورت رابطه (۱۳) نوشت:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial a}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial a}{\partial y} \right) + b = 0 \quad (13)$$

که در $b=0$ ، $a = \psi$ ، $b = \frac{g \sin \alpha}{\nu}$ در معادله (۹)، $a = u$ در معادله (۱۱) و $a = \phi$ در معادله (۱۲) است.

با استفاده از روش شکل ضعیف، قسمت دو خطی و خطی شکل ضعیف به‌صورت رابطه (۱۴) بدست می‌آید:

$$B(a, w) = \int_{\Omega_c} \left[\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial a}{\partial y} \right] dx dy \quad (14)$$

و

$$I(w) = \int_{\Omega_c} a w dx dy \quad (15)$$

که w تابع وزن و

$$\alpha_n = n_x \left(\frac{\partial a}{\partial x} \right) + n_y \left(\frac{\partial a}{\partial y} \right) \quad (16)$$

با انتخاب w به عنوان متغیر u و تقارن B یک تابعی Π به‌صورت رابطه (۱۷) بدست می‌آید:

۳-۲- جریان غیرچرخشی اطراف مانع دایروی و مستطیلی

برای جریان دو بعدی غیرقابل تراکم مولفه‌های سرعت u و v را می‌توان برحسب تابع جریان ψ و تابع پتانسیل سرعت ϕ به‌صورت رابطه (۱۰) بیان کرد:

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial \psi}{\partial y} & v &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} \\ u &= -\frac{\partial \phi}{\partial x} & v &= \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{aligned} \quad (10)$$

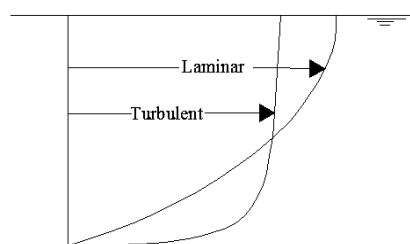
با قرار دادن u و v در رابطه (۱۰) و شرط غیر چرخشی، $\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = \nabla^2 \psi = 0 \quad (11)$$

همچنین با شرط پیوستگی، $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \nabla^2 \phi = 0 \quad (12)$$

روابط (۱۱) و (۱۲)، معادلات لاپلاس هستند که در بسیاری از مسائل مهندسی به کار برده می‌شود. دکتر حسنی و همکاران^۱ با استفاده از توابع پایه اسپلاین، معادله لاپلاس را حل کرده‌اند [۱۴].



شکل ۳- مقایسه پروفیل سرعت جریان آرام و جریان آشفتنه در جریان یکنواخت کانال باز

^۱ Dr. Hassani et al

علاوه بر این دترمینان به صورت روابط (۲۳-۲۵) تعریف می‌شود:

$$\bar{J} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} J_{x\xi} & J_{y\xi} \\ J_{x\eta} & J_{y\eta} \end{vmatrix} = J_{x\xi}J_{y\eta} - J_{y\xi}J_{x\eta} \quad (23)$$

که

$$\begin{aligned} J_{x\xi} &= \frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta)}{\partial \xi} X_{i,j} \\ J_{x\eta} &= \frac{\partial x}{\partial \eta} = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta)}{\partial \eta} X_{i,j} \\ J_{y\xi} &= \frac{\partial y}{\partial \xi} = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta)}{\partial \xi} Y_{i,j} \\ J_{y\eta} &= \frac{\partial y}{\partial \eta} = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta)}{\partial \eta} Y_{i,j} \\ J_{a\xi} &= \frac{\partial a}{\partial \xi} = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta)}{\partial \xi} a_{i,j} \\ J_{a\eta} &= \frac{\partial a}{\partial \eta} = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \frac{\partial R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta)}{\partial \eta} a_{i,j} \end{aligned} \quad (24)$$

با جای گذاری رابطه (۲۴) در رابطه (۲۲) داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial a(\xi, \eta)}{\partial x(\xi, \eta)} &= \frac{J_{y\eta} J_{a\xi}}{\bar{J}} - \frac{J_{y\xi} J_{a\eta}}{\bar{J}} \\ \frac{\partial a(\xi, \eta)}{\partial y(\xi, \eta)} &= -\frac{J_{x\eta} J_{a\xi}}{\bar{J}} - \frac{J_{x\xi} J_{a\eta}}{\bar{J}} \end{aligned} \quad (25)$$

با در نظر گرفتن $dxdy = Jd\xi d\eta$ و حذف عبارتهای مرزی، رابطه (۱۸) به صورت رابطه (۲۶) نوشته می‌شود:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{\Omega_e} \left[\left(\frac{J_{y\eta} J_{a\xi}}{\bar{J}} \right)^2 + \left(-\frac{J_{x\eta} J_{a\xi}}{\bar{J}} \right)^2 \right] \bar{J} d\xi d\eta \quad (26)$$

۵- حل دو مثال

در این بخش از روش ایزوژئومتری برای مدل‌سازی دو مسئله استفاده شده است. اولین مسئله، مدل‌سازی توزیع سرعت در کانال شیبدار با جریان یکنواخت و دومین مسئله، مدل‌سازی جریان غیرچرخشی اطراف مانع دایروی و مستطیلی است. علاوه بر این اثر چیدمان نقاط کنترلی و بردار گرهی مختلف و تعداد نقاط کنترلی، مورد بررسی قرار می‌گیرد. همچنین نتایج با جواب دقیق و روش اجزای محدود مقایسه شده است.

$$\Pi = \frac{1}{2} B(a, a) - I(a) \quad (17)$$

با جایگذاری روابط (۱۴) و (۱۵) در رابطه (۱۷) داریم:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{\Omega_e} \left[\left(\frac{\partial a}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy - \int_{\Omega_e} b a dx dy - \int_{\Gamma_e} a \alpha_n d\Gamma_e \quad (18)$$

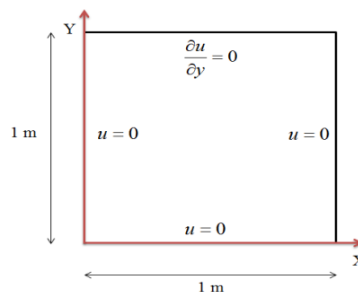
حال متغیرهای هندسی و همچنین متغیرهای مجهول با استفاده از توابع پایه اسپیلان به صورت روابط (۱۹-۲۱) تقریب زده می‌شوند:

$$x(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) X_{i,j} \quad (19)$$

$$y(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) Y_{i,j} \quad (20)$$

$$a(\xi, \eta) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta) a_{i,j} \quad (21)$$

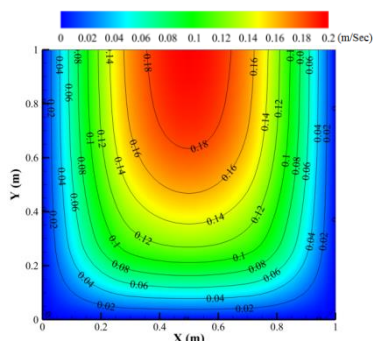
که $R_{i,j}^{p,q}(\xi, \eta)$ توابع پایه نریز به صورتی است که در معادله (۲) تعریف شده‌اند. ξ و η مقادیر گره بین صفر و یک، $X_{i,j}$ و $Y_{i,j}$ مختصات نقاط کنترلی و $a_{i,j}$ مختصات z هستند.



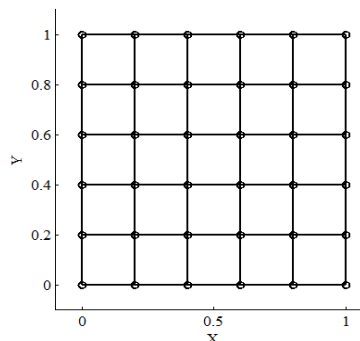
شکل ۴- ابعاد و شرایط مرزی برای مقطع مستطیلی

همان‌طور که مشخص است، معادلات بالا همگی بر حسب ξ و η می‌باشند. بدین منظور از روابط (۲۲) استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\frac{\partial a}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial a}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi}}{\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi}} - \frac{\frac{\partial a}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial a}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi}}{\frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi}} \quad (22)$$



شکل ۶- نتایج روش تحلیل ایزوژئومتریک مثال ۱



شکل ۵- شبکه کنترلی مثال ۱

شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود با توجه به بی‌نظمی زیاد، نتایج چندان با هم اختلاف ندارند.

۵-۲- اثر بردار گرهی مختلف

برای بررسی اثرات بردار گرهی، سه نوع برداری گرهی مختلف به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\Xi = H = [0 \ 0 \ 0 \ 0.25 \ 0.5 \ 0.75 \ 1 \ 1 \ 1] \quad \text{بردار گرهی ۱}$$

$$\Xi = H = [0 \ 0 \ 0 \ 0.1 \ 0.2 \ 0.3 \ 1 \ 1 \ 1] \quad \text{بردار گرهی ۲}$$

$$\Xi = H = [0 \ 0 \ 0 \ 0.1 \ 0.4 \ 0.8 \ 1 \ 1 \ 1] \quad \text{بردار گرهی ۳}$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود، فقط بردار گرهی مورد اول به‌صورت بردار گرهی یکنواخت است (فاصله بین گره‌ها با هم برابر است)، در صورتی که دو بردار گرهی دیگر به‌صورت غیریکنواخت است. برای مقایسه بهتر اثر بردار گرهی، نقاط کنترل در هر سه مورد را یکسان و همانند شکل ۵ در نظر می‌گیریم.

مقایسه نتایج در جدول ۳ و شکل ۹ آورده شده است. به‌علت انعطاف‌پذیری توابع ب-اسپلاین، نتایج چندان به بردارهای گرهی مختلف حساس نمی‌باشد.

۵-۳- اثر تعداد نقاط کنترلی

برای بررسی اثرات تعداد نقاط کنترلی، تعداد نقاط کنترلی برابر ۹، ۱۶ و ۳۶ در نظر می‌گیریم. در تمامی حالات، نقاط کنترلی به طوری قرار گرفته‌اند که فاصله آن‌ها با یکدیگر برابر است. بردار گرهی در نظر گرفته برای هر کدام از حالات گفته شده، به‌صورت بردار گرهی یکنواخت است. نتایج در جدول ۴ نشان داده شده است.

مثال ۱

در این مثال، توزیع سرعت در کانال شیبدار با جریان یکنواخت مورد بررسی قرار می‌گیرد. شرایط مرزی در شکل ۴ نشان داده شده است. حل تحلیلی برابر است با:

$$u(x, y) = -\frac{g \sin \alpha}{2\nu} x(x-1) - \frac{g \sin \alpha}{\nu} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2((-1)^n - 1)}{n^3 \pi^3 \cosh(n\pi)} \sin(n\pi x) \cosh(n\pi(y-1)) \quad (27)$$

که g و α به ترتیب برابر با 9.81 m/s^2 و 1° است. برای مدل‌سازی از شبکه کنترلی منظم با 6×6 نقطه کنترلی (شکل ۵) استفاده شده است. درجه توابع نریز به-صورت $p=q=2$ با بردار گرهی یکنواخت به‌صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$\Xi = H = \{0, 0, 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1, 1, 1\}$$

نتایج روش ایزوژئومتریک با شرایط گفته شده در شکل ۶ نشان داده شده است.

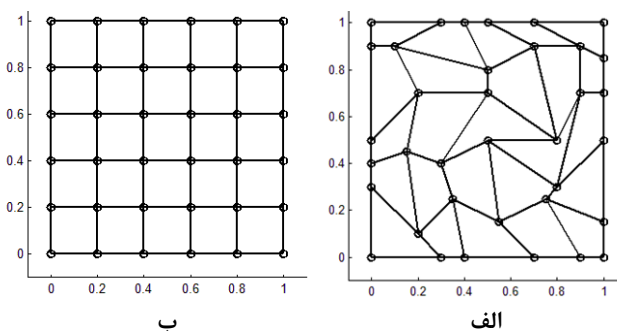
برای مقایسه نتایج روش ایزوژئومتریک با روش اجزای محدود از مدل‌سازی نرم‌افزار آنسیس استفاده شده است. به منظور مقایسه بهتر تعداد نقاط گرهی در روش اجزای محدود را برابر ۳۶ در نظر می‌گیریم. نتایج این مقایسه در جدول ۱ نشان داده شده است.

۵-۱- اثر بی‌نظمی نقاط کنترلی شبکه

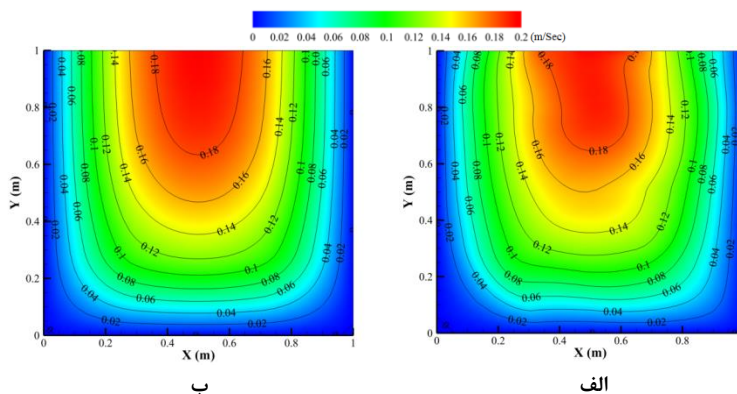
به منظور بررسی چیدمان نقاط کنترلی، نقاط کنترلی مانند شکل ۷الف را در نظر می‌گیریم. بردارهای گرهی و درجه توابع پایه همانند مسئله قبل در نظر می‌گیریم. نتایج بدست آمده با شبکه‌بندی منظم در جدول ۲ و شکل ۸الف مقایسه

جدول ۱- مقایسه نتایج روش تحلیل ایزوژئومتریکی و روش اجزای محدود

X (m)	Y (m)	جواب دقیق (m/Sec)	ایزوژئومتریکی (m/Sec)	اجزای محدود (m/Sec)	درصد خطا ایزوژئومتریکی	درصد خطا اجزای محدود
۰.۲	۰.۲	۰.۰۶۶۲	۰.۰۶۷۴	۰.۰۶۰۷	-۱.۸۱	۸.۳۵
۰.۴	۰.۲	۰.۰۹۳۶	۰.۰۹۳۹	۰.۰۸۰۱	-۰.۳۵	۱۴.۴۱
۰.۵	۰.۲	۰.۰۹۶۹	۰.۰۹۷۱	۰.۰۷۵۵	-۰.۳۰	۲۲.۰۲
۰.۲	۰.۴	۰.۰۹۹۱	۰.۰۹۹۲	۰.۰۸۵۶	-۰.۱۸	۱۳.۵۶
۰.۴	۰.۴	۰.۱۴۴۵	۰.۱۴۴۵	۰.۱۱۴۳	۰.۰۱	۲۰.۹۴
۰.۵	۰.۴	۰.۱۵۰۰	۰.۱۵۰۲	۰.۱۰۹۰	-۰.۱۳	۲۷.۳۱
۰.۲	۰.۶	۰.۱۱۵۷	۰.۱۱۵۸	۰.۰۹۵۸	-۰.۱۱	۱۷.۱۵
۰.۴	۰.۶	۰.۱۷۱۱	۰.۱۷۱۰	۰.۱۸۷	۰.۰۳	۲۴.۷۹
۰.۵	۰.۶	۰.۱۷۷۹	۰.۱۷۷۸	۰.۱۳۳۵	-۰.۰۳	۳۰.۵۶
۰.۲	۰.۸	۰.۱۲۳۵	۰.۱۲۳۶	۰.۰۹۹۰	-۰.۱۰	۱۹.۸۶
۰.۴	۰.۸	۰.۱۸۳۶	۰.۱۸۳۶	۰.۱۳۳۸	-۰.۰۲	۲۷.۱۶
۰.۵	۰.۸	۰.۱۹۱۱	۰.۱۹۱۱	۰.۱۲۹۴	-۰.۰۱	۳۲.۲۷
۰.۲	۱	۰.۱۲۵۸	۰.۱۲۵۸	۰.۰۹۹	-۰.۰۳	۲۰.۵۹
۰.۴	۱	۰.۱۸۷۳	۰.۱۸۷۳	۰.۱۲۸۱	-۰.۰۲	۳۱.۶۲
۰.۵	۱	۰.۱۹۵۰	۰.۱۹۵۰	۰.۱۲۸۵	-۰.۰۲	۳۴.۰۷
میانگین درصد خطای مطلق					۰.۲۱	۲۲.۹۸



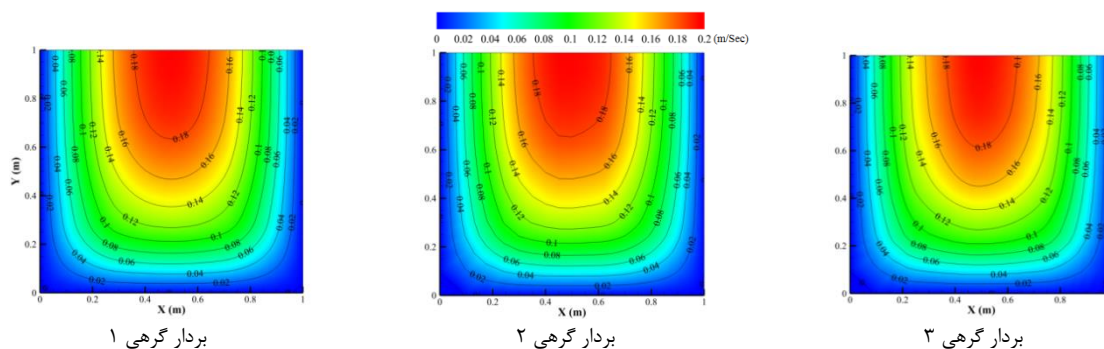
شکل ۷- نقاط کنترلی برای بررسی اثرات چیدمان نقاط کنترلی
(الف) نقاط کنترلی نامنظم، (ب) نقاط کنترلی منظم



شکل ۸- نتایج چیدمان نقاط کنترلی
(الف) نقاط کنترلی نامنظم، (ب) نقاط کنترلی منظم

جدول ۲- بررسی اثرات بردار گرهی

X (m)	Y (m)	جواب دقیق (m/Sec)	حل ایزوژئومتریک (m/Sec)			درصد خطا		
			نوع ۱	نوع ۲	نوع ۳	نوع ۱	نوع ۲	نوع ۳
۰.۲	۰.۲	۰.۰۶۶۲	۰.۰۶۷۴	۰.۰۶۸۲	۰.۰۶۸۴	-۱.۸۱	۳.۰۷	-۳.۲۷
۰.۴	۰.۲	۰.۰۹۳۶	۰.۰۹۳۹	۰.۰۹۴۸	۰.۰۹۴۵	-۰.۳۵	۱.۳۱	-۰.۹۸
۰.۵	۰.۲	۰.۰۹۶۹	۰.۰۹۷۱	۰.۰۹۶۵	۰.۰۹۷۹	-۰.۳۰	-۰.۴۲	-۱.۱۰
۰.۲	۰.۴	۰.۰۹۹۱	۰.۰۹۹۲	۰.۱۰۰۰	۰.۱۰۰۰	-۰.۱۸	۰.۸۸	-۰.۹۱
۰.۴	۰.۴	۰.۱۴۴۵	۰.۱۴۴۵	۰.۱۴۴۴	۰.۱۴۴۳	۰.۰۱	-۰.۰۷	۰.۱۵
۰.۵	۰.۴	۰.۱۵۰۰	۰.۱۵۰۲	۰.۱۴۷۶	۰.۱۵۰۴	-۰.۱۳	-۱.۶۰	-۰.۲۷
۰.۲	۰.۶	۰.۱۱۵۷	۰.۱۱۵۸	۰.۱۱۷۴	۰.۱۱۶۸	-۰.۱۱	۱.۴۷	-۰.۹۳
۰.۴	۰.۶	۰.۱۷۱۱	۰.۱۷۱۰	۰.۱۷۱۶	۰.۱۷۰۸	۰.۰۳	۰.۲۹	۰.۱۲
۰.۵	۰.۶	۰.۱۷۷۹	۰.۱۷۷۸	۰.۱۷۵۷	۰.۱۷۸۴	۰.۰۳	-۱.۲۴	-۰.۳۳
۰.۲	۰.۸	۰.۱۲۳۵	۰.۱۲۳۶	۰.۱۲۵۰	۰.۱۲۴۵	-۰.۱۰	۱.۲۱	-۰.۸۱
۰.۴	۰.۸	۰.۱۸۳۶	۰.۱۸۳۶	۰.۱۸۴۰	۰.۱۸۳۴	۰.۰۲	۰.۲۲	۰.۱۵
۰.۵	۰.۸	۰.۱۹۱۱	۰.۱۹۱۱	۰.۱۸۸۴	۰.۱۹۱۸	-۰.۰۱	-۱.۴۱	-۰.۳۹
۰.۲	۱	۰.۱۲۵۸	۰.۱۲۵۸	۰.۱۲۷۳	۰.۱۲۶۹	-۰.۰۳	۱.۱۹	-۰.۸۸
۰.۴	۱	۰.۱۸۷۳	۰.۱۸۷۳	۰.۱۸۷۵	۰.۱۸۷۲	۰.۰۲	۰.۱۱	۰.۰۵
۰.۵	۱	۰.۱۹۵۰	۰.۱۹۵۰	۰.۱۹۲۱	۰.۱۹۵۹	-۰.۰۲	-۱.۴۹	-۰.۴۸
میانگین درصد خطای مطلق						۰.۲۱	۱.۰۷	۰.۷۲



شکل ۹- حل مثال ۱ با بردار گرهی مختلف

همچنین درجه‌ی توابع نریز برابر $p=q=2$ و بردارهای گرهی در هر دو راستا به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$\Xi = H = [0 \ 0 \ 0 \ 0.14 \ 0.29 \ 0.43 \ 0.57 \ 0.71 \ 0.86 \ 1 \ 1 \ 1]$$

در شکل ۱۴، هندسه ایجاد شده با توابع نریز نشان داده شده است. همان‌طور که از شکل ۱۴ مشخص است با تعداد نقاط کنترلی کم می‌توان قسمت انحنای مرز را مدل‌سازی کرد؛ در حالی که در روش‌های مانند اجزای محدود برای مدل کردن قسمت انحنای باید تعداد گره‌های بیشتری استفاده شود. نتایج خطوط جریان و خطوط هم‌پتانسیل به ترتیب در شکل ۱۵ و ۱۶ همچنین شبکه جریان در شکل ۱۷ نشان داده شده است. همان‌طور که مشخص است، خطوط جریان و خطوط هم‌پتانسیل بر هم عمود هستند.

مثال ۲

در این مثال، جریان غیرچرخشی اطراف مانع دایروی و مستطیلی مدل‌سازی شده است. هندسه و شرایط مرزی در شکل ۱۰، نمایش داده شده است. با توجه به اینکه جریان متقارن است، نصف هندسه در نظر گرفته می‌شود. هندسه و شرایط مرزی برای خطوط جریان و خطوط هم‌پتانسیل به ترتیب، در شکل ۱۱ و شکل ۱۲ نشان داده شده است. چگونگی شرایط مرزی در مرجع [۲۰] آورده شده است. برای مدل‌سازی از ۸۱ نقطه کنترلی برای هر دو مورد استفاده شده است که در شکل ۱۳ نشان داده شده است.

جدول ۳- مقایسه اثرات بردار گرهی روش تحلیل ایزوژئومتریکی

X (m)	Y (m)	Exact (m/Sec)	IA (m/Sec)			IA Error %		
			Case 1	Case 2	Case 3	Case 1	Case 2	Case 3
۰.۲	۰.۲	۰.۰۶۶۲	۰.۰۶۷۴	۰.۰۶۸۲	۰.۰۶۸۴	-۱.۸۱	۳.۰۷	-۳.۲۷
۰.۴	۰.۲	۰.۰۹۳۶	۰.۰۹۳۹	۰.۰۹۴۸	۰.۰۹۴۵	-۰.۳۵	۱.۳۱	-۰.۹۸
۰.۵	۰.۲	۰.۰۹۶۹	۰.۰۹۷۱	۰.۰۹۶۵	۰.۰۹۷۹	-۰.۳۰	-۰.۴۲	-۱.۱۰
۰.۲	۰.۴	۰.۰۹۹۱	۰.۰۹۹۲	۰.۱۰۰۰	۰.۱۰۰۰	-۰.۱۸	۰.۸۸	-۰.۹۱
۰.۴	۰.۴	۰.۱۴۴۵	۰.۱۴۴۵	۰.۱۴۴۴	۰.۱۴۴۳	۰.۰۱	-۰.۰۷	۰.۱۵
۰.۵	۰.۴	۰.۱۵۰۰	۰.۱۵۰۲	۰.۱۴۷۶	۰.۱۵۰۴	-۰.۱۳	-۱.۶۰	-۰.۲۷
۰.۲	۰.۶	۰.۱۱۵۷	۰.۱۱۵۸	۰.۱۱۷۴	۰.۱۱۶۸	-۰.۱۱	۱.۴۷	-۰.۹۳
۰.۴	۰.۶	۰.۱۷۱۱	۰.۱۷۱۰	۰.۱۷۱۶	۰.۱۷۰۸	۰.۰۳	۰.۲۹	۰.۱۲
۰.۵	۰.۶	۰.۱۷۷۹	۰.۱۷۷۸	۰.۱۷۵۷	۰.۱۷۸۴	۰.۰۳	-۱.۲۴	-۰.۳۳
۰.۲	۰.۸	۰.۱۲۳۵	۰.۱۲۳۶	۰.۱۲۵۰	۰.۱۲۴۵	-۰.۱۰	۱.۲۱	-۰.۸۱
۰.۴	۰.۸	۰.۱۸۳۶	۰.۱۸۳۶	۰.۱۸۴۰	۰.۱۸۳۴	۰.۰۲	۰.۲۲	۰.۱۵
۰.۵	۰.۸	۰.۱۹۱۱	۰.۱۹۱۱	۰.۱۸۸۴	۰.۱۹۱۸	-۰.۰۱	-۱.۴۱	-۰.۳۹
۰.۲	۱	۰.۱۲۵۸	۰.۱۲۵۸	۰.۱۲۷۳	۰.۱۲۶۹	-۰.۰۳	۱.۱۹	-۰.۸۸
۰.۴	۱	۰.۱۸۷۳	۰.۱۸۷۳	۰.۱۸۷۵	۰.۱۸۷۲	۰.۰۲	۰.۱۱	۰.۰۵
۰.۵	۱	۰.۱۹۵۰	۰.۱۹۵۰	۰.۱۹۲۱	۰.۱۹۵۹	-۰.۰۲	-۱.۴۹	-۰.۴۸
میانگین درصد خطای مطلق						۰.۲۱	۱.۰۷	۰.۷۲

جدول ۴- مقایسه اثرات تعداد نقاط کنترلی روش تحلیل ایزوژئومتریکی

X (m)	Y (m)	Exact (m/Sec)	IA (m/Sec)			IA Error %		
			CP=9	CP=16	CP=36	CP=9	CP=16	CP=36
۰.۲	۰.۲	۰.۰۶۶۲	۰.۰۵۴۸	۰.۰۶۲۳	۰.۰۶۷۴	۱۷.۲۵	۵.۸۹	-۱.۸۱
۰.۴	۰.۲	۰.۰۹۳۶	۰.۰۸۲۲	۰.۰۹۳۵	۰.۰۹۳۹	۱۲.۱۹	۰.۱۴	-۰.۳۵
۰.۵	۰.۲	۰.۰۹۶۹	۰.۰۸۵۴	۰.۰۹۳۸	۰.۰۹۷۱	۱۱.۸۳	۳.۲	-۰.۳
۰.۲	۰.۴	۰.۰۹۹۱	۰.۰۹۴۳	۰.۰۹۹۷	۰.۰۹۹۲	۴.۷۸	-۰.۶۸	-۰.۱۸
۰.۴	۰.۴	۰.۱۴۴۵	۰.۱۴۱۵	۰.۱۴۹۶	۰.۱۴۴۵	۲.۰۸	-۳.۵۲	۰.۰۱
۰.۵	۰.۴	۰.۱۵۰۰	۰.۱۴۷۴	۰.۱۵۵۸	۰.۱۵۰۲	۱.۷۴	-۳.۸۶	-۰.۱۳
۰.۲	۰.۶	۰.۱۱۵۷	۰.۱۱۸۶	۰.۱۱۴۸	۰.۱۱۵۸	-۲.۵۳	۰.۷۵	-۰.۱۱
۰.۴	۰.۶	۰.۱۷۱۱	۰.۱۷۷۹	۰.۱۷۲۱	۰.۱۷۱۰	-۴	-۰.۶۱	۰.۰۳
۰.۵	۰.۶	۰.۱۷۷۹	۰.۱۸۵۳	۰.۱۷۹۳	۰.۱۷۷۸	-۴.۱۹	-۰.۸۱	۰.۰۳
۰.۲	۰.۸	۰.۱۲۳۵	۰.۱۲۷۶	۰.۱۲۲۵	۰.۱۲۳۶	-۳.۲۴	۰.۷۹	-۰.۱
۰.۴	۰.۸	۰.۱۸۳۶	۰.۱۹۱۴	۰.۱۸۳۷	۰.۱۸۳۶	-۴.۲۳	-۰.۰۴	۰.۰۲
۰.۵	۰.۸	۰.۱۹۱۱	۰.۱۹۹۴	۰.۱۹۱۴	۰.۱۹۱۱	-۴.۳۶	-۰.۱۷	-۰.۰۱
۰.۲	۱	۰.۱۲۵۸	۰.۱۲۱۴	۰.۱۲۵۳	۰.۱۲۵۸	۳.۴۷	۰.۳۷	-۰.۰۳
۰.۴	۱	۰.۱۸۷۳	۰.۱۸۲۰	۰.۱۸۸۰	۰.۱۸۷۳	۲.۸۴	-۰.۳۶	۰.۰۲
۰.۵	۱	۰.۱۹۵۰	۰.۱۸۹۶	۰.۱۹۵۸	۰.۱۹۵۰	۲.۷۵	-۰.۴۳	-۰.۰۲
میانگین درصد خطای مطلق						۵.۴۴	۱.۴۴	۰.۲۱

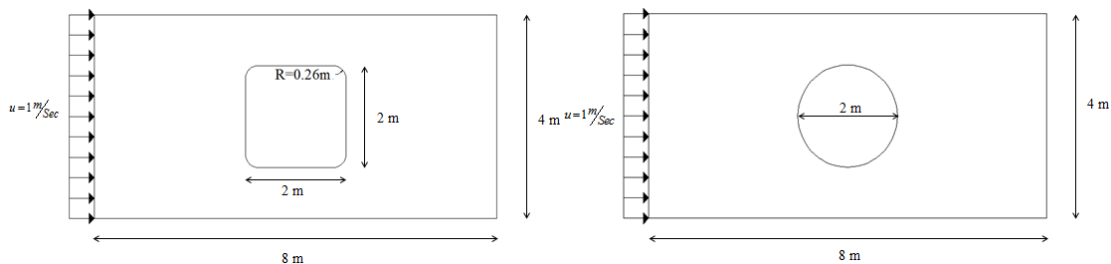
۶- نتایج

چیدمان نقاط کنترل، بردار گرهی مختلف و تعداد نقاط کنترلی، مورد بررسی قرار گرفته است. همان‌طور که مشخص شد، در روش ایزوژئومتریکی با تعداد نقاط کنترلی کمتر می‌توان به جواب مناسبی رسید که این امر موجب کاهش قابل ملاحظه دستگاه معادلات نسبت به روش اجزای محدود

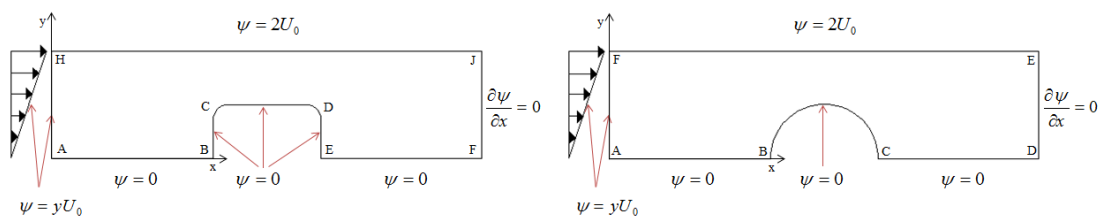
در این مقاله با استفاده از روش ایزوژئومتریکی دو نوع جریان در کانال، مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته است. نتایج بدست آمده از روش تحلیل ایزوژئومتریکی با جواب دقیق و روش اجزای محدود مقایسه شده است. همچنین اثرات

بر این به دلیل انعطاف‌پذیری توابع نریز برای ساخت هندسه پیچیده، می‌توان برای مدل کردن سطوح منحنی با تعداد نقاط کنترلی کمتری از این توابع استفاده کرد.

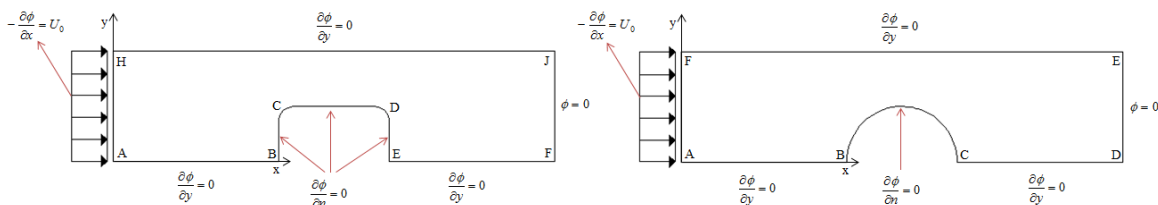
با همان دقت می‌شود. همچنین از دیگر خصوصیات روش ایزوژئومتریک، استفاده از آن در مسائلی است که در دیدگاه لاگرانژی مدل می‌شوند. نتایج روش ایزوژئومتریک نسبت به بردار گرهی و شبکه‌ی کنترلی، حساسیت کمتری دارد. علاوه



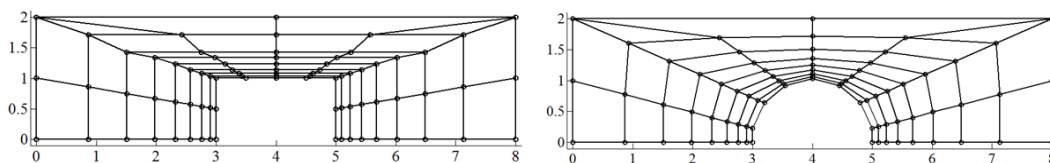
شکل ۱۰- ابعاد و سرعت ورودی مثال ۲



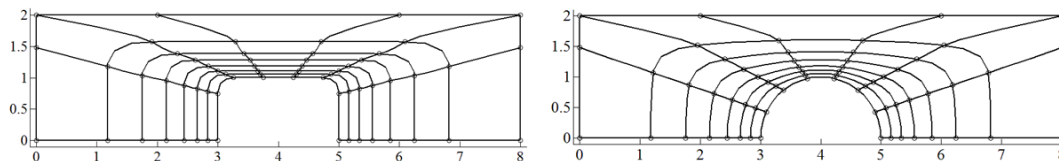
شکل ۱۱- شرایط مرزی خطوط جریان



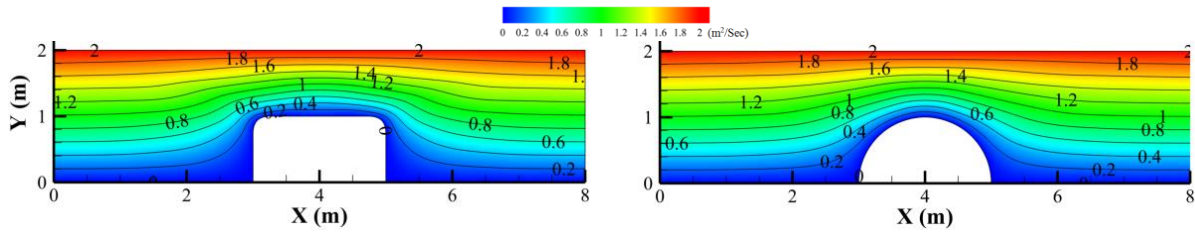
شکل ۱۲- شرایط مرزی خطوط هم‌پتانسیل



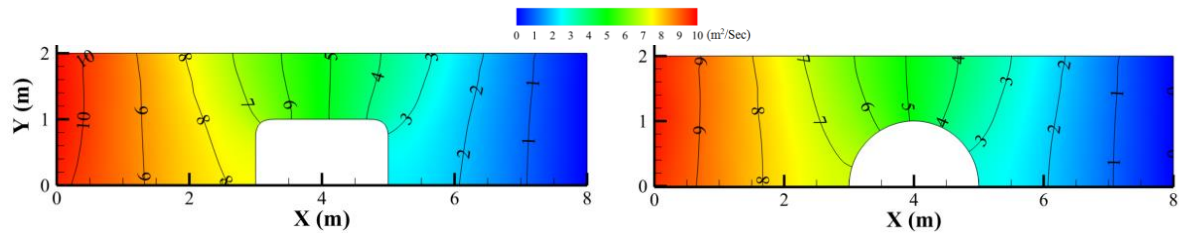
شکل ۱۳- نقاط کنترلی برای مدل‌سازی با روش تحلیل ایزوژئومتریک



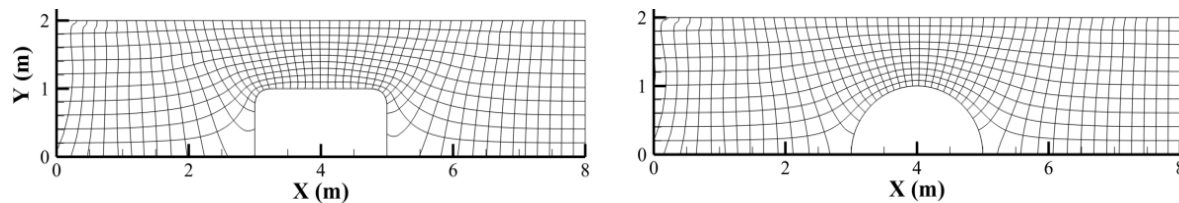
شکل ۱۴- مدل‌سازی هندسی با استفاده از توابع نریز



شکل ۱۵- نتایج خطوط جریان با روش تحلیل ایزوژئومتریک



شکل ۱۶- نتایج خطوط هم‌پتانسیل با روش تحلیل ایزوژئومتریک



شکل ۱۷- شبکه جریان

- [6] Elguedj T, Bazilevs Y, Calo VM, Hughes TJR (2008) B and -F projection methods for nearly incompressible linear and non-linear elasticity and plasticity using higher-order NURBS elements. *Comput Methods Appl Mech Engrg* 197: 2732–2762.
- [7] Bazilevs Y, Calo VM, Cottrell JA, Hughes TJR, Reali A, Scovazzi G (2007) Variational multiscale residualbased turbulence modeling for large eddy simulation of incompressible flows. *Comput Methods Appl Mech Engrg* 197 (1–4): 173–201.
- [8] Bazilevs Y, Calo VM, Hughes TJR, Zhang Y (2008) Isogeometric fluid–structure interaction: theory, algorithms, and computations. *Comput Mech* 43 (1): 3–37.
- [9] Bazilevs Y, Calo VM, Zhang Y, Hughes TJR (2006) Isogeometric fluid–structure interaction analysis with applications to arterial blood flow. *Comput Mech* 38: 310–322.
- [10] Bazilevs Y, Hughes TJR (2008) NURBS-based isogeometric analysis for the computation of flows about rotating components. *Comput Mech* 43: 143–150.

۷- مراجع

- [1] Hughes TGR, Cottrell JA, Bazilevs Y (2005) Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement. *Comput Methods Appl Mech Engrg* 194: 4135–4195.
- [2] Lipton S, Evans JA, Bazilevs Y, Elguedj T, Hughes TJR (2010) Robustness of isogeometric structural discretizations under severe mesh distortion. *Comput Methods Appl Mech Engrg* 199(5–8): 357–373.
- [3] Wall WA, Frenzel MA, Cyron C (2008) Isogeometric structural shape optimization. *Comput Methods Appl Mech Engrg* 197 (33–40): 2976–2988.
- [4] Benson DJ, Bazilevs Y, Hsu MC, Hughes TJR (2010) Isogeometric shell analysis: the Reissner–Mindlin shell. *Comput Methods Appl Mech Engrg* 199 (5–8): 276–289.
- [5] Cottrell JA, Reali A, Bazilevs Y, Hughes TJR (2006) Isogeometric analysis of structural vibrations. *Comput Methods Appl Mech Engrg* 195 (41–43): 5257–5296.

- [15] Rogers DF (2001) An Introduction to NURBS with Historical Perspective, Academic Press, San Diego.
- [16] Dempski K (2003) Focus on Curves and Surfaces. Premier Press. USA.
- [17] Farin G, Hoschek J, Kim MS (2002) Handbook of Computer Aided Geometric Design. Elsevier Press. USA. First edition.
- [18] Salomon D (2006) Curves and Surfaces for Computer Graphics. Springer Press. Printed in the United States of America.
- [19] Fox and McDonald's (2011), Introduction to fluid mechanics. John Wiley & sons. Inc. 8nd ed.
- [20] Reddy J.N. (1993) An Introduction to the finite element method. McGraw-Hill. New York. 2nd ed.
- [11] Gmez H, Calo V, Bazilevs Y, Hughes TJR (2008) Isogeometric analysis of the Cahn–Hilliard phase–field model. *Comput Methods Appl Mech Engrg* 197 (49–50): 4333–4352.
- [12] Piegl L., Tiller W., (1997) *The NURBS Book*, 2nd ed, Springer-Verlag, New York.
- [13] Hassani B, Moghaddam NZ, Tavakkoli SM (2009) Isogeometrical solution of Laplace equation, *Asian J of Civil Eng* 10 (5): 572-592.
- [14] Hassani B, Khanzadi M, Tavakkoli SM, Moghaddam NZ (2009) Isogeometric shape optimization of three dimensional problems. 8th World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization, June 1 - 5, Lisbon, Portugal.