



## تحلیل ترموهیدرودینامیک جریان درون کانال با استفاده از روش شبکه بولتزمن

احد ضرغامی<sup>۱\*</sup>، محمد جواد مغربی<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup> دانشجوی دکتری، دانشکده مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود  
<sup>۲</sup> دانشیار، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد

### چکیده

در این مقاله ترکیب روش حجم محدود با روش شبکه بولتزمن برای تحلیل رفتار ترمو-هیدرودینامیک جریان سیال تراکم ناپذیر ارائه شده است. بدین منظور از مدل تابع توزیع دوگانه برای معادلات گرمایی بولتزمن استفاده شده است. به منظور افزایش پایداری و همگرایی معادلات فاکتورهای تصحیح مرتبه دوم در محاسبه جملات شار مورد استفاده قرار گرفته اند. علاوه بر آن، شرایط مرزی مختلف بر مبنای طرح مرکزیت سلول معرفی شده اند که برای این منظور از یک شبکه اضافی بر روی گره های مرزی استفاده شده است. توابع توزیع مجهول انرژی نیز در مرزها به دو بخش تعادلی و غیر تعادلی تجزیه شده اند که بخش غیر تعادلی با استفاده از برونیابی بخش های غیر تعادلی گره های همسایه محاسبه گردیده اند که این امر موجب افزایش سرعت همگرایی و پایداری حل گردیده است. نتایج عددی برای جریان سیال تراکم ناپذیر درون کانال دوبعدی نشان داده شده است که مقایسه نتایج بدست آمده با نتایج معتبر بیانگر دقت بالای روش مورد استفاده می باشد.

**کلمات کلیدی:** روش شبکه بولتزمن؛ حجم محدود؛ تابع توزیع دوگانه؛ سیال تراکم ناپذیر؛ ترمو-هیدرودینامیک.

### ۱- مقدمه

نظر گرفته می شوند. این ذرات می توانند در هر جهتی حرکت کنند، بطوریکه معادله حرکت آنها به صورت آماری و بوسیله معادلات توزیع بیان می گردد. روش شبکه بولتزمن یکی از مهمترین روش های مزوسکوپیک در تحلیل جریان سیالات می باشد. در این روش، تعداد ذرات توزیع شده در میدان، با تعداد مولکولها نسبتی ندارد و فقط به شبکه و تعداد گره ها بستگی دارد.

در سالهای اخیر روش شبکه بولتزمن بعنوان روشی جایگزین برای شبیه سازی جریانهای مختلف سیال مورد توجه

در تحلیل جریان سیال سه دیدگاه میکروسکوپیک، مزوسکوپیک و ماکروسکوپیک به کار می روند. از دیدگاه میکروسکوپیک، حرکت منفرد ذرات در مسافت آزاد متوسط آنها بررسی می شود. این روش مدل سازی برای حل مسایل مهندسی غیرممکن بوده و یا مقرون به صرفه نیست. دیدگاه مزوسکوپیکی میان دو دیدگاه میکروسکوپیکی و ماکروسکوپیکی قرار دارد و به جای یک مولکول یا یک ذره منفرد از سیال، مجموعه ای از مولکولها به عنوان یک ذره در

\* نویسنده مسئول. تلفن: ۰۹۳۷۸۹۵۶۴۳۰

آدرس پست الکترونیک: a.zarghami@fsriau.ac.ir

یافتند اما همچنان محدودیت این روش برای پیرانتل پابرجاست.

در روش اسکالر غیرفعال از یک تابع توزیع مجزا برای حل معادلات گرما استفاده می‌شود [۱۲]. این روش دارای پایداری عددی بهتری نسبت به روش چند سرعتی می‌باشد اما پنگ<sup>۲</sup> و همکاران [۱۶] در تحقیقی نشان دادند که این روش محدود به جریاناتی است که در آنها می‌توان از اتلافات ناشی از لزجت سیال و همچنین کار تراکمی ناشی از تغییرات فشار صرف‌نظر کرد. شی<sup>۳</sup> و همکاران [۱۷] در تحقیقی مدلی از این روش پیشنهاد دادند که با استفاده از آن می‌توان اتلافات ناشی از لزجت سیال را در محدوده تراکم‌ناپذیری در محاسبات در نظر گرفت.

روش تابع توزیع دوگانه در واقع شکل تکامل یافته روش اسکالر غیر فعال می‌باشد که در آن اتلافات ناشی از لزجت سیال و همچنین کار تراکمی ناشی از تغییرات فشار در معادله انرژی بولتزمن در نظر گرفته می‌شود [۱۸ و ۱۹]. در این روش دو تابع توزیع مجزا برای میدانهای جریان و انرژی در نظر گرفته شده و بطور همزمان حل می‌شوند. همچنین برای هر تابع توزیع یک زمان رهایش جداگانه تعریف می‌شود که این موضوع محدودیت روش چند سرعتی را نیز مرتفع می‌سازد و دارای پایداری بسیار خوبی نیز می‌باشد. استفاده از این روش بعنوان یک روش موفق در تحقیقات جدید مورد استفاده بسیاری از محققان قرار گرفته‌است [۲۰ و ۲۱].

انگیزه اصلی انجام این تحقیق ارائه یک مدل پایدار و دقیق جهت تحلیل ترمو-هیدرودینامیک جریان سیال تراکم‌ناپذیر می‌باشد. بدین منظور، روش حجم محدود با طرح مرکزیت سلول بر روی شبکه  $D_2Q_9$  اعمال و از آن برای گسسته‌سازی معادلات جریان و انرژی بولتزمن استفاده خواهد شد. همچنین به منظور افزایش پایداری از مدل تابع توزیع دوگانه برای تحلیل میدان دما استفاده شده است. استفاده از فاکتورهای تصحیح شار در معادلات جریان و انرژی منجر به افزایش پایداری و سرعت همگرایی شبیه‌سازی در مقایسه با دیگر روشهای متداول حجم محدود - شبکه بولتزمن می‌شود. بنابراین با استفاده از این طرح‌ها، دقت حل

بسیاری از محققین قرار گرفته است [۱-۵]. برتری ویژه این روش نسبت به روشهای متداول، برنامه نویسی ساده آن می‌باشد که منجر به نوشتن کدهای ساده‌تر و در نهایت سرعت بیشتر شبیه‌سازی‌ها می‌شود. در عین حال استفاده از روش شبکه بولتزمن دارای محدودیت‌هایی نیز می‌باشد. از آن جمله می‌توان به این موضوع اشاره کرد که این روش بطورکلی برای شبکه‌های کارتزین یکنواخت بنا شده‌است. اما همانطور که می‌دانیم، استفاده از شبکه‌های یکنواخت در بسیاری از مسایل مهندسی مشکل و شاید غیرممکن می‌باشد. به همین دلیل در سالهای اخیر، محققان بسیاری سعی در استفاده از شبکه‌های بی‌سازمان یا استفاده از طرحهای گوناگون نموده‌اند تا به نحوی بر این مشکل غلبه کنند که برای مطالعه بیشتر می‌توان به مراجع ذکر شده در [۶] رجوع کرد. اما در نهایت می‌توان گفت که امروزه ترکیب روش حجم محدود با روش شبکه بولتزمن بدلیل توانمندی، انعطاف‌پذیری زیاد و سازگاری فیزیکی آن در تحلیل مسایل پیچیده، مورد توجه محققان بسیاری قرار گرفته است [۷-۱۱].

نکته‌ای که می‌بایست به آن اشاره نمود این است که برخلاف رشد قابل توجه تحلیل جریانهای مختلف با استفاده از روش شبکه بولتزمن، تحلیل مسائل توام با انتقال گرما به تازگی مورد توجه دانشمندان قرار گرفته است و این مبحث بعنوان یک موضوع جدید در این زمینه معرفی می‌شود. بطورکلی مدل‌های گرمایی مورد استفاده در روش شبکه بولتزمن را می‌توان به مدل‌های چندسرعتی، اسکالر غیر فعال و تابع توزیع دوگانه تقسیم بندی نمود.

در روش چند سرعتی از یک تابع توزیع برای جریان سیال و انتقال گرما استفاده می‌شود و سپس از جملات مرتبه بالاتر سرعت در تقریب تابع توزیع تعادلی استفاده می‌شود [۱۲]. به دلیل استفاده از یک زمان آرامش، این روش محدود به عدد پیرانتل برابر با نیم بوده که این موضوع مهمترین ضعف این مدل می‌باشد [۱۳]. همچنین تحقیقات برخی از محققین نشان داد که پایداری عددی این روش کم می‌باشد [۱۴]. فونیر<sup>۱</sup> و همکاران [۱۵] در تحقیقی به بهبودی قابل توجهی در پایداری عددی این روش برای اعداد ماخ پایین دست

<sup>2</sup> Peng Y

<sup>3</sup> Shi Y

<sup>1</sup> Fournier R.

تابع توزیع تعادلی انرژی،  $f^{eq}$ ، نیز بصورت زیر می‌باشد [۲۳]:

$$g_0^{eq} = -\frac{2\rho\varepsilon \mathbf{u}^2}{3c^2}$$

$$g_{1-4}^{eq} = \frac{\rho\varepsilon}{9} \left[ \frac{3}{2} + \frac{3}{2c^2} \bar{v}_i \cdot \mathbf{u} + \frac{9}{2c^4} (\bar{v}_i \cdot \mathbf{u})^2 - \frac{3}{2c^2} \mathbf{u}^2 \right] \quad (5)$$

$$g_{5-8}^{eq} = \frac{\rho\varepsilon}{36} \left[ 3 + \frac{6}{c^2} \bar{v}_i \cdot \mathbf{u} + \frac{9}{2c^4} (\bar{v}_i \cdot \mathbf{u})^2 - \frac{3}{2c^2} \mathbf{u}^2 \right]$$

در معادلات فوق،  $\varepsilon = DRT/2$  انرژی داخلی،  $D$  بعد مساله و  $R$  ثابت جهانی گازها می‌باشد. همچنین، لزجت سینماتیک و ضریب پخش حرارتی نیز به ترتیب با روابط  $\nu = c_s^2 \tau_f$  و  $\alpha = 2c_s^2 \tau_g$  بیان می‌شوند که در این روابط  $c_s = c/\sqrt{3}$  سرعت صوت می‌باشد [۲۳].

سرعت‌های گسسته نیز با توجه به شکل ۱ برای شبکه  $D_2Q_9$  برابر با  $\bar{v}_i = \lambda_i (\cos \theta_i, \sin \theta_i)$  و  $\bar{v}_0 = 0$  می‌باشد که برای جهات  $i = 1 \sim 4$  مقادیر  $\lambda_i = 1, \theta_i = (i-1)\pi/2$  و برای  $i = 5 \sim 8$  مقادیر  $\lambda_i = \sqrt{2}, \theta_i = (i-5)\pi/2 + \pi/4$  می‌باشد. در روش شبکه بولتزن، کمیت‌های ماکروسکوپی با مجموع‌گیری از توابع توزیع محاسبه می‌شوند. به عبارت دیگر، چگالی  $\rho = \sum_i f_i$ ، سرعت  $\rho \mathbf{u} = \sum_i f_i \bar{v}_i$  و انرژی داخلی  $\varepsilon = \sum_i g_i$  می‌باشد. همچنین فشار نیز بر اساس قانون گازهای ایده‌آل و بصورت  $p = c_s^2 \rho$  بدست می‌آید [۲۴].

### ۳- فرمولبندی ریاضی

در این قسمت گسسته‌سازی معادلات با استفاده از روش حجم محدود با طرح مرکزیت سلول ارائه خواهند شد. شکل ۲ شماتیک طرح مرکزیت سلول را بر روی شبکه چهارضلعی نشان می‌دهد. برای سهولت، شکل انتگرالی معادله بولتزن را بصورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \bar{v}_i \cdot \nabla \varphi = -\frac{1}{\tau_\varphi} (\varphi - \varphi^{eq}) \quad (6)$$

که در معادله فوق اگر  $\varphi = f$  باشد، معادله بولتزن برای جریان و اگر  $\varphi = g$  باشد، معادله بولتزن برای انتقال می‌باشد. تقریب جمله اول معادله فوق برای سلول  $(I, J)$  بصورت زیر خواهد بود:

$$\int_{abcd} \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} dA \approx \left[ \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} \right]_{I,J} \cdot A_{I,J} \quad (7)$$

و پایداری آن افزایش و در عین حال تعداد گام محاسباتی لازم برای رسیدن به دقت مورد نظر، کاهش خواهد یافت. در نهایت به منظور ارزیابی روش مورد استفاده، نتایج برای جریان درون کانال دوبعدی ارائه و با نتایج تحلیلی و عددی معتبر مقایسه خواهند شد.

### ۲- روش شبکه بولتزن

معادلات جریان و انرژی بولتزن با استفاده از تقریب BGK بصورت زیر می‌باشند [۲۲]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \bar{v}_i \cdot \nabla f = -\frac{1}{\tau_f} (f - f^{eq}) \quad (1)$$

و

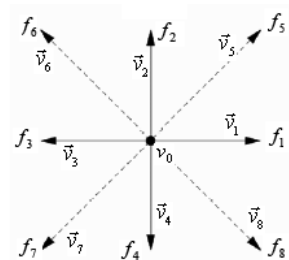
$$\frac{\partial g}{\partial t} + \bar{v}_i \cdot \nabla g = -\frac{1}{\tau_g} (g - g^{eq}) \quad (2)$$

در معادلات فوق،  $f$  و  $g$  به ترتیب بیانگر توابع توزیع ذره و انرژی در جهت سرعت‌های گسسته  $\bar{v}_i$  می‌باشند.  $\tau_f$  و  $\tau_g$  نیز به ترتیب معرف زمان آرامش برای جریان و انرژی می‌باشند که در واقع نرخ رسیدن جریان به حالت تعادل را کنترل می‌کنند. همچنین،  $f^{eq}$  و  $g^{eq}$  بیانگر توابع توزیع تعادل ذره و انرژی می‌باشند. تابع توزیع تعادلی ذرات،  $f^{eq}$ ، برای شبکه دوبعدی متداول  $D_2Q_9$  (شکل ۱) بصورت زیر می‌باشد:

$$f_i^{eq}(\bar{x}, t) = w_i \rho \left[ c_1 + c_2 (\bar{v}_i \cdot \mathbf{u}) + c_3 (\bar{v}_i \cdot \mathbf{u})^2 + c_4 (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) \right] \quad (3)$$

که  $c_1 = 1, c_2 = 1/2c_s^2, c_3 = 1/2c_s^4, c_4 = -1/2c_s^2$  و چگالی می‌باشد. همچنین  $w_i$  تابع وزنی است که دارای مقادیر زیر برای شبکه  $D_2Q_9$  می‌باشد:

$$w_i = \begin{cases} 4/9 & \dots \dots \dots i = 0 \\ 1/9 & \dots \dots \dots i = 1 \sim 4 \\ 1/36 & \dots \dots \dots i = 5 \sim 8 \end{cases} \quad (4)$$



شکل ۱- سرعت های گسسته در مدل  $D_2Q_9$

فاکتورها بر این اصل استوار می‌باشد که در جریان سیال، فشار عامل اصلی انتقال جریان از یک سلول به سلول دیگر می‌باشد و به همین ترتیب، دما عامل اصلی انتقال گرما بین سلولهای مختلف شبکه می‌باشد. این ضرایب بصورت زیر تعریف می‌شوند [۲۷]:

$$\begin{aligned} \xi_{ab-Left} &= \frac{\theta_{I-1,J}}{\theta_{I-1,J} + \theta_{I,J}}, \xi_{ab-Right} = \frac{\theta_{I,J}}{\theta_{I,J} + \theta_{I+1,J}} \\ \Rightarrow \xi_{ab} &= \frac{\xi_{ab-Left} + \xi_{ab-Right}}{2} \\ \xi_{bc-Bottom} &= \frac{\theta_{I,J-1}}{\theta_{I,J} + \theta_{I,J-1}}, \xi_{bc-Top} = \frac{\theta_{I,J}}{\theta_{I,J+1} + \theta_{I,J}} \\ \Rightarrow \xi_{bc} &= \frac{\xi_{bc-Bottom} + \xi_{bc-Top}}{2} \\ \xi_{cd-Right} &= \frac{\theta_{I+1,J}}{\theta_{I,J} + \theta_{I+1,J}}, \xi_{cd-Left} = \frac{\theta_{I,J}}{\theta_{I,J} + \theta_{I-1,J}} \\ \Rightarrow \xi_{cd} &= \frac{\xi_{cd-Right} + \xi_{cd-Left}}{2} \\ \xi_{da-Top} &= \frac{\theta_{I,J+1}}{\theta_{I,J} + \theta_{I,J+1}}, \xi_{da-Bottom} = \frac{\theta_{I,J}}{\theta_{I,J} + \theta_{I,J-1}} \\ \Rightarrow \xi_{da} &= \frac{\xi_{da-Top} + \xi_{da-Bottom}}{2} \end{aligned} \quad (11)$$

در معادله فوق اگر  $\theta = p$  باشد، ضرایب تصحیح برای معادله جریان و اگر  $\theta = T$  باشد، ضرایب تصحیح برای معادله انتقال گرما مورد استفاده قرار می‌گیرند. بنابراین جمله شار بصورت زیر بازنویسی خواهد شد:

$$\begin{aligned} S_i &\approx \bar{v}_i \cdot N_{ab} (\xi_{ab} [f_i]_{I,J} + (1 - \xi_{ab}) [f_i]_{I+1,J}) \\ &+ \bar{v}_i \cdot N_{bc} (\xi_{bc} [f_i]_{I,J} + (1 - \xi_{bc}) [f_i]_{I,J+1}) \\ &+ \bar{v}_i \cdot N_{cd} (\xi_{cd} [f_i]_{I,J} + (1 - \xi_{cd}) [f_i]_{I-1,J}) \\ &+ \bar{v}_i \cdot N_{da} (\xi_{da} [f_i]_{I,J} + (1 - \xi_{da}) [f_i]_{I,J-1}) \end{aligned} \quad (12)$$

با فرض رفتار خطی  $f_i, f_i^{eq}$  در هر سلول داخلی، انتگرال-گیری از جمله برخورد در معادله بولتزمن بصورت زیر می‌باشد [۲۸]:

$$\begin{aligned} Q_i &= - \int_{abcd} \frac{1}{\tau_\phi} (\phi_i - \phi_i^{eq}) dA = - \frac{A_{I,J}}{\tau_\phi} \left[ \frac{1}{4} [\phi_i^{ne}]_{I,J} + \right. \\ &\frac{1}{8} \{ [\phi_i^{ne}]_{I+1,J} + [\phi_i^{ne}]_{I,J+1} + [\phi_i^{ne}]_{I-1,J} + [\phi_i^{ne}]_{I,J-1} \} + \\ &\left. \frac{1}{16} \{ [\phi_i^{ne}]_{I+1,J-1} + [\phi_i^{ne}]_{I-1,J+1} + [\phi_i^{ne}]_{I-1,J-1} + [\phi_i^{ne}]_{I+1,J+1} \} \right] \end{aligned} \quad (13)$$

$A_{I,J}$  مساحت سلول  $abcd$  می‌باشد. معمولاً از روش اویلر مرتبه اول برای تقریب معادله (۷) استفاده می‌شود:

$$\left[ \frac{\partial \phi_i}{\partial t} \right]_{I,J} = \frac{(\phi_i)_{I,J}^{n+1} - (\phi_i)_{I,J}^n}{\Delta t} \quad (8)$$

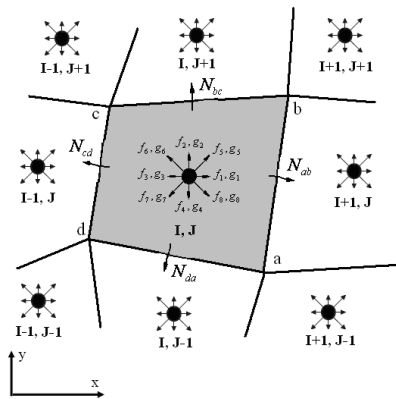
گسسته سازی جمله شار بصورت زیر می‌باشد:

$$\int_{abcd} \bar{v}_i \cdot \nabla \phi_i dA = \int_{abcd} \{ v_{ix} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} + v_{iy} \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \} dA \quad (9)$$

با اعمال قضیه گرین، انتگرال فوق را می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \int_{abcd} \bar{v}_i \cdot \nabla \phi_i dA &= \int_{abcd} \left\{ \frac{\partial (v_{ix} \phi_i)}{\partial x} + \frac{\partial (v_{iy} \phi_i)}{\partial y} \right\} dx dy = \\ &\oint_{around I,J} (v_{ix} \phi_i dy - v_{iy} \phi_i dx) \approx \left\{ \frac{[\phi_i]_{I,J} + [\phi_i]_{I+1,J}}{2} v_i \cdot N_{ab} + \right. \\ &\frac{[\phi_i]_{I-1,J} + [\phi_i]_{I,J}}{2} v_i \cdot N_{bc} + \frac{[\phi_i]_{I,J} + [\phi_i]_{I+1,J}}{2} v_i \cdot N_{cd} + \\ &\left. \frac{[\phi_i]_{I,J-1} + [\phi_i]_{I,J}}{2} v_i \cdot N_{da} \right\} \end{aligned} \quad (10)$$

در این معادله،  $N_k = (\Delta y \bar{j} - \Delta x \bar{i})_k$  بردار نرمال اضلاع  $k = ab, bc, cd, da$  می‌باشد. این فرمول‌بندی به روش میانگین‌گیری شار معروف می‌باشد. این تقریب دارای دقت مرتبه دوم در شبکه کارتزین می‌باشد ولی در حالت کلی پایداری آن کم می‌باشد [۲۵ و ۲۶].



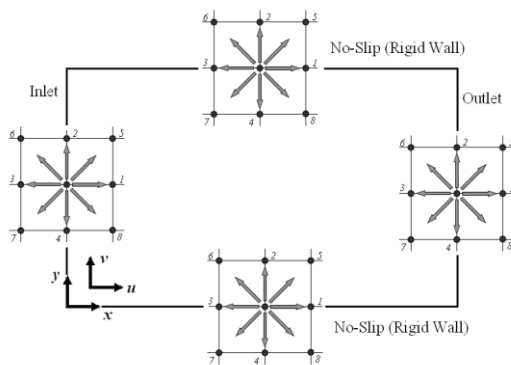
شکل ۲- شماتیک گسسته سازی به روش حجم محدود با طرح مرکزیت سلول

در این تحقیق به منظور افزایش دقت و پایداری جمله شار از فاکتورهای تصحیح مبتنی بر فشار و دما برای معادلات جریان و انرژی بولتزمن و استفاده خواهد شد. معرفی این

در بسیاری از مسایل شرط مرزی دیوار صلب یا بدون لغزش وجود دارد. اعمال شرط دیوار صلب در روش شبکه بولتزن تحت عنوان قانون بازگشت به عقب انجام می‌گیرد. این قانون بیان می‌کند که در مرز دیوار صلب، توابع توزیع مجهول از توابع توزیع معلومی که در خلاف جهت آنها در گره مرزی وجود دارند، بدست می‌آیند [۳۰]. برای درک بهتر این موضوع، مرز پایینی کانال شکل ۳ را که بیانگر شرط مرزی دیوار صلب می‌باشد در نظر گرفته می‌شود. توابع توزیع مجهول بصورت زیر بدست می‌آیند:

$$f_2 = f_4, f_5 = f_7, f_6 = f_8 \quad (18)$$

این روابط بیان می‌کنند که ذرات پس از برخورد به مرز به همان گره‌ای که از آن منتشر شده‌اند، باز می‌گردند.



شکل ۳- شرایط مرزی جریان در دامنه محاسباتی

در این تحقیق از روش مطرح شده توسط تانگ<sup>۱</sup> و همکاران [۳۲] برای اعمال شرایط مرزی گرمایی استفاده خواهد شد. در این روش، توابع توزیع مجهول انرژی در گره مرزی به دو بخش تعادلی و غیرتعادلی تجزیه شده و سپس قسمت غیرتعادلی با استفاده از برونمایی از گره‌های مجاور درون دامنه تعیین می‌شود. در [۳۲] ثابت شده است که این روش دارای دقت مرتبه دوم برای مرزهای صاف می‌باشد. بنابراین تابع توزیع انرژی  $g_i$  در گره مرزی بصورت زیر محاسبه می‌شود:

در رابطه فوق  $\varphi_i^{ne} = \varphi_i - \varphi_i^{eq}$  بیانگر بخش غیرتعادلی تابع توزیع می‌باشد. خطا یا معیار همگرایی برای جریان و گرما نیز توسط روابط زیر محاسبه می‌شوند:

$$E_{hydro} = \frac{\sum_{I,J} \left| \sqrt{(u_{I,J}^2 + v_{I,J}^2)^{n+1}} - \sqrt{(u_{I,J}^2 + v_{I,J}^2)^n} \right|}{\sum_{I,J} \left| \sqrt{(u_{I,J}^2 + v_{I,J}^2)^{n+1}} \right|} \quad (14)$$

#### ۴- شرایط مرزی

در این تحقیق به منظور اعمال شرایط مرزی، یک گره اضافی بر روی مرزها در نظر گرفته شده است. بنابراین هر گره مرزی همانند گره‌های داخل دامنه محاسباتی رفتار می‌کند به جز اینکه جمله شار در مرزها بایستی به نحو صحیحی تعیین شوند.

برای نشان دادن نحوه اعمال شرایط مرزی، شکل ۳ را در نظر بگیرید. با معلوم بودن مقادیر ماکروسکوپی در مرز ورودی، برای هر سلول در مرز ورودی ( $I = 1, J$ ) توابع توزیع در سه جهت ۱، ۵ و ۸ مجهول می‌باشند که بصورت زیر از توابع توزیع معلوم بدست می‌آیند:

$$\begin{aligned} f_1 &= f_3 + 2(\rho_{inlet} \cdot u_{inlet})/3 \\ f_5 &= f_7 + 0.5(f_4 - f_2) + (\rho_{inlet} \cdot u_{inlet})/6 \\ f_8 &= f_6 + 0.5(f_2 - f_4) + (\rho_{inlet} \cdot u_{inlet})/6 \end{aligned} \quad (15)$$

رابطه فوق به روش زو و هی موسوم می‌باشد، چرا که توسط این دو محقق برای اولین بار معرفی شد [۳۰]. توجه شود که دیگر توابع توزیع در مرز ورودی که تحت عنوان توابع توزیع معلوم از آنها یاد می‌شود با استفاده از برونمایی از درون دامنه تعیین می‌شوند:

$$f_i(I=1, J) = 1.5f_i(I=2, J) - 0.5f_i(I=3, J) \quad (16)$$

$$\therefore i = 0, 2, 3, 4, 6, 7$$

در مرز خروجی، یعنی  $I = N_x$  نیز معمولاً از شرط مرزی فشار استفاده می‌شود. بدین‌منظور از توابع توزیع تعادلی برای تعیین توابع مجهول (جهت‌های ۳، ۶ و ۷) در خروجی استفاده می‌شود، یعنی  $f_i = f_i^{eq}$ . دیگر توابع توزیع نیز همانند ورودی با برونمایی از گره‌های مرزی و بصورت زیر بدست می‌آیند [۳۱]:

$$\begin{aligned} f_i(I = N_x, J) &= \\ 1.5f_i(I = N_x - 1, J) - 0.5f_i(I = N_x - 2, J) \end{aligned} \quad (17)$$

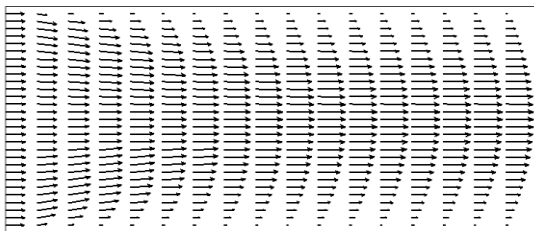
<sup>1</sup> Tang GH

تجربی بصورت معادله زیر برای محاسبه این طول در رینولدزهای پایین ارائه داده است.

$$\frac{l_{developing}}{H} = \frac{0.63}{0.035 Re + 1} + 0.044 Re \quad (21)$$

در شبیه‌سازی‌های عددی، نقطه‌ای را که در آن سرعت خط مرکزی کانال به ۰.۹۹ سرعت خروجی یا  $U_{C.L} = 0.99U_{max}$  رسیده است را محاسبه کرده و بعنوان طول توسعه یافتگی معرفی می‌کنند.

شکل ۴ بردارهای سرعت را در قسمتی از دامنه جریان برای  $Re = 29$  نشان می‌دهد. اندازه سرعت یکنواخت در ورودی برابر با  $U_{avr} = 0.1$  در نظر گرفته شده است. در این شکل، رشد لایه مرزی بر روی دیوارها به خوبی قابل مشاهده می‌باشد.



شکل ۴- بردارهای سرعت حاصل از شبیه سازی در قسمتی از دامنه در  $Re = 29$

شکل ۵ پروفیل مولفه افقی بردار سرعت جریان را در ایستگاه‌های مختلف نشان می‌دهد. همانطور که مشاهده می‌شود، مولفه افقی سرعت با فاصله گرفتن از مقطع ورودی به شکل سهمی شکل در می‌آید که در واقع همان شکل پروفیل سرعت در ناحیه کاملاً توسعه یافته می‌باشد. مقایسه نتایج عددی با حل تحلیلی جریان در ناحیه توسعه یافته نیز در شکل ۶ نشان داده شده است که بیانگر دقت بالای روش شبیه‌سازی می‌باشد. قابل ذکر است که حداکثر خطای اندازه گیری شده با حل تحلیلی در حدود ۳٪ می‌باشد.

همچنین شکل ۷ نشان می‌دهد که مقدار مولفه عمودی سرعت با فاصله گرفتن از مقطع ورودی، کاهش می‌یابد، بطوریکه در ناحیه توسعه یافته می‌توان از مقدار آن صرف نظر کرد.

$$g_i(x_b) = g_i^{eq}(x_b, \rho_b, \varepsilon_b) + [g_i(x_f) - g_i^{eq}(x_f, \rho_f, \varepsilon_f)] \quad (19)$$

در رابطه فوق زیرنویس های  $b$  و  $f$  به ترتیب بیانگر گره مرزی و نزدیک‌ترین گره همسایه به مرز می‌باشند. همچنین چگالی جریان در گره مرزی است که با یک تقریب مناسب می‌توان چگالی در نقطه  $x_f$  را به جای آن در نظر گرفت. همچنین در رابطه فوق  $\varepsilon_b = C_v T_b + u_b^2/2$  است که  $T_b$  دمای دیواره می‌باشد.

## ۵- نتایج

جریان بین دو صفحه یا پوزیه صفحه‌ای علاوه بر حل تحلیلی، بطور وسیعی به روشهای مختلف دینامیک سیالات محاسباتی حل شده است. بنابراین شبیه‌سازی این جریان و مقایسه نتایج بدست آمده با نتایج تحلیلی و عددی معتبر، می‌تواند بیانگر دقت و صحت روش مورد استفاده باشد.

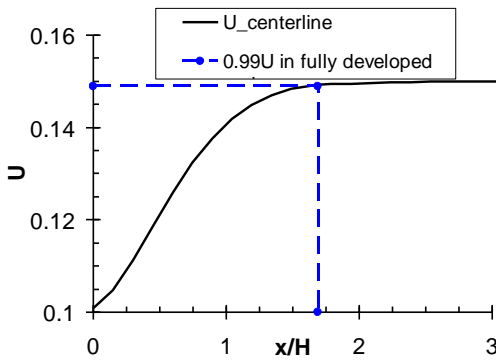
برای شروع شبیه‌سازی، یک جریان سیال با سرعت یکنواخت  $U_{avr} = 0.1$  وارد یک کانال با طول  $L = 0.8$  و عرض  $H = 0.06$  می‌شود. عدد رینولدز بصورت  $Re = U_{avr} H / \nu$  تعریف می‌شود که در آن  $\nu$  لزجت سینماتیکی سیال و  $H$  عرض کانال می‌باشد. توجه شود که از ماکزیمم سرعت درون کانال،  $U_{max}$ ، و عرض کانال بعنوان سرعت مشخصه و طول مشخصه برای بی‌بعدسازی نتایج استفاده شده است. البته در بعضی از موارد نیز از نیم عرض کانال،  $h$ ، بعنوان طول مشخصه استفاده خواهد شد.

همانطور که اشاره شد، حل تحلیلی برای این جریان وجود دارد [۳۴]. حل تحلیلی بیان می‌کند که توزیع پروفیل سرعت در ناحیه توسعه یافته، برای جریان بین دو صفحه که در فاصله  $H = 2h$  از یکدیگر قرار گرفته‌اند، بصورت سهمی شکل بوده و با رابطه زیر بیان می‌شود:

$$u(y) = U_{max} \left(1 - (y/h)^2\right) = 1.5 U_{avr} \left(1 - (y/h)^2\right) \quad (20)$$

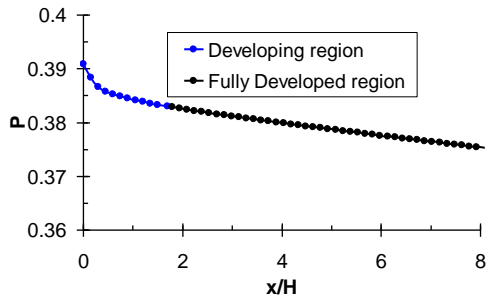
قابل ذکر است که تحقیقات تجربی مختلفی نیز برای بدست آوردن یک رابطه جهت محاسبه طول توسعه‌یافتگی انجام گرفته است که مهمترین آنها تحقیقی است که توسط چن [۳۵] انجام گرفته است و در آن یک رابطه تحلیلی -

سرعت ماکزیمم در خروجی کانال، که همان ناحیه کاملاً توسعه یافته است را محاسبه می‌کنیم. در این شبیه‌سازی این فاصله  $l_{developing} = 1.68H$  بدست آمد. با استفاده از رابطه (۲۱) مقدار این طول  $l_{developing} = 1.58H$  بدست می‌آید که با نتیجه حاصل از شبیه‌سازی حدود ۵/۶٪ اختلاف دارد. البته باید توجه داشت که رابطه (۲۱) یک رابطه تقریبی است.



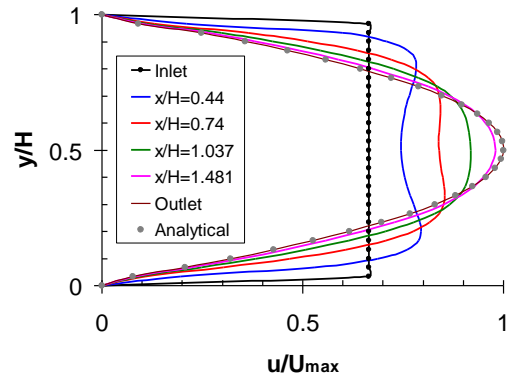
شکل ۸- سرعت خط مرکزی در جریان بین دو صفحه و مشخص کردن طول توسعه یافتگی در  $Re = 29$

شکل ۹ توزیع فشار را در خط مرکزی کانال نشان می‌دهد. ملاحظه می‌شود که در ناحیه جریان در حال توسعه، توزیع فشار خطی نیست اما در ناحیه توسعه یافته رفتار توزیع فشار خطی شده با یک شیب ثابت کاهش می‌یابد.

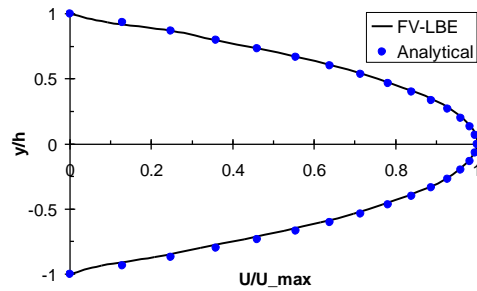


شکل ۹- توزیع فشار در خط مرکزی کانال در  $Re = 29$

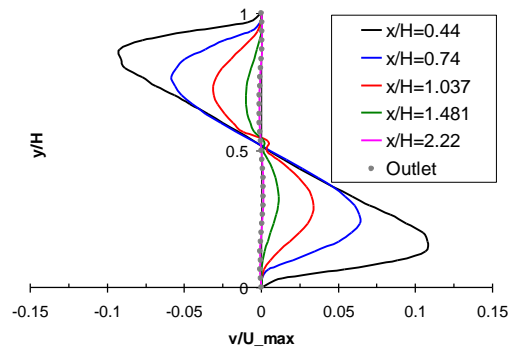
حال به بررسی نحوه تاثیر فاکتورهای تصحیح بر پایه فشار بر روی دقت شبیه‌سازی می‌پردازیم. شکل ۱۰ نمودار همگرایی را در رینولدز برابر با ۱۰۰ نشان می‌دهد که با توجه به روش میانگین‌گیری و روش مبتنی بر فاکتورهای تصحیح



شکل ۵- پروفیل مولفه سرعت  $u$  در ایستگاههای مختلف در  $Re = 29$



شکل ۶- توزیع سرعت در ناحیه توسعه یافته و مقایسه آن با حل تحلیلی [۳۴]



شکل ۷- پروفیل مولفه سرعت  $v$  در ایستگاههای مختلف در  $Re = 29$

شکل ۸ تغییرات سرعت خط مرکزی را تا ناحیه کاملاً توسعه یافته برای  $Re = 29$  نشان می‌دهد. برای بدست آوردن این طول، فاصله نقطه‌ای را که در آن سرعت به ۰.۹۹

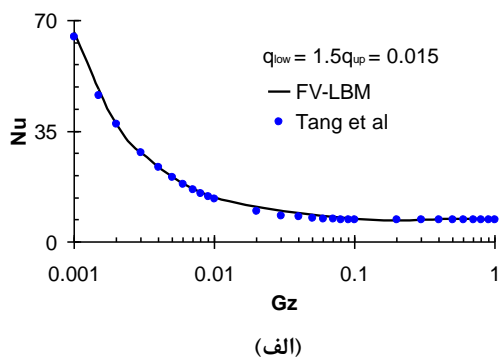
شکل های ۱۱- الف و ۱۱- ب توزیع عدد ناسلت را در دیوار پایینی کانال بصورت تابعی از عدد گراتز نشان می‌دهد که با نتایج [۳۲] مقایسه شده است. توجه شود که عدد گراتز و ناسلت بصورت زیر تعریف می‌شوند:

$$Gz = (x/H)Re \cdot Pr \quad (22)$$

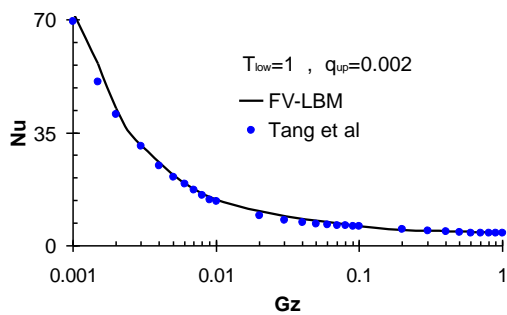
و

$$Nu_x = D_h q_{w,x} / [k(T_{w,x} - T_{b,x})] \quad (23)$$

در رابطه فوق،  $D_h$  قطر هیدرولیکی،  $k$  ضریب رسانش گرمایی،  $q_{w,x} = k(\partial T / \partial y)_w$  شار گرمایی دیوار و  $T_b$  دمای بالک می‌باشد. نتایج نشان داده شده بیانگر تطابق خوب بین روش مورد استفاده با نتایج [۳۲] می‌باشد. ملاحظه می‌شود که طول گرمایی ورودی به خوبی با استفاده از روش مورد استفاده، پیش بینی شده است.



(الف)

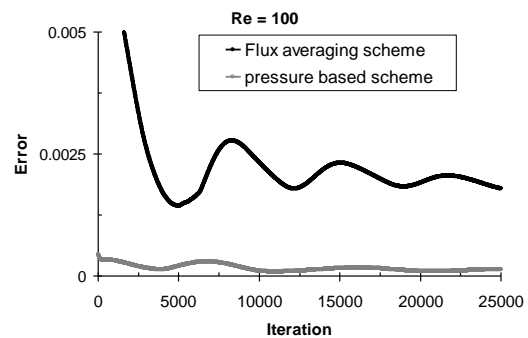


(ب)

شکل ۱۱- توزیع ناسلت بر روی دیواره پایینی کانال برای حالت ۱ (الف) و حالت ۲ (ب)

در انتها به بررسی نحوه تاثیر فاکتورهای تصحیح بر پایه دما (یعنی  $\theta = T$ ) بر روی حل می‌پردازیم. برای این منظور

رسم شده است. ملاحظه می‌شود که استفاده از ضرایب تصحیح، تاثیر قابل توجهی در پایداری و افزایش سرعت همگرایی حل دارد که در نهایت منجر به کاهش زمان شبیه-سازی برای رسیدن به دقت مطلوب نیز می‌شود. بنابراین می‌توان گفت که استفاده از روش محاسبه شار با استفاده از فاکتورهای تصحیح منجر به افزایش پایداری و دقت شبیه-سازی و در نتیجه کاهش تکرار محاسبات برای رسیدن به دقت مطلوب خواهد شد.



شکل ۱۰- تاثیر فاکتورهای تصحیح بر روی دقت و همگرایی حل در جریان درون کانال برای Re = 100

در ادامه این بخش تحلیل حرارتی جریان درون کانال را با شرایط مرزی مختلف مد نظر قرار می‌دهیم. در اینجا نسبت منطری کانال برابر با  $L/H = 10$  انتخاب شده است که  $L$  طول صفحه‌های ثابت یا دیوارها می‌باشد. به مرز ورودی، سیال با سرعت یکنواخت  $U_{in} = 0.01$  و دمای یکنواخت  $T_{in}$  اعمال می‌شود. شبیه‌سازی برای دو شرط مرزی گرمایی مختلف انجام گرفته است که نتایج آن با نتایج تحلیلی و عددی معتبر مقایسه شده‌اند.

حالت ۱: دیوارها هر دو در شار ثابت قرار دارند.  $q_{low} = 1.5q_{up} = 0.015$

حالت ۲: دیوار پایینی در دمای ثابت  $T_{low} = 1$  قرار دارد در حالیکه دیوار بالایی در شار ثابت  $q_{up} = 0.002$  قرار دارد.

توجه شود که دمای یکنواخت ورودی در حالت ۲ برابر با  $T_{in} = 5$  و در حالت ۱ برابر با  $T_{in} = 1$  می‌باشد. همچنین، در تمام شبیه‌سازی‌های انجام شده، عدد پرانتل برابر با  $Pr = \nu/\alpha = 0.7$  انتخاب شده است.

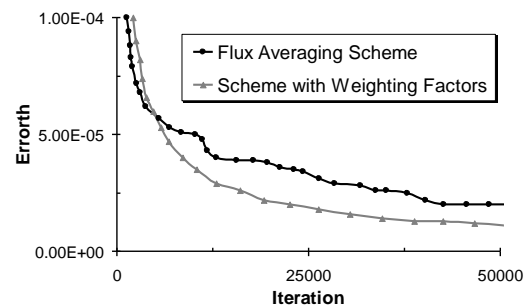


بیانگر دقت بالای روش پیشنهادی در مقایسه با دیگر روش‌ها می‌باشد.

### مراجع

- [1] Succi S (2001) The lattice Boltzmann equation for fluid dynamics and beyond. Clarendon, Oxford.
- [2] Benzi R, Succi S, Vergassola M (1992) The lattice Boltzmann equation: theory and applications. Phys Rep 222: 145–197.
- [3] Bella G, Ubertini S, Bertolino M (2003) Computational fluid dynamics for low and moderate Reynolds numbers through the lattice Boltzmann method. Int J Comp Num Anal Appl 3(1): 83–115.
- [4] Rothman DH, Zaleski S (1994) Lattice-gas model of phase separation: interfaces, phase transitions, and multiphase flow. Rev Mod Phys 66(4): 1417–1479.
- [5] Chen S, Doolen G (1998) Lattice Boltzmann method for fluid flows. Ann Rev Fluid Mech 30: 329–364.
- [6] Zarghami A, Maghrebi MJ, Ghasemi J (2011) Finite volume-lattice Boltzmann modeling of viscous flows. Majlesi J Mech Eng 4(2): 11–19.
- [7] Barth TJ, Jaspersen DC (1989) The design and application of upwind schemes on unstructured meshes. AIAA Paper 89:0366.
- [8] Tamamidis P (1995) A new upwind scheme on triangular meshes using the finite volume method. Comput Methods Appl Mech Eng 124: 15–21.
- [9] Sofonea V, Sekerka RF (2005) Boundary conditions for the upwind finite difference lattice Boltzmann model: evidence of slip velocity in micro-channel flow. J Comput Phys 207: 639–659.
- [10] Patil DV, Lakshmisha KN (2009) Finite volume TVD formulation of lattice Boltzmann simulation on unstructured mesh. J Comput Phys 228: 5262–5279.
- [11] Premnath KN, Pattison MJ, Banerjee S (2009) Dynamic subgrid scale modeling of turbulent flows using lattice-Boltzmann method. Physica A 338: 2640–2658.
- [12] He X, Chen S, Doolen GD (1998) A novel thermal model for the lattice Boltzmann method in incompressible limit. J Comput Phys 146: 282–289.
- [13] Alexanders F, Chen S, Sterling J (1993) Lattice Boltzmann thermo-hydrodynamics. Phys Rev E 47: 2249–2252.
- [14] Pavlo P, Vahala G, Vahala L (1998) Linear stability analysis of thermo-lattice Boltzmann models. J Comput Phys 139: 79–91.

رابطه (۲۰) را مد نظر قرار می‌دهیم. شکل ۱۲ نمودار همگرایی دما را در  $Re = 100$  برای شرط مرزی گرمایی حالت ۲ نشان می‌دهد. ملاحظه می‌شود که استفاده از این ضرایب تصحیح، تاثیر قابل توجهی در پایداری و افزایش سرعت همگرایی در مقایسه با روش میانگین‌گیری دارد.



شکل ۱۲- تاثیر فاکتورهای تصحیح دما بر روی دقت و همگرایی حل در جریان درون کانال برای  $Re = 100$

### ۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله از روش حجم محدود با طرح مرکزیت سلول برای گسسته‌سازی معادلات جریان و انرژی بولتزمن استفاده گردید. از مدل تابع توزیع دوگانه برای توصیف میدان دما برای جریان گرمایی دوبعدی تراکم ناپذیر بهره گرفته شد. جهت افزایش دقت و سرعت همگرایی از فاکتورهای تصحیح مبتنی بر فشار و دما برای معادلات مومنتوم و انرژی بولتزمن استفاده شد. با توجه به موارد فوق، دقت روش مورد استفاده بهبود قابل توجهی یافته و واگرایی که یکی از مشکلات توام با شبیه‌سازی گرمایی با استفاده از روش شبکه بولتزمن است، به نحو مطلوبی برطرف گردید و در عین حال تعداد گام‌های زمانی برای رسیدن به دقت مورد نظر نیز کاهش یافت.

علاوه بر موارد فوق، اعمال شرایط مرزی جریان با در نظر گرفتن شبکه اضافی در هر سلول مرزی، کارایی خوبی را نشان می‌دهد. همچنین اعمال شرط مرزی گرما با تجزیه تابع توزیع انرژی به بخش‌های تعادلی و غیر تعادلی که از روش‌های دقیق می‌باشد، در روش پیشنهادی مورد استفاده قرار گرفت. علاوه بر محاسبه لزجت جریان، نتایج شبیه‌سازی برای جریان سیال تراکم ناپذیر درون کانال دوبعدی بررسی گردید که مقایسه نتایج بدست آمده با نتایج تحلیلی و عددی معتبر

- [25] Hirsch C, (1998) Numerical Computation of Internal and External Flows, Vol. I: Fundamentals of Numerical Discretization, Wiley, Chichester.
- [26] Stiebler M, Tolke J, Krafczyk M (2006) An upwind discretization scheme for the finite volume lattice Boltzmann method. *Computer Fluids* 35: 814–819.
- [27] Ghasemi J, Razavi SE (2010) On the finite volume lattice Boltzmann modeling of thermo-hydrodynamics. *Comput Math Appl* 60: 1135–1144.
- [28] Xi H, Peng G, Chou SH (1999) Finite-volume lattice Boltzmann method. *Phys Rev E* 59(5): 6202–6205.
- [29] Tanehill JC, Anderson DA, Pletcher RH (1997) Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer. 2nd Edition. Taylor & Francis.
- [30] Zou Q, He X (1997) On pressure and velocity boundary conditions for the lattice Boltzmann BGK model. *Phys Fluids* 9: 1591–1598.
- [31] Guo Z, Zheng C, Shi B (2002) An extrapolation method for boundary conditions in lattice Boltzmann method. *Phys Fluids* 14(6): 2007–2010.
- [32] Tang GH, Tao WQ, He YL (2005) Thermal boundary condition for the thermal lattice Boltzmann equation. *Phys Rev E* 72:016703.
- [33] Chen CK, Tzu-Shuang Y, Yue-Yzu Y (2006) Lattice Boltzmann method of backward facing step on convective heat transfer with field synergy principle. *Int J Heat Mass Trans* 49: 1195–1204.
- [34] Schlichting H (2005) Boundary Layer Theory. 3rd Ed. Springer-Verlag.
- [35] Chen RY (1973) Flow in the entrance region at low Reynolds numbers. *J Fluid Eng* 95: 153–158.
- [15] Piaud B, Blanco S, Fournier R, Clifton MJ (2005) Energy conserving of lattice Boltzmann thermal model in two dimensions. *J Stat Phys* 121(1-2):119–131.
- [16] Peng Y, Shu C, Chew YT (2003) Simplified thermal lattice Boltzmann model for incompressible thermal flows. *Phys Rev E* 68: 026701.
- [17] Shi Y, Zhao TS, Guo ZL (2004) Thermal lattice Bhatnagar-Gross-Krook model for flows with viscous heat dissipation in the incompressible limit. *Phys Rev E* 70: 066310.
- [18] Van der Sman RGM (1997) Lattice Boltzmann scheme for natural convection in Porous media. *Int J Modern Phys C* 8:879–888.
- [19] Palmer BJ, Rector DR (2000) Lattice Boltzmann algorithm for simulating thermal flow in compressible fluids. *J Comput Phys* 161: 1–20.
- [20] Onishi J, Chen Y, Ohashi H (2001) Lattice Boltzmann simulation of natural convection in a square cavity. *JSME Int J Ser B* 44: 53–62.
- [21] Zheng L, Guo Z, Shi B, Zheng C (2010) Kinetic theory based lattice Boltzmann equation with viscous dissipation and pressure work for axisymmetric thermal flows. *J Comput Physics* 229(16): 5843–5856.
- [22] Bhatnagar PL, Gross EP, Krook M (1954) A model for process in gases, *Phys Rev* 94: 511–525.
- [23] Peng Y, Shu C, Chew YT (2003) Simplified thermal lattice Boltzmann model for incompressible thermal flows. *Phys Rev E* 68: 026701.
- [24] Ubertaini S, Succi S (2005) Recent advances of lattice Boltzmann techniques on unstructured grids. *Prog Comput Fluid Dyn* 5: 85–96.