



## تحلیل کمانش ترمومکانیکی ورق های ساخته شده از مواد تابعی با گشودگی دایروی در مرکز

علیرضا شاطرزاده<sup>\*۱</sup><sup>۱</sup> استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه شاهرود

تاریخ دریافت: ۱۳۹۳/۰۵/۱۸؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۳/۱۲/۱۱؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۴/۰۳/۰۶

## چکیده

در این مقاله، کمانش ورق‌های ساخته شده از مواد تابعی با گشودگی دایروی در مرکز تحت اثر همزمان بارهای مکانیکی و حرارتی با روش اجزاء محدود، مورد بررسی قرار گرفته است. برخلاف سایر مطالعات انجام شده در این زمینه که اثر حرارت و بار مکانیکی بصورت جداگانه مورد بررسی قرار گرفته است، در کار حاضر، به بررسی پدیده کمانش ترمومکانیکی تحت تاثیر همزمان بارهای مکانیکی و حرارتی پرداخته شده است. خصوصیات ماده در راستای ضخامت، به صورت توزیع توانی در نظر گرفته شده است. فرمول بندی انجام شده براساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول است و ماتریس‌های سفتی، براساس اصل حداقل انرژی پتانسیل بدست آمده است. به کمک الگوریتم تولید مش و کدهای نوشته شده در نرم افزار متلب، می‌توان به راحتی تراکم مش در اطراف سوراخ را کنترل کرد. نتایج حاصل تا حد امکان با سایر مراجع، مورد راستی آزمایی قرار گرفته است. تاثیر پارامترهای مختلف از جمله، شرایط مرزی لبه سوراخ و لبه ورق، اندازه سوراخ، نسبت ابعاد ورق و نوع بارگذاری مکانیکی بر محدوده پایداری ورق‌های ساخته شده از مواد تابعی، مورد مطالعه دقیق قرار گرفته است و در پایان، نتایج مفیدی ارائه گردیده است.

**کلمات کلیدی:** کمانش ترمومکانیکی؛ ناحیه پایداری؛ مواد تابعی؛ گشودگی دایروی.

## Thermo-Mechanical Buckling Analysis of FGM Plates with Circular Cut Out

A.R.Shaterzadeh<sup>1\*</sup><sup>1</sup>Assistant Prof., Mech. Eng., Shahrood Univ., Shahrood, Iran

## Abstract

In this paper, thermo mechanical buckling of functionally graded plates (FG Plates) with circular cutout and subjected to combined thermal and mechanical loads are investigated by Finite Element Method (FEM). Unlike other studies in which the plate is subjected to only one type of loading at once, in present study it was assumed that mechanical and thermal loads are applied simultaneously. The material properties are assumed to vary across plate thickness according to power law distribution of the volume fraction of constituents. The plate formulation is based on first order shear deformation theory (FSDT) and element stiffness matrices are derived based on principle of minimum potential energy. A flexible mesh generation algorithm is prepared in which the mesh density around the hole can be controlled easily. After validating the results of developed finite element code with those available in the literature the effect of boundary conditions in edges of plate and cut out, plate aspect ratio and cut out size on thermo mechanical buckling behavior of FG plates are studied thoroughly and stability boundary graphs are presented. Finally useful conclusions are presented.

**Keywords:** Thermo-Mechanical Buckling; FGM Plates; Stability Boundary; Circular Cut Out.

## ۱- مقدمه

همواره محققان به دنبال مطالعه در خصوص مواد جدید بوده اند و این مساله، فرصت‌های جدیدی را برای آنها فراهم کرده است. هدف از این مطالعات، استفاده از موادی است که در طراحی سازه‌ها عملکرد بهتری داشته باشند تا در نتیجه بتوانند سازه‌ها را به صورت بهینه طراحی نمایند.

در سال‌های اخیر، مواد تابعی توسط محققان بسیاری مورد بررسی قرار گرفته اند. این مواد، دارای خصوصیات منحصر به فردی هستند به عنوان مثال، قابلیت تحمل دماهای بسیار بالا، امکان استفاده از این مواد را در بسیاری از کاربردها فراهم کرده است.

صفحات دارای گشودگی در بسیاری از موارد به کار می‌روند به عنوان مثال، برای بازرسی و دسترسی آسان به قسمت‌های مختلف یک سیستم یا ایجاد یک دریچه خروجی و غیره. این صفحات، معمولاً تحت اثر همزمان بارهای مکانیکی و حرارتی قرار دارند؛ بنابراین تحلیل پایداری این قبیل صفحات، یک موضوع پر اهمیت بوده که در سال‌های اخیر مطالعات بسیاری در این زمینه صورت پذیرفته است.

شریعت<sup>۱</sup> و اسلامی<sup>۲</sup>، کمانش حرارتی صفحات مستطیلی ساخته شده از مواد تابعی را با نقص هندسی مورد مطالعه قرار داده‌اند. آنها با استفاده از تئوری کلاسیک<sup>۳</sup> معادلات تعادل و پایداری را بدست آورده اند. جبارزاده<sup>۴</sup> و همکاران [۲]، رفتار کمانش حرارتی صفحات دایره ای ضخامت متغیر از جنس مواد تابعی تحت بارگذاری حرارتی یکنواخت با در نظر گرفتن تئوری برشی مرتبه اول و فرضیات فون کارمن را مورد مطالعه قرار داده اند. مهدویان<sup>۵</sup> [۳]، کمانش مکانیکی صفحات ساخته شده از مواد تابعی مستطیلی را تحت بار صفحه ای فشاری یکنواخت بر اساس تئوری کلاسیک بررسی کرده است. شاطرزاده<sup>۶</sup> و همکاران [۴]، کمانش حرارتی ورق‌های کامپوزیتی دارای گشودگی دایروی را با روش اجزاء محدود انجام داده‌اند. آنها به بررسی اثر تغییر مکان و سایز سوراخ و شرایط مرزی پرداخته اند.

کیانی<sup>۷</sup> و اسلامی [۵]، با یک روش تحلیلی به بررسی کمانش حرارتی صفحات مدور ساخته شده از مواد تابعی با فونداسیون الاستیک پرداخته اند. بررسی کمانش مکانیکی صفحات مستطیلی ساخته شده از مواد تابعی براساس تئوری الاستیسیته کرنش‌های کوچک تحت اثر بارهای محوری مختلف و شرایط مرزی متنوع، توسط یوماز<sup>۸</sup> و همکاران [۶] انجام شده است. تائی<sup>۹</sup> و همکاران [۷]، کمانش صفحات ساخته شده از مواد تابعی ضخیم با فونداسیون الاستیک را با تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم، مورد مطالعه قرار داده اند. لطیفی<sup>۱۰</sup> و همکاران [۸]، کمانش صفحات ساخته شده از مواد تابعی نازک مستطیلی را تحت بار فشاری دو محوره، مورد بررسی قرار داده اند. آنها از سری فوریه سینوسی دوگانه برای تابع جابجایی و از تبدیل استوک برای مشتقات آنها استفاده کرده‌اند. بدائی<sup>۱۱</sup> و همکاران [۹]، بر پایه تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا، به بررسی کمانش صفحات ضخیم ساخته شده از مواد تابعی پرداخته اند. ژائو<sup>۱۲</sup> و همکاران [۱۰]، تحلیل کمانش حرارتی و مکانیکی ورق‌های ساخته شده از مواد تابعی با سوراخ مربعی و دایروی را انجام داده‌اند. آنها در این کار، از روش مش فری استفاده کرده‌اند. شریعت و همکاران [۱۱]، با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم، کمانش حرارتی و مکانیکی صفحات ضخیم ساخته شده از مواد تابعی را مورد مطالعه قرار داده‌اند. در این کار، صفحه تحت تاثیر دو نوع بارگذاری مکانیکی تک و دو محوره قرار دارد؛ همچنین آنها از دو نوع گرادینان دمایی ثابت و غیر خطی در راستای ضخامت استفاده کرده‌اند. اخیراً ناتاراجان<sup>۱۳</sup> و همکاران [۱۲]، با روش اجزاء محدود توسعه یافته به بررسی کمانش صفحات ساخته شده از مواد تابعی با ترک داخلی و گشودگی پرداخته اند.

با توجه به کارهای انجام شده در زمینه کمانش ورق‌ها ضمن روشن شدن اهمیت این موضوع، مشخص می‌شود که در خصوص بررسی اثر همزمان بارهای مکانیکی و حرارتی با

<sup>7</sup> Kiani

<sup>8</sup> Uymaz

<sup>9</sup> Thai

<sup>10</sup> Latifi

<sup>11</sup> Bodaghi

<sup>12</sup> Zhao

<sup>13</sup> Natarajan

<sup>1</sup> Shariat

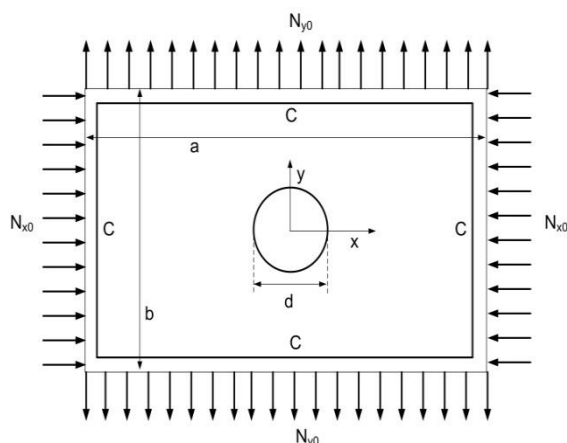
<sup>2</sup> Esлами

<sup>3</sup> Classic plate theory

<sup>4</sup> Jabbarzadeh

<sup>5</sup> Mahdavian

<sup>6</sup> Shaterzadeh



شکل ۱- ورق سوراخ دار تحت بارهای مکانیکی درون صفحه ای

ورق جابجایی‌های یک نقطه واقع بر صفحه میانی ورق  $w_0, v_0, u_0$  و  $\psi_x, \psi_y$  به ترتیب، دوران‌های نسبت به عمود بر صفحه میانی در جهت  $x$  و  $y$  هستند. میدان جابجایی حاصل از این تئوری، برخلاف تئوری کلاسیک کرنش برشی یکنواخت در جهت ضخامت را در محاسبات لحاظ می‌نماید.

مولفه‌های کرنش را می‌توان به صورت رابطه (۴) نمایش داد [۱۲]:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}\end{aligned}\quad (۴)$$

$$\gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

$$\gamma_{xz} = 2\varepsilon_{xz} = \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$\gamma_{yz} = 2\varepsilon_{yz} = \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)$$

با جایگذاری میدان جابجایی از رابطه (۳) در رابطه (۴)،

مولفه‌های کرنش به صورت رابطه (۵) بدست می‌آید

گشودگی دایروی کاری صورت نپذیرفته است. در این مقاله، پایداری صفحات ساخته شده از مواد تابعی، دارای گشودگی دایروی در مرکز تحت اثر همزمان بارهای حرارتی و مکانیکی، مورد بررسی قرار گرفته است. صفحه تحت تاثیر گرادیان دمایی خطی در راستای ضخامت بوده، بار مکانیکی صفحه ای تک و دو محوره نیز اعمال می‌شود. در شکل ۱، نمونه ای از یک ورق تحت بارگذاری دو محوره نشان داده شده است.

## ۲- فرمول بندی مساله

### ۲-۱- روابط تنش-کرنش-جابجایی

خصوصیات مکانیکی صفحات ساخته شده از مواد تابعی در جهت خاصی که معمولا ضخامت است، به صورت پیوسته تغییر می‌کند. ماده تابعی مورد بررسی سرامیک-فلز بوده بطوری که در یک سمت، کاملا فلز و در طرف دیگر، کاملا سرامیک است. مطابق قانون توانی، توزیع کسر حجمی این مواد، به صورت رابطه (۱) قابل بیان است:

$$V_c(z) = \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^p \quad 0 \leq p \leq \infty \quad (۱)$$

$$V_c(z) + V_m(z) = 1$$

در رابطه (۱) اندیس  $c$  و  $m$  به ترتیب، برای سرامیک و فلز است.  $V$  کسر حجمی مواد سازنده و  $p$  توان کسر حجمی برای سرامیک است. همچنین  $h$  ضخامت صفحه  $z$  مختصه جهت ضخامت  $(-h/2 \leq z \leq h/2)$  را نشان می‌دهد. با استفاده از قانون توانی، خصوصیات ماده تابعی را به صورت رابطه (۲) می‌توان بیان کرد [۱۱].

$$P(z) = (P_c - P_m)V_c(z) + P_m \quad (۲)$$

$P$  هر خصوصیتی از ماده است که می‌تواند مدول یانگ یا ضریب انبساط حرارتی باشد.

مطابق تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، میدان جابجایی به صورت رابطه (۳) قابل بیان است

$$\begin{aligned}u &= u_0(x, y) + z\psi_x(x, y) \\ v &= v_0(x, y) + z\psi_y(x, y) \\ w &= w_0(x, y)\end{aligned}\quad (۳)$$

$$[q] = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{22} \end{bmatrix}$$

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

$$\{\alpha\} = \begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\Delta T(z) = \Delta T \cdot (a + bz)$$

در کار حاضر، برای توزیع دمای خطی در جهت ضخامت بردار نیروها و ممان‌های منته‌به شکل رابطه (۱۰) بیان می‌شود

$$\{N\}, \{M\} = \int \{\sigma_M\} (1, z) dz$$

$$\{Q\} = \int \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} dz \quad (10)$$

$$\{N_T\}, \{M_T\} = \int \{\sigma_{Th}\} (1, z) dz$$

به کمک روابط (۶) و (۱۰) بردار نیروها و ممان‌های منته‌به را می‌توان به صورت روابط (۱۱-۱۲) بیان کرد

$$\begin{aligned} \{N\} &= [A]\{\varepsilon_1\} + [B]\{\varepsilon_2\} \\ \{M\} &= [B]\{\varepsilon_1\} + [D]\{\varepsilon_2\} \\ \{Q\} &= [A_s]\{\varepsilon_3\} \\ \{N_T\} &= \Delta T[A]\{\alpha\} \\ \{M_T\} &= \Delta T[B]\{\alpha\} \end{aligned} \quad (11)$$

که

$$[A], [B], [D] = \int [q](1, z, z^2) dz \quad (12)$$

$$[A_s] = \int \begin{bmatrix} Q_{22} & 0 \\ 0 & Q_{22} \end{bmatrix} dz$$

## ۲-۲- انرژی پتانسیل

برای یک صفحه تحت تاثیر نیروهای صفحه ای در امتداد لبه و افزایش دمای مشخص، انرژی پتانسیل کل برابر است با

$$\Pi = U - V_1 - V_2 \quad (13)$$

U انرژی کرنشی و V<sub>1</sub> کار نیروهای صفحه ای در امتداد لبه و V<sub>2</sub> کار انجام شده توسط نیروهای داخلی یا انرژی کرنشی ناشی از تنش‌های بوجود آمده در ورق در اثر بارگذاری است.

انرژی کرنشی به کمک بردار نیروها و ممان‌های منته‌به به صورت رابطه (۱۴) بیان می‌شود

$$U = \frac{1}{2} \iint (\{N\}^T \{\varepsilon_1\} + \{M\}^T \{\varepsilon_2\} + \{Q\}^T \{\varepsilon_3\}) dA - \iint (\{N_T\}^T \{\varepsilon_1\} + \{M_T\}^T \{\varepsilon_2\}) dA \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} &= \underbrace{\begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \end{Bmatrix}}_{\varepsilon_1} + z \underbrace{\begin{Bmatrix} \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \end{Bmatrix}}_{\varepsilon_2} \\ &+ \underbrace{\begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{Bmatrix}}_{\varepsilon_{NL}} \quad (5) \\ \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} &= \underbrace{\begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} + \psi_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \psi_y \end{Bmatrix}}_{\varepsilon_3} \end{aligned}$$

ε<sub>NL</sub> و ε<sub>L</sub> به ترتیب، قسمت خطی و غیرخطی مولفه‌های کرنش هستند.

بر طبق قانون هوک برای مواد الاستیک خطی با فرض تنش صفحه ای می‌توان روابط تنش-کرنش را به صورت رابطه (۶) نوشت

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} - \alpha_x \Delta T \\ \varepsilon_{yy} - \alpha_y \Delta T \\ \gamma_{xy} - \alpha_{xy} \Delta T \end{Bmatrix} \quad (6) \\ \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} Q_{22} & 0 \\ 0 & Q_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

α<sub>xy</sub>, α<sub>y</sub>, α<sub>x</sub> ضرایب انبساط حرارتی هستند و Q<sub>ij</sub> سفتی‌های کاهش یافته برای حالت تنش صفحه ای می‌باشند که تابعی از خصوصیات مکانیکی ماده بوده، به صورت رابطه (۷) بیان می‌شوند [۱۳]

$$Q_{11} = \frac{E(z)}{1 - \nu^2}, Q_{12} = \nu Q_{11}, Q_{22} = \frac{E(z)}{2(1 + \nu)} \quad (7)$$

E مدول یانگ است که مطابق با قانون توانی رابطه (۲) در راستای ضخامت تغییر می‌کند و ν نسبت پواسون بوده، ثابت است.

بردار تنش صفحه‌ای {σ<sub>xx</sub> σ<sub>yy</sub> τ<sub>xy</sub>}<sup>T</sup> شامل، تنش مکانیکی {σ<sub>M</sub>} و تنش حرارتی {σ<sub>Th</sub>} است

$$\begin{aligned} \{\sigma_M\} &= [q]\{\varepsilon\} \\ \{\sigma_{Th}\} &= \Delta T[q]\{\alpha\} \end{aligned} \quad (8)$$

بطوریکه

[۱۴] فرمول بندی المان ایزوپارامتریک<sup>۱</sup> به کار گرفته می شود.

با استفاده از توابع شکل مناسب، یک المان مربعی مرجع در مختصات محلی (s,t) به المان چهار ضلعی در مختصات عمومی (x,y) نگاشت می شود. هر گره، دارای پنج درجه آزادی است. در فرمول بندی ایزوپارامتریک، مقدار متغیرهای میدان جابجایی (u<sub>0</sub>, v<sub>0</sub>, w, ψ<sub>x</sub>, ψ<sub>y</sub>) در حوزه المان مرجع به کمک توابع شکل مشابه درونیایی می شود.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^4 N_i \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w \\ \psi_x \\ \psi_y \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^4 N_i \begin{bmatrix} u_{0i} \\ v_{0i} \\ w_i \\ \psi_{xi} \\ \psi_{yi} \end{bmatrix} \quad (19)$$

که (x<sub>i</sub>, y<sub>i</sub>, u<sub>0i</sub>, v<sub>0i</sub>, w<sub>i</sub>, ψ<sub>xi</sub>, ψ<sub>yi</sub>) مقدار متغیرهای درونیایی شده در گره‌های المان می باشند. توابع شکل یاد شده به صورت رابطه (۲۰) تعریف می شوند

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{(1-s)(1-t)}{4} \\ N_2 &= \frac{(1+s)(1-t)}{4} \\ N_3 &= \frac{(1+s)(1+t)}{4} \\ N_4 &= \frac{(1-s)(1+t)}{4} \end{aligned} \quad (20)$$

با استفاده از ماتریس انتقال ژاکوبین<sup>۲</sup>، مشتقات نسبت به مختصات عمومی به مشتقات نسبت به مختصات محلی مرتبط می شود

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial(\cdot)}{\partial x} \\ \frac{\partial(\cdot)}{\partial y} \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial(\cdot)}{\partial s} \\ \frac{\partial(\cdot)}{\partial t} \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{bmatrix} \quad (21)$$

اکنون می توان مولفه‌های کرنش را به بردار جابجایی‌های گره ای مرتبط کرد

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{Bmatrix} &= [B_1] \{d\} \\ \varepsilon_3 &= [B_3] \{d\} \\ \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} &= [B_2] \{d\} \end{aligned} \quad (22)$$

با جایگذاری رابطه (۱۱) در رابطه (۱۴) و یک سری عملیات ریاضی خواهیم داشت

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \iint (\{\varepsilon_1^T \ \varepsilon_2^T\} \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix} \{\varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix} \\ &+ \{\varepsilon_3\}^T [A_s] \{\varepsilon_3\}) dA \\ &- \Delta T \iint \{\varepsilon_1^T \ \varepsilon_2^T\} [[A] \ [B]] \{\alpha\} dA \end{aligned} \quad (15)$$

کار نیروهای صفحه ای در امتداد لبه ورق به صورت رابطه (۱۶) قابل بیان است:

$$V_1 = \int_C \{U_e\}^T \{P_e\} ds \quad (16)$$

که {P<sub>e</sub>} بردار نیروهای توزیع شده در لبه و {U<sub>e</sub>} بردار جابجایی‌های نقاط قرار گرفته در لبه ورق است. برای یک صفحه تحت بارگذاری دو محوره داریم:

$$\{P_e\} = \begin{Bmatrix} N_{x0} \\ N_{y0} \end{Bmatrix}, \quad \{U_e\} = \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{Bmatrix} \quad (17)$$

N<sub>y0</sub>, N<sub>x0</sub> بارهای صفحه‌ای خارجی اعمال شده به لبه‌های ورق بوده که به ترتیب، موازی با محور x و y هستند. در ادامه فرض بر آن است که N<sub>y0</sub> = γN<sub>x0</sub> و γ به صورت نسبت بار تعریف می شود (γ = +۱ و -۱۰).

کار نیروهای داخلی برحسب تنش‌های اولیه ناشی از بارگذاری و کرنش‌های غیرخطی به صورت رابطه (۱۸) بیان می شود:

$$V_2 = \frac{1}{2} \iint \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} \\ N_{xy} & N_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} dA \quad (18)$$

که N<sub>x</sub>, N<sub>y</sub> و N<sub>xy</sub> به ترتیب، نیروهای منته‌جه در جهت x, y و صفحه xy هستند.

### ۳- فرمولبندی اجزاء محدود

از آنجا که وجود سوراخ در صفحه مانع از ایجاد یک المان بندی مربعی یکنواخت می شود، بنابراین از المان‌های چهار ضلعی برای مدل سازی استفاده شده است. از طرفی به دلیل مشکلات انتگرال گیری از المان‌های چهار ضلعی مطابق مرجع

<sup>1</sup> Isoparametric element

<sup>2</sup> Jacobean matrix of transformation

این بردارها و ماتریس‌ها با انتگرال گیری‌های عددی برای هر المان محاسبه می‌شوند و سپس برای کل سازه مونتاژ می‌شوند. انتگرال گیری‌های عددی با روش تربیع گوسی<sup>۱</sup> در حوزه المان مرجع انجام می‌شود. برای جلوگیری از قفل شدگی برشی در محاسبه ماتریس سفتی برشی از انتگرال گیری کاهش یافته استفاده شده است. در پایان شرایط مرزی مساله اعمال شده و بردارها و ماتریس‌های سفتی کاهش یافته بدست می‌آید. در کار حاضر شرایط مرزی گیردار به صورت

$$\begin{aligned} [K_b] &= \iint [B_1]^T \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} [B_1] |J| dA \\ [K_s] &= \iint [B_3]^T [A_s]^T [B_3] |J| dA \\ [K_g] &= \iint [B_2]^T \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} \\ N_{xy} & N_y \end{bmatrix} [B_2] |J| dA \\ \{F_{th}\} &= \Delta T \iint [B_1]^T [A \quad B] \{\alpha\} |J| dA \\ \{F_{mech}^0\} &= \int_c [N_e]^T \{P_e^0\} |J| dc \end{aligned} \quad (26)$$

و شرایط مرزی ساده به صورت

$$\begin{cases} x = -a/2, +a/2 \\ y = -b/2, +b/2 \end{cases} \Rightarrow v = w = \psi_x = \psi_y = 0 \quad (27\text{-الف})$$

$$\begin{cases} x = -a/2, +a/2 \\ y = -b/2, +b/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v = w = \psi_y = 0 \\ u = w = \psi_x = \psi_y = 0 \end{cases} \quad (27\text{-ب})$$

تعریف می‌گردد.

#### ۴- کمانش ترمومکانیکی

در تحلیل مسایل کمانش ترمومکانیکی، فرض بر آنست که بر روی ورق بارگذاری اولیه وجود دارد. این بارگذاری اولیه، می‌تواند بار مکانیکی در اثر بارهای اعمال شده به لبه ورق یا بار حرارتی در اثر افزایش دما در امتداد ضخامت ورق باشد. در این صورت برای حالت اول، هدف یافتن دمای کمانش و برای حالت دوم، هدف یافتن بار کمانش است.

که  $\{d\} = \{u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad \psi_{x1} \quad \psi_{y1} \quad \dots \quad \psi_{y4}\}^T$  جابجایی‌های گره‌ای بوده، ماتریس‌های کرنش-جابجایی  $[B_1], [B_2], [B_3]$  توابعی از هردو مختصات محلی و عمومی می‌باشند. حال می‌توان انرژی پتانسیل کل را برحسب جابجایی‌های گره ای توصیف کرد

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} \{d\}^T \iint \left( [B_1]^T \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix} [B_1] \right. \\ &+ [B_3]^T [A_s]^T [B_3] \\ &\left. - [B_2]^T \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} \\ N_{xy} & N_y \end{bmatrix} [B_2] \right) \{d\} |J| dA \\ &- \Delta T \{d\}^T \iint [B_1]^T [[A] \quad [B]] \{\alpha\} |J| dA \\ &- \lambda \{d\}^T \int_c [N_e]^T \{P_e^0\} |J| dc \end{aligned} \quad (23)$$

که  $\mathbf{dc}$  طول المان در مختصات محلی،  $\{P_e^0\}$  بردار بار واحد اعمال شده در لبه‌های ورق و  $[N_e]$  ماتریس توابع شکل محاسبه شده در لبه‌های ورق هستند.

#### ۳-۱- اعمال اصل حداقل انرژی پتانسیل

مطابق اصل حداقل انرژی پتانسیل در موقعیت تعادل مشتق، انرژی پتانسیل کل سیستم نسبت به بردار جابجایی‌های گره ای باید برابر با صفر باشد. با اعمال این اصل بر رابطه (۲۳) خواهیم داشت

$$\begin{aligned} &\left( \iint ([B_1]^T \begin{bmatrix} [A] & [B] \\ [B] & [D] \end{bmatrix} [B_1] \right. \\ &+ [B_3]^T [A_s]^T [B_3] \\ &+ [B_2]^T \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} \\ N_{xy} & N_y \end{bmatrix} [B_2]) |J| dA \Big) \{d\} \\ &= \Delta T \iint [B_1]^T [[A] \quad [B]] \{\alpha\} |J| dA \\ &+ \lambda \int_c [N_e]^T \{P_e^0\} |J| dc \end{aligned} \quad (24)$$

با ساده سازی رابطه (۲۴) می‌توان به رابطه زیر رسید:

$$([K_b] + [K_s] - [K_g]) \{d\} = \Delta T \{F_{th}\} + \lambda \{F_{mech}^0\} \quad (25)$$

که بردار  $\{F_{th}\}$  نیروی حرارتی محاسبه شده به ازای افزایش دمای واحد،  $\{F_{mech}^0\}$  بردار بار مکانیکی اعمالی به ازای بار واحد اعمال شده به لبه ورق و  $\lambda$  ضریب باراست. در این رابطه ماتریس‌های سفتی خمشی، برشی و هندسی و بردار بار حرارتی و مکانیکی به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌شوند

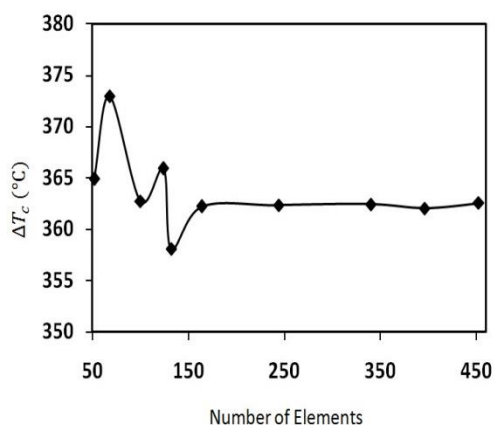
<sup>1</sup> Gaussian quadrature method

مشخص ورق، میزان بار مکانیکی بحرانی که منجر به کمانش می‌شود را تعیین کرد.

## ۵- نتایج

### ۵-۱- راستی آزمایی

به منظور بررسی صحت و دقت کد نوشته شده، ابتدا به بررسی همگرایی پاسخ بدست آمده می‌پردازیم. المان استفاده شده در تحلیل المان چهار گره ای، با پنج درجه آزادی در هر گره است. همان‌طور که در شکل ۲ مشاهده می‌شود، نتایج با افزایش تعداد المان‌ها به همگرایی مطلوب رسیده است. در ادامه، به منظور راستی آزمایی نتایج یک ورق ساخته شده از آلومینیوم/آلومینا، مورد بررسی قرار گرفته است. خصوصیات مکانیکی این ماده در جدول ۱ آورده شده است. در جدول ۲، بار کمانش مکانیکی بی بعد شده حاصل از کد حاضر و مرجع [۱۵] برای یک ورق همگن با شرط مرزی ساده تحت بار مکانیکی تک محوره و دو محوره ( $\gamma=0$ ) آورده شده است. در اینجا بار کمانش بی بعد شده به صورت  $\frac{N_{Crb^2}}{\pi^2 D}$  تعریف می‌شود که در آن  $D = \frac{Eh^3}{12}(1 - \nu^2)$  است. همان‌گونه که از داده‌های جدول مشخص است، نتایج حاصل تطابق قابل قبولی را نشان می‌دهند. در شکل ۳، دمای کمانش حرارتی بحرانی ( $\Delta T_c$ ) برای یک ورق مربعی برای دو شرط مرزی ساده و گیردار برحسب توان کسر حجمی با مرجع ۱۰ مقایسه شده است و مشاهده می‌شود که نتایج حاصل با نتایج مرجع ۱۰، سازگاری مناسبی دارد.



شکل ۲- دمای کمانش ورق با سوراخ دایروی در مرکز برحسب تعداد المان

برای یک ورق تحت بارگذاری مکانیکی درون صفحه ای در لبه‌ها با مقدار معلوم، می‌توان دمای کمانش ترمومکانیکی را بدست آورد. بدین منظور، رابطه (۲۵) با حذف ماتریس سفتی هندسی برای یافتن جایجایی‌های پیش کمانش<sup>۱</sup> حل می‌شود

$$([K_b] + [K_s])\{d\} = \Delta T\{F_{th}\} + \lambda\{F_{mech}^0\} \quad (28)$$

بردار جایجایی  $\{d\}$  شامل، دو قسمت است. قسمت اول، ناشی از بارگذاری حرارتی در اثر افزایش دمای واحد ( $\Delta T = 1^\circ C$ ) بوده و به صورت رابطه (۲۹) قابل بیان است:

$$\{d_{th}\} = ([K_b] + [K_s])^{-1}\{F_{th}\} \quad (29)$$

قسمت دوم، بردار جایجایی ناشی از بارگذاری مکانیکی درون صفحه ای اعمال شده در لبه‌های ورق است و به صورت رابطه (۳۰) بیان می‌شود:

$$\{d_{mech}\} = ([K_b] + [K_s])^{-1}\lambda\{F_{mech}^0\} \quad (30)$$

از آنجا که معادلات پیش کمانش حاکم خطی هستند، با اعمال اصل برهم نهی<sup>۲</sup> داریم:

$$\{d\} = \Delta T\{d_{th}\} + \lambda\{d_{mech}\} \quad (31)$$

پس از محاسبه بردار جایجایی‌های پیش کمانشی، می‌توان دمای کمانش را به صورت زیر بدست آورد:

$$([K_b] + [K_s] - [K_g])\{d\} = \{0\} \quad (32)$$

چون ماتریس سفتی هندسی تابع بردار جایجایی‌های پیش کمانشی است، این ماتریس را مطابق رابطه (۳۳) به دو قسمت تقسیم می‌نماییم

$$([K_b] + [K_s] - [K_g]_{mech} - \Delta T[K_g]_{th})\{d\} = \{0\} \quad (33)$$

رابطه (۳۳)، زمانی جواب بدیهی غیر از صفر دارد که درمیان ماتریس ضرایب بردار جایجایی برابر صفر باشد

$$([K] - \Delta T[K_g]_{th})\{d\} = \{0\} \quad (34)$$

که

$$[K] = [K_b] + [K_s] - [K_g]_{mech} \quad (35)$$

با حل مساله، مقدار ویژه<sup>۳</sup> حاصل برای یک بارگذاری مکانیکی معلوم مقدار دمای کمانش بحرانی و شکل مدهای کمانش بدست می‌آید. به روش مشابه، می‌توان به ازای افزایش دمای

<sup>1</sup> Pre-buckling displacements

<sup>2</sup> Superposition

<sup>3</sup> Eigen-value problem

همچنین نسبت عرض به طول ورق و نسبت ضخامت به طول ورق به ترتیب،  $(\frac{b}{a} = \frac{1}{2})$  و  $(\frac{h}{a} = \frac{1}{40})$  است. در شکل ۴، تاثیر توان کسر حجمی سرامیک ماده تابعی  $(p)$  بر ناحیه پایداری برای یک ورق مستطیلی با لبه‌های گیردار تحت بارگذاری فشاری دو محوره با توزیع دمایی خطی در راستای ضخامت و نسبت قطر سوراخ به طول ورق برابر با  $(\frac{d}{a} = 0.2)$  نشان داده شده است. همان‌گونه که در شکل مشاهده می‌شود، با افزایش  $p$ ، ناحیه پایداری کوچک می‌شود. افزایش  $p$ ، به معنای کاهش سهم سرامیک و افزایش سهم فلز در ماده تابعی است؛ بنابراین می‌توان نتیجه گرفت مقاومت سرامیک در برابر کمناش ناشی از بارگذاری ترمومکانیکی از فلز بالاتر است.

شکل ۵، نمودار پایداری ورق برای نسبت‌های ظاهری مختلف (نسبت عرض به طول) تحت بار حرارتی خطی و فشاری تک محوره در جهت  $x$  با شرایط مرزی گیردار در لبه‌های ورق و آزاد در لبه سوراخ و  $(\frac{d}{a} = 0.3)$  را نشان می‌دهد. همانطور که از شکل مشخص است، ورق مستطیلی نسبت به ورق مربعی ناحیه پایداری بزرگتری دارد؛ همچنین با توجه به جهت بارگذاری مکانیکی، کشیده شدن ورق در جهت عمود بر بارگذاری به طور قابل توجهی منجر به افزایش ناحیه پایداری ورق می‌شود؛ بنابراین می‌توان گفت به منظور افزایش ظرفیت مقاومت در برابر کمناش ترمومکانیکی، می‌بایست کشیدگی ورق در جهت عمود بر بارگذاری مکانیکی صورت پذیرد.

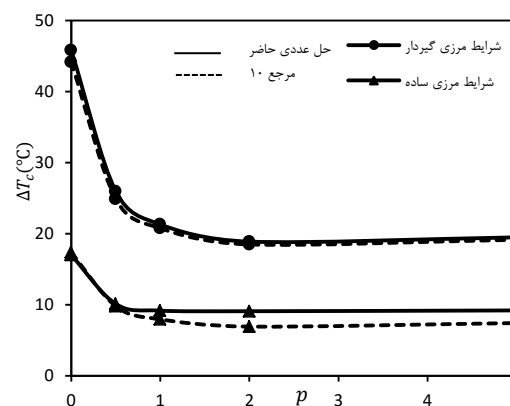
در شکل ۶، تاثیر اندازه سوراخ و شرایط مرزی لبه سوراخ بر منحنی پایداری کمناش ترمومکانیکی یک ورق مستطیلی با لبه‌های گیردار تحت بارگذاری فشاری دو محوره با گرادیان دمایی خطی در جهت ضخامت نشان داده شده است. در صورتی که لبه‌های سوراخ کاملاً آزاد باشند و ورق تنها تحت تاثیر بار مکانیکی خالص باشد، با افزایش اندازه سوراخ، مقاومت ورق در برابر کمناش مکانیکی کاهش می‌یابد؛ اما در صورت اعمال بار حرارتی خالص با بزرگ شدن اندازه سوراخ، میزان تحمل ورق در برابر کمناش حرارتی افزایش می‌یابد؛ اما هرچه لبه‌های سوراخ مقیدتر شود (اعمال شرایط مرزی ساده و گیردار در لبه‌های سوراخ)، برای ورق‌های تحت تاثیر بار مکانیکی خالص برخلاف حالت قبل با افزایش اندازه سوراخ مقاومت ورق در برابر کمناش مکانیکی افزایش می‌یابد.

جدول ۱- خصوصیات مکانیکی آلومینیوم و آلومینا [۱۰]

ماده	E (N/m <sup>2</sup> )	$\nu$	$\alpha$ (1/°C)
آلومینیوم	$70 \times 10^9$	۰/۳۰	$6-23 \times 10^{-6}$
آلومینا	$380 \times 10^9$	۰/۳۰	$6-7/40 \times 10^{-6}$

جدول ۲- مقایسه بار کمناش بی بعد شده  $(\frac{N_{Cr}b^2}{\pi^2D})$  ورق همگن

با مرجع [۱۵]			
$\gamma$	$a/b$	کار حاضر	مرجع ۱۵
۰	۰/۵	۶/۲۶۶	۶/۲۴۲
۰	۱	۴/۰۱۱	۳/۹۹۸
۰	۱/۵	۴/۳۷۴	۴/۳۳۷
۰	۳	۴/۰۳۶	۳/۹۹۸
۱	۰/۵	۴/۹۹۳	۵/۰۱۲
۱	۱	۱/۹۹۹	۲/۰۰۶
۱	۱/۵	۱/۴۴۴	۱/۴۴۹
۱	۳	۱/۱۱۱	۱/۱۱۵



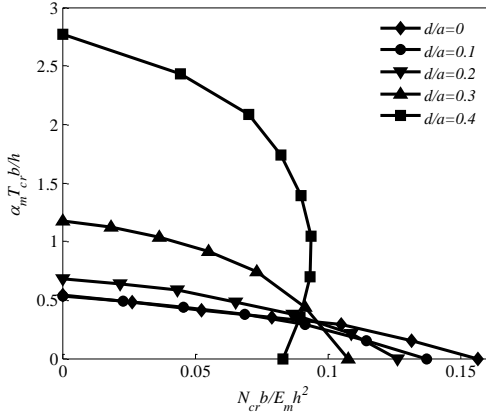
شکل ۳- دمای کمناش ورق مربعی برحسب توان کسر حجمی سرامیک

## ۵-۲- بحث در نتایج

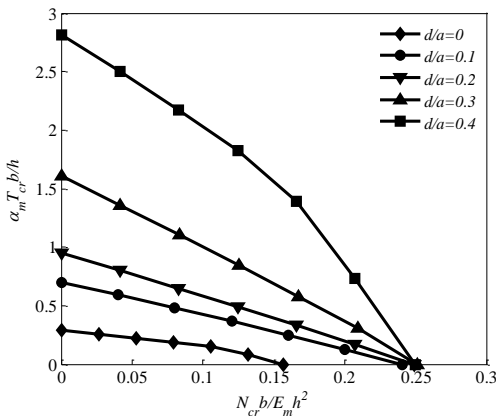
در ادامه بحث بار کمناش بحرانی بی بعد شده به صورت  $(\frac{N_{Cr}b}{E_m h^2})$  تعریف می‌شود که در این عبارت،  $E_m$  مدول الاستیک فلز،  $b$  و  $h$  به ترتیب، عرض و ضخامت ورق و  $N_{Cr}$  بار کمناش است. دمای کمناش بحرانی بی بعد شده  $(\frac{\alpha_m T_{Cr} b}{h})$  است که  $\alpha_m$  ضریب انبساط حرارتی فلز است؛



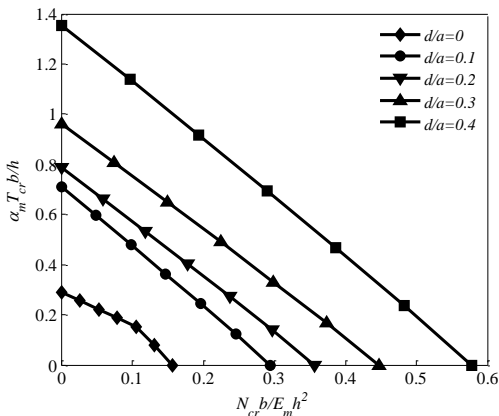
مرزی گیردار در لبه سوراخ، چنین شرایطی وجود ندارد و به نظر می‌رسد اثر اندازه سوراخ در این حالت بیشتر است.



الف - شرایط مرزی آزاد در لبه های سوراخ



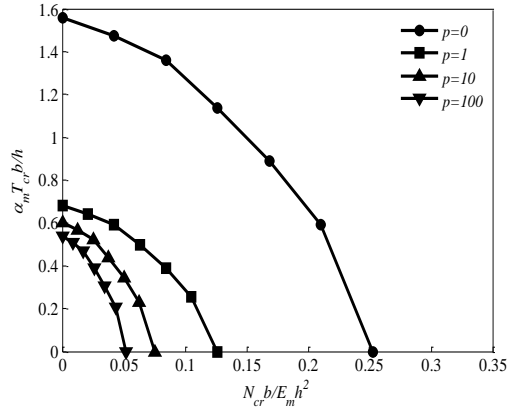
ب - شرایط مرزی ساده در لبه های سوراخ



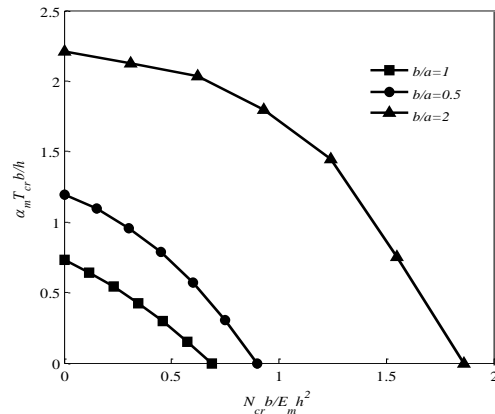
ج - شرایط مرزی گیردار در لبه های سوراخ

شکل ۶- تاثیر شرایط مرزی لبه سوراخ بر ناحیه پایداری بر حسب قطر سوراخ

در صورت اعمال بار حرارتی خالص مشابه قبل با بزرگ شدن اندازه سوراخ، میزان تحمل ورق در برابر کماتش حرارتی افزایش می‌یابد. تاثیر اندازه سوراخ بر میزان مقاومت کماتشی ورق در بارگذاری حرارتی بیشتر است؛ بطوری‌که در بارگذاری



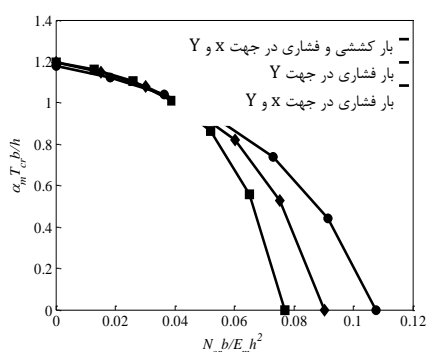
شکل ۴- ناحیه پایداری ورق مستطیلی برای مقادیر مختلف توان کسر حجمی سرامیک



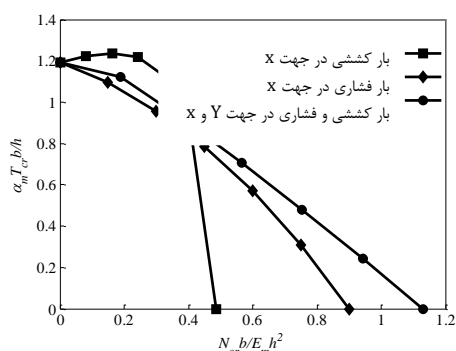
شکل ۵- ناحیه پایداری ورق با نسبت های ظاهری مختلف

ترمومکانیکی ورق با نسبت سوراخ ( $d/a = 0.4$ )، بزرگترین ناحیه پایداری کماتش ترمومکانیکی را دارا است؛ هرچه لبه‌های سوراخ مقیدتر باشد، ظرفیت تحمل بار مکانیکی ورق افزایش می‌یابد. از طرفی ورق با شرط مرزی ساده در لبه سوراخ، بیشترین ظرفیت تحمل بار حرارتی را نسبت به سایر شرایط مرزی دارا است. برای شرط مرزی آزاد و ساده در لبه سوراخ، بار ترمومکانیکی خاصی وجود دارد که تاثیر اندازه سوراخ بر آن بسیار ناچیز است؛ اما برای شرط

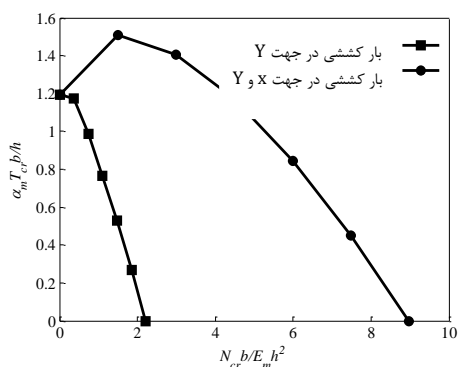
- ۳- هرچه لبه‌های سوراخ مقیدتر باشد، ظرفیت تحمل بار مکانیکی ورق افزایش می‌یابد.
- ۴- در صورت اعمال بار حرارتی خالص با بزرگ شدن اندازه سوراخ، میزان تحمل ورق در برابر کماتش حرارتی افزایش می‌یابد.
- ۵- ورق تحت بار کششی دو محوره، بیشترین مقاومت را در برابر کماتش ترمومکانیکی دارد.



الف- شرایط مرزی آزاد در لبه های سوراخ



ب- شرایط مرزی ساده در لبه های سوراخ



ج- شرایط مرزی گیردار در لبه های سوراخ

شکل ۷- ناحیه پایداری ورق برای بارگذاری های مکانیکی متفاوت

در شکل ۷، تاثیر نوع بارگذاری مکانیکی بر رفتار کماتش ترمومکانیکی ورق مستطیلی سوراخ دار کشیده شده در جهت محور  $x$  با لبه‌های گیردار و گرادپان دمایی خطی در جهت ضخامت و ( $\frac{d}{a} = 0.3$ ) نشان داده شده است. مطابق شکل ۷ ورق تحت بار کششی دو محوره، بیشترین مقاومت را در برابر کماتش ترمومکانیکی دارد. تنها با تبدیل بار کششی در جهت  $y$  به بار فشاری ورق در ضعیف ترین وضعیت مقاومت در برابر کماتش ترمومکانیکی قرار می‌گیرد. در حالت کلی، می‌توان گفت در صورتیکه بار اعمالی در جهت محور  $x$  و  $y$  هر دو فشاری یا هر دو کششی باشند، ظرفیت تحمل بار ترمومکانیکی افزایش و در غیر اینصورت، ظرفیت تحمل بار ترمومکانیکی کاهش می‌یابد. برای بارگذاری تک محوره، بار فشاری و کششی در جهت  $y$  به ترتیب، کمترین و بیشترین ظرفیت تحمل بار ترمومکانیکی را بدست می‌دهند؛ همچنین اعمال بار کششی در جهت محور  $x$  منجر به افزایش ظرفیت تحمل بار حرارتی می‌شود. به طور خلاصه در بررسی اثر جهت بارگذاری مکانیکی بر ناحیه پایداری کماتش ترمومکانیکی ورق، می‌توان گفت بارگذاری در جهت محور  $y$  تاثیر بیشتری از محور  $x$  دارد.

### ۵-۳- نتیجه گیری

در کار حاضر، به بررسی ناحیه پایداری کماتش ترمومکانیکی ورق‌های مستطیلی ساخته شده از مواد تابعی با سوراخ دایروی در مرکز پرداخته شد. بار مکانیکی درون صفحه ای در جهت‌های مختلف به صفحه اعمال گردید و بار حرارتی به صورت خطی در جهت ضخامت تغییر می‌کرد. نتایج با استفاده از روش اجزاء محدود بر پایه تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول استخراج گردید و نتایج مفیدی به شرح زیر بدست آمد.

- ۱- مقاومت سرامیک در برابر کماتش ناشی از بارگذاری ترمومکانیکی از فلز بالاتر است.
- ۲- ورق مستطیلی نسبت به ورق مربعی، ناحیه پایداری بزرگتری دارد، همچنین کشیده شدن ورق در جهت عمود بر بارگذاری، به طور قابل توجهی منجر به افزایش ناحیه پایداری ورق می‌شود.

- [8] Latifi M, Farhatnia F, Kadkhodaei M (2013) Buckling analysis of rectangular functionally graded plates under various edge conditions using Fourier series expansion. *European Journal of Mech-Sol* 41: 16–27.
- [9] Bodaghi M, Saidi AR (2010) Levy-type solution for buckling analysis of thick functionally graded rectangular plates based on the higher-order shear deformation plate theory. *App Math Mod* 34: 3659–3673.
- [10] Zhao X, Lee YY, Liew KM (2009) Mechanical and thermal buckling analysis of functionally graded plates. *Comp Struct* 90: 161–171.
- [11] Shariat BAS, Eslami MR (2007) Buckling of thick functionally graded plates under mechanical and thermal loads. *Comp Struct* 78: 433–439.
- [12] Natarajan S, Chakraborty S, Ganapathi M, Subramanian M (2014) A parametric study on the buckling of functionally graded material plates with internal discontinuities using the partition of unity method. *European Journal of Mech Sol* 44: 136–147.
- [13] Thai HT, Choi DH (2012) An efficient and simple refined theory for buckling analysis of functionally graded plates. *Appl Math Mod* 36: 1008–1022.
- [14] Logan DL (2012) *A first course in the finite element method*. Cengage Learning.
- [15] Reddy JN (2007) *Theory and analysis of elastic plates and shells*. CRC press.

## ۶- تقدیر و تشکر

این تحقیق، با استفاده از اعتبارات پژوهشی دانشگاه شاهرود به انجام رسیده است.

## ۷- مراجع

- [1] Samsam Shariat BA, Eslami MR (2006) Thermal buckling of imperfect functionally graded plates. *Sol Struct* 43: 4082–4096.
- [2] Jabbarzadeh M, Eskandari Jam J, Khoravi M (2012) The analysis of thermal buckling of circular plates of variable thickness from functionally graded materials. *Modares Mech Eng* 12(5): 59–73 (In Persian).
- [3] Mahdavian M (2009) Buckling analysis of simply-supported functionally graded rectangular plates under non-uniform in-plane compressive loading. *Sol Mech* 1: 213–225.
- [4] Shaterzadeh AR, Abolghasemi S, Rezaei R (2014) Finite element analysis of thermal buckling of rectangular laminated composite plates with circular cut-out. *Thermal stresses* 37: 604–623.
- [5] Kiani Y, Eslami MR (2013) An exact solution for thermal buckling of annular FGM plates on an elastic medium. *Comp Eng* 45: 101–110.
- [6] Uymaz B, Aydogdu M (2013) Three dimensional mechanical buckling of FG plates with general boundary conditions. *Comp Struc* 96: 174–193.
- [7] Thai HT, Kim SE (2013) Closed-form solution for buckling analysis of thick functionally graded plates on elastic foundation. *Mech Sci* 75: 34–44.