مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها/ سال ۱۳۹۳/ دوره ۴/ شماره ۴/ صفحه ۲۳-۳۲

مجله علمی پژوهشی مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها

دانشگاه شاهرود

پیش‌بینی نمودار حد شکل‌دهی ورق آلیاژ Ti-64 تیتانیوم با استفاده از شبیه‌سازی اجزای محدود

علی اکبر اله دادیان[1]، کوروش حسن‌پور[2,*]

[1] دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه اصفهان

[2] استادیار مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه اصفهان

تاریخ دریافت: ۱۳۹۲/۰۶/۲۹؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۳/۰۸/۱۵؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۴/۰۲/۱۳

چکیده

کاربرد آلیاژ Ti-64 تیتانیوم به‌سبب خواص منحصربه‌فرد آن از قبیل سبکی و پایداری در دماهای بالا، در صنایع هوا و فضا گسترش پیدا کرده است. در آلیاژ Ti-64 تیتانیوم، رفتار نامعمول مکانیکی از قبیل ناهمسانگردی پلاستیک و عدم تقارن کشش و فشار در جهت‌های مختلف مشاهده می‌شود. در این مقاله با انتخاب سطح تسلیم مناسب، کارسختی همسانگرد و روش عددی نگاشت بازگشتی، مدل الاستیک-پلاستیک به‌روش اجزای محدود در نرم‌افزار آباکوس پیاده‌سازی و با استفاده از نظریه هیل- سوییف در حالت الاستیک- پلاستیک و تحلیل اجزای محدود تصادفی، پیش‌بینی نمودار حد شکل‌دهی در دمای ۴۰۰°C انجام شده است. در تحلیل اجزای محدود تصادفی، ناهمگونی ماده به‌صورت میدان تصادفی ضخامت ورق در نظر گرفته شده است. همچنین با بررسی تأثیر اندازه گام در دقت حل، اندازه گام مناسب در پیش‌بینی نمودار حد شکل‌دهی به‌کار رفته است. با انتخاب درصد اطمینان ۹۹٪ در تحلیل اجزای محدود تصادفی، انحراف معیار مناسب میدان تصادفی در نظر گرفته شده و در پیش‌بینی نمودار حد شکل‌دهی به‌کار برده شده است. تأثیر ناهمسانگردی پلاستیک ورق آلیاژ Ti-64 تیتانیوم در نمودار حد شکل‌دهی نیز مورد بررسی قرار گرفته است.

کلمات کلیدی: ورق آلیاژ Ti-64؛ نمودار حد شکل‌دهی؛ معیار تسلیم کازاکا؛ معیار ناپایداری؛ شبیه‌سازی اجزای محدود

Prediction of Forming Limit Diagram for Ti-64 titanium alloy sheet using Finite element Simulation

A.A. Alahdadian[1], K. Hasanpour[2,*]

[1] M.Sc. Student, Mech. Eng., University of Isfahan., Isfahan, Iran

[2] Assoc. Prof., Mech. Eng., University of Isfahan., Isfahan, Iran

Abstract

The use of Ti-64 titanium alloy has been expanded in the aerospace industry because of its unique properties such as lightness and stability at high temperatures. Unusual mechanical behaviors such as plastic anisotropy and asymmetry of tension and pressure of Ti-64 Titanium alloy is observed in different directions. In this paper, by choosing the appropriate yield criterion, isotropic work hardening and return mapping numerical method, elastic-plastic model is implemented using finite element analysis in Abaqus software and prediction of forming limit diagram at 400C° is done using Hill-Swift elastic-plastic theory and random finite element analysis. Material inhomogeneities are considered as random plate thickness field in the stochastic finite element analysis. Considering the effect of step size on accuracy of solution, appropriate step size is applied to prediction of forming limit diagram. Selecting 99% safety percentage in stocastic finite element analysis, the appropriate variance of the random field is considered and is used in predicting forming limit diagram. Also, effects of plastic anisotropy of Ti-64 titanium alloy sheet have been studied in forming limit diagram.

Keywords: Ti-64 alloy sheet; Forming limit diagram; Cazacu yield criterion; Instability CRiterion; Finite element simulation

* نویسنده مسئول؛ تلفن: ۰۳۱۳۷۹۳۴۰۲۱؛ فکس: ۰۳۱۳۷۹۳۲۷۴۶

آدرس پست الکترونیک: hasanpour@eng.ui.ac.com

۱- مقدمه

آلیاژهای تیتانیوم به‌دلیل نسبت استحکام به وزن بالا، مقاومت در برابر خزش و مقاومت در برابر خوردگی کاربردهای بسیار زیادی در صنعت هوا و فضا دارد. در صنایع پزشکی به‌دلیل سازگاری با بدن انسان و در صنایع پتروشیمی به‌دلیل مقاومت چشم‌گیر در برابر خوردگی، از تیتانیوم استفاده فراوانی می‌شود. از کاربردهای تیتانیوم در صنعت هوا و فضا می‌توان به موتورهای هواپیما اشاره نمود. امروزه بیش از ۳۰٪ از قطعات توربین‌های جت از تیتانیوم و آلیاژهای آن ساخته می‌شود.

تیتانیوم در شکل بلوری معمولاً به دو صورت آلفا و بتا وجود دارد. فرم آلفا دارای بلورهای شش-وجهی [1] است. تعداد اندک سیستم‌های لغزش در این بلور سبب اهمیت یافتن مود تغییر شکل دوقلوشدن [2] می‌شود. برخلاف لغزش، دوقلوشدن تنها در یک جهت اتفاق می‌افتد. علاوه بر این، دوقلوشدن سبب تغییر جهت بلورها در طول فرآیند تغییرشکل و تکامل و دگرشکلی بافت چندبلوری [3] نیز می‌شود. به دلایل ذکرشده، فلزاتی با کریستال‌شش-وجهی علاوه بر ناهمسانگردی پلاستیک، رفتاری متفاوت در کشش و فشار [4] در راستاهای مختلف دارند.

برای مدل‌سازی این رفتار، محققان سطوح تسلیم متفاوتی ارائه نموده‌اند. نخستین بار در سال ۱۹۷۹، هاسفرد با اضافه کردن جمله‌های خطی به معادله‌ی تسلیم هیل، تلاشی برای مدل‌سازی عدم تقارن کشش و فشار نموده است [۱] . در سال ۱۹۹۱، بارلات و همکاران با استفاده از ایده هاسفرد، یک تبدیل خطی بر تانسور تنش کوشی معرفی‌کردند [۲] . با معرفی شش پارامتر ماده در این تبدیل، از تانسور تنش تبدیل یافته در معادله سطح تسلیم استفاده می‌شود. بارلات، کازاکا و همکاران با استفاده از همین ایده در سال‌های ۲۰۰۴، ۲۰۰۵ و ۲۰۰۸ معادله سطح تسلیم خود را بهبود بخشیده‌اند [۵،۴،۳] . در سال ۲۰۱۲، خان و همکاران با استفاده از این ایده که می‌توان ناهمسانگردی پلاستیک و عدم تقارن کشش و فشار را با دو تابع مجزا در سطح تسلیم در نظر گرفت، اصلاحاتی را در سطح تسلیم هیل ۱۹۴۸ انجام داده و سطح تسلیم جدیدی ارائه نموده‌اند [۶ و ۷] .

توصیف شکل‌پذیری ورق، این قابلیت را در فرآیندهای شکل‌دهی می‌دهد که از بروز عیوبی نظیر گلویی‌شدن موضعی جلوگیری شود. در طول دهه‌های اخیر روش‌های مختلفی برای دست‌یابی به این هدف توسعه پیدا کرده است. از مفیدترین و پرکاربردترین آن‌ها، نمودار حد شکل‌دهی است. در این نمودار، کرنش درون صفحه بیشینه بر حسب کرنش درون صفحه کمینه در لحظه گلویی‌شدن رسم می‌گردد. نمودار حد شکل‌دهی به دو صورت تجربی و نظری به‌دست می‌آید. از روش‌های تجربی می‌توان به آزمون اریکسون و آزمون ناکازیما اشاره نمود. مدل‌های نظری مختلفی برای محاسبه حد شکل‌دهی ارائه شده است. از نخستین آن‌ها می‌توان به مدل سوییفت و هیل در سال ۱۹۵۶ اشاره نمود. در سال ۱۹۶۷، مارشینیاک معیاری را در حالت تنش دومحوره ارائه نمود که تا به حال از سوی محققان بسیاری مورد استفاده قرارگرفته است. در این مدل، ناهمگونی ماده به‌وسیله یک باریکه با ضخامت کم‌تر مدل‌سازی می‌شود. زمانی که نسبت تغییر کرنش در جهت ضخامت در دو ناحیه از حدی بالاتر رود، حد شکل‌دهی رخ می‌دهد. این مدل با سطوح تسلیم مختلفی مورد استفاده قرار گرفته است. در سال ۲۰۰۳ و ۲۰۰۵، بنابیک و همکاران مدل سطح تسلیم خود را در مدل مارشینیاک پیاده‌سازی نموده‌اند [۸ و ۹] . در سال ۲۰۰۷، عاصم‌پور و همکاران اثر سطوح تسلیم مختلف را در مدل مارشینیاک مورد مطالعه قرارداده‌اند [۱۰] . ایشان در پیش‌بینی نمودار حد شکل‌دهی آلیاژ فولاد و آلومینیوم از سطح تسلیم هاسفرد ۱۹۷۹ و بنابیک ۲۰۰۰ استفاده نموده‌اند. پیش‌بینی با استفاده از سطح تسلیم هاسفرد با توان ۶ با نتایج تجربی تطابق خوبی دارد(با این ضریب بیان سطح تسلیم از ناهمسانگردی پلاستیک این مواد دقیق‌تر است). محققان زیادی با استفاده از تحلیل اجزای محدود و مدل مارشینیاک، حد شکل‌دهی را محاسبه کرده‌اند. در سال ۲۰۱۰، بنابیک و همکاران، مدل مارشینیاک و سطح تسلیم خود را در نرم‌افزار آباکوس پیاده‌سازی کرده‌اند [۱۱] . مقایسه پیش‌بینی عددی با استفاده از سطوح تسلیم به کار رفته در پژوهش ایشان با داده‌های تجربی نشان می‌دهد که تأثیر

---

[1] Hexagonal Closed Pack
[2] Twinning Deformation Mode
[3] Polycrystal
[4] Tension-Comperession Asymmetry

ناهمسانگردی و بیان دقیق آن در شاخه سمت راست نمودار حد شکل‌دهی بیشتر است. در سال ۲۰۰۸، فایلینگن و همکاران با ایجاد تغییراتی در مدل مارشینیاک، نمودار حد شکل‌دهی را با استفاده از تحلیل اجزای محدود محاسبه کرده‌اند. ایشان تغییر ضخامت مدل مارشینیاک را به‌صورت یک میدان تصادفی در نظرگرفته‌اند [۱۲] . ایشان با مطالعه اثر ناهمسانگردی بر روی نمودار حد شکل‌دهی، تغییرات در شکل و مقدار این نمودار را مشاهده نموده‌اند.

بیشتر روش‌های ذکر شده، فرض صلب-پلاستیک را در نظر گرفته‌اند. در سال ۲۰۰۷، آرتز مدل مارشینیاک و مدل هیل-سوییفت را در حالت الاستیک-پلاستیک تعمیم داده است [۱۳] . نتایج ایشان برای آلیاژی از آلومینیوم نشان می‌دهد که مدل الاستیک-پلاستیک نسبت به مدل صلب-پلاستیک، حد شکل‌دهی کمتری را پیش‌بینی می‌کند.

در حل حاضر، روش هیل- سوییفت تعمیم‌یافته در مقاله آرتز و روش اجزای محدود تصادفی فایلینگن با استفاده از سطح تسلیم کازاکا و همکاران ۲۰۰۶، در نرم‌افزار آباکوس پیاده‌سازی شده است. با استفاده از این مدل‌ها، نمودار حد شکل‌دهی ورق آلیاژ Ti-64 تیتانیوم ۴۰۰°C محاسبه شده و مقایسه‌ای بین این دو روش و داده‌های تجربی موجود انجام شده است. به‌ویژه تأثیر ناهمسانگردی پلاستیک در نمودار حد شکل‌دهی مورد مطالعه قرار گرفته است. از آنجا که شکل‌پذیری تیتانیوم در دمای اتاق پایین است، شبیه‌سازی شرایط شکل‌پذیری تیتانیوم در دماهای بالا، کیفیت تولید قطعات را بهبود می‌بخشد.

۲-معادله‌های حاکم

۲-۱- مدل هیل- سوییفت

آرتز در سال ۲۰۰۷ مدل هیل-سوییفت را در حالت الاستیک-پلاستیک تعمیم داده است [۱۳] . براساس این روش طبق شکل ۱، یک قطعه مستطیلی شکل با طول a، عرض b و ضخامت t تحت کرنش دو محوره با نسبت $\beta=\frac{d\varepsilon_{11}}{d\varepsilon_{22}}\times t$ قرار می‌گیرد. نیروها در جهت ۱ و ۲ طبق معادله‌های ۱ و ۲ به‌دست می‌آید.

$$F_1=\sigma_{11}A_1\,,\ A_1=a\times t \tag{۱}$$

$$F_2=\sigma_{22}A_2\,,\qquad A_2=b\times t \tag{۲}$$

در این مدل، گلویی شدن به ازای $\beta>0$ زمانی رخ می‌دهد که هم‌زمان $dF_1\leq 0$ و $dF_2\leq 0$ شود [۱۳] . dF_1 و dF_2 طبق معادله‌های ۳ و ۴ محاسبه می‌شوند.

$$dF_1=d\sigma_{11}at+\sigma_{11}(tda+adt) \tag{۳}$$

$$dF_2=d\sigma_{22}bt+\sigma_{22}(tdb+bdt) \tag{۴}$$

با جایگزینی تغییرات ضخامت و طول بر حسب کرنش در معادله‌های ۲، معادله‌های ۵ و ۶ به‌شکل زیر به‌دست می‌آیند.

$$\frac{dF_1}{at}=d\sigma_{11}+\sigma_{11}(d\varepsilon_{22}+d\varepsilon_{33}) \tag{۵}$$

$$\frac{dF_2}{bt}=d\sigma_{22}+\sigma_{22}(d\varepsilon_{11}+d\varepsilon_{33}) \tag{۶}$$

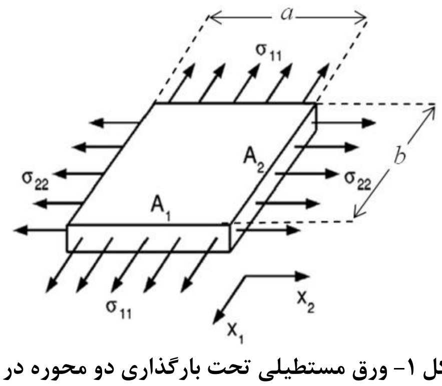
به ازای $\beta\leq 0$، برای تشخیص گلویی‌شدن موضعی، از معیار هیل استفاده می‌شود. بر اساس این معیار، گلویی‌شدن موضعی زمانی اتفاق می‌افتد که رابطه ۷ ارضا شود [۱۳] .

$$d\sigma_{11}+\sigma_{11}d\varepsilon_{33}\leq 0 \tag{۷}$$

برای پیاده‌سازی محاسباتی مدل، حل الاستیک-پلاستیک به‌صورت گام به گام انجام شده و در پایان هر گام شرایط هیل-سوییفت بررسی می‌شود. در هنگام ارضا شرایط، کرنش پلاستیک انباشته، طبق معادله‌های ۸ و ۹ به‌عنوان کرنش نمودار حد شکل‌دهی گزارش می‌شود.

$$\varepsilon_{11}^{p}=\int d\varepsilon_{11}^{p} \tag{۸}$$

$$\varepsilon_{22}^{p}=\int d\varepsilon_{22}^{p} \tag{۹}$$



شکل ۱- ورق مستطیلی تحت بارگذاری دو محوره در مدل هیل- سوییفت

۲-۲- مدل فایلینگن

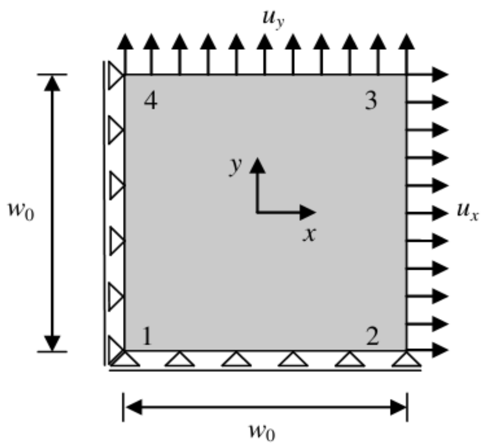
در مدل مارشینیاک ناهمگونی‌های ماده از قبیل اندازه و

جهت‌گیری مختلف ریزدانه‌ها و ناخالصی‌ها به‌صورت یک ناهمگونی هندسی معادل در نظر گرفته می‌شود. این ناهمگونی هندسی به‌صورت یک شیار با ضخامت کمتر است.

با استفاده از این ایده فایلینگن و همکاران روشی را بر اساس تحلیل اجزای محدود معرفی کردند [۱۲] . در این روش یک ورق مربعی شکل با عرض w_0 تحت کشش دومحوره قرار می‌گیرد(شکل-۲).

ضخامت اولیه این ورق به‌صورت یک میدان تصادفی $t_0(x,y)$ در نظر گرفته می‌شود. این میدان به دو جمله متوسط و باقیمانده تقسیم می‌گردد.

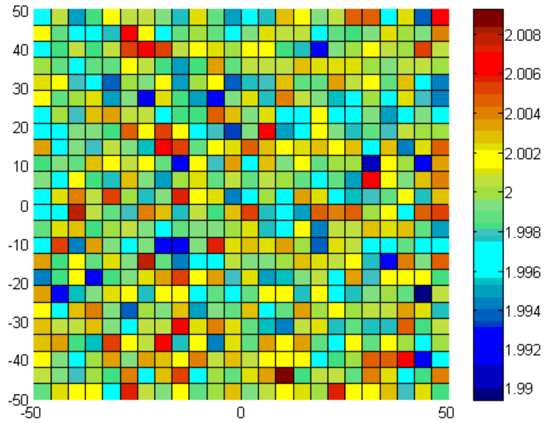
$$t_0(x,y) = \mu(x,y) + z(x,y) \qquad (۱۰)$$



شکل ۲- ورق مستطیلی تحت کشش دومحوره درمدل فایلینگن

جمله متوسط به‌صورت ثابت μ در نظرگرفته شده و جمله باقیمانده به‌صورت یک میدان تصادفی گوس با نقطه تعادلی صفر در نظر گرفته می‌شود. در شکل ۳، نمونه‌ای از میدان تصادفی با تابع توزیع یکه نشان داده شده است. در این میدان، پارامتر انحراف معیار تابع توزیع یکه(گوسی) به اندازه ۰/۰۰۳(mm) در نظر گرفته شده است.

به‌منظور محاسبه حد شکل‌دهی، معیار گلویی شدن موضعی نیاز است. در این مدل هنگامی که نسبت نمو کرنش یک المان در جهت ضخامت به میانگین نمو کرنش المان‌ها در جهت ضخامت از حد بحرانی عبور کند، حد شکل‌دهی رخ می‌دهد.



شکل ۳- میدان تصادفی گوسی ضخامت با انحراف معیار ۰/۰۰۳

میانگین نمو کرنش المان‌ها طبق معادله‌ی ۱۱ محاسبه می‌شود.

$$\Delta\varepsilon_z^{\Omega} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\Delta\varepsilon_{z,i}^{p} \qquad (۱۱)$$

در این معادله فرض شده است که المان‌ها تا قبل از پدیده گلویی‌شدن موضعی، دارای سطح برابر می‌باشند. به‌منظور پیش‌بینی نمودار حد شکل‌دهی به‌روش فایلینگن، کشش دومحوره با نسبت‌های مختلف $\frac{u_x}{u_y}$ به‌ازای N میدان تصادفی ضخامت مدل‌سازی می‌شود.

با استفاده از روش مونت کارلو، جواب با درصد اطمینان $100 \times (1-\alpha)$ در بازه $\bar{X} \pm g_{\frac{\alpha}{2},N-1}\frac{S}{\sqrt{N}}$ قرار می‌گیرد. $\bar{X}$ و S به‌ترتیب میانگین و انحراف معیار داده‌های شبیه‌سازی شده با N میدان تصادفی است.

جدول ۱-ضریب $g_{\frac{\alpha}{2},N-1}$ به ازای N و α مختلف [۱۴]

α / N-1	۰/۰۵	۰/۰۲۵	۰/۰۰۵
۱	۶/۳۱۴	۱۲/۷۰۶	۶۳/۶۵۷
۵	۲/۰۱۵	۲/۵۷۱	۴/۰۳۲
۱۰	۱/۸۱۲	۲/۲۲۸	۳/۱۶۹
۱۵	۱/۷۵۳	۲/۱۳۱	۲/۹۴۷

پارامتر $g_{\frac{\alpha}{2},N-1}$ به‌ازای مقادیر مختلف N و α در جدول ۱ آمده است. میدان ضخامت تصادفی به‌روش اجزای محدود با استفاده از قابلیت توزیع گره‌ای ضخامت در مقاطع پوسته‌ای

در نرم‌افزار آباکوس پیاده‌سازی شده است. مدل اجزا محدود با المان‌بندی یک چهارم و اعمال شرایط مرزی متقارن ساخته شده است. از المان S4 آباکوس برای المان‌بندی استفاده شده است.

۲-۳- معادله‌های ساختاری

۲-۳-۱-سطح تسلیم

همان‌طور که در مقدمه اشاره شد، به‌دلیل بلورهای شش-وجهی آلیاژ Ti-64 تیتانیوم، رفتار این ماده در کشش و فشار متفاوت است. بنابراین، برای توصیف سطح تسلیم پلاستیک در فرآیند شکل‌دهی به سطح تسلیمی نیاز است که علاوه بر ناهمسانگردی پلاستیک، قادر به پیش‌بینی عدم تقارن کشش و فشار نیز باشد. در این مقاله از سطح تسلیم کازاکا استفاده شده است [۴] . با توجه به ابعاد مسأله، فرض تنش-صفحه‌ای قابل استفاده است.

در این معیار، برای توصیف عدم تقارن کشش و فشار و ناهمسانگردی پلاستیک، طبق معادله‌ی ۱۲ تبدیل خطی بر تانسور تنش انحرافی انجام می‌شود.

$$\Sigma_{ij} = L_{ijkl} S_{kl} \tag{۱۲}$$

در معادله‌ی ۱۲، $\boldsymbol{\Sigma}$، $\boldsymbol{S}$ و $\boldsymbol{L}$ به‌ترتیب تانسور تنش تبدیل‌یافته، تانسور تنش انحرافی و تانسور تبدیل می‌باشد. تانسورتبدیل متقارن است، لذا در شکل نمایش ماتریسی ویت[۱] و در حالت تنش صفحه‌ای به‌شکل معادله ۱۳ قابل نمایش است.

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} & 0 \\ & l_{22} & l_{23} & 0 \\ & & l_{33} & 0 \\ sym & & & l_{44} \end{bmatrix} \tag{۱۳}$$

با استفاده از مقادیر اصلی تانسور تنش تبدیل‌یافته، تابع سطح تسلیم به‌شکل معادله ۱۴ توصیف می‌شود.

$$F = (|\Sigma_1| - k\Sigma_1)^a + (|\Sigma_1| - k\Sigma_1)^a + (|\Sigma_1| - k\Sigma_1)^a \tag{۱۴}$$

به‌منظور ارضای شرایط تحدب سطح تسلیم و تراکم‌ناپذیری پلاستیک، ضریب a باید عدد صحیح بزرگتر از یک و ضریب k می‌بایست در محدوده‌ی [۱،۱-] باشد [۴] . ثابت‌های ماتریس تبدیل و ثابت k با توجه به آزمون‌های کشش و فشار تک‌محوره در زاویه‌های مختلف نسبت به جهت نورد و ضرایب لانکفورد در این آزمون‌ها قابل محاسبه است. ضرایب مدل با کمینه‌سازی مجموع مربعات خطا، طبق معادله ۱۵ به‌دست می‌آید.

$$min\, f = \sum_{i=1}^{m} w^i \left(1 - \frac{\sigma_{pr}^i}{\sigma_{exp}^i}\right) + \sum_{i=1}^{n} w^i \left(1 - \frac{R_{pr}^i}{R_{exp}^i}\right) \tag{۱۵}$$

با توجه به اینکه، شرایط تحدب سطح تسلیم محدوده‌ای را برای برخی از پارامترهای سطح تسلیم ایجاد می‌نماید، مسأله کمینه‌سازی مربعات خطا مقید می‌باشد. برای حل این مسأله کمینه‌سازی می‌توان از روش‌های عددی نظیر الگوریتم ژنتیک استفاده نمود.

۲-۳-۲-کارسختی

در این مقاله، برای توصیف سطوح تسلیم ثانویه از کار سختی همسانگرد به‌شکل زیر استفاده شده است.

$$F(\boldsymbol{\sigma}, \bar{\varepsilon}_p) = \bar{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}) - Y(\bar{\varepsilon}_p) \tag{۱۶}$$

در معادله‌ی ۱۶، Y از تقریب منحنی تنش-کرنش آزمون کشش تک‌محوره در جهت نورد به‌دست می‌آید. برای تقریب این منحنی از معادله کار سختی سوییفت به‌صورت زیر استفاده شده است.

$$Y(\bar{\varepsilon}_p) = A(B + \bar{\varepsilon}_p)^n \tag{۱۷}$$

عبارت $\bar{\sigma}(\boldsymbol{\sigma})$ در معادله‌ی ۱۶، تنش مؤثر در جهت نورد ورق بوده و طبق معادله ۱۸ محاسبه می‌گردد. معادله سطح تسلیم مذکور همگن از درجه اول می‌باشد. ضریب B باعث می‌شود که تنش مؤثر در راستای نورد ورق تعریف شود.

$$\bar{\sigma} = B[(|\Sigma_1| - k\Sigma_1)^a + (|\Sigma_2| - k\Sigma_2)^a + (|\Sigma_3| - k\Sigma_3)^a]^{\frac{1}{a}} \tag{۱۸}$$

ضریب B در رابطه (۱۸) عبارت است از:

$$B = [(|\emptyset_1| - k\emptyset_1)^a + (|\emptyset_2| - k\emptyset_2)^a + (|\emptyset_3| - k\emptyset_3)^a]^{\frac{1}{a}} \tag{۱۹}$$

$$\emptyset_{\mathrm{i}} = \frac{2}{3}L_{i1} - \frac{1}{3}L_{i2} - \frac{1}{3}L_{i3}\ , i = 1,2,3 \tag{۲۰}$$

۳-روش عددی

نمو کرنش طبق معادله ۲۱ به دو بخش الاستیک و پلاستیک تقسیم می‌شود.

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon} = \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_e + \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_p \tag{۲۱}$$

---
[۱] Voigt Notation

نمو تنش از نمو کرنش الاستیک به‌دست می‌آید.

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{C_e}(\Delta\boldsymbol{\varepsilon} - \Delta\boldsymbol{\varepsilon_p}) \quad (۲۲)$$

$\boldsymbol{C_e}$، تانسور مدول الاستیسیته است که در حال تنش-صفحه‌ای و در شکل نمایش ماتریسی ویت به‌شکل زیر قابل نمایش است.

$$\boldsymbol{C_e} = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (۲۳)$$

E، υ به‌ترتیب مدول یانگ و ضریب پوآسون می‌باشد. در طول هر گام زمانی، ابتدا نمو کرنش کل به‌صورت الاستیک فرض شده و بنابراین تنش حدسی به‌شکل معادله‌ی ۲۴ محاسبه می‌شود.

$$\boldsymbol{\sigma}_{tr}^{t+\Delta t} = \boldsymbol{\sigma}^t + \boldsymbol{C_e}(\Delta\boldsymbol{\varepsilon}) \quad (۲۴)$$

اگر $F(\boldsymbol{\sigma}, \bar{\varepsilon}_p) < 0$، پیش‌بینی الاستیک صحیح است. در غیر این صورت مقدار نمو کرنش پلاستیک باید محاسبه شود. بدین منظور، معادله‌های غیرخطی ۲۵ و ۲۶ بر حسب $\boldsymbol{\sigma}_{n+1}$ و $\Delta\lambda_{n+1}$ باید حل شود.

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{tr} - \Delta\lambda_{n+1}\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\boldsymbol{\sigma}} \quad (۲۵)$$

$$F_{n+1} = \bar{\sigma}(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}) - Y(\bar{\varepsilon}_{p,n+1}) \quad (۲۶)$$

برای حل این معادله‌ها از روش نگاشت بازگشتی استفاده شده است [۱۵] . در این روش، در یک حلقه تکرار، مقدار تنش و کرنش مؤثر پلاستیک به‌شکل زیر تصحیح می‌شود.

$$\delta\lambda_{n+1}^{k+1} = \frac{F(\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^k, \bar{\varepsilon}_{n+1}^k)}{\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\boldsymbol{\sigma}}:\boldsymbol{C_e}:\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\boldsymbol{\sigma}} - \frac{\partial Y}{\partial\bar{\varepsilon}_p}} \quad (۲۷)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1}^{k+1} = \boldsymbol{\sigma}_n^k - \delta\lambda_{n+1}^{k+1}\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\boldsymbol{\sigma}} \quad (۲۸)$$

$$\Delta\lambda_{n+1}^{k+1} = \Delta\lambda_{n+1}^k + \delta\lambda_{n+1}^{k+1} \quad (۲۹)$$

$$\bar{\varepsilon}_{p,n+1} = \bar{\varepsilon}_{p,n} + \Delta\lambda_{n+1}^{k+1} \quad (۳۰)$$

مشتق‌های به‌کار برده شده در معادله‌های ۲۷ تا ۳۰ در پیوست آمده است. زمانی که سطح تسلیم به‌اندازه کافی به صفر نزدیک شد، برنامه از حلقه تکرار خارج می‌شود. تانسور مدول مماسی برای حل معادله‌های تعادل به‌روش نیوتن-رافسون احتیاج است. تانسور مدول مماسی طبق معادله ۲۹ محاسبه می‌شود.

$$\boldsymbol{C_{ep}} = \frac{\Delta\boldsymbol{\sigma}}{\Delta\boldsymbol{\varepsilon}} = \boldsymbol{C_e} - \frac{(\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\boldsymbol{\sigma}}:\boldsymbol{C_e})\otimes(\boldsymbol{C_e}:\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\boldsymbol{\sigma}})}{\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\boldsymbol{\sigma}}:\boldsymbol{C_e}:\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\boldsymbol{\sigma}} - \frac{\partial Y}{\partial\bar{\varepsilon}_p}} \quad (۳۱)$$

معادله‌های۱۱ تا ۳۱ در نرم افزار آباکوس پیاده‌سازی شده است. برای پیاده سازی از زیربرنامه ماده[1]آباکوس استفاده شده است. با استفاده از روش اجزای محدود، آزمون کشش دومحوره یک قطعه ((mm)۱۰۰×(mm)۱۰۰) شبیه‌سازی شده است. حل به‌صورت گام‌به‌گام انجام‌شده و در انتهای هر گام شرایط هیل-سوییفت و فایلینگن بررسی می‌شود. برای بررسی این شرایط در انتهای هرگام از زیربرنامه آباکوس استفاده شده است.

۴-آلیاژ Ti-6AL-4V

دمای استحاله آلیاژ Ti-6AL-4V از فاز آلفا به فاز بتا در حدود ۹۸۰°C است [۶] . تنش‌های تسلیم و ضرایب لانکفورد این آلیاژ در دمای ۴۰۰°C برای ورق با ضخامت ۲ میلی‌متر در جدول ۲ آورده شده است. ورق، مطابق با استاندارد AMS[2] 4911 به‌مدت ۳۰ دقیقه در دمای۷۸۸°C (۱۴۵۰ درجه فارنهایت) عملیات حرارتی شده است. بر اساس داده‌های جدول ۲، پارامترهای سطح تسلیم طبق جدول ۳ می‌باشد. جهت x، y و z به‌ترتیب جهت نورد ورق،جهت عمود بر نورد ورق و جهت ضخامت در نظر گرفته شده است.

جدول۲- تنش‌های تسلیم و ضرایب لانکفورد آلیاژTi-64 [۱۶]

زاویه با جهت نورد(درجه)	تنش تسلیم کششی (MPa)	تنش تسلیم فشاری (MPa)
صفر	۶۸۱/۰	۷۵۳/۴
۹۰	۶۹۱/۰	*۸۵۷/۵۸
۴۵	۵۹۱/۰	*۶۸۲/۷۰
ضریب لانکفورد	صفر درجه ۰/۶	۹۰ درجه ۰/۵۱

*محاسبه شده

ضرایب کارسختی سوییفت با استفاده از تقریب منحنی کشش در جهت نورد ورق در جدول ۴ آورده شده است.

[1] User Material Subroutine (Umat)
[2] Aerospace Material Standard

جدول ۳ -پارامترهای سطح تسلیم کازاکا برای آلیاژ Ti-6AL-4V و a=2 [۱۶]

کمیت	مقدار	کمیت	مقدار
L_{11}	۱/۷۲۶۸	L_{23}	۰/۶۶۳۰
L_{12}	۰/۷۶۲۰	L_{33}	۱/۸۴۹۰
L_{13}	۰/۶۵۳۰	L_{44}	۱/۳۲۱۰
L_{22}	۱/۷۴۰۰	k	-۰/۲۵۵

جدول-۴ - پارامترهای کارسختی سوییفت برای آلیاژTi-6AL-4V

N	B	A
۰/۰۶۰۸	۰/۰۱۳۶	۸۸۳/۶

۵- نتایج

ابتدا به‌منظور اطمینان از پیاده‌سازی صحیح معادله‌ها به‌روش اجزای محدود، آزمون‌های تک‌محوره در جهت‌های مختلف و در دمای ۴۰۰°C شبیه‌سازی شده است.

ناهمسانگردی پلاستیک ورق با تعریف ضریب ناهمسانگردی که ضریب لانکفورد نیز نامیده می‌شود، بیان می‌گردد. ضرایب لانکفورد در زوایای مختلف نسبت به جهت نورد ورق بر اساس رابطه‌ی ۳۲ در شبیه‌سازی آزمون کشش تک‌محوره محاسبه می‌شود.

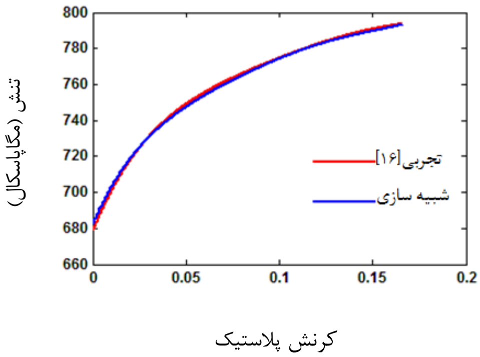
$$r = \frac{\Delta\varepsilon_w^p}{\Delta\varepsilon_t^p} \qquad (۳۲)$$

$\Delta\varepsilon_w^p$ و $\Delta\varepsilon_t^p$ به‌ترتیب نمو کرنش پلاستیک در جهت عرضی و ضخامت است. در حالت همسانگرد، مقدار این ضریب برابر با یک می‌باشد، بنابراین مقدار کرنش در جهت ضخامت و در جهت عرضی برابر است. هرگاه این ضریب بزرگتر از یک باشد، مقدار کرنش عرضی غالب است. در چنین موادی مقاومت در برابر نازک‌شدگی[۱] بیشتر است. بنابراین مقدار این ضریب در هر جهت بر نوع عیبی که بروز می‌کند، تأثیرگذار است.

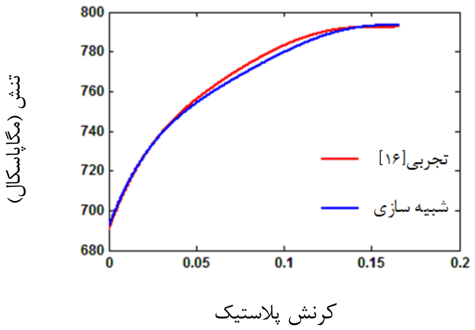
با توجه به تراکم‌ناپذیری پلاستیک، معادله ۳۲ به شکل معادله ۳۳ قابل بیان است:

$$r = -\frac{\Delta\varepsilon_w^p}{\Delta\varepsilon_w^p+\Delta\varepsilon_l^p} \qquad (۳۳)$$

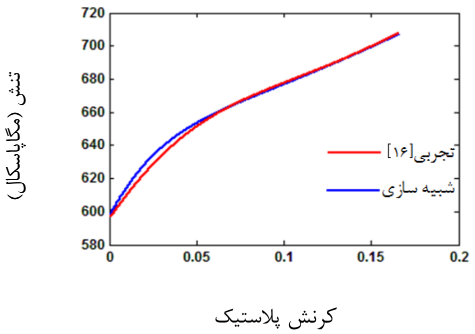
مقدار $\Delta\varepsilon_l^p$، نمو کرنش در جهت طولی است.



شکل ۴-مقایسه نتایج شبیه‌سازی آزمون کشش تک‌محوره در جهت نورد ورق با نتایج تجربی [۱۶]



شکل ۵- مقایسه نتایج شبیه‌سازی آزمون کشش تک‌محوره در جهت عمود بر نورد ورق با نتایج تجربی [۱۶]



شکل ۶- مقایسه نتایج شبیه‌سازی آزمون کشش تک‌محوره با زاویه ۴۵ نسبت به نورد ورق با نتایج تجربی [۱۶]

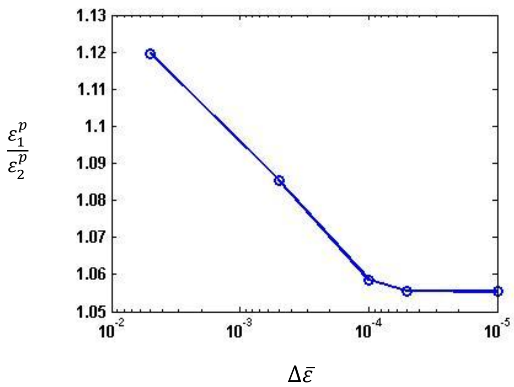
[1] Thining

همان‌طور که در شکل‌های ۴ تا ۶ مشاهده می‌شود، تطبیق نتایج تجربی [۱۶] و شبیه‌سازی مناسب بوده و ناهمسانگردی پلاستیک به‌خوبی در این شکل‌ها قابل مشاهده است. در جدول ۵ ضرایب لانکفورد در حل حاضر با نتایج تجربی مقایسه شده است. ملاحظه می‌گردد که ناهمسانگردی در ضرایب لانکفورد نسبت به تنش تسلیم آزمون کشش تک‌محوره بیشتر است.

جدول ۵ –مقایسه ضرایب لانکفورد در جهت‌های مختلف نسبت به نورد ورق

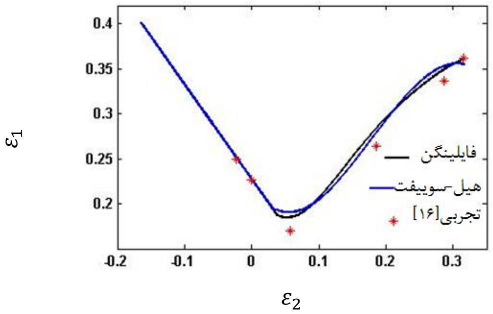
زاویه با نورد (برحسب درجه)	تجربی [۱۶]	حل حاضر	درصد خطا
صفر	۰/۶	۰/۵۸	۳/۳۳
۴۵	۱/۲۶	۱/۲۲	۳/۱۷
۹۰	۰/۵۱	۰/۴۹	۳/۹۲

در روش هیل-سوییفت، حل الاستیک-پلاستیک گام‌به‌گام انجام شده و در انتهای هر گام شرایط حد شکل‌دهی بررسی می‌شود. اندازه گام تأثیر زیادی در دقت حل دارد. شکل ۷ تغییرات نسبت حد شکل‌دهی را نسبت به اندازه گام به‌ازای نسبت $\frac{\Delta\varepsilon_{11}}{\Delta\varepsilon_{22}}$ برابر با یک نشان می‌دهد. همان‌گونه که مشاهده می‌شود، اندازه‌ی گام حداقل باید در حدود ۰/۰۰۰۰۵ باشد تا تقریب خوبی از حد شکل‌دهی به‌دست آید.

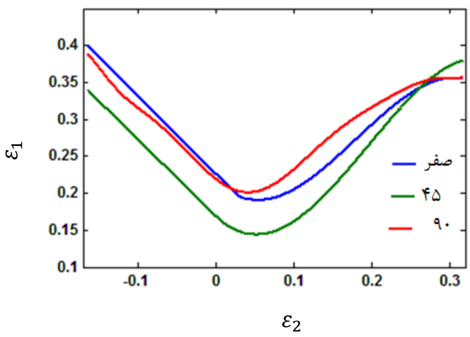


شکل ۷- نمودار حد شکل‌دهی نسبت به اندازه گام به‌ازای نسبت $\frac{\Delta\varepsilon_{11}}{\Delta\varepsilon_{22}}$ برابر با یک

با استفاده از اندازه گام مذکور، حد شکل‌دهی به‌ازای نسبت‌های مختلف $\frac{\Delta\varepsilon_{11}}{\Delta\varepsilon_{22}}$ به‌روش هیل-سوییفت محاسبه شده است. با استفاده از حد شکل‌دهی تجربی در حالت $\varepsilon_2 = 0$، مقدار N در رابطه $\bar{X} \pm g_{\frac{\alpha}{2},N-1}\frac{S}{\sqrt{N}}$ برابر ۱۶ فرض شده است. در صورتی که درصد اطمینان، ۹۹٪ در نظر گرفته شود، مقدار $g_{\frac{\alpha}{2},N-1}$ طبق جدول ۱ برابر با ۲/۹۴۷ می‌باشد. بنابراین در روش فایلینگن حد شکل‌دهی با اطمینان ۹۹ درصد در بازه $\bar{X} \pm 0.7368S$ قرار می‌گیرد. $\bar{X}$ میانگین ۱۶ مقدار محاسبه شده و S انحراف معیار این مقادیر است. در شکل ۸ حد شکل‌دهی محاسبه شده به‌روش هیل-سوییفت و فایلینگن مقایسه شده است. به‌منظور بررسی اثر ناهمسانگردی پلاستیک در نمودار حد شکل‌دهی، زاویه جهت نورد ورق با جهت بارگذاری سه مقدار صفر، °۴۵ و °۹۰ در نظر گرفته شده است.



شکل ۸-مقایسه نمودار حد شکل‌دهی ورق آلیاژ Ti-64 تیتانیوم در دمای ۴۰۰ درجه سانتی‌گراد به روش فایلینگن، هیل-سوییفت و نتایج تجربی [۱۶]



شکل ۹- مقایسه نمودار حد شکل‌دهیورق آلیاژ Ti-64 تیتانیوم در زوایای مختلف ماده نسبت به جهت بارگذاری(روش هیل-سوییفت)

در شکل ۹ حد شکل‌دهی در زوایای صفر، ۴۵ و ۹۰ درجه مقایسه شده است. در پیش‌بینی نمودار حد شکل‌دهی، ضرایب لانکفورد نقش مهمی ایفا می‌کنند [۱۲] . اختلاف

نمودارهای حد شکل‌دهی در شکل ۹، از تغییرات ضرایب لانکفورد ناشی از تغییر زاویه بین مختصات ماده و مختصات بارگذاری به‌وجود می‌آید. همان‌گونه که مشاهده می‌شود، نمودارهای حد شکل‌دهی در زاویه‌های صفر و ۹۰° در منتها الیه سمت راست به هم نزدیک می‌شود، زیرا مقدار ضریب لانکفورد در کشش دومحوره مساوی در این دو زاویه برابر است. با توجه به نقش ضرایب لانکفورد، مدل سطح تسلیمی که ناهمسانگردی در ضرایب لانکفورد را دقیق‌تر بیان کند، برای تخمین نمودار حد شکل‌دهی مناسب‌تر است. سطح تسلیم کازاکا دقت مناسبی در بیان ضرایب لانکفورد دارد. مثلاً در مقابل سطح تسلیم هیل ۱۹۴۸، سطح تسلیم کازاکا بیان دقیق‌تری در ناهمسانگردی ضرایب لانکفورد دارد [۱۵] .

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله، نمودار حد شکل‌دهی ورق آلیاژ Ti-64 تیتانیوم در دمای $۴۰۰^\circ C$ به‌روش هیل-سوییفت تعمیم‌یافته و فایلینگن محاسبه شد. مدل الاستیک-پلاستیک با سطح تسلیم کازاکا به‌منظور شبیه‌سازی دقیق‌تر رفتار ماده در نظر گرفته و نتایج زیر حاصل شد:

۱- در مدل هیل-سوییفت، اندازه گام تأثیری زیادی در دقت حل دارد. از طرفی کوچک‌تر کردن گام، سبب بالا رفتن زمان محاسبات می‌شود. در این مقاله اندازه گام حداکثر به‌منظور دست‌یابی به دقت مناسب محاسبه و در تخمین نمودارهای حد شکل‌دهی به‌کار برده شد.

۲- با استفاده از حد شکل‌دهی تجربی در $(\varepsilon_2 = 0)$، مقدار N در رابطه $\bar{X} \pm g_{\frac{\alpha}{2},N-1} \frac{S}{\sqrt{N}}$ برابر ۱۶ فرض شد. بنابراین در روش فایلینگن شبیه‌سازی ۱۶ بار انجام‌شده و حد شکل‌دهی برابر با میانگین مقادیر به‌دست آمده در این تعداد شبیه‌سازی است. خطای داده‌های تجربی و شبیه‌سازی در نمودار حد شکل‌دهی ناشی از خطای پارامترهای سطح تسلیم، مقادیر ضرایب لانکفورد پیش‌بینی شده سطح تسلیم (جدول-۵) و انحراف معیار در نظرگرفته شده در روش فایلینگن برای میدان تصادفی ضخامت است. با این وجود، تطابق نتایج مناسب است.

۳- با بررسی نمودارهای حد شکل‌دهی در زوایای مختلف ملاحظه گردید که آلیاژ تیتانیوم در زاویه ۴۵° نسبت به زاویه‌های دیگر، حد شکل‌دهی کمتری دارد. علاوه بر این، همان‌طور که انتظار می‌رود، در زاویه‌های صفر و ۹۰° در منتهاالیه سمت راست، نمودارهای حد شکل‌دهی بر هم منطبق می‌شوند. انطباق مذکور به‌دلیل تساوی ضریب کشش دومحوره برابر در زاویه‌های صفر و ۹۰° است.

۷- علایم، نشانه‌ها و ارقام

$:$	ضرب دوگانه داخلی
$\otimes$	ضرب تانسوری
$\bar{\varepsilon}_p$	کرنش پلاستیک انباشته
$\bar{\sigma}$	تنش موثر در راستای نورد ورق
$\boldsymbol{\Sigma}$	تانسور تنش تبدیل یافته
$\boldsymbol{S}$	تانسور تنش انحرافی
$\boldsymbol{L}$	تانسور تبدیل
$\boldsymbol{\sigma}_{tr}$	تانسور تنش امتحانی
$\boldsymbol{C}_e$	تانسور مدول الاستیسیته
$\boldsymbol{C}_{ep}$	تانسور مدول مماسی
Y	تابع کارسختی
$\bar{X}$	میانگین حل‌های انجام شده در روش تصادفی
S	انحراف معیار حل‌های انجام شده در روش تصادفی
ν	ضریب پوآسون
E	مدول یانگ
σ_{pr}	تنش تسلیم پیش‌بینی شده به‌وسیله مدل
σ_{exp}	تنش تسلیم تجربی
R_{pr}	ضریب لانکفورد پیش‌بینی شده به‌وسیله مدل
R_{exp}	ضریب لانکفورد تجربی
$g_{\frac{\alpha}{2},N-1}$	ضریب مونت کارلو
μ	میانگین تغییرات ضخامت در مدل تصادفی
$z(x,y)$	جمله باقیمانده در تغییرات ضخامت مدل تصادفی
β	نسبت نمو کرنش ها در ضخامت(مدل هیل-سوییفت)

۸- پیوست

مشتق تنش مؤثر بر حسب تانسور تنش، یک تانسور مرتبه دو می‌باشد که با استفاده از قاعده زنجیره‌ای طبق معادله پ-۱ محاسبه می‌شود.

$$\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\sigma_{ij}} = \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\Sigma_m}\frac{\partial\Sigma_m}{\partial\Sigma_{kl}}\frac{\partial\Sigma_{kl}}{\partial\sigma_{ij}} \qquad (\text{پ-۱})$$

در معادله پ-۱ جمله اول، مشتق تنش مؤثر نسبت به مقادیر ویژه تانسور تنش تبدیل یافته بوده و طبق معادله پ-۲ محاسبه می‌شود.

$$\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\Sigma_m} = B[(|\Sigma_1| - k\Sigma_1)^a + (|\Sigma_2| - k\Sigma_2)^a + (|\Sigma_3| - k\Sigma_3)^a]^{\frac{1-a}{a}} \quad \text{(پ-۲)}$$

جمله دوم در معادله پ-۱، مشتق مقادیر ویژه تانسور تنش تبدیل یافته نسبت به تانسور تنش تبدیل یافته است و یک تانسور مرتبه ۳ می‌باشد. مولفه‌های غیر صفر آن طبق معادله‌های پ-۳ محاسبه می‌شود.

$$\frac{\partial\Sigma_{xx}}{\partial\sigma_{yy}} = \psi_1 \,, \frac{\partial\Sigma_{yy}}{\partial\sigma_{yy}} = \psi_2 \,, \frac{\partial\Sigma_{yy}}{\partial\sigma_{yy}} = \psi_3$$

$$\frac{\partial\Sigma_{xx}}{\partial\sigma_{xx}} = \phi_1 \,, \frac{\partial\Sigma_{xx}}{\partial\sigma_{xx}} = \phi_2 \,, \frac{\partial\Sigma_{xx}}{\partial\sigma_{xx}} = \phi_3$$

$$\phi_i = \frac{2}{3}L_{i1} - \frac{1}{3}L_{i2} - \frac{1}{3}L_{i3} \,, i = 1,2,3$$

$$\psi_i = -\frac{1}{3}L_{i1} + \frac{2}{3}L_{i2} - \frac{1}{3}L_{i3} \,, i = 1,2,3$$

(پ-۳)

جمله سوم در معادله پ-۱، مشتق تانسور تنش تبدیل یافته نسبت به تانسور تنش کوشی بوده و مولفه‌های غیر صفر آن طبق معادله پ-۴ محاسبه می‌شود.

$$\frac{\partial\Sigma_1}{\partial\Sigma_{xx}} = \frac{1}{2} + \frac{\Sigma_{xx}-\Sigma_{yy}}{2\sqrt{(\Sigma_{xx}-\Sigma_{yy})^2+4\Sigma_{xy}{}^2}}$$

$$\frac{\partial\Sigma_1}{\partial\Sigma_{yy}} = \frac{1}{2} - \frac{\Sigma_{xx}-\Sigma_{yy}}{2\sqrt{(\Sigma_{xx}-\Sigma_{yy})^2+4\Sigma_{xy}{}^2}}$$

$$\frac{\partial\Sigma_1}{\partial\Sigma_{xy}} = \frac{\Sigma_{xy}}{\sqrt{(\Sigma_{xx}-\Sigma_{yy})^2+4\Sigma_{xy}{}^2}}$$

$$\frac{\partial\Sigma_1}{\partial\Sigma_{xx}} = \frac{\partial\Sigma_2}{\partial\Sigma_{yy}}$$

$$\frac{\partial\Sigma_3}{\partial\Sigma_{zz}} = 1$$

$$\frac{\partial\Sigma_1}{\partial\Sigma_{xy}} = -\frac{\partial\Sigma_2}{\partial\Sigma_{xy}}$$

$$\frac{\partial\Sigma_1}{\partial\Sigma_{yy}} = -\frac{\partial\Sigma_2}{\partial\Sigma_{xx}}$$

(پ-۴)

۹- مراجع

[1] Hosford W (1979) On the yield loci of anisotropic cubic metals. Proc SME Dearborn, Ser. A 7:191–197.

[2] Barlat F, Lege DJ, Brem JC (1991) A six-component yield function for anisotropic materials. Int J Plast 7(7): 693–712.

[3] Cazacu O, Barlat F (2004) A criterion for description of anisotropy and yield differential effects in pressure-insensitive metals. Int J Plast 20(11): 2027–2045.

[4] Cazacu O, Plunkett B, Barlat F (2006) Orthotropic yield criterion for hexagonal closed packed metals. Int J Plast 22(7): 1171–1194.

[5] Plunkett B, Cazacu O, Barlat F (2008) Orthotropic yield criteria for description of the anisotropy in tension and compression of sheet metals. Int J Plast 24(5): 847–866.

[6] Khan AS, Yu SH, Liu H (2012) Deformation induced anisotropic responses of Ti–6Al–4V alloy Part II: A strain rate and temperature dependent anisotropic yield criterion. Int J Plast 38: 14–26.

[7] Khan AS, Yu SH (2012) Deformation induced anisotropic responses of Ti–6Al–4V alloy. Part I: Experiments. Int J Plast 38: 1–13.

[8] Banabic D, Comsa S, Jurco P, Cosovici G, Paraianu L, Julean D (2004) FLD theoretical model using a new anisotropic yield criterion. J Mater Process Technol 157: 23–27.

[9] Banabic D, Aretz H, Paraianu L, Jurco P (2005) Application of various FLD modelling approaches. J Modell Simul Mater Sci Eng 13:759–769.

[10] Ganjiani M, Assempour A (2007) An improved analytical approach for determination of forming limit diagrams considering the effects of yield functions. J Mater Process Technol 182(1–3): 598–607.

[11] Banabic D (2007) Advanced Methods in Material Forming. 1st edn. Springer, New York

[12] Fyllingen Ø, Hopperstad OS, Lademo OG, Langseth M (2009) Estimation of forming limit diagrams by the use of the finite element method and Monte Carlo simulation. Comput Struct 87(1–2): 128–139.

[13]Aretz H (2007) Numerical analysis of diffuse and localized necking in orthotropic sheet metals. Int J Plast 23(5): 798–840.

[14] Ross SM (2004) Introduction to probability and statistic for engineers and scientists. 3rd ed. Elsevier, New York.

[15] Gilles G, Hammami W, Libertiaux V, Cazacu O, Yoon JH, Kuwabara T, Habraken AM, Duchêne L (2011) Experimental characterization and elasto-plastic modeling of the quasi-static mechanical response of TA-6V at room temperature. Int J Solids Struct 48(9): 1277–1289.

[16] Odenberger EL, Hertzman J, Thilderkvist P, Merklein M, Kuppert A, Stöhr T, Lechler J, Oldenburg M (2012) Thermo-mechanical sheet metal forming of aero engine components in Ti-6Al-4V PART 1: Material characterisation. Int J Mater Form 6(3): 391–402.