



## بررسی تاثیر پارامترهای مختلف در تحلیل تنش صفحات همسان‌گرد و غیرهمسان‌گرد حاوی گشودگی چهارضلعی مرکزی و تحت تنش برشی

محمد جعفری<sup>۱\*</sup> و عباس رحیمی پتروودی<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup> استادیار، دانشکده مکانیک، دانشگاه شاهرود، شاهرود

<sup>۲</sup> کارشناسی ارشد، دانشکده مکانیک، دانشگاه شاهرود، شاهرود

تاریخ دریافت: ۱۳۹۳/۰۴/۰۹؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۳/۱۱/۳۰؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۴/۰۱/۳۰

### چکیده

یکی از نگرانی‌های طراحان، شکست سازه‌ها در نتیجه تمرکز تنش در ناپیوستگی‌های هندسی است. برای جلوگیری از شکست‌های ناشی از بارگذاری خستگی در سازه‌ها، اخیراً مدل‌های متعددی برای پیشگویی عمر خستگی ارائه شده است. ضریب تمرکز تنش، پارامتری کلیدی در نمایش این مدل‌ها به ویژه در حضور ترک‌های تیز لبه‌ای می‌باشد. صفحات کامپوزیتی حاوی گشودگی در بسیاری از سازه‌های مهندسی دیده می‌شود. با توجه به پیچیدگی و گستردگی سازه‌های مهندسی، مطالعه‌ی دقیق این سازه‌ها لازم به نظر می‌رسد. لذا در این مقاله سعی شده است، پارامترهای موثر بر توزیع تنش اطراف گشودگی چهارضلعی در صفحات کامپوزیتی تحت تنش برشی از روش تحلیلی مورد بررسی قرار گیرد. پارامترهایی شامل: شعاع انحنای گوشه گشودگی، زاویه‌ی چرخش گشودگی، زاویه‌ی الیاف، کشیدگی گشودگی و جنس صفحه می‌باشد. در این تحقیق، ابتدا تاثیر پارامترها به تنهایی و سپس تاثیر همه‌ی پارامترها در کنار یکدیگر و در نهایت مقادیر بهینه پارامترهای مورد بحث که منجر به کمترین تمرکز تنش می‌شود؛ بررسی و معرفی خواهد شد. از روش اجزای محدود برای بررسی درستی جواب‌ها کمک گرفته شده است. نتایج عددی، تطابق خوبی با نتایج حاصل از حل تحلیلی حاضر دارد. نتایج نشان می‌دهند که پارامترهای هندسی گشودگی و زاویه‌ی الیاف در صفحات کامپوزیتی، تاثیر بسزایی بر روی توزیع تنش اطراف گشودگی دارد.

**کلمات کلیدی:** تمرکز تنش؛ گشودگی چهارضلعی؛ تنش برشی؛ نگاهت هم‌نوا.

## A study of the effect of various parameters on the stress analysis of isotropic and anisotropic plates containing a central quadrilateral cutout subjected to shear stress

M. Jafari<sup>1,\*</sup> and A. Rahimi-Petroudi<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Assoc Prof, Mech Eng, Shahrood Univ, Shahrood, Iran

<sup>2</sup> M.Sc, Mech Eng, Shahrood Univ, Shahrood, Iran

### Abstract

Structural failure as a result of stress concentration at the geometric discontinuities is one of the concerns of designers. To avoid the fatigue failure of structures, several models have been proposed in recent years to predict the fatigue life. Stress concentration factor, especially in the presence of cracks with sharp edge, is a key parameter in displaying these models. Perforated composite plates can be seen in many engineering structures. Due to the complexity and breadth of engineering structures, detailed investigation of these structures seems to be needed. In this paper, try to study the effect of various parameters on the stress analysis of composite plates containing a central rectangular cutout that are subjected to shear stress by analytical method. These parameters are: cutout bluntness, cutout orientation, fiber angle, cutout elongation and material properties. In this paper, The effect of these parameters and the optimal values of the parameters which leads to less stress concentration will be introduced. The finite element method has been used to check the accuracy of analytical results. The analytical results are in good agreement with the numerical results. The results indicated, The cutout geometry and fiber angle in composite plates can be a significant influence on the stress distribution around cutout.

**Keywords:** Stress concentration; Quadrilateral cutout; Shear stress; Conformal mapping.

\* نویسنده مسئول؛ تلفن: ۰۹۱۵۳۲۱۳۱۴۴

آدرس پست الکترونیک: [m\\_jafari821@shahroodut.ac.ir](mailto:m_jafari821@shahroodut.ac.ir)

## ۱- مقدمه

اتصالات نقش بسیار مهمی در طراحی سازه‌های مهندسی دارد. شاید نتوان مکانیزم و یا ماشینی را یافت که در آن از یک نوع اتصال استفاده نشده باشد. از آنجایی که صفحات در کاربردهای صنعتی بسیاری استفاده می‌شوند، معمولاً جهت اتصال صفحات به دیگر اجزای ماشین یا جهت ایجاد راه‌های خروجی و ورودی در سازه یا برای کاهش وزن سازه ناچار به ایجاد گشودگی در سازه می‌شوند. تجربه نشان داده است که بیشتر شکست‌ها در سازه‌های هوایی در نتیجه تمرکز تنش در محل اتصالات و بست‌ها اتفاق می‌افتد. افزایش استفاده از مواد مرکب در ساخت اجزای مختلف سازه‌ها به منظور دستیابی به عملکرد مکانیکی بهتر نیازمند فهم بهتر مدلسازی رفتار اینگونه سازه‌هاست. چون استحکام‌های شکست بیشتر این مواد کامپوزیتی به تمرکز تنش ناشی از وجود گشودگی بسیار حساس است؛ بدین منظور برای طراحی دقیق یک صفحه‌ی حاوی گشودگی، تحت اثر بارگذاری درون‌صفحه‌ای، سعی می‌شود تا اطلاعات دقیقی راجع به توزیع تنش اطراف گشودگی به دست آید. روش‌های زیادی برای بررسی تمرکز تنش در اطراف گشودگی‌ها وجود دارد که می‌توان به روش‌های تحلیلی، عددی و تجربی اشاره نمود. در بین این روش‌ها، به دلیل هزینه‌ی کم و دقت بهتر، حل تحلیلی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است.

ضریب تمرکز تنش در صفحات همسان‌گرد حاوی گشودگی دایره‌ای توسط افرادی همچون هولند<sup>۱</sup> [۱] در سال ۱۹۲۹ و هیوود<sup>۲</sup> [۲] در سال ۱۹۵۲، مورد بررسی قرار گرفت. هولند روابطی برای صفحات بلند با گشودگی دایره‌ای و عرض محدود ارائه کرد. هیوود با استفاده از ضریب تمرکز تنش مربوط به صفحات نامحدود و با معرفی ضرایب تصحیح مناسب، ضریب تمرکز تنش در صفحات محدود را پیش‌بینی کرد. هیوود ابتدا برآیند نیروهای داخلی را در مقطعی از صفحه حاوی گشودگی که در جهت عمود بر زاویه اعمال بار صفحه را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کند؛ محاسبه کرد. سپس با استفاده از معادله تعادل برای هر یک از قسمت‌ها برای صفحه تحت بار یکنواخت کششی با عرض محدود،

ضرایب تصحیح را به دست آورد. در سال ۱۹۷۴ پترسون<sup>۳</sup> [۳] از روش‌های تجربی و عددی برای محاسبه ضریب تمرکز تنش در صفحات همسان‌گرد حاوی گشودگی‌های مختلف، هم برای ابعاد نامحدود و هم برای ابعاد محدود (عرض محدود) روابط متعددی را ارائه کرد. در کتاب‌های پیلکی<sup>۴</sup> [۴]، نیوبر<sup>۵</sup> [۵]، استرنبرگ<sup>۶</sup> [۶] ضرایب تمرکز تنش مربوط به صفحات همسان‌گرد محدود و نامحدود دارای گشودگی‌هایی با اندازه و شکل‌های مختلف، ارائه شده است. در مواردی برای محاسبه ضریب تمرکز تنش بعضی از گشودگی‌ها روابطی نیز معرفی شده است. موشخلیشویلی<sup>۷</sup> [۷] برای اولین بار در تحلیل صفحات الاستیک همسان‌گرد دارای گشودگی، از روش متغیر مختلط کمک گرفت. کاربردهایی از روش ارائه شده توسط او در مطالعات ساوین<sup>۸</sup> [۸] بر روی صفحات همسان‌گرد نامحدود حاوی گشودگی‌های مختلف و تحت کشش دیده می‌شود. همچنین ساوین برای مواد غیرهمسان‌گرد فقط برای گشودگی بیضی شکل و دایره‌ای مطالعاتی را انجام داد. توسعه کامل روش موشخلیشویلی به مسائل الاستیسیته دوبعدی مواد غیرهمسان‌گرد توسط اشلبای<sup>۹</sup> [۹]، اشترو<sup>۱۰</sup> [۱۰] و لخنیتسکی<sup>۱۱</sup> [۱۱] انجام شد. هگپیت<sup>۱۲</sup> [۱۲] در سال ۱۹۶۱، جزء اولین کسانی بود که به بررسی تمرکز تنش در اطراف الیاف مجاور یک ترک قائم در یک تک‌لایه با طول و عرض بی‌نهایت پرداخت. او تحقیق خود را بر روی مواد مرکبی که نسبت سفتی ماتریس به سفتی الیاف آن پایین است؛ متمرکز کرد. زندر<sup>۱۳</sup> و دیتون<sup>۱۴</sup> [۱۳] در سال ۱۹۶۳، درستی آنالیز هگپیت را با آزمایش‌هایی بر روی مواد مرکب با الیاف داکرون و ماتریس پلی‌اورتان نشان دادند. این روش برای مواد مرکبی که نسبت مدول الاستیسیته الیاف آنها به ماتریس بالا

<sup>3</sup> Peterson<sup>4</sup> Pilkey<sup>5</sup> Neuber<sup>6</sup> Sternberg<sup>7</sup> Muskhelishvili<sup>8</sup> Savin<sup>9</sup> Eshelby<sup>10</sup> Stroh<sup>11</sup> Lekhnitskii<sup>12</sup> Hedgepeth<sup>13</sup> Zender<sup>14</sup> Deaton<sup>1</sup> Howland<sup>2</sup> Heywood

تنش برشی را مورد بررسی قرار دادند. در تحقیق آنها، صفحه از مواد تابعی مدرج (مواد هدفمند)<sup>۶</sup> ساخته شده بود که در آن نسبت پواسون و مدول در جهت شعاعی به صورت تابع نمایشی تغییر می‌کرد. فراس دارویش<sup>۷</sup> و همکارانش [۲۵] در سال ۲۰۱۲، توزیع تنش اطراف گشودگی که توسط پرچ محکم شده، در صفحات ارتوتروپیک تحت تنش تک‌محوری را مورد بررسی قرار دادند. آنها از روش اجزای محدود برای مطالعه خود استفاده کردند. در این تحقیق، تاثیر چند پارامتر هندسی مانند ضخامت ورق، عمق گشودگی و عرض صفحه بررسی شد.

تحقیقات زیادی بر روی تحلیل تنش صفحات غیرهمسان‌گرد تحت کشش انجام شده است. ولی در زمینه بار برشی، برای گشودگی‌هایی مانند گشودگی چهارضلعی (شبه‌مستطیلی) با در نظر گرفتن اکثر پارامترهای موثر از قبیل جنس صفحه، شعاع انحنای گشودگی، زاویه چرخش گشودگی، کشیدگی گشودگی و زاویه الیاف نتایج کمی در دست است. در این تحقیق سعی می‌شود تا به مطالعه تاثیر این پارامترها بر روی توزیع تنش اطراف گشودگی چهارضلعی در صفحات کامپوزیتی ارتوتروپیک و همسان‌گرد پرداخته شود.

## ۲- روش حل تحلیلی

روش تحلیلی ارائه شده در این مقاله، برگرفته از بسط روش حل تحلیلی ارائه شده توسط لخنیتسکی [۲۶] می‌باشد. در این روش، تابع تنش به عبارتی تحلیلی با ضرایب نامعین تبدیل می‌شود. با مشخص شدن تابع تنش می‌توان تنش‌ها و با کمک گرفتن از رابطه‌ی تنش- کرنش، کرنش‌ها و سپس تغییر مکان‌ها را محاسبه نمود. مطابق شکل ۱، صفحه‌ای با یک گشودگی چهارضلعی در مرکز آن مفروض است. ابعاد صفحه در مقایسه با ابعاد گشودگی بسیار بزرگ است. این صفحه می‌تواند همسان‌گرد و یا غیرهمسان‌گرد باشد، رابطه تنش-کرنش رابطه‌ای خطی است. صفحه در فاصله‌ای دور از گشودگی تحت بار برشی قرار گرفته و مرز گشودگی مرکزی عاری از بار است.

باشد، نظیر مواد مرکب با ماتریس فلزی، قابل استفاده است. هگپیت و ون‌داک<sup>۱</sup> [۱۵-۱۴] در سال‌های ۱۹۶۷ تا ۱۹۶۹، تمرکز تنش در اطراف ترک را با بررسی ناحیه‌ی پلاستیک ایجاد شده در نوک ترک در یک تک‌لایه با طول و عرض بی‌نهایت محاسبه کردند. تان<sup>۲</sup> [۱۶] مطالعات متعددی بر روی محاسبه ضریب تمرکز تنش در صفحات ارتوتروپیک انجام داد. تان با اطلاعات مربوط به تمرکز تنش صفحات کامپوزیتی نامحدود حاوی گشودگی دایره‌ای و بیضی شکل و با معرفی ضرایب تصحیح مناسب، تمرکز تنش صفحات حاوی این گشودگی‌ها را با عرض محدود به دست آورد.

در سال ۱۹۹۱، دائوست و هووا<sup>۳</sup> [۱۷] گشودگی‌های مثلثی و دایره‌ای را تحلیل کردند، آنها به بررسی شعاع انحنای گوشه گشودگی مثلثی نیز پرداختند، و توانستند با تعریف نسبت ارتفاع به قاعده به عنوان یک پارامتر، علاوه بر گشودگی به شکل مثلث متساوی الاضلاع، سایر گشودگی‌های مثلثی را بررسی کنند. حل آنها بر پایه روش حل لخنیتسکی استوار بود. گروبر<sup>۴</sup> و همکارانش [۱۸]، در سال ۲۰۰۷ تمرکز تنش صفحات کامپوزیتی چندلایه را مورد بررسی قرار دادند. نتایج حاصل از روش تحلیلی مورد استفاده‌ی آنها نسبت به نتایج حاصل از روش عددی، به پاسخ دقیق‌تری منتهی شد. در سال ۲۰۰۸ هافنباخ<sup>۵</sup> و همکارانش [۱۹]، تمرکز تنش بر روی صفحات چندلایه ضخیم کامپوزیتی تحت تنش برشی را با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول مورد بررسی قرار دادند. رضایی‌پژند و جعفری [۲۳-۲۰] به بررسی توزیع تنش در اطراف گشودگی‌های مختلف از جمله گشودگی مثلثی در صفحات غیرهمسان‌گرد و تحت بار کششی پرداختند و همچنین تاثیر پارامترهای مختلف را در توزیع تنش اطراف این گشودگی‌ها بررسی کردند، روش حل آنها برگرفته از بسط روش حل تحلیلی ارائه شده توسط لخنیتسکی و ساوین بود. محمدی و همکارانش در سال ۲۰۱۱ [۲۴]، تمرکز تنش در اطراف گشودگی دایره‌ای در صفحه‌ی بی‌نهایت تحت تنش یکنواخت دومحوری و همچنین

<sup>1</sup> Van Dyk

<sup>2</sup> Tan

<sup>3</sup> Daoust and Hoa

<sup>4</sup> Gruber

<sup>5</sup> Hafenbach

<sup>6</sup> FGM

<sup>7</sup> Feras Darwish

داد که این معادله با کمک چهار اپراتور مشتق خطی مرتبه اول قابل ارائه است [۲۶]:

$$D_1 D_2 D_3 D_4 F = 0 \quad ; \quad D_k = (k=1,2,3,4) \quad (۴)$$

$$D_k = \frac{\partial}{\partial y} - \mu_k \frac{\partial}{\partial x}$$

$\mu_k$  ریشه‌های معادله‌ی مشخصه‌ی زیر است [۲۶]:

$$R_{11}\mu^4 - 2R_{16}\mu^3 + (2R_{12} + R_{66})\mu^2 + 2R_{26}\mu + R_{22} = 0 \quad (۵)$$

لختیستی ثابت کرد که این معادله در حالت کلی دارای چهار ریشه است که دو به دو مزدوج هستند [۲۶].

$$\mu_1 = \alpha + i\beta \quad ; \quad \mu_2 = \gamma + i\delta \quad (۶)$$

$$\bar{\mu}_1 = \alpha - i\beta \quad ; \quad \bar{\mu}_2 = \gamma - i\delta$$

$\beta > 0, \delta > 0$ ؛  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  اعداد حقیقی می‌باشند؛

معادله مشخصه برای مواد همسان‌گرد ( $R_{16} = R_{26} = 0$ ) به صورت زیر خواهد بود [۲۶]:

$$R_{11}\mu^4 + (2R_{12} + R_{66})\mu^2 + R_{22} = 0 \quad (۷)$$

با توجه به ریشه‌های معادله مشخصه، تابع تنش به صورت زیر تعیین می‌شود [۲۶]:

$$F = F_1(Z_1) + F_2(Z_2) + \overline{F_1(Z_1)} + \overline{F_2(Z_2)} \quad (۸)$$

به ترتیب مزدوج توابع  $F_1, F_2$  هستند. با جایگذاری معادله‌ی ۸ در روابط ۱، مولفه‌های تنش به دست خواهند آمد. برای پایین آوردن مرتبه‌ی مشتق، از توابع زیر استفاده می‌شود [۲۶]:

$$\frac{\partial F_1}{\partial Z_1} = \phi_0(z_1) \quad ; \quad \frac{\partial F_2}{\partial Z_2} = \psi_0(z_2) \quad (۹)$$

$$\frac{\partial \bar{F}_1}{\partial Z_1} = \overline{\phi_0(z_1)} \quad ; \quad \frac{\partial \bar{F}_2}{\partial Z_2} = \overline{\psi_0(z_2)}$$

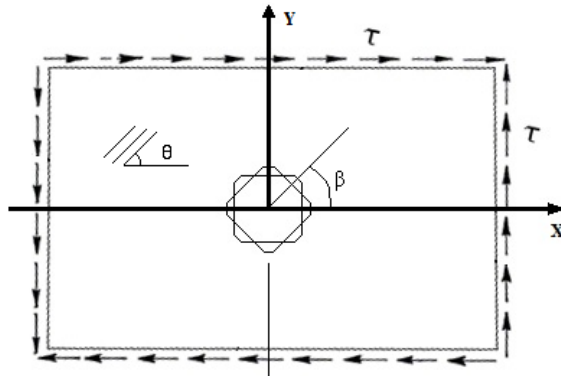
با گرفتن مشتق دوم و با مشخص شدن توابع تنش، تنش‌ها به صورت زیر تعیین می‌شوند [۲۶]:

$$\sigma_x = 2\text{Re} \left[ \mu_1^2 \phi'_0(Z_1) + \mu_2^2 \psi'_0(Z_2) \right] \quad (۱۰)$$

$$\sigma_y = 2\text{Re} \left[ \phi'_0(Z_1) + \psi'_0(Z_2) \right]$$

$$\tau_{xy} = -2\text{Re} \left[ \mu_1 \phi'_0(Z_1) + \mu_2 \psi'_0(Z_2) \right]$$

از طرفی دیگر در این مقاله، صفحه‌ی نامحدود حاوی گشودگی تحت تنش برشی  $\tau'_{xy}$  در بی‌نهایت قرار دارد. بنابراین برای صفحه‌ی بدون گشودگی، تنش‌ها به صورت زیر خواهد بود [۲۷]:



شکل ۱- صفحه بی‌نهایت حاوی گشودگی چهارضلعی تحت تنش برشی

$\beta$  زاویه چرخش گشودگی نسبت به محور  $x$  می‌باشد. برای یک ماده مرکب زاویه  $\theta$ ، زاویه الیاف است. زاویه چرخش گشودگی، نوع ماده، زاویه الیاف، شعاع انحنای گوشه گشودگی و کشیدگی گشودگی از پارامترهای مهم مورد بحث در این مقاله هستند.

با در نظر گرفتن  $F(x,y)$  به عنوان تابع تنش، مولفه‌های تنش در حالت صفحه‌ای به صورت زیر خواهند بود [۲۶]:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \quad ; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \quad ; \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad (۱)$$

معادله‌ی سازگاری تغییر شکل در حالت دو بعدی به صورت زیر است [۲۶]:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \quad (۲)$$

با ارائه معادله سازگاری برحسب تنش و اعمال تابع تنش  $F(x,y)$  در آن، برای ماده ارتوتروپیک در حالت صفحه‌ای (تنش صفحه‌ای یا کرنش صفحه‌ای)؛ معادله‌ی زیر به دست می‌آید [۲۶]:

$$R_{11} \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} - 2R_{16} \frac{\partial^4 F}{\partial x \partial y^3} + (2R_{12} + R_{66}) \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} - 2R_{26} \frac{\partial^4 F}{\partial x^3 \partial y} + R_{22} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} = 0 \quad (۳)$$

در رابطه‌ی فوق  $R_{ij}$  ماتریس نرمی کاهش یافته است که با در نظر گرفتن فرض تنش صفحه‌ای یا کرنش صفحه‌ای، تابعی از مولفه‌های ماتریس نرمی ماده خواهد بود. لختیستی نشان

نگاشت صفحه بی‌نهایت شامل گشودگی چهارضلعی به دایره‌ای به شعاع واحد با استفاده از رابطه ۱۴، باید مقدار  $n$  را برابر ۳ انتخاب کرد و با توجه به اینکه نگاشت مورد استفاده در این مقاله، یک نگاشت هم‌نواست؛ با مشخص شدن هندسه گشودگی می‌توان شرایط مرزی حاکم بر گشودگی که به صورت  $(\sigma_r = \tau_{r\theta} = 0)$  می‌باشد را اعمال و توابع تنش مربوطه را به صورت کامل مشخص کرد. تنها تنش ایجاد شده اطراف گشودگی  $\sigma_\theta$  است و مابقی تنش‌ها در مقایسه با این تنش کوچک هستند.  $(\rho, \theta)$  محورهای مختصات منحنی الخط می‌باشند. برای به دست آوردن مقادیر  $\sigma_r$  و  $\sigma_\theta$  و  $\tau_{r\theta}$  از  $\sigma_x$  و  $\sigma_y$  و  $\tau_{xy}$  و یا برعکس باید از ماتریس‌های انتقال استفاده کرد [۲۷].

#### ۴- بررسی درستی جواب‌ها

برای بررسی درستی نتایج حاصل از روش حل تحلیلی ارائه شده در این مقاله، از روش اجزای محدود کمک گرفته شده است. صفحه حاوی گشودگی مرکزی، به طریقی مدل شده است که نسبت شعاع دایره محاط بر گشودگی به بزرگترین ضلع صفحه کمتر از ۰/۰۵ باشد؛ تا بتوان با اطمینان صفحه را بی‌نهایت در نظر گرفت. این مدل به کمک نرم‌افزار اجزای محدود آباکوس و با در نظر گرفتن المان‌بندی مناسب مورد تحلیل قرار گرفت. در هر مورد با ریزتر کردن المان‌ها سعی شد تا بهترین تعداد المان نیز به دست آید. نحوه مدل‌سازی، المان‌بندی و بارگذاری در شکل ۲ نشان داده شده است. خواص مواد مورد استفاده در این تحقیق مطابق جدول ۱ است.

جدول ۱- خواص مواد [۲۲]

$E_1$ (GPa)	$E_2$ (GPa)	$G_{12}$ (GPa)	$\nu_{12}$	مواد
۲۰۷	۲۰۷	۷۹/۳	۰/۳	فولاد
۴۷/۴	۱۶/۲	۷	۰/۲۶	شیشه/اپوکسی
۱۱/۷۹	۵/۸۹	۰/۶۹	۰/۰۷	تخته چندلا
۱۸۱	۱۰۳	۷/۱۷	۰/۲۸	گرافیت/اپوکسی
۲۹/۷	۲۹/۷	۵/۳	۰/۱۷	شیشه با الیاف بافته/اپوکسی

$$\sigma_x^\infty = -2\tau'_{xy} \sin\theta \cos\theta \quad (11)$$

$$\sigma_y^\infty = 2\tau'_{xy} \sin\theta \cos\theta$$

$$\tau_{xy}^\infty = \tau'_{xy} (\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

با ترکیب معادله و روابط ۱۰ و ۱۱، تنش‌ها در یک صفحه‌ی نامحدود حاوی گشودگی تحت تنش برشی با استفاده از روابط زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -2\tau'_{xy} \sin\theta \cos\theta + 2\text{Re}[\mu_1^2 \phi'_0(z_1) \\ &+ \mu_2^2 \psi'_0(z_2)] \\ \sigma_y &= 2\tau'_{xy} \sin\theta \cos\theta + 2\text{Re}[\phi'_0(z_1) \\ &+ \psi'_0(z_2)] \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \tau'_{xy} (\cos^2\theta - \sin^2\theta) - 2\text{Re}[\mu_1 \phi'_0(z_1) \\ &+ \mu_2 \psi'_0(z_2)] \end{aligned}$$

#### ۳- نگاشت هم‌نوا

به منظور بسط روابط ارائه شده توسط لخنیتسکی برای به دست آوردن توزیع تنش اطراف گشودگی شبه‌مستطیلی و همچنین برای محاسبه آسان‌تر انتگرال کوشی در هنگام محاسبه تنش، بهتر است مرز گشودگی به دایره‌ای به شعاع واحد تبدیل شود. لذا ناحیه خارج گشودگی شبه‌مستطیلی در مختصات فیزیکی  $z$ ، به محدوده خارج گشودگی دایره‌ای به شعاع واحد در صفحه  $\xi$  با تابع انتقالی به نام تابع نگاشت قابل تبدیل است. تابع نگاشت مورد استفاده در این تحلیل به صورت زیر معرفی می‌شود:

$$z_i = x + \mu_i y \quad (i=1,2) \quad (13)$$

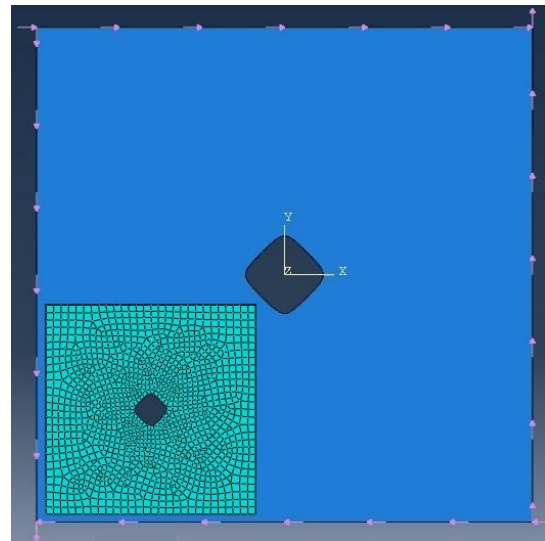
که  $x$  و  $y$  از رابطه زیر به دست می‌آیند [۲۸] و  $\mu_i$  ریشه‌های معادله مشخصه ۵ و مطابق رابطه ۶ می‌باشند.

$$x = \lambda(\cos\theta + w \cos(n\theta)) \quad (14)$$

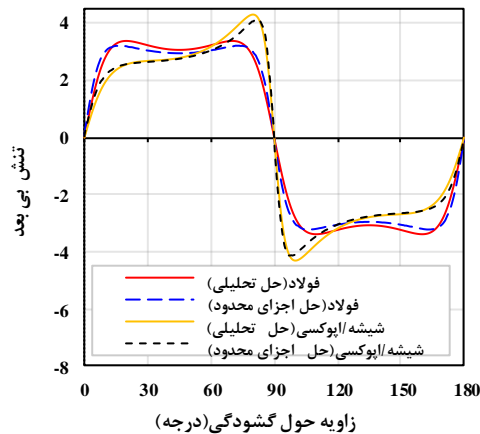
$$y = -\lambda(c \sin\theta + w \sin(n\theta))$$

در این رابطه، پارامترهای مختلفی چون  $\lambda$ ،  $w$ ،  $c$  و  $n$  وجود دارد که برای تعیین نوع گشودگی حائز اهمیت است. انتخاب مناسب و تغییر آنها، نگاشت گشودگی‌های مختلف را ممکن می‌سازد. پارامتر  $w$ ، معیاری برای نشان دادن انحنای گوشه گشودگی یا میزان نرمی و تیزی لبه‌های گشودگی می‌باشد.  $\lambda$  پارامتری است که نشان دهنده‌ی اندازه و بزرگی گشودگی می‌باشد. در نهایت، پارامترهای  $c$  و  $n$  به ترتیب نشان دهنده‌ی کشیدگی و نوع هندسه گشودگی است. به عنوان مثال، برای

انطباق خوبی بین مقادیر تنش بی‌بعد حاصل از دو روش در wهای مختلف برقرار است که می‌تواند تاییدی بر درستی روش حل تحلیلی حاضر باشد. نتایج به دست آمده با فرض صفر بودن زاویه چرخش و زاویه الیاف و  $c=1$  است. در مقایسه‌ای دیگر بین روش حل تحلیلی و روش اجزای محدود، توزیع تنش اطراف گشودگی چهارضلعی برای  $c=1$  و  $w=0.06$  در شکل ۴ نشان داده شده است. در این شکل محور افقی، موقعیت نقاط اطراف گشودگی را نشان می‌دهد و به دلیل تقارن نتایج تا زاویه  $180^\circ$  درجه آورده شده است. زاویه چرخش و برای ماده مرکب زاویه الیاف صفر در نظر گرفته شده است. نزدیکی جواب‌ها در دو روش، می‌تواند تایید دیگری بر درستی روش حل تحلیلی ارائه شده باشد.



شکل ۲- نحوه‌ی مدل‌سازی، المان‌بندی و بارگذاری برشی بر روی مدل، از روش حل اجزای محدود

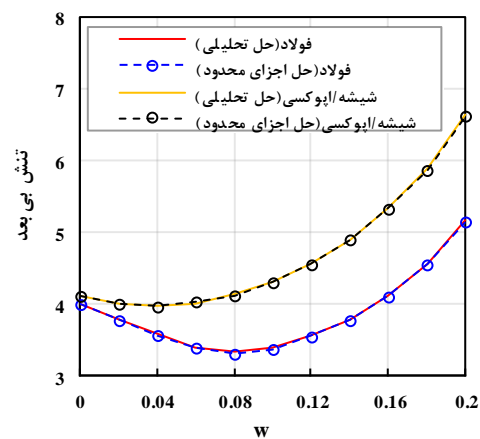


شکل ۴- توزیع تنش اطراف گشودگی چهارضلعی در صفحاتی از جنس شیشه/اپوکسی و فولاد

### ۵- نتایج

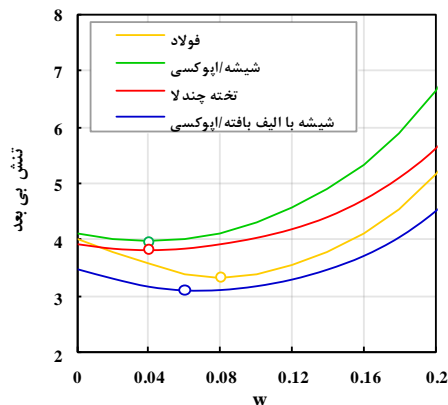
در این تحقیق سعی می‌شود با استفاده از روش حل تحلیلی، تاثیر پارامترهای موثر بر توزیع تنش اطراف گشودگی شبه‌مستطیلی بررسی شود. پارامترهای مورد بحث در این مقاله شامل: انحنای گشودگی، کشیدگی گشودگی، زاویه چرخش گشودگی می‌باشد. همچنین برای مواد کامپوزیتی نوع ماده و زاویه الیاف نیز مورد بررسی قرار می‌گیرد. تاثیر تمامی پارامترها در کنار یکدیگر برای دستیابی به کمترین تنش بی‌بعد ممکن، از دیگر اهداف این مقاله است.

برای مقایسه بین روش تحلیلی و روش اجزای محدود، صفحاتی از جنس فولاد و شیشه/اپوکسی مورد استفاده قرار می‌گیرد. مقایسه برای صفحاتی حاوی گشودگی چهارضلعی با گوشه‌هایی با شعاع انحنای مختلف انجام می‌شود.



شکل ۳- بررسی تاثیر انحنای گوشه‌های گشودگی بر تمرکز تنش صفحاتی از جنس شیشه/اپوکسی و فولاد

نتایج حاصل از دو روش مذکور در شکل ۳ نشان داده شده است. این شکل تغییر مقدار تنش بی‌بعد بر حسب شعاع انحنای گوشه گشودگی را نشان می‌دهد. طبق شکل ۳،



شکل ۶- بررسی تاثیر انحنای گوشه‌های گشودگی بر تمرکز تنش صفحاتی از جنس مواد ارتوتروپیک و فولاد

این بدان معنی است که برخلاف تصور، گشودگی دایره-ای همواره بهترین گشودگی نیست. مقدار  $w$  که تحت آن کمترین تنش بی‌بعد در  $c$  ثابت ( $c=1$ ) حاصل می‌شود، برای مواد مختلف، متفاوت است. مقدار این  $w$  و تنش بی‌بعد متناظر با آن در جدول ۲ ارائه شده است. برخلاف مواد همسان‌گرد، توزیع تنش اطراف گشودگی برای صفحاتی از جنس مواد مرکب، به شدت به نوع ماده بستگی دارد.

جدول ۲- مقادیر  $w$  بهینه در  $c=1$  و تنش بی‌بعد متناظر آن

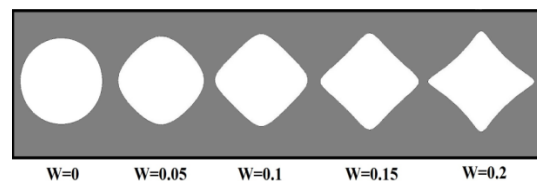
تنش بی‌بعد	$w$	مواد
۳/۳۲۹	۰/۰۸	فولاد
۳/۹۶۸	۰/۰۴	شیشه/اپوکسی
۳/۸۲۸	۰/۰۴	تخته چندلا
۳/۱۰۹	۰/۰۶	شیشه با الیاف بافته شده/اپوکسی

#### ۵-۲- تاثیر کشیدگی گشودگی

از دیگر پارامترهای اصلی و تاثیرگذار بر توزیع تنش اطراف گشودگی، کشیدگی گشودگی ( $c$ ) می‌باشد. شکل ۷ به خوبی تاثیر تغییرات این پارامتر را بر هندسه گشودگی نشان می‌دهد. با افزایش  $c$  در  $w$  ثابت، گشودگی کشیده می‌شود. برای بررسی تاثیر مقادیر مختلف ( $c$ ) بر توزیع تنش اطراف گشودگی، دیگر پارامترها ثابت در نظر گرفته می‌شود. در این حالت، زاویه چرخش گشودگی برای تمامی مواد و زاویه الیاف برای مواد مرکب صفر می‌باشند و مقدار  $w$  به طور ثابت برابر با ۰/۰۴ در نظر گرفته می‌شود.

#### ۵-۱- تاثیر انحنای گوشه گشودگی

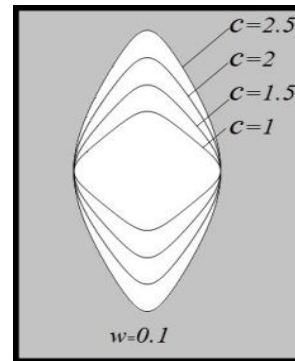
پارامتر  $w$  معیاری است برای نشان دادن انحنای گوشه گشودگی که یکی از پارامترهای موثر در مقدار تمرکز تنش می‌باشد. همانطور که در شکل ۵ نشان داده شده است؛ با افزایش  $w$  در  $c$  ثابت، شعاع انحنای گوشه‌های گشودگی کاهش می‌یابد. برای گشودگی چهارضلعی تغییرات مقادیر  $w$  در بازه  $0 \leq w \leq 0.25$  می‌باشد. مقادیر بیشتر از  $w=0.25$  باعث تیز شدن بیش از حد گوشه‌های گشودگی خواهد شد؛ تا جایی که گشودگی از حالت چهارضلعی خارج می‌شود.



شکل ۵- تاثیر پارامتر  $w$  بر انحنای گوشه‌های گشودگی چهارضلعی

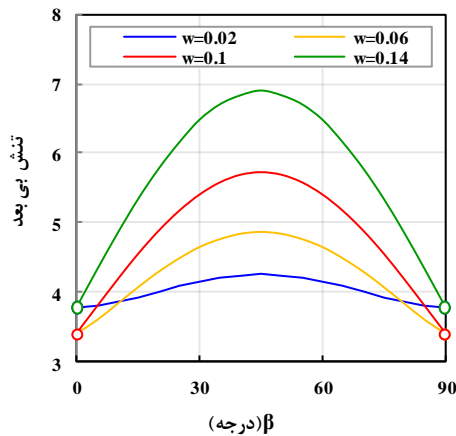
باتوجه به اینکه در مورد مواد همسان‌گرد، جنس ماده تاثیری بر تمرکز تنش ندارد؛ فقط نتایج مربوط به فولاد ارائه می‌شود. تغییرات تنش بی‌بعد در اطراف گشودگی چهارضلعی بر حسب  $w$  برای مواد مختلف در  $c$  ثابت دلخواه ( $c=1$ )، بیشتر حل مشابهی توسط رضایی‌پزند و جعفری [۲۲] در مورد بارگذاری کششی تک‌محوره ارائه شده است. در نتایج آنها مقدار  $w$  بهینه برای صفحه‌ی ارتوتروپیک شیشه/اپوکسی در ۰/۰۷ رخ می‌دهد و بیشترین تنش بی‌بعد متناظر با آن برابر با ۳/۱ می‌باشد. این نتایج با استفاده از روش حل حاضر نیز تأیید می‌شود. منظور از تنش بی‌بعد، نسبت بیشترین تنش ایجاد شده در اطراف گشودگی ( $\sigma_{\theta}$ ) به تنش برشی اعمالی است. در این حالت، زاویه چرخش گشودگی برای تمامی مواد و زاویه الیاف برای مواد مرکب صفر می‌باشد. همانطور که در این شکل مشاهده می‌شود؛ با افزایش مقدار انحنای گشودگی، نحوه‌ی تغییرات تنش بی‌بعد بسته به نوع ماده، متفاوت است. مطابق شکل ۵، مقدار  $w=0$  متناظر با گشودگی دایره‌ای است. نتایج شکل ۶ نشان می‌دهد که کمترین تنش بی‌بعد برای مواد مختلف در  $w$  خاصی غیر از صفر اتفاق می‌افتد که در شکل ۶ با علامت (o) نشان داده شده است.

همسان‌گرد صفحه‌ای از جنس فولاد و در مورد مواد مرکب صفحه‌ای از جنس شیشه/اپوکسی در شعاع انحنای مختلف مورد مطالعه قرار می‌گیرد. در شکل ۹، زاویه چرخش گشودگی از صفر تا ۹۰ درجه برای صفحه‌ی فولادی تغییر می‌کند. همانطور که در این شکل دیده می‌شود؛ در زاویه چرخش خاصی مقدار تنش بی‌بعد کمترین مقدار است؛ که تنش مطلوب نامیده می‌شود. در طراحی باید تا حد امکان به شرایط تنش مطلوب نزدیک شد. برای صفحه‌ی فولادی در شکل ۹ حاوی گشودگی چهارضلعی، تنش مطلوب در زاویه ۰ و ۹۰ درجه اتفاق می‌افتد که مقدار این تنش برای  $w$ های مختلف در جدول ۳ ارائه شده است. مطابق شکل ۹، مقدار تنش بی‌بعد در زاویه چرخش ۴۵ درجه بیشترین مقدار است. این تنش به تنش نامطلوب معروف است. در طراحی باید از شرایط تنش نامطلوب اجتناب کرد.

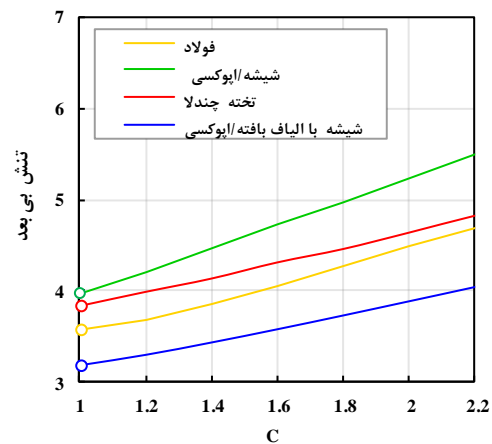


شکل ۷- تاثیر پارامتر  $C$  بر کشیدگی گشودگی چهارضلعی

لازم به یادآوری است که نگاشت گشودگی‌هایی به شکل چهارضلعی به دایره‌ای به شعاع واحد، با اعمال مقدار ۳ برای  $n$  در رابطه ۱۴ حاصل می‌شود. نتایج حاصل از شکل ۸ نشان می‌دهد که در  $w=0/04$ ، برای تمامی مواد رابطه بین  $C$  و تنش بی‌بعد یک رابطه تقریباً خطی است و کمترین مقدار تنش بی‌بعد برای مواد مختلف در  $C=1$  اتفاق می‌افتد.



شکل ۹- بررسی تاثیر زاویه چرخش گشودگی بر تمرکز تنش در صفحه فولادی



شکل ۸- بررسی تاثیر کشیدگی گشودگی بر تمرکز تنش صفحاتی از جنس مواد ارتوتروپیک و فولاد در  $w=0/04$

جدول ۳- زاویه چرخش مطلوب و تنش متناظر آن در  $C=1$  از صفحه فولادی

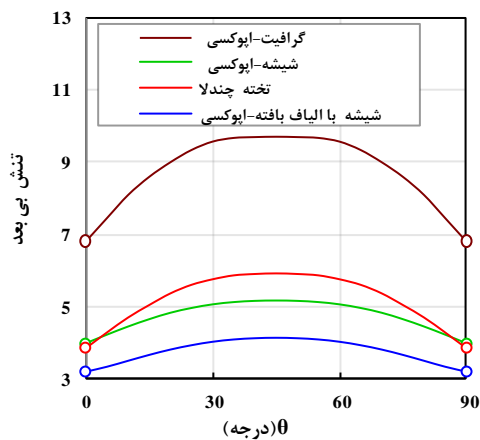
$w$	زاویه چرخش مطلوب (درجه)	تنش مطلوب	زاویه چرخش مطلوب (درجه)	تنش نامطلوب
۰/۰۲	۹۰ و ۰	۳/۷۷۱	۴۵	۴/۲۵۲
۰/۰۶	۹۰ و ۰	۳/۳۹۰	۴۵	۴/۸۷۴
۰/۱	۹۰ و ۰	۳/۳۸۹	۴۵	۵/۷۰۹
۰/۱۴	۹۰ و ۰	۳/۷۷۱	۴۵	۶/۸۹۰

### ۵-۳- تاثیر زاویه چرخش گشودگی

در این بخش، تاثیر زاویه چرخش گشودگی ( $\beta$ ) بر روی مقدار تنش بی‌بعد برای گشودگی شبه‌مستطیلی با در نظر گرفتن  $C=1$  بررسی می‌شود. با توجه به شکل گشودگی، برای بارگذاری برشی کافی است تا تغییرات تنش بی‌بعد در زوایای چرخش بین صفر تا ۹۰ درجه بررسی شود. برای مواد

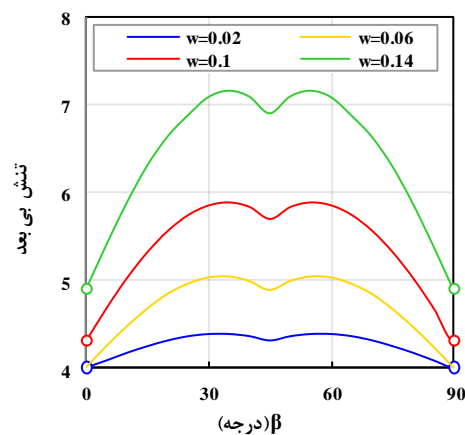


یک گشودگی با  $w=0/04$  و  $c=1$  و زاویه چرخش صفر انجام می‌گیرد. در زوایای ۰ و ۹۰ درجه کمترین تنش بی‌بعد و در زاویه ۴۵ درجه بیشترین تنش بی‌بعد رخ می‌دهد. مقادیر کمترین و بیشترین تنش بی‌بعد برای این مواد در جدول ۵ ارائه شده است. در شکل ۱۲، تغییرات تنش بی‌بعد با زاویه الیاف در  $w$ های مختلف برای شیشه/اپوکسی مشاهده می‌شود. باتوجه به این شکل زاویه الیافی که منجر به کمترین تنش بی‌بعد می‌شود؛ با تغییر  $w$  تغییر نمی‌کند.



شکل ۱۱- بررسی تاثیر زاویه الیاف بر تمرکز تنش صفحاتی از جنس مواد ارتوتروپیک

شکل ۱۰، تغییرات تنش بی‌بعد برحسب زاویه چرخش گشودگی را برای صفحه‌ای از جنس شیشه/اپوکسی در شعاع انحناهای مختلف نشان می‌دهد. در این حالت زاویه الیاف صفر در نظر گرفته شده است. تنش مطلوب برای این ماده نیز در زاویه چرخش صفر و ۹۰ درجه رخ می‌دهد. مقدار تنش مطلوب در این حالت برای  $w$ های مختلف در جدول ۴ ارائه شده است. تنش نامطلوب در زوایای ۳۵ و ۵۵ درجه اتفاق می‌افتد.



شکل ۱۰- بررسی تاثیر زاویه چرخش گشودگی بر تمرکز تنش صفحه‌ی ارتوتروپیک شیشه/اپوکسی

جدول ۵- زاویه الیاف مطلوب و تنش متناظر آن در  $w=0/04$  و  $c=1$  در صفحاتی از جنس مواد ارتوتروپیک

مواد	زاویه الیاف مطلوب (درجه)	تنش مطلوب	زاویه الیاف نامطلوب (درجه)	تنش نامطلوب
شیشه/اپوکسی	۰ و ۹۰	۳/۹۶۸	۴۵	۵/۱۵۴
تخته چندلا	۰ و ۹۰	۳/۸۲۸	۴۵	۵/۹۰۸
گرافیت/اپوکسی	۰ و ۹۰	۶/۷۹۹	۴۵	۹/۷۱۰
شیشه با الیاف بافته شده/اپوکسی	۰ و ۹۰	۳/۱۷۴	۴۵	۴/۱۱۷

برای شیشه/اپوکسی، کمترین تنش بی‌بعد همواره برای  $w$ های مختلف در زاویه الیاف صفر و ۹۰ درجه اتفاق می‌افتد. اگرچه مقدار کمترین تنش بی‌بعد در  $w$ های مختلف کاملاً متفاوت است. بیشترین تنش بی‌بعد بسته به مقدار  $w$  در زوایای الیاف مختلف رخ می‌دهد. مقادیر تنش مطلوب در

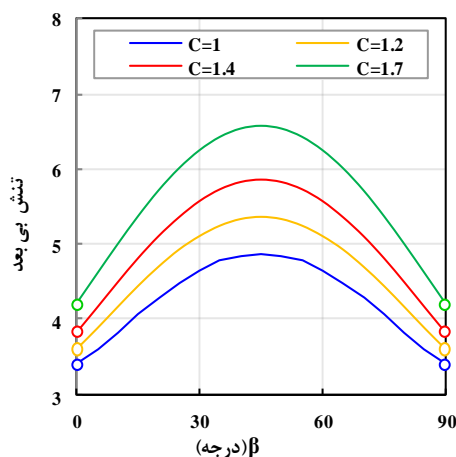
جدول ۴- زاویه چرخش مطلوب و تنش متناظر آن در  $c=1$  از صفحه ارتوتروپیک شیشه/اپوکسی

$w$	زاویه چرخش مطلوب (درجه)	تنش مطلوب	زاویه چرخش نامطلوب (درجه)	تنش نامطلوب
۰/۰۲	۹۰ و ۰	۴/۰۰۱	۳۵ و ۵۵	۴/۳۸۴
۰/۰۶	۹۰ و ۰	۴/۰۱۲	۳۵ و ۵۵	۵/۰۳۶
۰/۱	۹۰ و ۰	۴/۳۰۵	۳۵ و ۵۵	۵/۹۰۲
۰/۱۴	۹۰ و ۰	۴/۹۰۲	۳۵ و ۵۵	۷/۱۶۹

#### ۴-۵- تاثیر زاویه الیاف

یکی از پارامترهای مهم در توزیع تنش اطراف گشودگی‌های مختلف در صفحات کامپوزیتی حاوی گشودگی، زاویه الیاف است. نتایج بررسی تاثیر این پارامتر بر تنش بی‌بعد، برای چهار ماده کامپوزیتی مختلف که خواص آنها در جدول ۱ آمده، در شکل ۱۱ نشان داده شده است. این بررسی برای

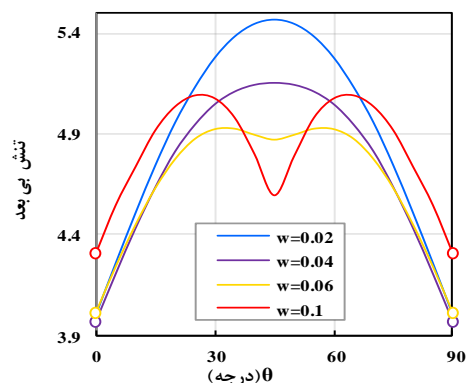
هستند. تاثیر این پارامترها به طور همزمان برای صفحه‌ی فولادی بررسی می‌شود. ابتدا تاثیر زاویه چرخش بر تنش بی‌بعد در  $C$ های مختلف، در  $w$  ثابتی به دست می‌آید که شکل ۱۳ یک نمونه برای  $w=0.06$  نشان داده شده است. این بررسی برای  $w$ های مختلف در بازه‌ی  $0.25 \leq w \leq 0$  انجام می‌شود. سپس اگر نقاط مینیمم این منحنی‌ها در هر شکل که با علامت (O) مشخص شده است، تنش مطلوب نام‌گذاری شود، در نموداری دیگر، تغییرات این تنش مطلوب برحسب کشیدگی گشودگی در  $w$ های مختلف که از مرحله‌ی قبل به دست آمده سنجیده می‌شود. این نتایج در شکل ۱۴ نشان داده شده است. سپس نقاط مینیمم به دست آمده از منحنی‌های شکل ۱۴ که با علامت (X) مشخص شده است، در شکل ۱۵ به صورت جداگانه برحسب  $w$  ترسیم می‌شود.



شکل ۱۳- تاثیر زاویه چرخش گشودگی بر تنش بی‌بعد در کشیدگی گشودگی‌های مختلف در  $w=0.06$

به عبارتی در شکل ۱۵ محور افقی،  $w$  و محور قائم کمترین تنش مطلوب است. بنابراین در این شکل نقطه‌ای که با علامت (□) نشان داده شده است؛ نشان‌دهنده کمترین تنش مطلوب ممکن در صفحه‌ی فولادی برای گشودگی چهارضلعی (شبه‌مستطیلی) می‌باشد؛ که مقدار آن برابر با  $3/329$  است. پارامترهای بهینه در این نقطه عبارت است از:  $w=0.08$ ،  $c=1$  و  $\beta=90$ . این نتیجه نشان می‌دهد که با انتخاب صحیح پارامترهای مهم و تاثیرگذار، می‌توان به تمرکز تنشی کمتر از گشودگی دایره‌ای ( $w=0$ ) دست یافت.

زاویه الیاف بهینه و همچنین تنش نامطلوب برای ماده‌ی شیشه/اپوکسی در  $w$ های مختلف و  $c=1$  در جدول ۶ ارائه شده است.



شکل ۱۲- بررسی تاثیر زاویه الیاف بر تمرکز تنش صفحه‌ی ارتوتروپیک شیشه/اپوکسی

جدول ۶- زاویه الیاف مطلوب و تنش متناظر آن در  $c=1$  از صفحه ارتوتروپیک شیشه/اپوکسی

$w$	زاویه الیاف مطلوب (درجه)	تنش مطلوب	زاویه الیاف نامطلوب (درجه)	تنش نامطلوب
۰/۰۲	۹۰ و ۰	۴/۰۰۱	۴۵	۵/۴۶۸
۰/۰۴	۹۰ و ۰	۳/۹۶۸	۴۵	۵/۱۵۴
۰/۰۶	۹۰ و ۰	۴/۰۱۲	۳۵ و ۵۵	۴/۹۲۶
۰/۱	۹۰ و ۰	۴/۳۰۵	۲۵ و ۶۵	۵/۰۹۱

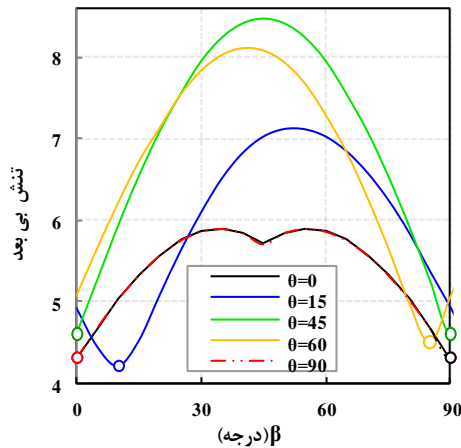
#### ۶- تاثیر همهی پارامترها در کنار یکدیگر

در این بخش به بررسی تاثیر تمامی پارامترها در کنار یکدیگر برای دستیابی به کمترین تنش بی‌بعد پرداخته می‌شود. پارامترهای مورد بحث در این مقاله شامل: انحنا، کشیدگی، زاویه چرخش گشودگی هستند. همچنین برای مواد مرکب نوع ماده و زاویه الیاف نیز مورد بررسی قرار می‌گیرند. این بررسی ابتدا برای مواد همسان‌گرد و سپس برای مواد غیرهمسان‌گرد انجام می‌شود.

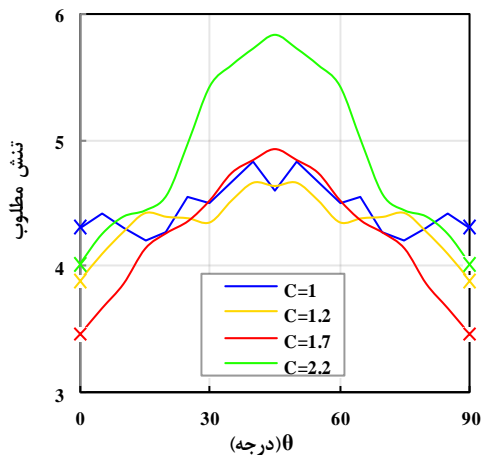
#### ۶-۱- مواد همسان‌گرد

$w$ ،  $c$  و  $\beta$  از مهم‌ترین پارامترهای تاثیرگذار بر تحلیل تنش صفحات همسان‌گرد حاوی گشودگی و تحت تنش برشی

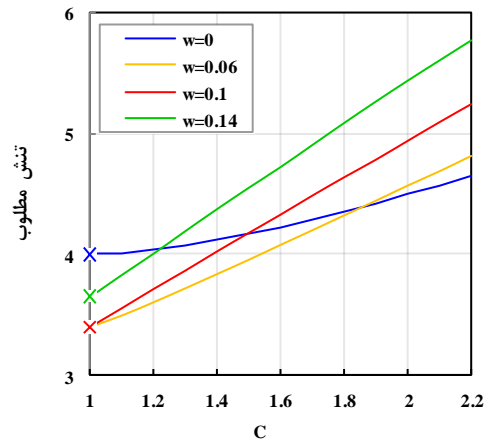
برای دیگر مواد مرکب فقط به ارائه پارامترهای بهینه و تنش بی‌بعد متناظر با آن بسنده می‌شود. ابتدا تاثیر زاویه چرخش بر تنش بی‌بعد در زاویای الیاف مختلف، در  $c=1$  و  $w=0/1$  در شکل ۱۶ نشان داده شده است. این بررسی برای  $c$ های مختلف در بازه  $1 \leq c \leq 2/5$  انجام می‌شود.



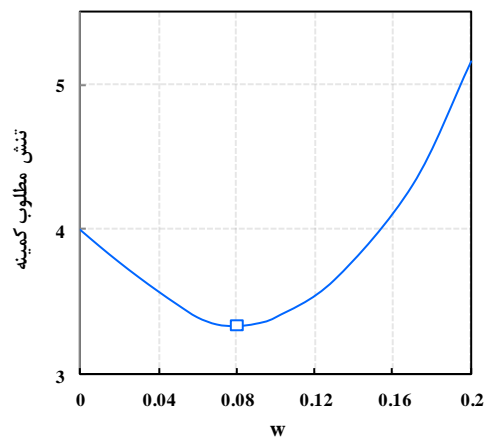
شکل ۱۶- تاثیر زاویه چرخش گشودگی بر تنش بی‌بعد در صفحه‌ی ارتوتروپیک شیشه/اپوکسی در زاویه الیاف مختلف،  $w=0/1$  و  $C=1$



شکل ۱۷- تغییرات تنش مطلوب برحسب زاویه الیاف در صفحه‌ی ارتوتروپیک شیشه/اپوکسی در کشیدگی گشودگی‌های مختلف و  $w=0/1$



شکل ۱۴- تغییرات تنش مطلوب برحسب کشیدگی گشودگی در  $w$ های مختلف

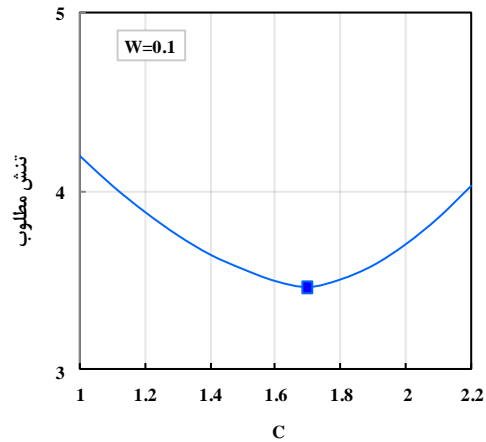


شکل ۱۵- کمترین تنش مطلوب در صفحه‌ی همسان‌گرد فولادی برای گشودگی چهارضلعی

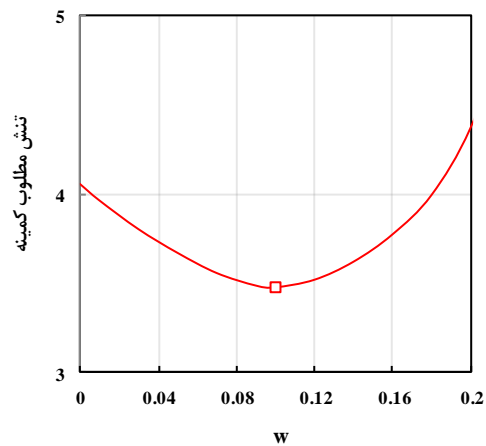
## ۲-۶- مواد غیر همسان‌گرد

در این بخش به بررسی تاثیر تمامی پارامترهای موثر بر توزیع تنش اطراف گشودگی در صفحه‌ای از جنس مواد مرکبی که خواص آنها در جدول ۱ آمده است؛ پرداخته می‌شود. هدف تعیین پارامترهای بهینه برای دستیابی به کمترین تنش بی‌بعد است. پارامترهای مورد بحث برای این مواد شامل: انحنای گشودگی، کشیدگی گشودگی، زاویه چرخش گشودگی، نوع ماده و زاویه الیاف می‌باشند. بنابراین پارامترهای  $w$ ،  $c$ ،  $\beta$  و  $\theta$  برای صفحه‌ای از جنس شیشه/اپوکسی به طور کامل مورد مطالعه قرار می‌گیرد. ولی

نتایج مربوط به زاویه الیاف صفر و ۹۰ درجه کاملاً برهم منطبق می‌باشد. موقعیت تنش بی‌بعد که در زوایای الیاف مختلف کمترین مقدار است؛ در شکل ۱۶ با علامت (O) مشخص شده است. این تنش‌های بی‌بعد کمینه، تنش مطلوب نام‌گذاری می‌شود. اکنون در شکل ۱۷ تغییرات تنش مطلوب برحسب زاویه الیاف به صورت توابعی پیوسته در  $c$ های مختلف نشان داده شده است. نقاط مینیمم به دست آمده از منحنی‌های شکل ۱۷ که با علامت (X) مشخص شده است؛ کمترین تنش مطلوب در هر  $c$  می‌باشند. در شکل ۱۸، این کمترین تنش مطلوب برحسب  $c$  ترسیم شده است. در شکل ۱۸ نقطه‌ای که با علامت (■) نشان داده شده، کمترین تنش مطلوب در  $w=0/1$  می‌باشد. تمامی مراحل بالا، شکل‌ها و نتایج ارائه شده در این بخش برای  $w=0/1$  انجام شده است. بنابراین این بررسی‌ها برای تمامی انحنای گوشه گشودگی در بازه  $0 \leq w \leq 0/25$  انجام می‌شود و مقادیر به دست آمده از آن در شکل ۱۹ ترسیم می‌شود. در شکل ۱۹ نقطه‌ای که با علامت (□) نشان داده شده، کمترین تنش مطلوب در صفحه‌ی غیرهمسان‌گرد شیشه/اپوکسی برای گشودگی چهارضلعی (شبه‌مستطیلی) می‌باشد که مقدار آن برابر با  $3/456$  می‌باشد. پارامترهای بهینه در این نقطه عبارت است از:  $w=0/1$ ،  $c=1/7$ ،  $\beta=90$  و  $\theta=0$ . این بررسی‌ها برای دیگر مواد مرکب انجام شده است. پارامترهای بهینه به دست آمده و کمترین تنش بی‌بعد متناظر با آن برای این مواد در جدول ۷ معرفی شده است.



شکل ۱۸- کمترین تنش مطلوب در صفحه‌ی ارتوتروپیک شیشه/اپوکسی در  $w=0/1$



شکل ۱۹- کمترین تنش مطلوب در صفحه‌ی ارتوتروپیک شیشه/اپوکسی برای گشودگی چهارضلعی

جدول ۷- پارامترهای بهینه برای گشودگی چهارضلعی در صفحاتی از مواد مختلف و تنش بی‌بعد متناظر با آن

مواد	w انحنای گشودگی	c کشیدگی گشودگی	$\beta$ زاویه چرخش گشودگی (درجه)	$\theta$ زاویه الیاف (درجه)	تنش بی‌بعد
فولاد	0/08	1	90 و 0	-	3/329
شیشه/اپوکسی	0/1	1/7	90 و 0	0 و 90	3/456
تخته چندلا	0/12	1/9	90 و 0	0 و 90	3/455
گرافیت/اپوکسی	0/11	2/5	90 و 0	0 و 90	5/297
شیشه با الیاف بافته شده/اپوکسی	0/07	1	90 و 0	0 و 90	3/105

## ۷- نتیجه گیری

در این مقاله با توسعه روش حل تحلیلی لخنیتسکی، توزیع تنش اطراف گشودگی چهارضلعی تحت تنش برشی در بی‌نهایت، مورد بررسی قرار گرفت. نتایج حاصل از این تحقیق و مقایسه آن با روش‌های عددی نشان‌دهنده صحت و دقت روش حل تحلیلی حاضر است. در این مطالعه به خوبی نشان داده شد که پارامترهای متعددی بر توزیع تنش اطراف گشودگی تاثیرگذار هستند. این پارامترها شامل: شعاع انحنای گوشه‌های گشودگی، کشیدگی گشودگی، زاویه چرخش گشودگی، زاویه الیاف و جنس صفحه می‌باشند. با انتخاب صحیح این پارامترها می‌توان به کمترین تنش بی‌بعد در اطراف گشودگی دست یافت. بدین منظور تاثیر هر پارامتر به صورت مجزا مورد بررسی قرار گرفت و سپس تاثیر همگی پارامترها در کنار یکدیگر و در نهایت مقادیر بهینه پارامترهای مورد بحث که منجر به کمترین تمرکز تنش می‌شود؛ بررسی و معرفی شد. با توجه به نتایج به دست آمده، در شعاع انحنای خاصی از گشودگی چهارضلعی، مقدار تمرکز تنش حتی از گشودگی دایره‌ای نیز کمتر خواهد بود. نتایج نشان داد که شعاع انحنای گوشه‌های گشودگی تنها پارامتر موثر بر کاهش تنش بی‌بعد نیست، بلکه زاویه چرخش گشودگی و انتخاب کشیدگی گشودگی مناسب هم در این کاهش تنش، تاثیر بسزایی دارد. جنس صفحه در مواد همسان‌گرد تاثیری بر تمرکز تنش ندارد، ولی در مورد مواد مرکب علاوه بر هندسه گشودگی نه تنها جنس، بلکه زاویه الیاف هم بر توزیع تنش اطراف گشودگی موثر است.

## مراجع

- [6] Sternberg E (1958) Three-dimensional stress concentration. *Appl Mechanics Rev* 11: 1-4.
- [7] Muskhelishvili NI (1953) Some basic problems of mathematical theory of elasticity. P Noordhoff, Groningen, Holland.
- [8] Savin GN (1961) Stress concentration around holes. Pergamon Press, New York.
- [9] Eshelby JD, Read WT, Shockley W (1953) Anisotropic elasticity with applications to dislocation theory. *Acta Metallurgica* 1(3): 251-259.
- [10] Stroh AN (1958) Dislocations and cracks in anisotropic elasticity. *Philosophical Magazine* 3(30): 625-646.
- [11] Lekhnitskii SG (1963) Theory of elasticity of an anisotropic body. Mir Publishers, Moscow.
- [12] Hedgepeth JM (1961) Stress concentrations in a filamentary structures. NASA TND-882, May.
- [13] Zender GW, Deaton JW (1963) Stress of filamentary sheets with one or more fiber broken. NASA TND-1609.
- [14] Hedgepeth J, Van Dyke P (1967) Local stress concentration in imperfect filamentary composite materials. *Journal Composite Materials* 1: 294-309.
- [15] Hedgepeth J, Van Dyke P (1969) Stress concentration from single filament failure in composite materials. *Textile Research Journal* 39: 618-626.
- [16] Tan SC (1988) Finite-width correction factors for anisotropic plate containing a central opening. *J Comp Mat*: 22: 1088-1097.
- [17] Daoust J, Hoa SV (1991) An analytical solution for anisotropic plates containing triangular holes. *Composite Structure* 19: 107-130.
- [18] Gruber B, Hufenbach W, Kroll L, Lepper M, Zhou B (2007) Stress concentration analysis of fibre-reinforced multilayered composites with pin-loaded holes. *J Composites Science and Technology* 67: 1439-1450.
- [19] Hufenbach W, Gottwald R, Grüber B, Lepper M, Zhou B (2008) Stress concentration analysis of thick-walled laminate composites with a loaded circular cut-out by using a first order shear deformation theory. *J Composites Science and Technology* 68: 2238-2244.
- [20] Rezaeepazhand J, Jafari M (2005) Stress analysis of perforated composite plates. *Composite Structures* 71: 463-468.
- [21] Rezaeepazhand J, Jafari M (2006) Stress concentration in composite plates with special shaped cutout. 12<sup>th</sup> European Conference on Composite Materials, 29<sup>th</sup> August-1<sup>st</sup> September.
- [1] Howland RCJ (1929) On the stresses in the neighborhood of circular hole in a strip under tension. *Phil. Trans. Roy. Soc.* 229: 49-86.
- [2] Heywood RB (1952) Designing by photoelasticity. Chapman and Hall, London.
- [3] Peterson RE (1974) Stress concentration factors. John Wiley & Sons, New York.
- [4] Pilkey WD (1997) Peterson's stress concentration factors. Second Edition, New York, NY: John Wiley & Sons Inc.
- [5] Neuber H, Hahn HG (1966) Stress concentration in scientific research and engineering. *Appl Mechanics Rev* 19: 187-199.

- factor in countersunk holes. *Journal of Mechanics A/Solids* 36: 94–103.
- [26] Lekhnitskii SG (1968) *Anisotropic plates*. Translated from the Second Russian Edition by Tsai SW, Cheron Gordon and Breach.
- [27] Martin H Sadd (2009) *Elasticity theory, applications and numeric*. Second Edition, Elsevier Inc.
- [28] Abulfoutouh NM (1993) Preliminary design of unstiffend composite shells. Symposium of 7<sup>th</sup> Technical Conference of ASC: 786–693.
- [22] Rezaeepazhand J, Jafari M (2008) Stress analysis of composite plates with non circular cut out. *Key Engineering Materials* 385-387: 365–368.
- [23] Rezaeepazhand J, Jafari M (2010) Stress concentration in metallic plates with special shaped cutout. *International Journal of Mechanical Sciences* 52: 96–102.
- [24] Mohammadi M, Dryden JR, Jiang L (2011) Stress concentration around a hole in a radially inhomogeneous plate. *Journal of Solids and Structures* 48: 483–491.
- [25] Darwish F, Gharaibeh M, Tashtoush G (2012) A modified equation for the stress concentration