



تعمیم روش MAFVRO به سیستم‌های ارتعاشی تحت تحریک اتفاقی جهت استخراج فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای ارتعاشی

موسی رضائی^{۱*} و غلامرضا فتاحی^۲

^۱ دانشیار، دانشکده فنی مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز

^۲ کارشناس ارشد، دانشکده فنی مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز

تاریخ دریافت: ۱۳۹۲/۱۲/۲۵؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۳/۰۷/۰۷؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۴/۰۲/۱۷

چکیده

روش MAFVRO یکی از روش‌های آنالیز مودال مبتنی بر خروجی است که تنها با استفاده از پاسخ سیستم به تحریک شرایط اولیه، قادر است تا تمام مشخصه‌های مودال یک سیستم ارتعاشی را مشخص کند. از آنجایی که بیشتر سیستم‌های ارتعاشی تحت بارهای اتفاقی قرار می‌گیرند، بنابراین روش MAFVRO در چنین شرایطی قادر به استخراج مشخصه‌های مودال نمی‌باشد. در این پژوهش، روش مذکور به سیستم‌های ارتعاشی، تحت تحریک اتفاقی تعمیم داده شده است و با اعمال آن به یک سیستم ارتعاشی هشت درجه آزادی، نتایج حاصل از آن استخراج و با نتایج حاصل از حل دقیق مسأله مقدار ویژه سازه‌ای مورد مقایسه قرار گرفته است. نتایج نشان می‌دهد که روش تعمیم یافته MAFVRO، فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای ارتعاشی را با دقت قابل قبولی استخراج می‌کند؛ ولی نسبت‌های میرایی را کمتر از مقادیر واقعی برآورد می‌نماید؛ همچنین اثر نویز بر دقت مشخصه‌های مودال استخراج شده از روش MAFVRO نیز، مورد مطالعه قرار گرفته است.

کلمات کلیدی: سیستم ارتعاشی میرا؛ آنالیز مودال؛ مساله مقدار ویژه سازه‌ای؛ تحریک شرایط اولیه؛ تحریک اتفاقی.

Development of MAFVRO to Randomly Excited Vibration Systems to Derive the Natural Frequencies and Mode Shapes

Mousa Rezaee^{1*} and Gholamreza Fattahi²

¹ Assoc. Prof, Mech. Eng., University of Tabriz., Tabriz, Iran

² Msc of Mech. Eng., University of Tabriz., Tabriz, Iran

Abstract

MAFVRO is one of the out-put only modal analysis methods which is able to determine the modal parameters of a vibration system through the free vibration responses. It is worth to note that most of the vibration systems are subjected to random excitations. Therefore, in such cases, the traditional MAFVRO cannot extract the modal parameters. In this study, the mentioned method is developed to randomly excited vibration systems. Then, the modified MAFVRO is applied to a randomly excited vibration system. The random excitation has been considered as a set of white noises which are applied to all masses of a discrete system. Then by employing the developed method, the estimated results have been compared with those obtained through the structural eigenvalue problem. Comparing the results reveals that the developed method can give the natural frequencies and mode shapes of a randomly excited system with a good accuracy, but it estimates the damping ratios lower than their exact values. In addition, the effect of the noise on the accuracy of the estimated modal parameters have been investigated.

Keywords: Damped Vibration System; Modal Analysis; The Structural Eigenvalue Problem; Initial Excitation; Random Excitation.

* نویسنده مسئول؛

آدرس پست الکترونیک: m_rezaee@tabrizu.ac.ir

۱- مقدمه

با توجه به نیازهای عمده در شناسایی سیستم‌های مکانیکی، روش‌های جدیدی در حوزه آنالیز مودال معرفی شده است که در استخراج مشخصه‌های مودال سیستم‌های ارتعاشی تنها از پاسخ آن‌ها استفاده می‌شود [۱]. این روش‌ها، به روش‌های آنالیز مودال مبتنی بر خروجی^۱ معروفند [۱]. استفاده از این روش‌ها نیاز به اطلاع قبلی از مشخصه‌های مودال سیستم ارتعاشی و همچنین انجام تست‌های ارتعاشی روی سازه مکانیکی در موقعیت‌های متفاوت را مرتفع می‌سازد [۲]. روش‌های مبتنی بر خروجی می‌تواند در حوزه زمان یا در حوزه فرکانس صورت گیرد [۳]. از روش‌های متداول در حوزه فرکانس، می‌توان به روش تابع شاخص مود مختلط^۲ اشاره کرد [۴]. در سالیان اخیر، روش‌های مختلفی در حوزه زمان نیز معرفی شده‌اند. در این روش‌ها، با استفاده از پاسخ ارتعاشات آزاد سازه به ورودی‌های مختلفی همانند ورودی اتفاقی، ضربه و یا تحریک اولیه، یک مسأله مقدار ویژه تشکیل می‌شود که مقادیر ویژه و بردارهای ویژه آن، با مقادیر و بردارهای ویژه مسأله مقدار ویژه سازه‌ای به طور مستقیم در ارتباط هستند. امتیاز استفاده از چنین روش‌هایی که بر پایه تجزیه هستند، این است که در این روش‌ها، احتمال ایجاد ماتریس‌های حالت بسیار بزرگ و موده‌های غیر واقعی مربوط به آنها وجود ندارد؛ همچنین، این روش‌ها در ساختار نیز ساده بوده، دارای حداقل فرضیات اتخاذ شده هستند [۲]. از روش‌های رایج در حوزه زمان، می‌توان به روش تجزیه متعامد سره^۳ (POD) اشاره کرد که توسط آن شکل موده‌های سیستم ارتعاشی پیوسته استخراج می‌شود [۵]. یکی از ضعف‌های عمده روش POD، آن است که برای آنالیز مودال نیاز به مشخص بودن ماتریس جرم سیستم ارتعاشی است [۶]. از روش‌های دیگر، می‌توان به الگوریتم تحقق سیستم ویژه^۴ اشاره کرد که توسط آن تحقیقی روی فضای پیمای گالیه انجام شده است [۷]. روش مذکور برای آنالیز مودال سازه‌های ساختمانی نظیر، پل‌های فولادی نیز مورد استفاده قرار گرفته

است [۸]. یکی دیگر از روش‌های حوزه زمان، روش تجزیه متعامد هموار^۵ (SOD) است که در آن نیازی به مشخص بودن ماتریس جرم نیست [۶]. مقایسه انجام شده توسط CHELIDZE، نشان می‌دهد که روش SOD دقت بالاتری نسبت به POD در استخراج پارامترهای مودال سیستم ارتعاشی نامیرا دارد [۶]. هم چنین امکان تعمیم روش SOD به سیستم‌های ارتعاشی نامیرا که تحت تحریک نویز سفید^۶ قرار می‌گیرند، توسط FEENY مورد بررسی قرار گرفته است [۲] که نتایج نشان‌دهنده آن است که در این گونه سیستم‌ها، مسأله مقدار ویژه حاصل از روش SOD با مسأله مقدار ویژه سازه‌ای ارتباط مستقیم دارد. همچنین با استفاده از روش SOD، پارامترهای مودال سیستم تعلیق خودروبی که تحت تحریک اتفاقی قرار گرفته است با دقت قابل قبولی استخراج شده است [۸]. یکی از معایب عمده روش SOD، استفاده از آن برای استخراج پارامترهای مودال سیستم ارتعاشی میرا است. به صورتی که با افزایش میرایی، دقت پارامترهای مودال کاهش می‌یابد [۲]. علاوه بر این، روش SOD تنها در استخراج فرکانس‌های طبیعی نامیرا و شکل موده‌های متناظر با آن قابلیت دارد و هیچ اطلاعاتی راجع به نسبت میرایی سیستم ارتعاشی ارائه نمی‌دهد [۶].

با توجه به موارد ذکر شده و نیاز به جبران این نوع کاستی‌ها، در سال‌های اخیر روش جدیدی تحت عنوان آنالیز مودال بر مبنای پاسخ آزاد سیستم ارتعاشی^۷ (MAFVRO) معرفی شده است که با استفاده از پاسخ آزاد سیستم ارتعاشی، تمام پارامترهای مودال سیستم ارتعاشی از جمله، نسبت‌های میرایی را مشخص می‌کند [۱۰ و ۱۱]. یکی از مزیت‌های عمده این روش، قابل اعمال بودن آن به سازه‌های میرا است و در ضمن برای دستیابی به مشخصه‌های مودال، نیاز به تعداد داده‌های زیاد نمی‌باشد. نکته قابل ذکر آن است که در عمل سازه‌های مکانیکی بیشتر تحت تحریک بارهای اتفاقی قرار دارند [۱۲] در تحقیق حاضر، روش MAFVRO به سیستم ارتعاشی میرا که تحت تحریک شرایط اولیه قرار گرفته است، اعمال شده و نتایج با نتایج حاصل از حل تحلیلی مسأله

¹ Out Put Only Modal Analysis

² Complex Mode Identity Function

³ Proper Orthogonal Decomposition

⁴ Eigen System Realization Algorithm

⁵ Smooth Orthogonal Decomposition

⁶ White Noise Excitation

⁷ Modal Analysis Free Vibration Response Only

در رابطه (۴)، منجر به $2n$ مقدار ویژه و بردار ویژه خواهد شد که این مقادیر ویژه به صورت زیر مزدوج مختلط یکدیگرند:

$$\begin{cases} \lambda_r \rightarrow \mathbf{Y}_r \\ \bar{\lambda}_r \rightarrow \bar{\mathbf{Y}}_r \end{cases}, r = 1, 2, \dots, n \quad (5)$$

مقادیر و بردارهای ویژه مذکور به صورت روابط ۶-ف و ۶-ب تعریف می‌شوند:

$$\begin{cases} \lambda_r = \text{Re} + i \text{Im} = -\zeta_r \omega_r + i \omega_r \sqrt{1 - \zeta_r^2} \\ \bar{\lambda}_r = \text{Re} - i \text{Im} = -\zeta_r \omega_r - i \omega_r \sqrt{1 - \zeta_r^2} \end{cases} \quad (6\text{-الف})$$

$$\mathbf{Y}_r = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{X}}_r \\ \mathbf{X}_r \end{Bmatrix}, \bar{\mathbf{Y}}_r = \begin{Bmatrix} \dot{\bar{\mathbf{X}}}_r \\ \bar{\mathbf{X}}_r \end{Bmatrix} \quad (6\text{-ب})$$

در رابطه (۶-الف)، ω_r فرکانس طبیعی، ζ_r نسبت میرایی و $\omega_r \sqrt{1 - \zeta_r^2}$ نشان‌دهنده فرکانس طبیعی میرای سیستم ارتعاشی در مود r است. در رابطه (۶-ب)، شکل مودهای سیستم ارتعاشی را نشان می‌دهد که این شکل مودها نیز به صورت مختلط هستند.

حال با استفاده از رابطه (۲)، حاصل ماتریس $-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ را می‌توان به صورت رابطه (۷) به پاسخ سیستم مرتبط نمود:

$$-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \dot{\mathbf{y}}\mathbf{y}^{-1} = \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{X}} & \dot{\mathbf{X}} \\ \dot{\mathbf{X}} & \mathbf{X} \end{bmatrix}^{-1} \quad (7)$$

رابطه (۷) نشان می‌دهد که مشخصه‌های جرم، سفتی و میرایی سیستم ارتعاشی که در ماتریس‌های \mathbf{A} و \mathbf{B} مستتر هستند، به پاسخ سیستم ارتباط دارند.

در روابط فوق، با تحریک اولیه سیستم، پاسخ آن که به صورت جابجایی است، در قالب ماتریس جابجایی، \mathbf{X} ، که ماتریسی با ابعاد $n \times N$ است، به دست آمده است که n ، نشان‌دهنده تعداد درجات آزادی سیستم و N ، معرف تعداد نمونه‌های زمانی است. سپس با استفاده از روابط تفاضلات محدود، ماتریس‌های سرعت، $\dot{\mathbf{X}}$ ، و شتاب، $\ddot{\mathbf{X}}$ ، به ترتیب استخراج می‌شوند.

در روش MAFVRO می‌توان از روابط مختلف تفاضل محدود بهره برد که در تحقیق حاضر، روابط (۸) و (۹) به ترتیب برای استخراج سرعت و شتاب، مورد استفاده قرار گرفته است.

$$v(j) = \frac{(-3x(j) + 4x(j+1) - x(j+2))}{2\Delta t} \quad (8)$$

$$a(j) = \frac{(2x(j) - 5x(j+1) + 4x(j+2) - x(j+3))}{(\Delta t)^2} \quad (9)$$

مقدار ویژه سازه‌ای که به عنوان مینا مورد استفاده قرار گرفته است، مورد مقایسه قرار گرفته است. در ادامه امکان تعمیم روش MAFVRO به سیستم‌های ارتعاشی میرا بررسی می‌شود که تحت تحریک اتفاقی قرار می‌گیرند. علاوه بر این، برای مدل‌سازی دقیقتر، نویز اندازه‌گیری در پاسخ سیستم به ازای شدت‌های مختلف در نظر گرفته شده و اثر آن بر دقت مشخصه‌های مودال استخراج شده با استفاده از روش MAFVRO بررسی شده است. نتایج مربوط به مشخصه‌های مودال سیستم ارتعاشی که از روش MAFVRO استخراج شده‌اند ارائه و با نتایج حاصل از حل تحلیلی مورد مقایسه قرار گرفته‌اند.

۲- معرفی روش MAFVRO [۱۱ و ۱۲]

معادله حرکت سیستم ارتعاشی که تحت نیروی خارجی، \mathbf{F} ، قرار گرفته است، به صورت رابطه (۱) می‌باشد:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} + \mathbf{K}\mathbf{X} = \mathbf{F} \quad (1)$$

در روابط فوق، \mathbf{M} ، \mathbf{C} و \mathbf{K} به ترتیب، معرف ماتریس‌های جرم، میرایی و سفتی و همچنین \mathbf{X} ، $\dot{\mathbf{X}}$ و $\ddot{\mathbf{X}}$ به ترتیب، ماتریس‌های جابجایی و سرعت و شتاب را نشان می‌دهند با استفاده از رابطه (۱) و رابطه معروف به اصل دالامبر ($\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} - \mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}} = 0$)، فرم نهایی و ماتریسی حاکم بر سیستم ارتعاشی به صورت رابطه (۲) ارائه می‌شود:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{X}} \\ \dot{\mathbf{X}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{X}} \\ \mathbf{X} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{F} \end{bmatrix} \quad (2)$$

برای سادگی در روابط فرضیات زیر را به کار می‌گیریم:

$$\begin{cases} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{M} \\ \mathbf{M} & \mathbf{C} \end{bmatrix} \\ \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K} \end{bmatrix} \end{cases}, \begin{cases} \mathbf{y} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{X}} \\ \mathbf{X} \end{bmatrix} \\ \dot{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{X}} \\ \dot{\mathbf{X}} \end{bmatrix} \end{cases}, \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{F} \end{bmatrix} \quad (3)$$

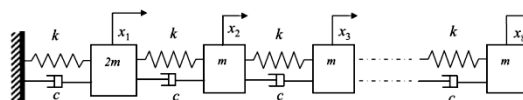
در رابطه (۳)، ماتریس \mathbf{y} از روی هم گذاری ماتریس‌های سرعت و جابجایی و ماتریس $\dot{\mathbf{y}}$ ، از روی هم گذاری ماتریس‌های شتاب و سرعت ایجاد می‌شوند. برای انجام آنالیز مودال، برای ماتریس \mathbf{y} تابعی نظیر $\mathbf{y} = \mathbf{Y}e^{i\lambda t}$ تعریف می‌شود. با صفر در نظر گرفتن نیروی تحریک \mathbf{F} ، مسأله مقدار ویژه (۴)، به دست می‌آید:

$$(-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B})\mathbf{Y} = \lambda\mathbf{Y} \quad (4)$$

با توجه به تعریف ماتریس‌های \mathbf{A} و \mathbf{B} در رابطه (۳) و با فرض یک سیستم n درجه آزادی، مسأله مقدار ویژه موجود

۳- مدل‌سازی

برای مقایسه دقت نتایج روش MAFVRO، روش مذکور را به سیستم ارتعاشی هشت درجه آزادی مطابق شکل ۱ اعمال می‌کنیم. در مرجع [۲]، سیستم مذکور، تحت تحریک نوین سفید قرار گرفته است. برای مقایسه نتایج، مشخصه‌های مودال به دست آمده از حل تحلیلی مسأله مقدار ویژه، به عنوان مبنا مورد استفاده قرار گرفته است.



شکل ۱- سیستم هشت درجه آزادی میرا

همانگونه که ذکر شد، فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای حاصل از حل تحلیلی مسأله مقدار ویژه، به عنوان مبنا برای مقایسه دقت روش MAFVRO به کار رفته است. این منظور، نیازمند محاسبه ماتریس‌های جرم و سفتی می‌باشیم. با نوشتن معادلات حرکت برای هر یک از جرم‌ها و در نظر گرفتن مقادیر $m = 1 \text{ kg}$ و $k = 1 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ که در مرجع [۲] به کار رفته است، ماتریس‌های جرم و سفتی به صورت زیر خواهند بود:

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad K = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

با حل مسأله فوق، فرکانس‌های طبیعی ($\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$) و بردارهای

ویژه به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\{\omega_n\}_{EVP} = \begin{bmatrix} 0.1838 \\ 0.5266 \\ 0.8143 \\ 1.0966 \\ 1.3859 \\ 1.6412 \\ 1.8366 \\ 1.9586 \end{bmatrix}$$

$$\Phi = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_8] = \begin{bmatrix} 0.0916 & -0.3134 & 0.4849 & -0.3796 & 0.2390 & -0.1503 & 0.0899 & 0.0424 \\ 0.1771 & -0.4530 & 0.3267 & 0.1538 & -0.4402 & 0.5092 & -0.4266 & -0.2403 \\ 0.2565 & -0.4670 & -0.0482 & 0.5022 & -0.2739 & -0.2027 & 0.4958 & 0.3989 \\ 0.3273 & -0.3515 & -0.3911 & 0.2467 & 0.4185 & -0.3686 & -0.2542 & -0.4920 \\ 0.3871 & -0.1385 & -0.4746 & -0.3055 & 0.3070 & 0.4583 & -0.1468 & 0.5044 \\ 0.4337 & 0.1129 & -0.2434 & -0.4903 & -0.3942 & 0.0508 & 0.4558 & -0.4342 \\ 0.4658 & 0.3329 & 0.1492 & -0.0855 & -0.3383 & -0.4935 & -0.4790 & 0.2927 \\ 0.4820 & 0.4607 & 0.4429 & 0.4221 & 0.3674 & 0.2914 & 0.2018 & -0.1032 \end{bmatrix}$$

اگر از ماتریس مودال متشکل از بردارهای ویژه نرمالیزه شده نسبت به ماتریس جرم یعنی $\bar{\Phi} = [\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n]$ که در آن $m_r = \phi_r^T M \phi_r$ و $\phi_r = \frac{1}{\sqrt{m_r}} \phi_r$ استفاده کنیم روابط (۱۰) را می‌توان ثابت کرد [۱۳]:

$$\begin{cases} \bar{\Phi}^T M \bar{\Phi} = \text{diag}(\mathbf{I}) \\ \bar{\Phi}^T K \bar{\Phi} = \text{diag}(\omega_r^2) \\ \bar{\Phi}^T C \bar{\Phi} = \text{diag}(2\zeta_r \omega_r) \end{cases} \quad (10)$$

با فرض میرایی تناسبی به صورت $C = \alpha M + \beta K$ ، که در آن α و β ضرایب ثابت هستند، رابطه (۱۱) برای نسبت میرایی در هر مود، ثابت می‌شود [۱۳]:

$$\zeta_i = \frac{\alpha}{2\omega_n} + \frac{\beta\omega_n}{2} \quad (11)$$

برای سیستم حاضر، نتایج رابطه (۱۲) به دست می‌آید:

$$\zeta_i = \frac{\alpha}{2(\omega_n)_i} + \frac{\beta(\omega_n)_i}{2} \rightarrow \{\zeta\} = \alpha \begin{bmatrix} 0.0919 \\ 0.2633 \\ 0.4071 \\ 0.5483 \\ 0.6929 \\ 0.8206 \\ 0.9183 \\ 0.9793 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 2.7203 \\ 0.9494 \\ 0.6140 \\ 0.4559 \\ 0.3607 \\ 0.4874 \\ 0.2722 \\ 0.2552 \end{bmatrix} \quad (12)$$

برای محاسبه درصد خطای فرکانس‌های طبیعی به دست آمده از روش MAFVRO در هر مود، از رابطه (۱۳) استفاده می‌کنیم:

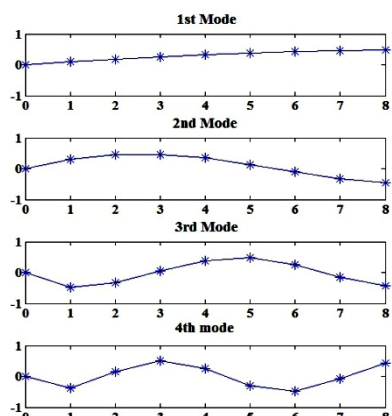
$$\% e_{MAFVRO} = \left| \frac{(\omega_n)_{EVP} - (\omega_n)_{MAFVRO}}{(\omega_n)_{EVP}} \right| \times 100 \quad (13)$$

در رابطه (۱۳)، $(\omega_n)_{EVP}$ و $(\omega_n)_{MAFVRO}$ به ترتیب، فرکانس طبیعی به دست آمده از حل تحلیلی مسأله مقدار ویژه سازه‌ای و فرکانس طبیعی به دست آمده از روش MAFVRO را نشان می‌دهد.

۴- نتایج حاصل از اعمال روش MAFVRO به سیستم ارتعاشی میرا تحت تحریک اولیه

برای سیستم مذکور با فرض میرایی تناسبی به صورت، $C = \alpha M + \beta K$ ، $\alpha = \beta = 0.2$ تحت تحریک شرایط اولیه به

صورت $x(0) = [1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]^T$ و $\dot{x}(0) = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]^T$ قرار می‌گیرد. و با استفاده از ماتریس‌های جابجایی، سرعت و شتاب، نتایج حاصل از روش MAFVRO برای فرکانس‌های طبیعی و خطای آن به ازای تعداد $N = 10^6$ داده محاسبه شده

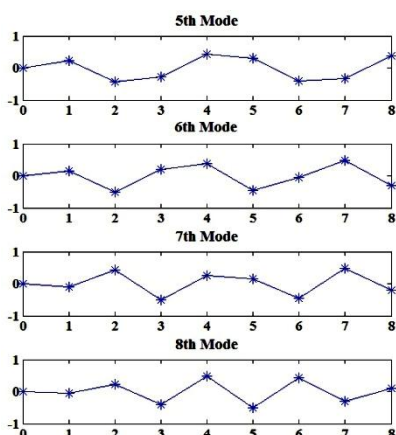


شکل ۲- مقایسه چهار شکل‌مود اول به دست آمده توسط روش MAFVRO (*) با شکل مودهای حاصل از حل تحلیلی

(-) در مورد سیستم ارتعاشی با میرایی تناسبی

$C = \alpha M + \beta K, \alpha = \beta = 0.2$ تحت تحریک اولیه به ازای

تعداد $N = 10^6$ داده.



شکل ۳- مقایسه چهار شکل‌مود بعدی (پنجم تا هشتم) به

دست آمده توسط روش MAFVRO (*) با شکل مودهای

حاصل از حل تحلیلی (-) در مورد سیستم ارتعاشی با

میرایی تناسبی $C = \alpha M + \beta K, \alpha = \beta = 0.2$ تحت

تحریک اولیه به ازای تعداد $N = 10^6$ داده.

ابتدا روابط حاکم بر این حالت استخراج می‌شود. در این حالت، طرف دوم رابطه (۲) را دیگر نمی‌توان صفر در نظر گرفت؛ زیرا نیروی خارجی به سیستم اعمال می‌شود؛ لذا معادله حاکم به صورت رابطه (۱۴) خواهد بود:

$$A\dot{y} + By = P \quad (14)$$

با توجه به تعاریف ذکر شده، صورت دیگر رابطه (۱۴) به شکل رابطه (۱۵) است:

و نتایج مذکور در جدول ۱، ارائه شده است. نتایج ارائه شده در جدول ۱، نشان می‌دهد که روش MAFVRO برای سیستم میرا، فرکانس‌های طبیعی را با دقت بسیار بالایی استخراج می‌کند.

جدول ۱- فرکانس‌های طبیعی به دست آمده از روش MAFVRO و خطاهای فرکانس‌های طبیعی در مورد سیستم ارتعاشی با میرایی تناسبی $C = \alpha M + \beta K, \alpha = \beta = 0.2$ تحت تحریک شرایط اولیه به ازای تعداد نمونه $N = 10^6$.

شماره مود	$(\omega)_MAFVRO$	$\% (e)_{MAFVRO}$
1	0.1838	0.0067
2	0.5266	0.0035
3	0.8143	0.0020
4	1.0967	0.0036
5	1.3860	0.0060
6	1.6414	0.0128
7	1.8368	0.0144
8	1.9589	0.0160

با توجه به جدول ۱، نتایج به دست آمده از روش MAFVRO نشان می‌دهد که روش مذکور برای حالتی که سیستم تحت تحریک شرایط اولیه قرار می‌گیرد، با دقت بسیار بالایی فرکانس‌های طبیعی را استخراج می‌کند و بیشترین میزان خطا مربوط به مود هشتم بوده که 0.0160 درصد است.

نتایج مربوط به شکل مودهای بدست آمده از روش MAFVRO برای سیستم میرا تحت تحریک شرایط اولیه مذکور در شکل‌های ۲ و ۳ نشان داده شده است.

نتایج مربوط به شکل مودها نیز نشان می‌دهد که شکل مودهای به دست آمده از روش MAFVRO کاملاً منطبق با شکل مودهای حاصل از حل تحلیلی است؛ لذا روش MAFVRO، در استخراج شکل مودهای سیستم ارتعاشی که تحت تحریک شرایط اولیه قرار دارد، روشی دقیق محسوب می‌شود.

۵- تعمیم روش MAFVRO به سیستم‌های

ارتعاشی میرا تحت تحریک اتفاقی

در این بخش، تعمیم روش MAFVRO به سیستم‌های ارتعاشی تحت تحریک اتفاقی ارائه می‌شود. برای این منظور،

ماتریس‌های صفر، $\mathbf{0}$ ، دو ماتریس دیگر عبارتند از:

$$\frac{1}{N_a} \mathbf{F}_{n \times N_a} \dot{\mathbf{X}}_{N_a \times n}^T \quad \text{و} \quad \frac{1}{N_a} \mathbf{F}_{n \times N_a} \mathbf{X}_{N_a \times n}^T$$

است که اگر نیروی تحریک خارجی، \mathbf{F} ، تحریک اتفاقی باشد و ماتریس \mathbf{X} ، ماتریس جابجایی ناشی از این نوع تحریک باشد، المان‌های ماتریس $\mathbf{L} = \frac{1}{N_a} \mathbf{x}_{n \times N_a} \mathbf{F}_{N_a \times n}^T$ که نشان دهنده

همبستگی متقابل (با تاخیر زمانی صفر) مابین تابع پاسخ و ورودی اتفاقی است، صفر خواهد بود. با توجه به نتیجه گیری

به دست آمده، المان‌های ماتریس $\mathbf{L}^T = \frac{1}{N_a} \mathbf{F}_{n \times N_a} \mathbf{X}_{N_a \times n}^T$ نیز

صفر خواهد بود. با توجه به موارد مذکور سه ماتریس از چهار ماتریس تشکیل دهنده طرف دوم رابطه (۱۷) صفر می‌باشد.

حال وضعیت المان‌های ماتریس $\frac{1}{N_a} \mathbf{F}_{n \times N_a} \dot{\mathbf{X}}_{N_a \times n}^T$ را بررسی

می‌کنیم. برای سادگی در محاسبات ماتریس $\frac{1}{N_a} \mathbf{F}_{n \times N_a} \dot{\mathbf{X}}_{N_a \times n}^T$

را با \mathbf{Z} نشان می‌دهیم. ماتریس \mathbf{Z} ، نشان دهنده همبستگی متقابل (با تاخیر زمانی صفر) مابین مشتق زمانی پاسخ و ورودی اتفاقی است. المان‌های ماتریس \mathbf{Z} را می‌توان از طریق رابطه (۱۸) نیز به دست آورد [۱۴]:

$$\mathbf{Z}_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^n \dot{x}_i(t_k) f_j(t_k) \quad (18)$$

با استفاده از رابطه (۱۹)، می‌توان تابع مشتق پاسخ، $\dot{x}_i(t)$ ، را به دست آورد [۱۴]:

$$\dot{x}_i(t_k) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{h}_{il}(\tau) f_l(t_k - \tau) d\tau \quad (19)$$

در رابطه فوق، $\dot{h}_{il}(t)$ مشتق تابع پاسخ ایمپالس واحد مربوط به جرم i ام ناشی از نیرو در جرم l ام است؛ با جایگذاری رابطه (۱۹) در رابطه (۱۸)، رابطه (۲۰) بدست می‌آید:

$$\mathbf{Z}_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \dot{h}_{il}(\tau) f_l(t_k - \tau) d\tau f_j(t_k) \quad (20)$$

رابطه فوق را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت:

$$\mathbf{Z}_{ij} = \sum_{l=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \dot{h}_{il}(\tau) \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f_l(t_k - \tau) f_j(t_k) d\tau \quad (21)$$

می‌توان عبارت $C_{jl}^f(\tau) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f_l(t_k - \tau) f_j(t_k)$

را که در رابطه (۲۱) نشان دهنده همبستگی متقابل تابع

$$\mathbf{A} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{X}} \\ \dot{\mathbf{X}} \\ \mathbf{X} \end{bmatrix} + \mathbf{B} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{X}} \\ \mathbf{X} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{F} \end{bmatrix} \quad (15)$$

همانگونه که ذکر شد، ماتریس جابجایی، \mathbf{X} ، که در ابتدا به دست می‌آید، ماتریسی $n \times N$ است که n معرف تعداد درجات آزادی سیستم و N ، معرف تعداد نمونه‌ها است؛ ولی با توجه به این که از روابط مختلف تفاضلات محدود برای استخراج ماتریس‌های سرعت و شتاب استفاده می‌شود، لذا تعداد ستون‌ها در هر مرحله مشتق‌گیری، کاهش می‌یابد؛ یعنی ابعاد ماتریس‌های سرعت و شتاب به ترتیب به صورت، $n \times N_v$ و $n \times N_a$ است که با توجه به روابط (۸) و (۹)،

$N_v = N - 2$ و $N_a = N - 3$ خواهد بود. با توجه به این مسأله، لازم است برای تشکیل ماتریس‌های \mathbf{y} و $\dot{\mathbf{y}}$ ، تمامی ماتریس‌ها از جمله ماتریس نیروی \mathbf{F} هم بعد شوند؛ لذا باید تعدادی از ستون‌های ماتریس‌های جابجایی و سرعت حذف شوند تا با ماتریس شتاب، $\ddot{\mathbf{X}}_{n \times N_a}$ ، که دارای کمترین ابعاد بین همه ماتریس‌ها است، هم بعد شوند. پس در نهایت، رابطه (۱۵) به صورت رابطه (۱۶) خواهد بود:

$$\mathbf{A}_{2n \times 2n} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{X}}_{n \times N_a} \\ \dot{\mathbf{X}}_{n \times N_a} \end{bmatrix}_{2n \times 2n} + \mathbf{B}_{2n \times 2n} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{X}}_{n \times N_a} \\ \mathbf{X}_{n \times N_a} \end{bmatrix}_{2n \times 2n} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times N_a} \\ \mathbf{F}_{n \times N_a} \end{bmatrix}_{2n \times N_a} \quad (16)$$

اگر طرفین رابطه (۱۶) را در ماتریس

$$\mathbf{y}^T = \frac{1}{N_a} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{X}}_{N_a \times n} & \mathbf{X}_{N_a \times n} \end{bmatrix}_{N_a \times 2n}$$

پس ضرب کنیم به رابطه (۱۷) دست می‌یابیم:

$$\mathbf{A} \dot{\mathbf{y}}^T + \mathbf{B} \mathbf{y}^T = \mathbf{P} \mathbf{y}^T \rightarrow$$

$$\mathbf{A}_{2n \times 2n} \begin{bmatrix} \frac{1}{N_a} \ddot{\mathbf{X}}_{n \times N_a} \dot{\mathbf{X}}_{N_a \times n}^T & \frac{1}{N_a} \ddot{\mathbf{X}}_{n \times N_a} \mathbf{X}_{N_a \times n}^T \\ \frac{1}{N_a} \dot{\mathbf{X}}_{n \times N_a} \dot{\mathbf{X}}_{N_a \times n}^T & \frac{1}{N_a} \dot{\mathbf{X}}_{n \times N_a} \mathbf{X}_{N_a \times n}^T \end{bmatrix}_{2n \times 2n} + \mathbf{B}_{2n \times 2n} \begin{bmatrix} \frac{1}{N_a} \dot{\mathbf{X}}_{n \times N_a} \dot{\mathbf{X}}_{N_a \times n}^T & \frac{1}{N_a} \dot{\mathbf{X}}_{n \times N_a} \mathbf{X}_{N_a \times n}^T \\ \frac{1}{N_a} \mathbf{X}_{n \times N_a} \dot{\mathbf{X}}_{N_a \times n}^T & \frac{1}{N_a} \mathbf{X}_{n \times N_a} \mathbf{X}_{N_a \times n}^T \end{bmatrix}_{2n \times 2n} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n} \\ \frac{1}{N_a} \mathbf{F}_{n \times N_a} \dot{\mathbf{X}}_{N_a \times n}^T & \frac{1}{N_a} \mathbf{F}_{n \times N_a} \mathbf{X}_{N_a \times n}^T \end{bmatrix}_{2n \times 2n} \quad (17)$$

با توجه به طرف دوم رابطه فوق، ماتریس به دست آمده، متشکل از چهار ماتریس با ابعاد $n \times n$ است که علاوه بر

خواهد بود. حال با استفاده از رابطه (۱۸)، می‌توان ماتریس $-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ را برای تعیین مشخصه‌های مودال از رابطه (۲۵) استخراج کرد:

$$-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{y}\mathbf{y}^T = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{y}^T + \dot{\mathbf{y}}\mathbf{y}^T \rightarrow \rightarrow -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{y}^T(\mathbf{y}\mathbf{y}^T)^{-1} + \dot{\mathbf{y}}\mathbf{y}^T(\mathbf{y}\mathbf{y}^T)^{-1} \quad (25)$$

با توجه به رابطه (۲۵) برای محاسبه ماتریس $-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ و دست‌یابی به مشخصه‌های مودال علاوه بر پاسخ سیستم که در ماتریس‌های \mathbf{y} و $\dot{\mathbf{y}}$ مشخص شده‌اند، نیاز به دانستن اطلاعاتی در مورد ماتریس نیرو، \mathbf{P} ، و همچنین ماتریس \mathbf{A} است. با توجه به تعریف ماتریس \mathbf{A} که در رابطه (۳) ارائه شده است و همچنین با استفاده از روش افراز^۴ [۱۶] معکوس ماتریس \mathbf{A} به صورت رابطه (۲۶) خواهد بود:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} -\mathbf{M}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{M}^{-1} & \mathbf{M}^{-1} \\ \mathbf{M}^{-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (26)$$

حال با توجه به روابط (۲۵) و (۲۶) ماتریس $-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{y}^T$ به صورت رابطه (۲۷) خواهد بود:

$$-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{y}^T = \begin{bmatrix} -\mathbf{M}^{-1}\text{diag}(\dot{h}_{ii}(0)S_i) & \mathbf{0}_{n \times n} \\ \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n} \end{bmatrix}_{2n \times 2n} \quad (27)$$

با توجه به رابطه (۲۷)، به غیر از n مولفه، سایر عناصر ماتریس مذکور، صفر است.

اگر در طرف دوم رابطه (۲۵) از $-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{y}^T(\mathbf{y}\mathbf{y}^T)^{-1}$ صرف‌نظر شود، رابطه (۲۸) به دست می‌آید:

$$-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \dot{\mathbf{y}}\mathbf{y}^T(\mathbf{y}\mathbf{y}^T)^{-1} \quad (28)$$

در بخش بعد، سیستم هشت درجه آزادی مذکور تحت تحریک نوین سفید غیرهمبسته که به کلیه جرم‌ها اعمال می‌شود قرار داده شده، با محاسبه ماتریس‌های \mathbf{y} و $\dot{\mathbf{y}}$ از رابطه (۲۸) ماتریس $-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ بدست آمده، مشخصه‌های مودال سیستم ارتعاشی استخراج می‌شود.

نیروی اعمال شده به المان جرم z و المان جرم u با تاخیر زمانی τ است، و به صورت رابطه (۲۲) تعریف می‌شود، جایگذاری کرد [۲]:

$$C_{ji}^f(\tau) = R_j^f(\tau)\delta_{ji} \quad (22)$$

در رابطه (۲۲)، δ_{ji} معرف تابع دلتای کرونگر^۱ و $R_j^f(\tau)$ معرف همبستگی متقابل نیروی f وارد بر المان z با تاخیر زمانی τ است که برای نوین سفید به صورت $R_j^f(\tau) = S_j\delta(\tau)$ تعریف می‌شود که S_j تابع چگالی طیفی^۲ نیرو است که برای نوین سفید همواره مقداری ثابت است [۱۴]. $\delta(\tau)$ نیز معرف تابع ضربه واحد^۳ است؛ لذا در نهایت رابطه (۲۳) به دست می‌آید:

$$\mathbf{Z}_{ij} = \sum_{t=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \dot{h}_{it}(\tau)S_j\delta(\tau)\delta_{ji}d\tau \quad (23)$$

حال با استفاده از خاصیت غربالگری تابع ضربه واحد که به صورت $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\delta(x-x_0)dx = g(x_0)$ تعریف می‌شود [۱۵]، می‌توان به رابطه (۲۴) دست یافت:

$$\begin{cases} \text{if } j \neq l \rightarrow \delta_{jl} = 0 \rightarrow \mathbf{Z}_{ij} = 0 \\ \text{if } j = l \rightarrow \delta_{jl} = 1 \rightarrow \mathbf{Z}_{ii} = \sum_{t=1}^n \dot{h}_{it}(0)S_i \end{cases} \quad (24)$$

برای یک سیستم ارتعاشی، مشتق تابع پاسخ ایمپالس واحد به ازای $t=0$ ، همواره مخالف صفر است؛ یعنی $\dot{h}_{ii}(0) \neq 0$. بنابراین ماتریس \mathbf{Z} ، ماتریس غیر صفر خواهد بود ($\mathbf{Z}_{ij} \neq 0$)؛ لذا برای سیستمی که تحت تحریک نوین سفید قرار دارد، همبستگی متقابل مشتق پاسخ و تحریک، صفر نخواهد بود. با توجه به بررسی صورت گرفته طرف دوم رابطه (۱۷) به صورت ماتریس

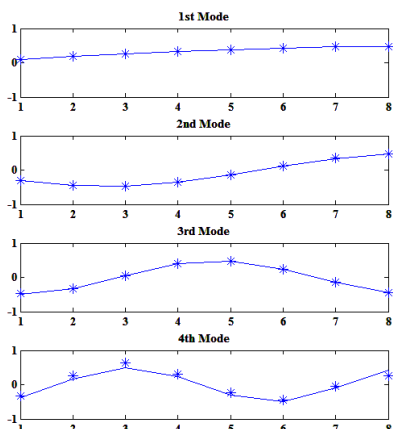
$$\mathbf{P}\mathbf{y}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n} \\ \frac{1}{N_a} \mathbf{F}_{n \times N_a} \mathbf{X}_{N_a \times n}^T & \frac{1}{N_a} \mathbf{F}_{n \times N_a} \mathbf{X}_{N_a \times n}^T \\ \neq \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n} \end{bmatrix}_{2n \times 2n} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times n} & \mathbf{0}_{n \times n} \\ \text{diag}(\dot{h}_{ii}(0)S_i) & \mathbf{0}_{n \times n} \end{bmatrix}_{2n \times 2n}$$

¹ Kronecker Delta Function

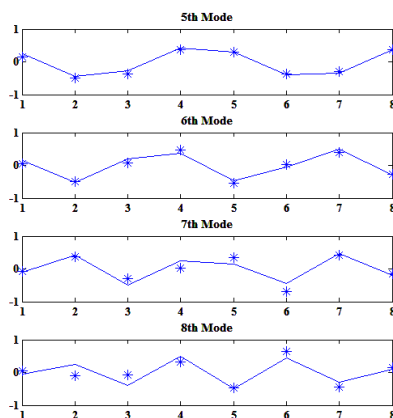
² Power Spectral Function

³ Dirac Delta Function

⁴ Partitioning Method



شکل ۴- مقایسه چهار شکل مود اول به دست آمده توسط روش تعمیم یافته MAFVRO (*) با شکل مودهای حاصل از حل تحلیلی (-) در مورد سیستم ارتعاشی با میرایی تناسبی $C = \alpha M + \beta K, \alpha = \beta = 0.2$ تحت تحریک نویز سفید و بدون در نظر گرفتن اثر نویز اندازه‌گیری به ازای تعداد $N = 10^6$ داده.



شکل ۵- مقایسه چهار شکل مود دوم به دست آمده توسط روش تعمیم یافته MAFVRO (*) با شکل مودهای حاصل از حل تحلیلی (-) در مورد سیستم ارتعاشی با میرایی تناسبی $C = \alpha M + \beta K, \alpha = \beta = 0.2$ تحت تحریک نویز سفید و بدون در نظر گرفتن اثر نویز اندازه‌گیری به ازای تعداد $N = 10^6$ داده.

با توجه به شکل‌های ۴ و ۵، مشخص است که شکل مودهای ارتعاشی به دست آمده از روش تعمیم یافته MAFVRO مقایسه با شکل مودهای حاصل از حل تحلیلی دقت خوبی دارند.

۶- نتایج حاصل از اعمال روش MAFVRO تعمیم یافته به سیستم ارتعاشی میرا تحت تحریک اتفاقی

سیستم هشت درجه آزادی مذکور تحت تحریک نویز سفید قرار داده می‌شود که به کلیه جرم‌ها اعمال می‌شود. لازم به ذکر است که در این بخش، اثر نویز اندازه‌گیری^۱ بر پاسخ سیستم در نظر گرفته نشده است. نتایج مربوط به فرکانس‌های طبیعی و خطاهای مرتبط با آن به ازای تعداد $N = 10^6$ داده در جدول ۲ ارائه شده است.

جدول ۲- فرکانس‌های طبیعی به دست آمده از روش تعمیم یافته MAFVRO و خطاهای فرکانس‌های طبیعی در مورد سیستم ارتعاشی با میرایی تناسبی $C = \alpha M + \beta K, \alpha = \beta = 0.2$ تحت تحریک نویز سفید و بدون در نظر گرفتن اثر نویز اندازه‌گیری به ازای تعداد نمونه $N = 10^6$.

شماره مود	$(\omega_n)_{MAFVRO}$	$\% (e)_{MAFVRO}$
1	0.1826	0.6369
2	0.5271	0.0886
3	0.8153	0.1209
4	1.0912	0.4977
5	1.3944	0.6088
6	1.6431	0.1153
7	1.8439	0.4013
8	1.9613	0.1373

با توجه به جدول ۲، مشخص است که بیشترین میزان خطا در استخراج فرکانس‌های طبیعی در مود اول است که برابر 0.6369 درصد است که مقدار بسیار ناچیزی است؛ لذا روش MAFVRO برای سیستم ارتعاشی میرا که تحت تحریک اتفاقی قرار می‌گیرد، روش دقیقی برای محاسبه فرکانس‌های طبیعی محسوب می‌شود.

در شکل‌های ۴ و ۵، شکل مودهای ارتعاشی به دست آمده از روش تعمیم یافته MAFVRO به سیستم ارتعاشی میرا که تحت تحریک اتفاقی قرار گرفته است، نشان داده شده است.

¹ Measurement Noise (M-N)

۷- بررسی اثر نویز اندازه‌گیری بر دقت مشخصه‌های مودال استخراج شده با استفاده از روش MAFVRO

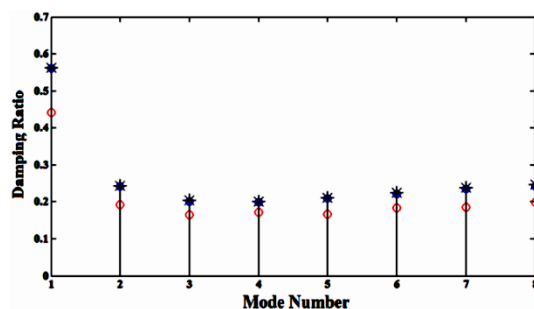
در مورد بررسی اثر نویز اندازه‌گیری بر قابلیت روش MAFVRO، به ازای شدت‌های مختلف نویز اندازه‌گیری، مشخصه‌های مودال سیستم هشت درجه آزادی نشان داده شده در شکل ۱ را استخراج می‌نمائیم. بدین منظور در مدل‌سازی، نویز اندازه‌گیری به صورت نویز سفید در نظر گرفته شد که ریشه میانگین مربعات^۱ (RMS) آن درصدهای مختلفی از ریشه میانگین پاسخ سیستم^۲ منظور شد. نویز اندازه‌گیری شده، مستقیماً در پاسخ سیستم اثر داده شد. نتایج مربوط به خطاهای فرکانس‌های طبیعی به دست آمده از روش MAFVRO به ازای شدت‌های مختلف نویز اندازه‌گیری که توسط روش تعمیم یافته MAFVRO استخراج شده‌اند، در جدول ۳ ارائه شده است.

جدول ۳- خطاهای مربوط به فرکانس‌های طبیعی به دست آمده از روش تعمیم یافته MAFVRO در مورد سیستم ارتعاشی هشت درجه آزادی تحت تحریک نویز سفید و در نظر گرفتن اثر نویز اندازه‌گیری با شدت‌های مختلف به ازای تعداد نمونه‌های زمانی $N = 10^6$.

شماره مود	RMS _{M-N} =	RMS _{M-N} =	RMS _{M-N} =
	%5RMS _S	%10RMS _S	%15RMS _S
	$\% (e)_{MAFVRO}$	$\% (e)_{MAFVRO}$	$\% (e)_{MAFVRO}$
1	2.1218	6.4744	8.5549
2	0.8735	2.7155	5.8514
3	0.6631	1.5227	4.2490
4	1.7782	3.3558	6.9458
5	1.2122	3.1604	6.7970
6	0.5788	1.6207	4.8866
7	0.7132	1.2033	3.3104
8	0.5207	1.1283	3.0685

مقایسه نتایج جداول ۲ و ۳، نشان می‌دهد که نویز اندازه‌گیری، اثر مخربی بر دقت فرکانس‌های طبیعی استخراج شده با استفاده از روش تعمیم یافته MAFVRO دارد و با افزایش شدت نویز، دقت نتایج کاهش می‌یابد.

در شکل ۶، نتایج به دست آمده برای نسبت‌های میرایی سیستم ارتعاشی با استفاده از روش MAFVRO و روش تعمیم یافته MAFVRO به ترتیب، برای حالت‌هایی که سیستم تحت تحریک شرایط اولیه و تحریک اتفاقی قرار گرفته است، ارائه و با مقادیر به دست آمده از حل تحلیلی مورد مقایسه قرار گرفته است.



شکل ۶- مقایسه نسبت‌های میرایی به دست آمده از روش MAFVRO برای سیستم ارتعاشی با میرایی تناسبی $C = \alpha M + \beta K$, $\alpha = \beta = 0.2$ ، تحت تحریک شرایط اولیه (●)، روش تعمیم یافته MAFVRO برای سیستم ارتعاشی تحت تحریک اتفاقی (■) و بدون در نظر گرفتن اثر نویز اندازه‌گیری با نسبت‌های میرایی حاصل از حل تحلیلی (*) به ازای تعداد $N = 10^6$ داده.

با توجه به شکل ۶، مشخص است که نسبت‌های میرایی به دست آمده از روش MAFVRO برای سیستم ارتعاشی که تحت تحریک شرایط اولیه قرار گرفته است، بر نسبت‌های میرایی به دست آمده از حل تحلیلی منطبق است؛ ولی وقتی سیستم ارتعاشی تحت تحریک اتفاقی قرار می‌گیرد، در نتایج به دست آمده انحراف از نتایج واقعی مشاهده می‌شود که این امر در مود اول، نسبت به سایر مودها مشهودتر است. آنچه لازم به ذکر است، اینکه روش MAFVRO که برای استخراج مشخصه‌های مودال سیستم‌های تحت شرایط تحریک اولیه معرفی شده است؛ در حالت تحریک اولیه به نتایج با دقت بالا منجر می‌شود؛ ولی روش مذکور برای سیستم‌های ارتعاشی تحت تحریک اتفاقی قابل اعمال نمی‌باشد. لذا در چنین شرایطی، روش تعمیم یافته MAFVRO که در تحقیق حاضر معرفی شد، قابل اعمال است که فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای ارتعاشی با دقت خوب استخراج می‌شود؛ ولی نسبت‌های میرایی کمتر از مقادیر واقعی بدست می‌آیند.

¹ Root Mean Square (RMS)

² System Response (S-R)

MAFVRO را با شکل مود واقعی سیستم که از حل دقیق مسأله مقدار ویژه حاصل شده است، مورد مقایسه قرار داد.

$$\varepsilon = \left(1 - \frac{\left| \left\{ \phi_{EVP} \right\}^T \left\{ \psi_{MAFVRO} \right\} \right|}{\left| \left\{ \phi_{EVP} \right\} \right| \left| \left\{ \psi_{MAFVRO} \right\} \right|} \right) \quad (29)$$

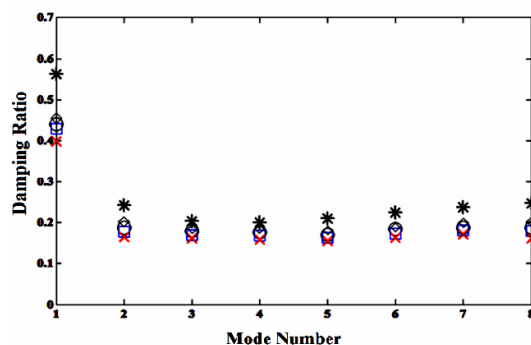
با توجه به رابطه (۲۹)، ϕ_{EVP} و ψ_{MAFVRO} به ترتیب، نشان دهنده شکل مودهای واقعی حاصل از مسأله مقدار ویژه سازه‌ای و شکل مود استخراج شده از روش تعمیم یافته MAFVRO هستند و مقدار ε ، بین عدد صفر و یک متغیر است؛ هرچه شکل مود استخراج شده از روش MAFVRO به شکل مود واقعی نزدیکتر باشد، مقدار ε به صفر نزدیکتر خواهد شد. برای شدت‌های مختلف نویز اندازه‌گیری، معیار اختلاف نرم شکل مود برای بررسی دقت شکل مودهای استخراج شده از روش تعمیم یافته MAFVRO به کار رفته و نتایج برای هر مود در جدول ۴ ارائه شده است.

جدول ۴- مقایسه شکل مودهای به دست آمده از روش تعمیم یافته MAFVRO با استفاده از معیار اختلاف نرم شکل مود برای سیستم ارتعاشی هشت درجه آزادی میرا تحت تحریک نویز سفید و با در نظر گرفتن اثرات نویز اندازه‌گیری با شدت‌های مختلف به ازای تعداد نمونه‌های زمانی $N = 10^6$.

شماره مود	حالت			
	RMS _{M-N} = %5RMS _S بدون نویز	RMS _{M-N} = %10RMS _S	RMS _{M-N} = %15RMS _S	RMS _{M-N} = %20RMS _S
	ε	ε	ε	ε
1	0.0008	0.0148	0.1398	0.1384
2	0.0009	0.0256	0.1478	0.1997
3	0.0008	0.0221	0.1689	0.2314
4	0.0013	0.0229	0.1531	0.2765
5	0.0021	0.0348	0.1865	0.3178
6	0.0043	0.0392	0.1988	0.3765
7	0.0055	0.0431	0.2385	0.4071
8	0.0084	0.0867	0.2678	0.5529

نتایج ارائه شده در جدول ۴، نشان می‌دهد که افزایش شدت نویز، سبب کاهش دقت شکل مودهای استخراج شده از روش تعمیم یافته MAFVRO می‌شود. ضمناً، بدیهی است که استخراج مشخصه‌های مودال سیستم‌های ارتعاشی با استفاده از سیگنال‌های آغشته به نویز، سبب کاهش دقت خواهد شد و در هر حال، وجود نویز اثر مخربی بر نتایج کلیه روش‌های آنالیز مودال دارد.

نتایج مربوط به نسبت‌های میرایی سیستم هشت درجه آزادی به ازای شدت‌های مختلف نویز اندازه‌گیری با استفاده از روش تعمیم یافته MAFVRO، استخراج و در شکل ۷ ارائه شده است.



شکل ۷- مقایسه نسبت‌های میرایی به دست آمده از روش تعمیم یافته MAFVRO برای سیستم ارتعاشی با میرایی تناسبی $C = \alpha M + \beta K$, $\alpha = \beta = 0.2$ ، تحت تحریک اتفاقی بدون در نظر گرفتن نویز (\diamond)، با در نظر گرفتن نویز اندازه‌گیری به صورت $RMS_{M-N} = \%10RMS_{S-R}$ (\square)، با در نظر گرفتن نویز اندازه‌گیری به صورت $RMS_{M-N} = \%15RMS_{S-R}$ (\square) و با در نظر گرفتن نویز اندازه‌گیری به صورت $RMS_{M-N} = \%20RMS_{S-R}$ (\times) با نسبت‌های میرایی حاصل از حل تحلیلی (*) به ازای تعداد نمونه‌های زمانی $N = 10^6$.

نمودار ارائه شده در شکل ۷، نشان می‌دهد که با افزایش شدت نویز، نسبت‌های میرایی به دست آمده از روش تعمیم یافته MAFVRO از مقادیر واقعی دورتر می‌شود و نویز اثر مخربی بر دقت نسبت‌های میرایی استخراج شده دارد. در بخش ۶، از نمودار شکل مودها برای مقایسه دقت شکل مودهای استخراجی از روش MAFVRO استفاده شد. در بخش حاضر، برای بررسی اثر نویز اندازه‌گیری بر دقت هر یک از شکل مودهای استخراج شده از روش تعمیم یافته MAFVRO، معیار اختلاف نرم شکل مود^۱ به کار گرفته می‌شود [۱۳]. با توجه به رابطه (۲۹)، برای هر مود، می‌توان دقت شکل مود استخراج شده از روش تعمیم یافته

¹ Mode Shape Norm Difference

- [5] Feeny BF (2002) On the proper orthogonal modes and normal modes of continuous vibration systems. *J Vib Acoust* 124(1): 157-160.
- [6] Chelidze D, Zhou W (2006) Smooth orthogonal decomposition-based vibration mode identification. *J Sound Vib* 292: 461-473.
- [7] Juang JN, Papa R (1985) An eigen system realization algorithm for modal parameter identification and model reduction. *J Guid Control Dynam* 8: 620-627.
- [8] Rezaee M, Shaterian-Alghalandis V, Banan-Nojavani A (2013) Development of the smooth orthogonal decomposition method to derive the modal parameters of vehicle suspension system. *J Sound Vib* 332: 1829-1842.
- [9] Qin Q, Li BH, Qian LZ, Lau KC (2001) Modal identification of TSING MA bridge by using improved eigen system realization algorithm. *J Sound Vib* 247(2): 325-341.
- [10] Wang BT, Cheng DK (2008) Modal analysis of MDOF system by using free vibration response data only. *J Sound Vib* 311: 737-755.
- [11] Wang BT, Cheng DK (2011) Modal analysis by free vibration response only for discrete and continuous systems. *J Sound Vib* 330: 3913-3929.
- [12] Mohanty P, Rixen DJ (2004) Operational modal analysis in the presence of harmonic excitation. *J Sound Vib* 270: 93-109.
- [13] Radeş M (2010) *Mechanical vibrations II*. Printech Publisher.
- [14] Newland DE (1993) *An introduction to random vibrations, spectral and wavelet analysis*, 3rd edn. John Wiley & Sons, New York.
- [15] Myint T, Debnath L (2007) *Linear partial differential equations for scientists and engineers*, 4th edn. Birkhäuser, Boston.
- [16] Demidovich BP, Maron IA (1987) *Computational mathematics*. Mir Publishers, Moscow.

۸- نتیجه‌گیری

در تحقیق حاضر، ابتدا روش MAFVRO به سیستم ارتعاشی میرا تحت تحریک اولیه اعمال شد. بررسی نتایج، نشان داد که تحت چنین شرایطی، روش مذکور دقت بالایی در استخراج همه مشخصه‌های مودال سیستم ارتعاشی دارد؛ سپس روش MAFVRO به سیستم‌های ارتعاشی تحت تحریک اتفاقی تعمیم داده شد. بدین منظور، تحریک اتفاقی به صورت نویز سفید در نظر گرفته شد که به همه جرم‌های سیستم اعمال می‌شود. روابط بدست آمده و نتایج حاصل نشان می‌دهد که روش تعمیم یافته MAFVRO برای سیستم‌های ارتعاشی میرا تحت تحریک اتفاقی، فرکانس‌های طبیعی و شکل مدهای سیستم ارتعاشی را با دقت خوبی برآورد می‌کند و در مورد نسبت میرایی، در همه مدهای ارتعاشی به مقادیری کوچکتر از میرایی واقعی متناظر با هر مود ارتعاشی منجر می‌شود؛ بنابراین در سیستم‌های ارتعاشی تحت تحریک اتفاقی، می‌توان از روش تعمیم یافته MAFVRO برای استخراج مشخصه‌های مودال استفاده کرد. برای بررسی اثر نویز بر دقت مشخصه‌های مودال استخراج شده از روش MAFVRO، نویز اندازه‌گیری با شدت‌های مختلف در پاسخ سیستم در نظر گرفته شده، سپس از طریق پاسخ آغشته به نویز و با استفاده از روش MAFVRO مشخصه‌های مودال استخراج گردید. نتایج حاکی از آن است که افزایش شدت نویز، سبب کاهش دقت مشخصه‌های مودال سیستم می‌شود.

۹- مراجع

- [1] Shen F, Zheng M, Shi DF, Xu F (2003) Using the cross-correlation technique to extract modal parameters on response-only data. *J Sound Vib* 259(5): 1165-1179.
- [2] Farooq U, Feeny BF (2008) Smooth orthogonal decomposition for modal analysis of randomly excited systems. *J Sound Vib* 316: 137-146.
- [3] Zhou W, Chelidze D (2008) Generalized eigenvalue decomposition in time domain modal parameter identification. *J Vib Acoust* 130(1): 1-6.
- [4] Shih CY, Tsuei YG, Allemang RJ, Brown DL (1988) Complex mode indication function and its application to spatial domain parameter estimation. *Mech Syst Signal PR* 2: 367-377.