مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها/ سال۱۴۰۴/ دوره ۱۵/ شماره ۱/ صفحه ۶۵-۸۱

نشریه مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها

DOI: **10.22044/jsfm.2025.12947.3857**

بررسی اثر ژیروسکوپی بر ارتعاشات عرضی و پایداری ابزار فرزکاری با مدل تیر اویلر-برنولی

سیمین نیرو[۱]، مهرداد متوسل‌الحق[۲]، روح‌الله طالبی توتی[۳*]، حمید احمدیان[۴]

[۱] کارشناس ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران

[۲] دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران

[۳] استاد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران

[۴] استاد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران، ایران

مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۰۲/۱۷؛ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۳/۰۵/۱۶؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۰۹/۰۸

چکیده

در این پژوهش رفتار ارتعاشی ابزار فرزکاری با درنظر گرفتن اثر ژیروسکوپی و پارامترهای تأثیرگذار دیگر به‌صورت حل عددی مورد بررسی قرار گرفته‌است. ارتعاشات عرضی ابزار فرزکاری با مدل تیر اویلر-برنولی و تئوری تیر رایلی شبیه‌سازی شده و استخراج معادلات حاکم با استفاده از اصل همیلتون انجام شده‌است. فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای مدل اول با شرط مرزی ثابت و گیردار با حل عددی به کمک نرم‌افزار انسیس استخراج شده و با نتایج حل عددی در نرم‌افزار متلب مقایسه شده‌است. فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای مدل دوم با شرایط مرزی الاستیک و گیردار به روش حل عددی با حل عددی به کمک نرم‌افزار انسیس استخراج شده و با نتایج تست تجربی از مرجع معتبر صحه‌گذاری شده‌است؛ همچنین، پایداری ابزار و ابزارگیر به کمک کدنویسی در نرم‌افزار متلب به‌صورت یک سیستم مورد بررسی قرار گرفته و پارامترهای مؤثر بر پایداری سیستم ابزار و ابزارگیر تحلیل شده و حساسیت فرکانس‌های طبیعی ابزار نسب به تغییر طول ابزار مورد بررسشی قرار گرفته‌است. نتایج نشان می‌دهد که در مدل با اتصال الاستیک فرکانس غالب در مقادیر پایین تر ایجاد می‌گردد و عمق برش محوری با بالارفتن دور به شدت افزایش می‌یابد.

کلمات کلیدی: ارتعاشات عرضی تیر؛ ابزار فرزکاری؛ اثر ژیروسکوپی؛ نمودار پایداری؛ تیر اویلر-برنولی.

Investigating the effect of gyroscope on transverse vibrations and stability of milling tools with Euler-Bernoulli beam model

Simin Niroo[1], Mehrdad Motavasselolhagh[2], Rohollah Talebitooti[3,*], Hamid Ahmadian[4]

[1] Master, Mech. Eng., Iran Science and Technology Univ., Tehran, Iran

[2] Ph.D. Student, Mech. Eng., Iran Science and Technology Univ., Tehran, Iran

[3,*] Prof., Mech. Eng., Iran Science and Technology Univ., Tehran, Iran

[4] Prof., Mech. Eng., Iran Science and Technology Univ., Tehran, Iran

Abstract

In this study, the vibration behavior of a milling tool, accounting for the effects of gyroscopic forces and other influencing parameters, has been investigated numerically. The transverse vibrations of the milling tool were simulated using the Euler-Bernoulli beam model and Rayleigh beam theory, with the governing equations derived through Hamilton's principle. The natural frequencies and mode shapes for the first model, assuming a fixed boundary condition, were determined numerically using Ansys software and compared with results obtained from MATLAB. For the second model, with elastic and clamped boundary conditions, the natural frequencies and mode shapes were extracted using Ansys software and validated against experimental test results from a reliable reference. Furthermore, the stability of the tool and tool holder system was analyzed through MATLAB coding, examining the parameters affecting system stability. The sensitivity of the tool's natural frequencies to changes in its length was also investigated. The results indicate that, in the model with elastic connections, the dominant frequency occurs at lower values. Additionally, the depth of axial cut significantly increases with the circumference.

Keywords: beam transverse vibrations; milling tools; gyroscopic effect; stability diagram; Euler-Bernoulli beam.

* روح‌الله طالبی توتی؛ تلفن: ۹۸۲۱۷۷۲۴۰۵۴۰-۸۹۷۴ ؛ فکس: ۹۸۲۱۷۷۲۴۰۴۸۸

آدرس پست الکترونیک: rtalebi@iust.ac.ir

۱- مقدمه

ماشین‌های فرز از نظر نوع کار یکی از پر کاربردترین، از نظر ساختمان متنوع‌ترین و از نظر کارکردن با آن، جزء دقیق‌ترین دستگاه‌ها هستند؛ بنابراین مزایای بیشتری نسبت به دیگر روش‌های ماشین‌کاری دارند؛ لذا طراحی دستگاه‌های فرز و بررسی رفتار دینامیکی و کنترل ارتعاشات آن‌ها از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. انجام عملیات دقیق در فرزکاری و حصول اطمینان از اینکه ارتعاشات در سطح مجاز است از اهداف یک مهندس مکانیک خواهد بود.

آلتینتاش [۱] یک مدل فرزکاری سه درجه آزادی را ارائه کرد و در آن، ارتعاش محوری را درنظر گرفته‌است. در این مدل چتر [1]، قطعه کار به‌عنوان یک جسم صلب درنظر گرفته می‌شود، و رفتار ارتعاشی آن نادیده گرفته شده‌است. مدل‌هایی که تا اینجا ذکر شده به‌طور گسترده‌ای برای پیش‌بینی ارتعاش ابزار استفاده شده‌اند. با این حال، زمانی که صلبیت یک قطعه کار و صلبیت ابزار مشابه هستند، اثر دینامیک قطعه کار به هیچ وجه قابل چشم‌پوشی نیست. بوداک [۲] و آلتینتاش و همچنین تانگ و همکاران [۳] مدل‌های جدید چهار درجه آزادی را ثبت کرده‌اند که هم ارتعاش ابزار و هم قطعه کار را مورد توجه قرار داده‌است. لو و همکاران [۴] از یک تابع تبدیل مرتبط برای مطالعه اثرات میرایی بر روی پایداری لرزش بخش‌های دیواره نازک در طول فرایند فرزکاری، استفاده کرده‌اند. نتایج نشان می‌دهد که فرآیند میرایی می‌تواند پایداری را در منطقه سرعت پایین بهبود بخشد. دلیو و همکاران [۵] میکروفون‌ها را با سنسورهای شتاب و جابه‌جایی مقایسه کردند و نتیجه گرفته‌اند که در حالت‌های متعددی، سیگنال‌های آکوستیک برای آشکارکردن چتر بسیار مؤثرتر هستند. سیگنال‌های منتشره‌شده ناشی از ارتعاشات مکانیکی در ناحیه ابزار برشی، می‌توانند برای کشف و آشکارسازی حضور چتر مورد استفاده قرار بگیرند. آلتینتاش و چان [۶] تحلیل طیفی را بر روی سیگنال صوتی یک فرآیند انجام داده‌اند و حداکثر دامنه را به‌عنوان یک نمایشگر چتر تنظیم کرده‌اند. نتیجه گرفته شد که می‌توان از سیگنال‌های صوتی برای کشف چتر به‌صورت زمان واقعی مورد استفاده قرار بگیرد. وو [۷] برای مواقعی که از یک نیروی فروروی اتصالی ابزار–ابزارگیر استفاده می‌شود، یک مدل نیروی گنکره‌ای‌شده را برای توصیف میرایی ارائه کرد.

کلگادی [۸] از روش وو در یک مدل فرزکاری دینامیکی دو درجه آزادی استفاده نمود تا نیروی فروروی را شبیه‌سازی کند و اثرات میرایی را بر روی پایداری مطالعه کند. همچنین نتایج آن‌ها با نتایج تجربی سازگاری خوبی داشت. فنگ و همکاران [۹] به‌طور سیستماتیک مکانیزم میراشدن را در یک فرآیند فرزکاری دیواره نازک مطالعه کرده‌اند و نتیجه گرفته‌اند که ارتعاش مربوط به سیستم ابزار و قطعه کار منبع اصلی میراشدگی ماشین‌کاری است. اگر اثر آن در یک معادله‌ی حاکم بر فرآیند ارائه شود، نمودار منحنی‌های پایداری قطعه تخمین زده می‌شود. پاولوویک و همکاران [۱۰]، تأثیر برخی از پارامترها مانند: اینرسی دورانی، ضریب استهلاک، نسبت استهلاک داخلی-خارجی را روی پایداری یک شفت چرخان با استفاده از روش مستقیم لیاپانوف مورد بررسی قرار دادند. نتایج عددی به‌دست‌آمده نشان می‌دهد که اثر اینرسی دورانی روی پایداری دینامیکی قابل چشم‌پوشی است. جنگ و لی [۱۱]، به تحلیل ارتعاشات آزاد یک سیستم دیسک اسپیندل-شفت انعطاف‌پذیر با اثر اینرسی دورانی و روش المان محدود FEM، پرداختند.

علی مختاری و همکاران [۱۲] با ارائه‌ی مدل سه‌بعدی تیر تیموشینکو از ابزار فرز به مدل‌سازی و بررسی اثر اینرسی دورانی بر روی چتر پرداختند. آن‌ها همچنین اثر تعداد دندانه های کاتر بر پایداری فرآیند فرز را مورد مطالعه قرار دادند. نمودار پایداری ارائه شده ممکن است، به ماشین‌کار کمک کند تا مجموعه پارامترهای بهتری مانند طول و قطر ابزار، تعداد فلوت‌های کاتر، عمق برش و سرعت دوک را برای یک فرآیند فرز پایدار انتخاب کند. علی مختاری و همکاران [۱۳] در پژوهشی دیگر به تحلیل ارتعاشات ابزار فرزکاری با درنظر گرفتن میرایی و غیرخطی‌های ساختاری پرداختند. آن‌ها نشان دادند که نادیده گرفتن اثر اندازه، ژیروسکوپی و اینرسی چرخشی در مدل ابزار باعث ایجاد خطاهای قابل توجهی در پیش‌بینی چتر در فرآیند میکروفرز می‌شود. بری و همکاران [۱۴] در پژوهشی به بررسی پایداری و کاهش اثر چتر بر قطعات ماشین‌کاری شده تحت نیروی محوری متغیر با زمان پرداختند. جینگمین ما و همکاران [۱۵] به تحلیل ارتعاش آزاد و پایداری ابزار فرزکاری کامپوزیتی دوار با نسبت ابعاد بزرگ پرداختند. اثرات میرایی داخلی، میرایی ویسکوز خارجی،

[1] Chatter

زاویه‌ی لایه، اثر ژیروسکوپی و اثر اینرسی بر پایداری برش مورد تحلیل قرار گرفته‌است. نتایج نشان می‌دهد که چرخش رو به عقب دارای اثر میرایی منفی است و اثر مثبت بر پایداری برش ندارد. کی یاهو و همکاران [۱۶] به بررسی دینامیک ابزار فرزکاری با درنظر گرفتن مدل تیر چرخشی اویلر برنولی پرداختند. آن‌ها بارهای برشی وارد بر ابزار را به‌صورت دقیق‌تر درنظر گرفته و یک مدل تئوری از رفتار ارتعاشی و دینامیکی ابزار فرز ارائه کردند. لیو و همکاران [۱۷] در پژوهشی به بررسی دینامیکی ریز ابزار فرزکاری پرداختند. آن‌ها اثرات ممان ژیروسکوپی، نیروی گریز از مرکز و خروج ابزار بر پدیده‌ی چتر را بررسی کردند. فنگ و همکاران [۱۸] به مدل‌سازی دینامیکی و تحلیل پاسخ ارتعاشی یک اسپیندل همزمان با گریز از مرکز شیبدار پرداختند و اثرات جرم نابالانسی، سرعت دوران و میزان خروج از مرکزیت را بر رفتار دینامیکی اسپیندل بررسی کردند.

در اکثر پژوهش‌ها مدل تیر تیموشینکو درنظر گرفته شده است؛ این در حالی است که برای ابزار فرز باریک تئوری تیر اویلر-برنولی می‌تواند جواب‌های دقیق‌تری ارائه کند؛ بنابراین در پژوهش حاضر، با مدل‌کردن ابزار فرز به‌صورت تیر اویلر-برنولی به تحلیل ارتعاشات آن در حوزه‌ی فرکانس پرداخته می‌شود و نتایج برای بررسی اثر ژیروسکوپی و اینرسی دورانی بر ارتعاشات ابزار فرز و پدیده‌ی چتر با حل عددی در متلب و شبیه‌سازی المان محدود استخراج شده و با تست تجربی مقایسه می‌شود.

در این پژوهش، معادلات حرکت با استفاده از اصل همیلتون به‌دست‌آمده و سپس از روش FEM برای تحلیل فرکانس‌های طبیعی سیستم استفاده شده‌است. نتایج نشان می دهد که برای پیش‌بینی فرکانس مود اول، انعطاف‌پذیری و شرایط مرزی شفت جزء پارامترهای بحرانی هستند، ولی انعطاف‌پذیری اسپیندل روی مود اول تأثیری ندارد. در پژوهش حاضر اثر اینرسی دورانی و اثر ژیروسکوپی، تئوری تیرها، فرکانس‌های طبیعی و پایداری ابزار بر ارتعاشات ابزار فرزکاری مورد بررسی قرار می‌گیرد. اهداف این پژوهش شامل بررسی دینامیکی ابزار فرز و تحلیل ارتعاشات عرضی ابزار فرز انگشتی، شناسایی پارامترهای مؤثر در افزایش آثار ژیروسکوپی مانند درنظر گرفتن یک دیسک برای مدل‌نمودن ابزار اینسرتی فرزکاری در انتهای شفت و کاهش مدول الاستیسیته فنر خمشی اتصال (شرایط مرزی) و بررسی پایداری ابزار و به‌دست‌آوردن نمودار منحنی‌های پایداری است؛ لذا در ابتدا به‌دست‌آوردن یک مدل ریاضی از رفتار دینامیکی ابزار فرز با درنظر گرفتن اثرات ژیروسکوپی و اینرسی دورانی مد نظر است. سپس تحلیل مودال در نرم‌افزار انسیس انجام شده و فرکانس‌های طبیعی و شکل مودها استخراج می‌گردد. در مرحله‌ی بعد پاسخ هارمونیکی با استفاده از نرم‌افزار انسیس برای ترسیم نمودار تابع پاسخ فرکانسی صورت می‌گیرد. پس از شناسایی فرکانس‌های تشدید، سرعت‌های بحرانی و فرکانس‌های پیشرو و پسروی ناشی از اثر ژیروسکوپی استخراج می‌گردد و نهایتاً تحلیل حساسیتِ فرکانس‌های طبیعی سیستم نسبت به طول آویز انجام می‌گردد.

۲- مدل‌سازی دورانی تیر

برای مدل نمودن رفتار خمشی تیر انعطاف‌پذیر از تئوری تیر اویلر-برنولی استفاده می‌گردد و برای لحاظ‌کردن اینرسی دورانی و اثر ژیروسکوپی از تئوری تیر رایلی استفاده می‌شود. مدل تیر پیوسته با دو نوع روش اتصال ابزار- ابزارگیر که شامل مدل اول اتصال ثابت و مدل دوم اتصال الاستیک است تحلیل می‌گردد.

دو حالت برای شرایط مرزی شامل: یک‌سر آزاد و یک‌سر دیسک که مدل ابزار اینسرتی فرزکاری را نشان می‌دهد مورد بررسی قرار می‌گیرد. معادلات حاکم بر حرکت سیستم به کمک اصل همیلتون با اثر ژیروسکوپی و اینرسی دورانی استخراج می‌گردد. برای گسسته‌سازی معادلات حرکت، بررسی های لازم جهت انتخاب روش بهینه انجام شده و سپس نتایج به‌صورت فرکانس‌های طبیعی، شکل مودها، تابع پاسخ فرکانسی نوک ابزار، سرعت‌های بحرانی و نمودار کمبل با استفاده از روش المان محدود به‌دست می‌آید.

در ابتدا معادلات حاکم بر مسئله با استفاده از اصل همیلتون استخراج می‌شود. رابطه‌ی اصل همیلتون به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\int_{t_1}^{t_2} [\delta(U-T) - \delta W] dt = 0 \qquad (۱)$$

که در آن T انرژی جنبشی، U انرژی پتانسیل، W_{nc} کار نیروهای ناپایستار است؛ همچنین δ عملگر تغییرات و $t_2 - t_1$ بازه‌ی

زمانی است. در ادامه این انرژی‌ها به‌طور جداگانه مورد بررسی قرار گرفته و بیان می‌شوند.

انرژی جنبشی

انرژی جنبشی مربوط به حرکت دورانی محور به‌صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} T &= T_{tran} + T_{rot} \\ &= \frac{1}{2}\int_0^L \int_A \rho \dot{r}\cdot\dot{r}\,dA dx \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_0^L \int_A \rho\{\omega\}^T[I]\{\omega\}\,dA dx \\ &= \frac{1}{2}\int_0^L [\rho A(\dot{v}^2+\dot{w}^2)+\rho J{\omega_1}^2 \\ &\quad + \rho I({\omega_2}^2+{\omega_3}^2)]dx \end{aligned} \tag{۲}$$

که در آن

$$J = \iint_A (y^2+z^2)dxdz = \frac{\pi r^4}{2} \tag{۳}$$

چون دامنه حرکت کوچک است، مولفه‌های جابه‌جایی و مشتق مربوط به آن‌ها نسبت به x بسیار کوچک خواهد بود؛ بنابراین مقادیر ψ_z و ψ_y که در رابطه‌ی (۳) معرفی شدند، کوچک بوده و به‌ترتیب و به‌صورت تقریبی برابر $\frac{\partial v}{\partial x}$ و $-\frac{\partial w}{\partial x}$ می‌گردد، لذا با ترکیب‌نمودن رابطه‌ی (۲) با موارد مذکور، رابطه‌ی (۴) برای انرژی جنبشی سیستم حاصل خواهد شد:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\int_0^L [\rho A(\dot{v}^2+\dot{w}^2)+\rho J{\Omega_1}^2 \\ &\quad + \rho I\left(4\omega\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}+(\frac{\partial \dot{v}}{\partial x})^2+(\frac{\partial \dot{w}}{\partial x})^2\right)\Big]dx \end{aligned} \tag{۴}$$

با اعمال تغییرات بر رابطه‌ی (۴) و محاسبات مربوط به انتگرال جزء به جزء، معادله ذیل حاصل می‌گردد:

$$\delta T = \int_0^L [(\bar{Z}_v)\delta v + (\bar{Z}_w)\delta w]dx + b(T) \tag{۵}$$

که در آن

$$\begin{aligned} \bar{z}_v &= -m\ddot{v} + \frac{mr^2}{2}(\ddot{v}'' + 2\Omega\dot{w}'') \\ \bar{z}_w &= -m\ddot{v} + \frac{mr^2}{2}(\ddot{w}'' + 2\Omega\dot{v}'') \\ b(T) &= \frac{mr^2}{4}(\ddot{v}'' + 2\Omega\dot{w}'')\delta v\Big|_0^L \\ &\quad + \frac{mr^2}{4}(\ddot{w}'' + 2\Omega\dot{v}'')\delta w\Big|_0^L \end{aligned} \tag{۶}$$

انرژی پتانسیل

انرژی پتانسیل سیستم ناشی از انرژی کرنشی با درنظر گرفتن تنش‌ها و کرنش‌ها محاسبه می‌شود؛ بنابراین انرژی پتانسیل شفت دوّار از رابطه‌ی ذیل به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} U = \frac{1}{2}\int_0^L \iint_A (&\sigma_{\mathrm{xx}}\varepsilon_{\mathrm{xx}} + \sigma_{\mathrm{xy}}\varepsilon_{\mathrm{xy}} \\ &+ \sigma_{\mathrm{xz}}\varepsilon_{\mathrm{xz}})dydzdx \end{aligned} \tag{۷}$$

با اعمال اولین عملگر تغییرات بر رابطه‌ی فوق، نتیجه‌ی ذیل حاصل می‌گردد:

$$\begin{aligned} \delta U = \int_0^L \iint_A (&\sigma_{\mathrm{xx}}\delta\varepsilon_{\mathrm{xx}} + \sigma_{\mathrm{xy}}\delta\varepsilon_{\mathrm{xy}} \\ &+ \sigma_{\mathrm{xz}}\delta\varepsilon_{\mathrm{xz}})dydzdx \end{aligned} \tag{۸}$$

که در آن

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \mathrm{E}\varepsilon_{\mathrm{xx}} \\ \sigma_{\mathrm{xy}} &= \mathrm{G}\varepsilon_{\mathrm{xy}} \\ \sigma_{xz} &= \mathrm{G}\varepsilon_{xz} \end{aligned} \tag{۹}$$

$$\begin{aligned} \delta\varepsilon_{xx} &= v'\delta v' + w'\delta w' \\ &\quad -(y)(\delta v'') - (z)(\delta w'') \\ \delta\varepsilon_{xy} &= 0 \\ \delta\varepsilon_{xz} &= 0 \end{aligned} \tag{۱۰}$$

نهایتاً با جایگذاری روابط (۹) و (۱۰) در رابطه‌ی (۸)، رابطه‌ی ذیل به‌دست می‌آید:

$$\delta U=\int_0^L\left[V_x(v'\delta v'+w'\delta w')+(M_z)(\delta v'')+\left(-M_y\right)(\delta w'')\right]dx \qquad (۱۱)$$

نیرو و گشتاورها در رابطه‌ی (۱۱) به‌صورت ذیل حاصل می‌گردد:

$$\begin{aligned}V_x&=\iint_A\sigma_x dydz=\frac{EA}{2}(v'^2+w'^2)\\ M_z&=EI_y(-v'')\\ M_y&=EI_y(-v'')\end{aligned} \qquad (۱۲)$$

انتگرال‌ها در رابطه‌ی (۱۲)، با توجه به دایروی‌بودن سطح مقطع محور طبق روابط ذیل محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned}A&=\iint_A dydz=\pi r^2\\ I_y&=\iint_A z^2dydz=\frac{\pi r^4}{4}\\ I_z&=\iint_A y^2dydz=\frac{\pi r^4}{4}\end{aligned} \qquad (۱۳)$$

حاصل انتگرال رابطه‌ی (۱۱) نیز برابر است با:

$$\delta U=\int_0^L\left(\overline{Y_v}\delta v+\overline{Y_w}\delta w\right)dx+b(U) \qquad (۱۴)$$

که در آن

$$\begin{aligned}\overline{Y_v}&=(M_z)''-(V_xv')'\\ \overline{Y_w}&=\left(-M_y\right)''-(V_xw')'\\ b(U)&=[V_xv'-(M_z)']\delta v|_0^L\\ &\quad+\left(M_y\right)\delta v'\Big|_0^L+\int\left(-M_y\right)\delta w'\Big|_0^L\\ &\quad+\left[V_xw'-\left(-M_y\right)'\right]\delta w\Big|_0^L\end{aligned} \qquad (۱۵)$$

کار نیروهای ناپایستار

تحلیل دقیق دینامیک ابزار فرز، مستلزم درنظر گرفتن درجه آزادی دورانی به همراه درجات آزادی انتقالی ابزار است. در مرحله‌ی فرزکاری دو حالت اتفاق می‌افتد؛ ابتدا زمان درگیری لبه‌ی ابزار با قطعه کار است، یعنی زمانی که ابزار در حال برش است، به‌دلیل تأخیر زمانی هیچ حل دقیقی برای حرکت معادله حاکم وجود ندارد. رفتار سیستم از معادلات دیفرانسیل تأخیری[1] همراه با ضرایب متغیر با زمان پیروی می‌کند. حل معادلات به‌صورت تحلیلی به‌سختی انجام می‌شود و یا غیرممکن است، لذا برای حل این معادلات روش‌های عددی پیشنهاد می‌گردد. در لحظه‌ی جداشدن ابزار از قطعه کار، یعنی هنگامی که خارج از مرحله برش قرار داد، ارتعاش آزاد را می‌توان دقیقاً به‌صورت فرم بسته توصیف کرد.
در مسئله‌ی مورد مطالعه، زمان برخورد ابزار با قطعه کار به‌صورت معادله‌ی دیفرانسیل تأخیری با تأخیرات τ_1 و τ_2 به شکل ذیل درنظر گرفته می‌شود:

$$\dot{x}=F_{jx}\left(x,x(t-\tau_1),x(t-\tau_2)\right) \qquad (۱۶)$$

$$F_{jx}=\left(F_{jt}\cos\varphi_j+F_{jr}\sin\varphi_j\right) \qquad (۱۷)$$

کار مجازی نیروی ناپایستار بدین صورت محاسبه می‌شود:

$$\delta W_{nc}=\int_0^L(F_v\delta v+F_w\delta v)dx \qquad (۱۸)$$

که در آن F_v و F_w به‌ترتیب نیروهای اعمال‌شده در جهت محورهای yو z بر ابزار هستند که به‌صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{aligned}F_w&=F_{jr}\sin\varphi_j\\ F_v&=F_{jt}\cos\varphi_j\end{aligned} \qquad (۱۹)$$

$$\begin{aligned}F_{jt}&=K_tbh\left(\varphi_j\right)\\ F_{jr}&=K_rF_{jt}\end{aligned} \qquad (۲۰)$$

که در آن K_t استحکام برشی قطعه کار و K_r نسبت نیروی برشی شعاعی(در راستای پیشروی) به نیروی برشی مماسی است که مستقل از براده است؛ همچنین b عمق محوری برش و h ضخامت براده‌ای است که توسط دندانه j تولید می‌شود. با

[1] Delay-Differential Equations (DDE)

جایگذاری روابط (۱۴)، (۵) و (۱۹) در رابطه‌ی (۱)، معادلات حرکت در راستای محورهای x و y به‌صورت رابطه‌ی (۲۱) به‌دست می‌آید.

$$
\begin{aligned}
&EI(v'')'' - \frac{EA}{2}[(v'^2 + w'^2)v']' + m\ddot{v} \\
&-2\rho I\Omega\dot{w}'' - \rho I\ddot{v}'' = F_{jt}\cos\varphi_j \\
&EI(w'')'' - \frac{EA}{2}[(v'^2 + w'^2)w']' + m\ddot{w} \\
&+2\rho I\Omega\dot{v}'' - \rho I\ddot{w}'' = F_{jr}\sin\varphi_j
\end{aligned}
\tag{۲۱}
$$

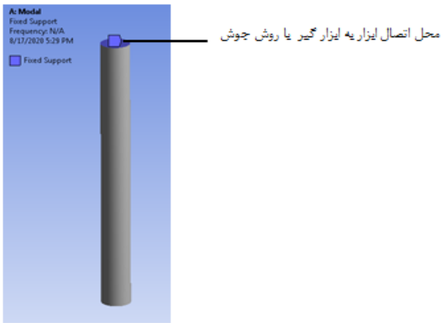
همانطور که در معادله‌های (۲۱) مشاهده می‌گردد، جمله‌های $2\rho I\Omega\dot{w}''$ و $2\rho I\Omega\dot{v}''$ به‌دلیل اثرات ژیروسکوپی و جمله‌های $\rho I\ddot{w}''$ و $\rho I\ddot{v}''$ به‌دلیل اینرسی دورانی ایجاد شده در ابزار فرز پدید آمده‌اند.

شرایط مرزی ثابت- آزاد به‌صورت رابطه‌ی (۲۲) بیان می‌شود:

$$
\begin{aligned}
&\left[V_x v' - (M_z)' - \frac{mr^2}{4}(\ddot{v}' + 2\Omega\dot{w}')\right] \\
&\qquad\qquad\qquad \delta v|_0^L = 0 \\
&(M_z)\delta v'|_0^L = 0 \\
&\left[V_x w' - (-M_y)' - \frac{mr^2}{2}(\ddot{w}' + 2\Omega\dot{v}')\right] \\
&\qquad\qquad\qquad \delta w|_0^L = 0 \\
&(-M_y)\delta w'\big|_0^L = 0
\end{aligned}
\tag{۲۲}
$$

۲-۱- با اتصال ثابت (مدل اول)

در این حالت، طول آویز[1] ابزار فرز برابر با ۰/۱ متر و قطر آن ۰/۰۱ متر است و مطابق با شکل ۱ سازه با اتصال ثابت–آزاد درنظر گرفته شده‌است.

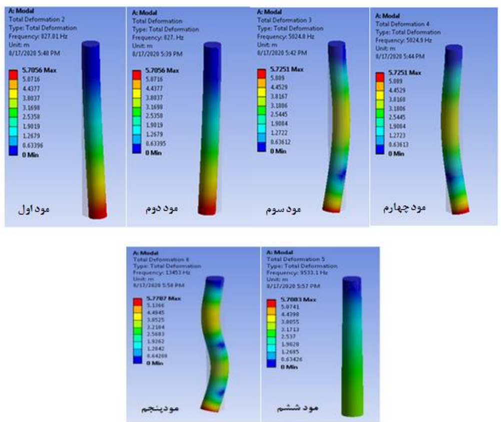


شکل ۱- مدل سه‌بعدی شفت با اتصال ثابت

یک مدل با تعداد ۸۰۳۶ المان Beam 188 و ۳۶۳۲۹ گره در نرم‌افزار انسیس شبیه‌سازی گردید تا فرکانس‌های طبیعی و شکل مودها به‌دست آید. مقادیر شش فرکانس طبیعی اول در شفت غیر دوار و شکل مودهای مربوطه به‌ترتیب در جدول ۱ و شکل ۲ مشاهده می‌گردد.

جدول ۱- شش فرکانس طبیعی اول نامیرا شفت با اتصال ثابت

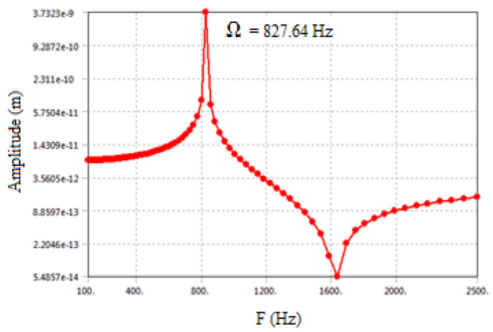
شماره مود	فرکانس طبیعی (هرتز)
۱	۸۲۷
۲	۸۲۷/۰۱
۳	۵۰۲۴/۸
۴	۵۰۲۴/۹
۵	۹۵۳۳/۱
۶	۱۳۴۵۳



شکل ۲- شکل مودهای اول تا ششم تیر با مدل اول

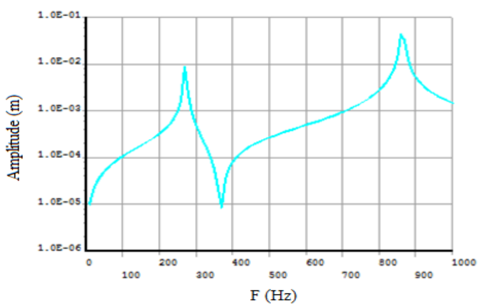
[1] Overhang

برای بررسی نتایج به‌دست‌آمده، فرکانس طبیعی اول از حل عددی در نرم‌افزار متلب مقدار ۸۳۰,۲۵ هرتز استخراج شده‌است که حدود ۰/۴ درصد با مقدار حاصل‌شده از حل المان محدود تفاوت دارد. نمودار حاصل‌شده از کدنویسی در محیط نرم‌افزار متلب مطابق با شکل ۳ است که رزونانس در محدوده ی فرکانسی ۱۰۰ تا ۲۵۰۰ هرتز رخ می‌دهد.

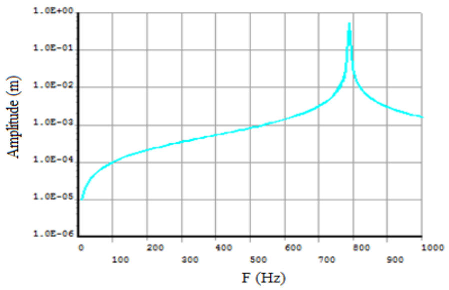


شکل ۳- پاسخ فرکانسی مدل اول با فرکانس رزونانس در بازه‌ی ۱۰۰ تا ۲۵۰۰ هرتز

مدل‌سازی ابزار فرز به‌صورت یک تیر ثابت درنظر گرفته شده و نیروی برشی در انتهای آزاد تیر وارد می‌گردد. صلبیت ابزار به استحکام اتصالات در مجموعه مونتاژی تکیه‌گاه و میز ماشین ابزار بستگی دارد. برای تأمین صلبیت مجموعه، از اتصال جوش استفاده شده‌است که تا حد امکان محکم باشد. ابزار انگشتی با قطر ۰/۰۱ متر برای عمل شیار تراشی قطعه آلومینیومی طبق مرجع [۱۹] با دور اسپیندل ۱۲۰۰۰ دور بر دقیقه ثبت شده‌است. نمودار پاسخ فرکانسی با و بدون اثر ژیروسکوپی به‌ترتیب در شکل‌های ۴ و ۵ ملاحظه می‌شود.



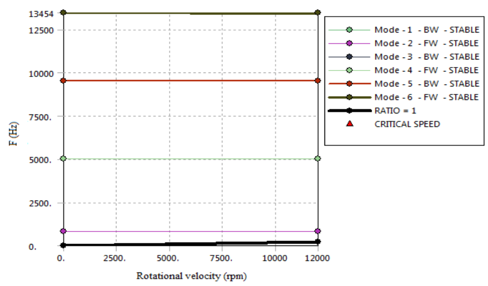
شکل ۴- پاسخ فرکانسی شفت با اتصال ثابت در دور ۱۲۰۰۰ دور بر دقیقه با اثر ژیروسکوپی



شکل ۵- پاسخ فرکانسی شفت با اتصال ثابت در دور ۱۲۰۰۰ دور بر دقیقه بدون اثر ژیروسکوپی

همانطور که از شکل‌های ۴ و ۵ ملاحظه می‌شود، درنظر گرفتن اثر ژیروسکوپی باعث کاهش فرکانس‌های طبیعی اول و دوم می‌شود.

با توجه به شکل ۶ و جدول ۲ در دور اسپیندل ۱۲۰۰۰ دور در دقیقه، سرعت بحرانی ایجاد نمی‌شود.



شکل ۶- نمودار کمبل شفت با اتصال ثابت در دور ۱۲۰۰۰ دور بر دقیقه‌ی اسپیندل

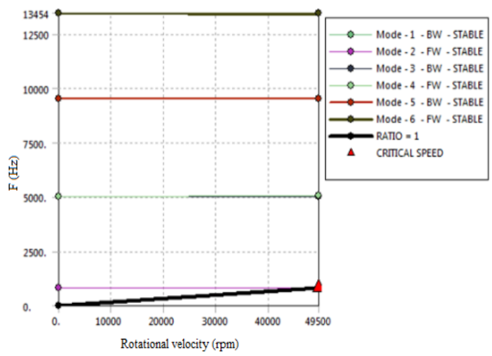
جدول ۲- فرکانس‌های پیشرو و پسرو شفت با اتصال ثابت

شماره مود	چرخش	وضعیت پایداری	دور صفر	سرعت ۱۲۰۰۰ دور بر دقیقه
۱	پسرو	پایدار	۷۲۷/۰۷	۸۲۶/۵۲
۲	پیشرو	پایدار	۷۲۷/۱۲	۸۲۷/۶۷
۳	پسرو	پایدار	۵۰۲۵/۴	۵۰۲۱/۷
۴	پیشرو	پایدار	۵۰۲۵/۶	۵۰۲۹/۳
۵	پسرو	پایدار	۹۵۳۳/۲	۵۰۲۹/۷
۶	پیشرو	پایدار	۱۳۴۵۴	۹۵۳۳/۳

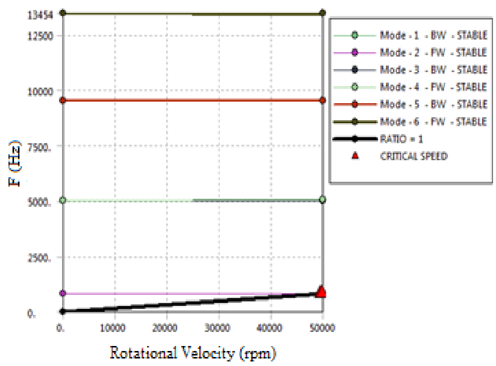
مطابق با شکل‌های ۷ و ۸، با افزایش دور اسپیندل به ۴۹۵۰۰ دور بر دقیقه، سرعت بحرانی اولیه‌ی ۴۹۴۸۴ دور بر دقیقه ایجاد می‌گردد. در دور ۵۰۰۰۰ دور بر دقیقه سرعت بحرانی ثانویه‌ی ۴۹۷۶۹ دور بر دقیقه ظاهر می‌شود.

۲-۲- اتصال الاستیک (مدل دوم)

مطابق با شکل ۹، در مدل دوم اتصال ابزار- ابزارگیر به‌صورت الاستیک (یک فنر خمشی و یک فنر پیچش-دمپر) است. در این مرحله، مشخصات هندسی و فیزیکی مطابق با مرجع [۲۰] برای مدل دوم درنظر گرفته‌شده که در جدول ۳ ارائه شده‌است. تحلیل مدل سه‌بعدی شفت با اتصال انعطاف‌پذیر در شکل ۹ مشاهده می‌گردد. شبیه‌سازی سه‌بعدی در نرم‌افزار انسیس با Solver APDL و با استفاده از دستور Combin 14 انجام شده‌است[۲۱].



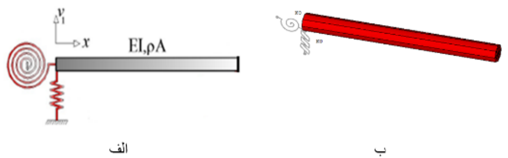
شکل ۷- سرعت بحرانی اولیه‌ی مدل اول با اتصال ثابت



شکل ۸- سرعت بحرانی ثانویه‌ی مدل اول با اتصال ثابت

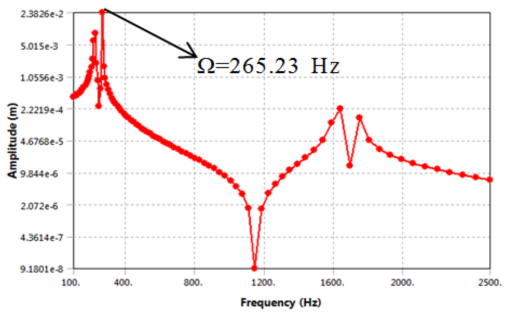
جدول ۳- فرکانس‌های پیشرو و پسرو شفت با اتصال ثابت

چگالی (kg/m^3)	مدول الاستیسیته (GPa)	طول آویز (m)	قطر (m)
۷۸۶۰	۲۰۷	۰/۲۰۸	۰/۰۲



شکل ۹- الف) مدل دوبعدی شفت با اتصال الاستیک، ب) مدل سه‌بعدی شفت با اتصال الاستیک

با استفاده از ماژول پاسخ هارمونیکی در نرم‌افزار انسیس، همانطور که در شکل ۱۰ مشاهده می‌گردد، تابع پاسخ فرکانسی نوک ابزار به‌دست می‌آید. با توجه به شکل، رزونانس در بازه‌ی مشخص ۱۰۰ تا ۲۵۰۰ هرتز ایجاد گردیده‌است.



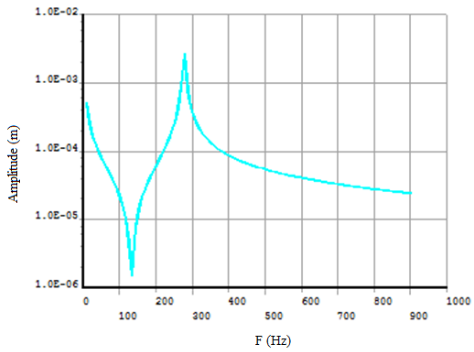
شکل ۱۰- پاسخ فرکانسی مدل دوم با فرکانس رزونانس در بازه‌ی ۱۰۰ تا ۲۵۰۰ هرتز

شش فرکانس‌های طبیعی در شفت با اتصال الاستیک در جدول ۴ مشاهده می‌گردد.

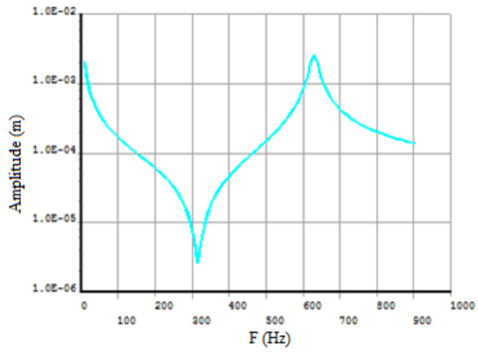
جدول ۴- شش فرکانس طبیعی اول نامیرا شفت با اتصال الاستیک

شماره مود	فرکانس طبیعی (هرتز)
۱	۲۲۲/۶۲
۲	۲۶۵/۲۳
۳	۱۶۲۲/۴
۴	۱۷۳۱/۹
۵	۳۴۷۷/۴
۶	۴۶۵۸/۹

نمودارهای پاسخ فرکانسی با و بدون اینرسی دورانی و اثر ژیروسکوپی در دور اسپیندل ۱۵۰۰۰ دو بر دقیقه به‌ترتیب در شکل‌های ۱۱ و ۱۲ مشاهده می‌گردد. همانطور که ملاحظه می‌شود، اثر ژیروسکوپی باعث کاهش فرکانس طبیعی سیستم می‌شود.



شکل ۱۱- پاسخ فرکانسی شفت با اتصال الاستیک در سرعت ۱۵۰۰۰ دور بر دقیقه با اثر ژیروسکوپی

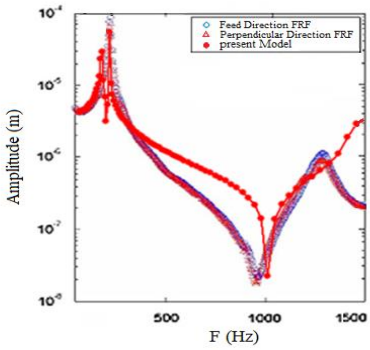


شکل ۱۲- پاسخ فرکانسی شفت با اتصال الاستیک در سرعت ۱۵۰۰۰ دور بر دقیقه بدون اثر ژیروسکوپی

برای صحت‌گذاری مدل اول از حل مقادیر ویژه در نرم‌افزار متلب استفاده شده و برای صحت‌گذاری مدل دوم از نتایج تست تجربی مودال به‌دست آمده در مرجع [۲۰] و مطابق با شکل ۱۳ استفاده شده‌است. نتایج صحه‌گذاری در شکل ۱۴ ارائه شده که نشان می‌دهد، تحلیل عددی برای فرکانس‌های طبیعی پایین از دقت مناسبی برخوردار است به‌گونه‌ای که فرکانس طبیعی اول به‌دست‌آمده از تست تجربی ۲۲۲ هرتز و از تحلیل عددی المان محدود ۲۲۲/۶۲ هرتز است که معادل ۰/۲۸ درصد اختلاف وجود دارد.

نتایج حاصل از تحلیل نمودار کمبل مدل‌های تیر، نشان می‌دهد که مدل اول در دور اسپیندل ۴۹۵۰۰ دور بر دقیقه، دارای سرعت بحرانی اولیه‌ی ۴۹۴۸۴ دور بر دقیقه است و در دور اسپیندل ۵۰۰۰۰ دور بر دقیقه دارای سرعت بحرانی ۴۹۷۶۹ دور بر دقیقه است. مدل دوم با انتهای آزاد در دور اسپیندل ۱۵۰۰۰ دور بر دقیقه دارای سرعت بحرانی اولیه‌ی ۱۳۳۵۷ دور در دقیقه و در دور اسپیندل ۱۶۰۰۰ دور بر دقیقه دارای سرعت بحرانی ثانویه‌ی ۱۵۹۴۲ دور بر دقیقه است. شفت مدل دوم با اتصال الاستیک و یک دیسک انتهایی در دور اسپیندل ۱۵۰۰۰ دور بر دقیقه دارای سرعت بحرانی اولیه‌ی ۱۰۰۴۸ دور بر دقیقه و در دور اسپیندل ۱۶۰۰۰ دور بر دقیقه دارای سرعت بحرانی ثانویه‌ی ۱۵۵۴۸ دور بر دقیقه است.

شکل ۱۳- تست تجربی مودال برای صحه‌گذاری نتایج مدل دوم[۲۰]



شکل ۱۴- مقایسه‌ی پاسخ فرکانسی شفت با اتصال الاستیک در روش تجربی [۲۰] و المان محدود (پژوهش حاضر)

۳- بررسی پایداری سیستم ابزار با اثر ژیروسکوپی

حالت کلی معادلات دیفرانسیل تأخیری خطی با تغییرات متعدد زمانی [۲۲] را می‌توان به‌صورت زیر تعریف کرد:

$$\begin{aligned}\dot{y}(t) &= A_0 y(t) + A(t) y(t) \\ &\quad - \textstyle\sum_{j=1}^{N} B(t) u\big(t - \tau_j(t)\big) \\ u(t) &= D y(t)\end{aligned} \qquad (۲۳)$$

که در آن $y(t) \in R^n$ و $u(t) \in R^m$ به‌ترتیب بیانگر حالت و ورودی سیستم است و A_0 یک ماتریس ثابت است. $A(t)$ و $B(t)$به‌ترتیب ماتریس‌های $n \times n$ و $m \times m$ با ضرایب متناوب هستند. همچنین $A(t) = A(t+\tau)$ و $B(t) = B(t+\tau)$، $j = 1,2,\dots,N$ و $\tau(t) = \tau\big(t+\tau\big) > 0$ صدق می‌کنند. D، τ و N_D به‌ترتیب بیانگر یک ماتریس ثابت $m \times n$، دوره تناوب و تعداد تأخیرات زمانی است. رابطه‌ی (۲۳) را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned}\dot{y}(t) &= A_0 y(t) + A(t) y(t) \\ &\quad - \sum_{j=1}^{N} C_j(t) u\big(t - \tau_j(t)\big)\end{aligned} \qquad (۲۴)$$

که در آن $C_j(t) = B_j(t) D$ است. فرض می‌شود که دوره تناوب τ به K عدد از فواصل زمانی گسسته به‌طوری که طول هر فاصله $\Delta t = {}^{\tau}/_{K}$ است، تقسیم می‌شود. برای i امین فاصله‌ی زمانی، نشانه $[t_i, t_{i+1}]$ را که $i \in Z^+$ است، معرفی می‌شود. در اینجا، t_i بیانگر i امین گره‌ی زمانی و برابر با $i\Delta t$ است. میانگین تأخیر برای فاصله‌ی گسسته‌سازی به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\tau_{i,j} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \tau_j(t) dt = \tau_{0,j} - \tau_{1,j} c_i \qquad (۲۵)$$

$$c_i = \frac{k}{2\pi} \int_{\frac{i2\pi}{k}}^{\frac{(i+1)2\pi}{k}} \sin(t)\, dt \qquad (۲۶)$$
$$(i = 0,1, \dots k-1)$$

که تعداد فواصل $m_{i,j}$ مرتبط با تأخیر $\tau_{i,j}$ را می‌توان از رابطه‌ی زیر به‌دست آورد:

$$m_{i,j} = int\left(\frac{\tau_{i,j} + \frac{\Delta t}{2}}{\Delta t}\right) \qquad (۲۷)$$

با جایگذاری رابطه‌ی (۲۵) در رابطه‌ی (۲۴)، معادله دیفرانسیل معمولی در دوره تناوب گسسته‌سازی $[t_i, t_{i+1}]$ با شرط اولیه‌ی $x(t_i) = x_i$، حل می‌شود و رابطه‌ی زیر استخراج می‌گردد:

$$\begin{aligned} y(t) e^{A_0 (t - t_i)} y_i + \int_{t_i}^{t} \Bigg\{ e^{A_0 (t-\xi)} \Bigg[A(\xi) y(\xi) \\ - \sum_{j=1}^{N} C_j(\xi) y(\xi - \tau_{i,j}) \Bigg] \Bigg\} d\xi = 0 \end{aligned} \qquad (۲۸)$$

با جایگذاری t_i و t_{i+1} در رابطه‌ی (۲۸)، می‌توان به‌طور برابر نوشت:

$$\begin{aligned} y(t_{i+1}) e^{A_0 \Delta t} y_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \Bigg\{ e^{A_0 (t_{i+1} - \xi)} \\ \Bigg[A(\xi) y(\xi) - \sum_{j=1}^{N} C_j(\xi) y(\xi - \tau_{i,j}) \Bigg] \Bigg\} d\xi \\ = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A(t) &= A_i + \frac{A_{i+1} - A_1}{\Delta t}(t - t_i) \\ C_j(t) &= C_{i,j} + \frac{C_{i+1} - C_{i,j}}{\Delta t}(t - t_i) \\ y(t) &= y_i + \frac{y_{i+1} - y_1}{\Delta t}(t - t_i) \\ y\big(t - \tau_{i,j}\big) &= \beta_{i,j} y_{i - m_{i,j}} + \alpha_i y_{i+j-m_{i,j}} \end{aligned} \qquad (۲۹)$$

در بازه‌ی $[t_i, t_{i+1}]$، توابع $A(t)$، $C_j(t)$، $y(t)$ و $y\big(t - \tau_{i,j}\big)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} &\beta_{i,j} = 1 - \alpha_{i,j} \,, A_i = A(t_i), C_{i,j} = C_j(t_i) \\ &y_i = y(t_i) \\ &\alpha_{i,j} = \frac{\left(m_{i,j} \Delta t + \frac{\Delta t}{2 - \tau_{i,j}} \right)}{\Delta t} \end{aligned} \qquad (۳۰)$$

با جایگذاری رابطه‌ی (۳۰) در رابطه‌ی (۲۹)، می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= (\phi_0 + F_i) y_i + p_i y_{i+1} \\ &- \sum \left(\beta_{i,j} R_{i,j} y_{i - m_{i,j}} + \alpha_{ij} R_{i,j} y_{i+j-m_{i,j}} \right) \end{aligned} \qquad (۳۱)$$

که در آن:

$$F_i = \left(\phi_1 - \frac{2}{\Delta t} \phi_2 + \frac{1}{\Delta t^2} \phi_3 \right) A_i \qquad (۳۲)$$

$$+\left(\frac{1}{\Delta t}\phi_2+\frac{1}{\Delta t^2}\phi_3\right)A_{i+1}$$

$$P_i=\left(\frac{1}{\Delta t}\phi_2-\frac{1}{\Delta t^2}\phi_3\right)A_i+\left(\frac{1}{\Delta t^2}\phi_3\right)A_{i+1}$$

$$R_{i,j}=\left(\phi_1-\frac{1}{\Delta t}\phi_2\right)C_{i,j}+\left(\frac{1}{\Delta t}\phi_2\right)C_{i+1,j}$$

که در آن ϕ_2, ϕ_1, ϕ_0 و ϕ_3 به‌صورت زیر بیان می‌شوند:

$$\begin{aligned}
\phi_0 &= \mathrm{e}^{A_0\Delta t}\\
\phi_1 &= \int_0^{\Delta t}\mathrm{e}^{A_0(\Delta t-s)}ds = A_0^{-1}(\phi_0-\mathrm{I})\\
\phi_2 &= \int_0^{\Delta t}s\mathrm{e}^{A_0(\Delta t-s)}ds\\
&= A_0^{-1}(\phi_0-\Delta t\mathrm{I})\\
\phi_3 &= \int_0^{\Delta t}s^2\mathrm{e}^{A_0(\Delta t-s)}ds\\
&= A_0^{-1}(2\phi_0-\Delta t^2\mathrm{I})
\end{aligned} \tag{۳۳}$$

در معادلات فوق I ماتریس یکه است، اگر $M=\max(m_{i,j})$ باشد آنگاه رابطه‌ی زیر حاصل می‌شود:

$$Z_i=\mathrm{col}(y_i, y_{i-1}\dots y_{i-M}) \tag{۳۴}$$

با ترکیب روابط (۹) و (۱۲)، مدل گسسته مطابق رابطه‌ی زیر حاصل می‌شود:

$$Z_{i+1}=D_iZ_i \tag{۳۵}$$

هر ماتریس D_i به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$D_i=\begin{bmatrix} D_{11} & 0 & & 0 & 0 & 0\\ \mathrm{I} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & \mathrm{I} & & 0 & 0 & 0\\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ 0 & 0 & & \mathrm{I} & 0 & 0\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \mathrm{I} & 0\end{bmatrix} \tag{۳۶}$$

که در آن $D_{11}=H_{i+1}(\phi_0+F_i)$ و $H_{i+1}=(I-P_i)^{-1}$. طبق روابط (۳۵) و (۳۶)، عبارات ریاضی زیر می‌توانند با استفاده از فواصل زمانی متوالی جواب‌های k در دوره‌ی تناوب τ به‌دست آیند.

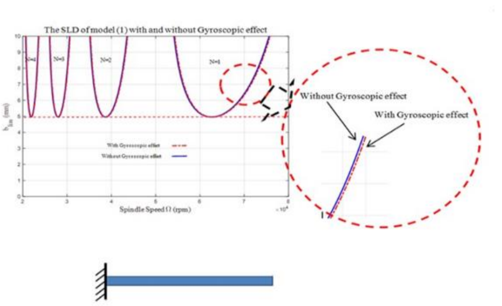
$$V_i=\phi V_0=D_{k-1}D_{k-2}\cdots D_1D_0V_0 \tag{۳۷}$$

که درآن ϕ ماتریس انتقال فلوکه است که اتصال میان V_k و V_0 را فراهم می‌کند.

طبق تئوری فلوکه، اگر قدر مطلق تمام مقادیر ویژه ماتریس انتقال کمتر از واحد باشد، سیستم پایدار است و در غیر این صورت ناپایدار است. در واقع تئوری فلوکه یک اصل برای فهم عملکرد و ویژگی‌های پایداری سیستم‌های متناوب و متغیر با زمان خطی بدون تحریک است. در اینجا باید اشاره شود که ماتریس V_i را می‌توان با ظاهر شدن موقعیت‌های تأخیری در معادلات حاکم در فرزکاری کاهش داد؛ بنابراین اندازه بردار تقریب در رابطه‌ی (۳۶) را می‌توان با حذف مقادیر تأخیری سرعت‌ها، به نحوی که اندازه بردار V_i به M+2 برای یک سیستم یک درجه آزادی و برای یک سیستم دو درجه آزادی $2M$+4 کاهش می‌یابد. روش‌های عددی و نیمه‌تحلیلی متعددی برای تعیین شرایط پایداری معادلات دیفرانسیل تأخیری پریودیک وجود دارد که با هدف ایجاد نمودارهای پایداری برای فرآیند فرزکاری ارائه می‌گردد. مانند روشی که سرعت‌های اسپیندل مختلف را می‌تواند با معادلات دیفرانسیل تأخیری با تأخیر زمانی به‌طور عمومی توصیف نمود.

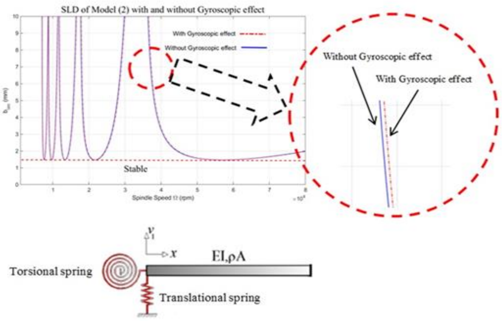
۴- بررسی پارامترهای مؤثر در پایداری سیستم

نمودار پایداری شفت با اتصال ثابت در شکل ۱۵ ارائه شده‌است. همانطور که ملاحظه می‌گردد، در دور اسپیندل ۱۲۰۰۰ دور در دقیقه تأثیر نیروی ژیروسکوپی کم است و تشابه خوبی بین منحنی‌ها وجود دارد. با افزایش دور اسپیندل می‌توان تأثیر بیشتری را مشاهده کرد.



شکل ۱۵- نمودار پایداری شفت با اتصال ثابت با و بدون اثر ژیروسکوپی در دور اسپیندل ۱۲۰۰۰ دور بر دقیقه

نمودار پایداری شفت با اتصال الاستیک در شکل ۱۶ ارائه شده‌است. نتایج نشان می‌دهد که اثر ژیروسکوپی بر شفت تأثیر کمی دارد، به‌طور مشابه با مدل اول (اتصال ثابت)، منحنی‌ها بسیار به هم نزدیک‌اند و رفتار مشابهی دارند.

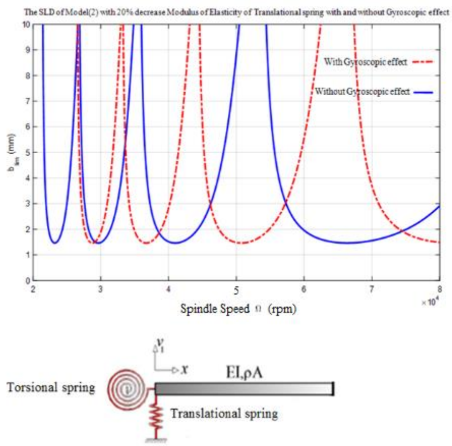


شکل ۱۶- نمودار پایداری شفت با اتصال الاستیک با و بدون اثر ژیروسکوپی در دور اسپیندل ۱۵۰۰۰ دور بر دقیقه

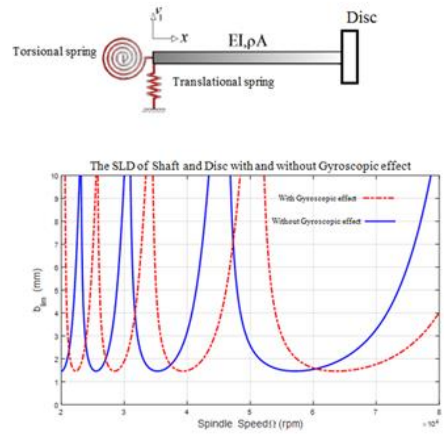
۴-۱- تأثیر مدول الاستیسیته

با کاهش مدول الاستیسیته‌ی فنر خمشی اتصال ابزار- ابزارگیر، اثر ژیروسکوپی در رفتار دینامیکی ابزار فرز بیشتر قابل مشاهده است. مطابق با شکل ۱۷، با کاهش مقدار ۲۰٪ از مدول الاستیسیته فنر خمشی، مشاهد می‌شود که اثر ژیروسکوپی افزایش یافته است.

در این مرحله، یک دیسک در انتهای شفت به‌صورت مدل ابزار اینسرتی درنظر گرفته می‌شود و مدل شفت با دیسک تحلیل می‌گردد. مطابق با نمودار شکل ۱۸، نتایج نشان می‌دهد که درنظر گرفتن اثر ژیروسکوپی پایداری قطعه را به سمت راست حرکت می‌دهد و این جابه‌جایی به‌تدریج با افزایش سرعت اسپیندل بیشتر می‌شود. نتایج به‌دست‌آمده برای صحه‌گذاری با نتایج مرجع [۲۳] مقایسه شده‌اند.



شکل ۱۷- اثر کاهش ۲۰٪ مدول الاستیسیته فنر خمشی تیر با و بدون اثر ژیروسکوپی



شکل ۱۸- مقایسه پایداری سیستم شفت - دیسک با و بدون اثر ژیروسکوپی در دور اسپیندل ۱۶۰۰۰ دور بر دقیقه

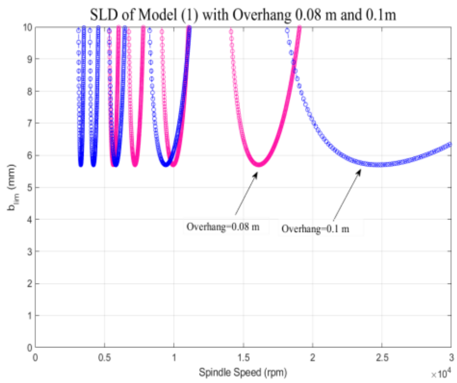
۴-۲- تأثیر طول آویز

ارزیابی نمودار پایداری و طول آویز شفت‌ها با اتصال ثابت و اتصال انعطاف‌پذیر با اثر ژیروسکوپی در ادامه ارائه می‌گردد. مدل با اتصال ثابت طول آویز ۰/۱ متر است که قبلاً پایداری آن با رسم نمودار پایداری بررسی شده‌است. در ابتدا طول آویز را ۲۰٪ کمتر از طول اصلی درنظر گرفته می‌شود که مطابق با شکل ۱۹ نتایج نشان می‌دهد که پایداری با کاهش طول آویز افزایش یافته است. در ادامه، طول آویز به مقدار ۲۰٪ بیشتر از

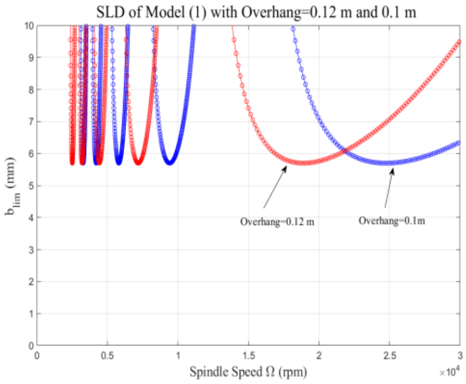
طول اصلی درنظر گرفته می‌شود که نتایج در شکل ۲۰ ارائه شده‌است.

پس از تحلیل هارمونیکی، با توجه به اینکه هر دو مدل دارای فرکانس تشدید در بازه‌ی ۱۰۰ تا ۲۵۰۰ هرتز هستند، نتایج نشان می‌دهد که با تغییر طول آویز فرکانس تشدید حذف می‌گردد. در مورد مدل با اتصال الاستیک (مدل دوم) می‌توان نتیجه گرفت که با کاهش ۱۰ درصد طول آویز، رزونانس در بازه‌ی ۱۰۰ تا ۲۵۰۰ هرتز حذف می‌گردد.

با بررسی نمودارهای کمبل، در مدل اول با کاهش طول آویز به مقادیر ۱۰ و ۲۰ درصد در دور ۴۹۵۰۰ دور بر دقیقه، سرعت بحرانی حذف می‌گردد و با افزایش طول آویز به مقادیر ۱۰ و ۲۰ درصد دو مقدار سرعت بحرانی ایجاد می‌شود. در خصوص مدل دوم با کاهش طول آویز به مقدار ۲۰ درصد سرعت بحرانی ایجاد نمی‌گردد، لذا با کاهش طول آویز به مقدار ۱۰ درصد حتی در دور ۱۵۰۰۰ دور بر دقیقه، سرعت بحرانی اولیه ایجاد می‌گردد.



شکل ۱۹- مقایسه پایداری شفت با اتصال ثابت با طول‌های آویز L=0.1 m و L=0.08 m



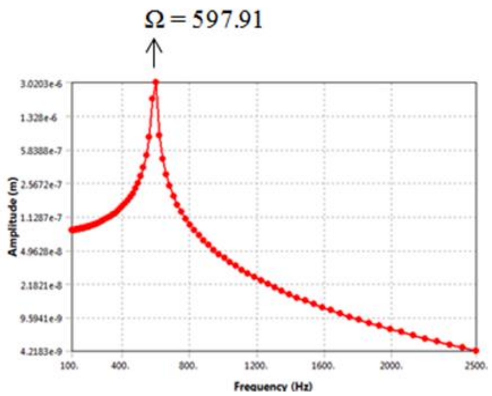
شکل ۲۰- مقایسه پایداری شفت با اتصال ثابت با طول‌های آویز L=0.1 m و L=0.12 m

۴-۳- روش اتصال ابزار- ابزارگیر

در این بخش، به بررسی روش اتصال ابزار- ابزارگیر و تأثیر آن بر رفتار مدل اول با اتصال ثابت پرداخته می‌شود. ناحیه‌ی رزونانس در بازه‌ی ۱۰۰ تا ۲۵۰۰ وجود دارد، اما مطابق با جدول ۵ و شکل ۲۱، پس از تغییر روش اتصال، رزونانس‌ها حذف می‌گردند.

جدول ۵- شش فرکانس طبیعی اول نامیرا شفت با مدل اول و پس از تغییر به مدل دوم

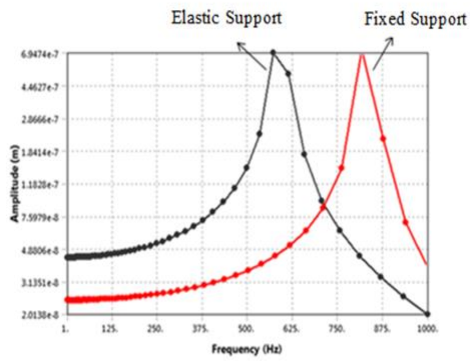
شماره مود	فرکانس طبیعی با اتصال ثابت (هرتز)	فرکانس طبیعی با اتصال الاستیک (هرتز)
۱	۸۲۷	۵۹۰/۳۳
۲	۸۲۷/۰۱	۶۷۳/۴۳
۳	۵۰۲۴/۸	۴۱۳۰/۲
۴	۵۰۲۴/۹	۴۳۵۳/۶
۵	۹۵۳۳/۱	۸۷۶۴/۱
۶	۱۳۴۵۳	۱۱۷۹۲



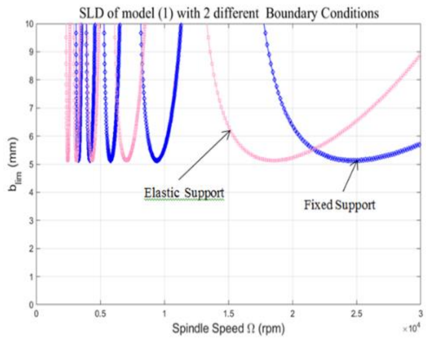
شکل ۲۱- پاسخ فرکانسی در بازه‌ی ۱۰۰ تا ۲۵۰۰ هرتز مدل اول با تغییر اتصال ثابت به اتصال الاستیک

مطابق با شکل ۲۲، در مدل اول با توجه به نمودار پاسخ فرکانسی، در اتصال الاستیک فرکانس غالب در فرکانس پایین‌تر ایجاد می‌گردد؛ همچنین با توجه به شکل ۲۳ در اتصال الاستیک عمق برش محوری با بالا رفتن دور به شدت افزایش می‌یابد.

در ادامه، تغییر روش اتصال مدل دوم از الاستیک به ثابت مورد بررسی قرار می‌گیرد. مطابق با نتایج ارائه‌شده در جدول ۶ و شکل ۲۴، فرکانس رزونانس حذف شده و در اتصال الاستیک، فرکانس غالب در مقادیر پایین‌تر ایجاد می‌گردد.



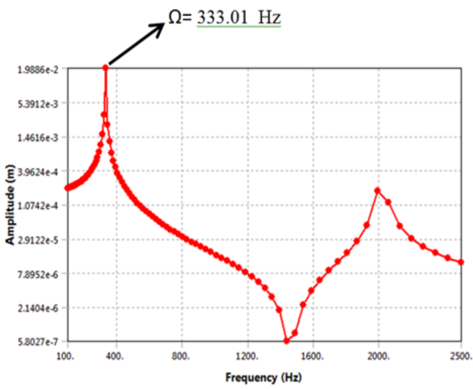
شکل ۲۲- مقایسه پاسخ فرکانسی مدل اول با دو اتصال ثابت و الاستیک



شکل ۲۳- مقایسه منحنی‌های پایداری مدل اول با دو اتصال ثابت و الاستیک

جدول ۶- شش فرکانس طبیعی اول نامیرا شفت با مدل دوم و پس از تغییر به مدل اول

شماره مود	فرکانس طبیعی با اتصال الاستیک (هرتز)	فرکانس طبیعی با اتصال ثابت (هرتز)
۱	۲۲۲/۶۲	۳۳۱/۵۲
۲	۲۶۵/۶۹	۳۳۱/۵۶
۳	۱۶۲۲/۴	۲۰۱۶/۱
۴	۱۷۳۱/۹	۲۰۱۶/۴
۵	۳۴۷۷/۴	۳۸۲۵/۳
۶	۴۶۵۸/۹	۵۴۰۴/۳



شکل ۲۴- پاسخ فرکانسی در بازه‌ی ۱۰۰ تا ۲۵۰۰ هرتز مدل دوم با تغییر اتصال الاستیک به اتصال ثابت

۵- تحلیل حساسیت فرکانس‌های طبیعی نسبت به طول آویز

در این بخش، تحلیل حساسیت فرکانس‌های طبیعی سیستم ابزار نسبت به طول آویز مورد مطالعه قرار گرفته‌است. پارامترهای اصلی مربوط به دو مدل شفت به‌عنوان مقادیر مبنا درنظر گرفته شده و حساسیت مقادیر فرکانس‌های طبیعی در هر دو حالت بر حسب کاهش و یا افزایش طول آویز شفت‌ها به روش عددی مورد مطالعه قرار گرفته و نتایج در جداول‌های ۷ و ۸ ارائه شده‌است.

همانطور که از جدول‌های ۷ و ۸ مشاهده می‌شود، میزان حساسیت فرکانس‌های طبیعی اول تا سوم نسبت به افزایش طول آویز شفت‌ها به مراتب کمتر از کاهش طول آویز شفت‌ها است. همچنین مشاهده می‌گردد که درصد تغییرات حساسیت فرکانس‌های سیستم برای هر فرکانس‌های طبیعی اول، دوم و سوم بر حسب درصد تغییر طول آویز شفت‌ها تقریباً یکسان است.

۶- بحث و نتیجه‌گیری

جهت شبیه‌سازی رفتار دینامیکی ابزار، ابتدا به‌صورت یک تیر الاستیک درنظر گرفته شده و با استفاده از تئوری تیر اویلر-برنولی و تیر رایلی با اثر ژیروسکوپی و اینرسی دورانی مدل شده‌است. سپس از اصل همیلتون برای به‌دست‌آوردن مدل ریاضی و استخراج معادلات حاکم استفاده شده‌است. با توجه به بررسی‌های انجام شده، با تشخیص مناسب‌ترین روش حل عددی برای محاسبه‌ی فرکانس‌های طبیعی و شکل مودها سیستم پیوسته و دوار، روش المان محدود انتخاب می‌گردد. از نرم‌افزار انسیس برای استخراج فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای مدل‌های اول و دوم استفاده شده‌است.

جدول ۷- تحلیل حساسیت سه فرکانس طبیعی اول نامیرا شفت با مدل اول نسبت به تغییر طول آویز

طول آویز (متر)	درصد تغییر طول آویز	فرکانس طبیعی اول (هرتز)	درصد کاهش فرکانس طبیعی اول	فرکانس طبیعی دوم (هرتز)	درصد کاهش فرکانس طبیعی دوم	فرکانس طبیعی سوم (هرتز)	درصد کاهش فرکانس طبیعی سوم
۰/۰۶	-٪۴۰	۲۲۷۸/۹	۲۶/٪.۲۹	۲۲۷۹	۳۶/٪.۲۸	۱۳۱۸۶	۳۸/٪.۱
۰/۰۷	-٪۳۰	۱۶۷۷/۸	۴۹/٪.۲۳	۱۶۸۰/۲	۴۹/٪.۲۲	۹۹۱۰/۸	۵۰/٪.۷
۰/۰۸	-٪۲۰	۱۲۸۹/۲	۶۴/٪.۱۵	۱۲۸۹/۲	۶۵/٪.۱۴	۷۷۰۵/۹	۶۵/٪.۲
۰/۰۹	-٪۱۰	۱۰۲۰	۸۱/٪.۰۷	۱۰۲۰/۱	۸۱/٪.۰۷	۶۱۵۵/۳	۸۱/٪.۶۳
۰/۱	٪۰	۸۲۷	٪۰	۸۲۷/۰۱	٪۰	۵۰۲۴/۸	٪۰
۰/۱۱	٪۱۰	۶۸۴/۰۵	-۱۲۰/٪.۰۹	۶۸۴/۰۶	-۱۲۰/٪.۸۹	۴۱۷۷/۹	-۱۲۰/٪.۲۷
۰/۱۲	٪۲۰	۵۷۵/۱۱	-۱۴۳/٪.۸	۵۷۵/۱۲	-۱۴۳/٪.۷۹	۳۵۲۶/۶	-۱۴۲/٪.۴۸
۰/۱۳	٪۳۰	۴۹۰/۱۹	-۱۶۸/٪.۷	۴۹۵/۲۵	-۱۶۸/٪.۷	۳۰۱۵/۳	-۱۶۶/٪.۴
۰/۱۴	٪۴۰	۴۲۲/۸	-۱۹۵/٪.۶	۴۲۲/۸۵	-۱۹۵/٪.۶	۲۶۰۷/۳	-۱۹۲/٪.۷

جدول ۸- تحلیل حساسیت سه فرکانس طبیعی اول نامیرا شفت با مدل دوم نسبت به تغییر طول آویز

طول آویز (متر)	درصد تغییر طول آویز	فرکانس طبیعی اول (هرتز)	درصد کاهش فرکانس طبیعی اول	فرکانس طبیعی دوم (هرتز)	درصد کاهش فرکانس طبیعی دوم	فرکانس طبیعی سوم (هرتز)	درصد کاهش فرکانس طبیعی سوم
۰/۱۲۵	-٪۴۰	۵۴۱/۴۷	۳۸/٪.۹۵	۶۰۱/۵۲	۴۴/٪.۱۶	۴۲۵۲/۵	۳۸/٪.۱۵
۰/۱۴۶	-٪۳۰	۴۴۲/۵۷	۵۰/٪.۲	۴۶۳/۹۱	۵۷/٪.۲۷	۳۲۵۴/۸	۵۰/٪.۴۹
۰/۱۶۶	-٪۲۰	۳۵۲/۰۷	۶۳/٪.۱۲	۳۶۸/۰۱	۷۲/٪.۲۶	۲۵۱۱/۸	۶۴/٪.۶
۰/۱۸۷	-٪۱۰	۲۳۶/۵۸	۹۳/٪.۹	۲۵۱/۸۹	۱۰۵/٪.۸۹	۱۹۲۱/۵	۸۴/٪.۴۳
۰/۲۰۸	٪۰	۲۲۲/۶۲	٪۰	۲۴۵/۶۹	٪۰	۱۶۲۲/۴	٪۰
۰/۲۲۹	٪۱۰	۱۹۴/۷۹	-۱۱۴/٪.۱	۲۲۲/۰۱	-۱۱۹/٪.۶۷	۱۳۷۰/۶	-۱۱۸/٪.۳۷
۰/۲۴۷	٪۲۰	۱۷۰/۷۶	-۱۳۰/٪.۱۵	۱۹۳/۵۴	-۱۳۷/٪.۲۷	۱۱۹۰/۵	-۱۳۸/٪.۲۷
۰/۲۷۰	٪۳۰	۱۴۹/۴۸	-۱۴۸/٪.۶۸	۱۵۴/۷۹	-۱۷۱/٪.۶۴	۱۰۱۲/۳	-۱۶۰/٪.۲۶
۰/۲۹۱	٪۴۰	۱۳۰/۹۵	-٪۱۷۰	۱۳۵/۳۸	-۱۹۶/٪.۲۵	۸۸۰/۴۹	-۱۸۴/٪.۲۶

مدل‌ها بر اساس روش اتصال (ثابت و الاستیک)، هندسه ابزار، جنس ابزار و شرایط انتهایی ابزار (اینسرتی‌ها) دیسک تعریف می‌گردند. با توجه به اینکه آثار ژیروسکوپی در دورهای بالای اسپیندل ظاهر می‌گردد، لذا سعی شده‌است که نتایج در همین دورهای اسپیندل بررسی گردد.

در مدل اول با افزایش ۱۰ درصد طول آویز سرعت بحرانی اولیه و ثانویه ایجاد می‌شود و با کاهش ۱۰ درصد طول آویز سرعت بحرانی ایجاد نمی‌گردد. در مدل با اتصال الاستیک و شرایط انتهایی آزاد، آثار ژیروسکوپی بسیار کم مشاهده می‌گردد. با افزودن یک دیسک در انتهای شفت، شرایط برای تشخیص آثار ژیروسکوپی در دور ۱۵۰۰۰ دور بر دقیقه اسپیندل و ۱۶۰۰۰ دور بر دقیقه، میسر می‌گردد. با بررسی‌های دقیق‌تر ملاحظه می‌شود که با کاهش مدول الاستیسیته به مقدار ۲۰ درصد نیز آثار ژیروسکوپی قوی‌تر می‌شود. مدل با شرایط انتهایی بدون دیسک در دور ۱۵۰۰۰ دور بر دقیقه اسپیندل، سرعت بحرانی اولیه‌ی ۱۳۳۵۷ دور بر دقیقه دارد. دومین سرعت بحرانی ۱۵۹۴۲ دور بر دقیقه نیز با افزایش دور اسپیندل به ۱۶۰۰۰ دور بر دقیقه ظاهر می‌گردد. مدل با دیسک در انتهای شفت دارای سرعت بحرانی اولیه ۱۰۰۴۸ دور بر دقیقه در دور اسپیندل ۱۵۰۰۰ دور بر دقیقه است و با افزایش دور به ۱۶۰۰۰ دور بر دقیقه به سرعت بحرانی ثانویه‌ی ۱۵۵۴۸ دور بر دقیقه می‌رسد. با افزایش ۱۰ درصد طول آویز، دو سرعت بحرانی در دو مقدار دور اسپیندل ایجاد می‌گردد و با کاهش طول آویز به مقدار ۱۰ درصد، یک سرعت بحرانی در دور کمتر و دو سرعت بحرانی در دور بیشتر ظاهر می‌گردد. قابل توجه است که با کاهش ۲۰ درصد طول آویز سرعت بحرانی در محدوده‌ی فرکانسی ۱۰۰ تا ۲۵۰۰ دور بر دقیقه ایجاد نمی‌گردد.

در این پژوهش، اثر ژیروسکوپی در مدل با اتصال ثابت در دورهای بالا پدیدار شده و در پایداری سیستم مؤثر است. مدل با اتصال الاستیک در دور ۱۵۰۰۰ دور بر دقیقه با اثر ژیروسکوپی بررسی شده‌است و با اضافه‌نمودن دیسک به انتهای شفت اثر ژیروسکوپی قوی‌تر می‌شود؛ همچنین، با کاهش مدول الاستیسیته، اثر ژیروسکوپی افزایش می‌یابد. با تغییر شرایط اتصال دو مدل (ثابت به الاستیک و بالعکس) رزونانس‌ها در محدوده فرکانسی ۱۰۰ تا ۲۵۰۰ دور بر دقیقه حذف گردیدند. لازم به ذکر است که اتصال الاستیک باعث می‌شود سرعت‌های بحرانی در دورهای پایین‌تر اتفاق بیافتد. علاوه بر این موارد، درصد تغییر حساسیت فرکانس‌های سیستم برای هر سه فرکانس طبیعی اول بر حسب درصد تغییر طول آویز تقریباً یکسان است.

۷- مراجع

[1]. Altintas Y. (2001). Analytical prediction of three dimensional chatter stability in milling. JSME Int j C-Mech Syst, 44(3), 717-723.

[2]. Budak E, Altintas Y. (1998). Analytical prediction of chatter stability in milling-part 2: Application of the general formulation to common milling system. J Dyn Syst-T ASME, 120(1), 31-36.

[3]. Tang WX, Song QH. Qu YS, Sun SS. (2009). Prediction of chatter stability in hight-speed Finishing end milling considering multimode dynamics. J Mater Process Technol, (5), 2586-2591.

[4]. Liu B, Zhu L, Dun Y, Liu C. (2017). Investigation on chatter stability of thin-walled parts In milling based on process damping with relative transfer functions. Int J Adv Manuf Technol, 89(9): 2701-2711.

[5]. Delio T, Tlusty J, Smith S. (1992). Use of audio signal for chatter detection and control. ASME J Eng Ind, 114(2): 146-57.

[6]. Altinas Y, Chan PK. (1992). In-process detection and suppression of chatter in milling. Int J Mach Tool Manuf, 32(3): 329-347.

[7]. D. W. Wu. (1989). A new approach of formulation the transfer function of dynamic cutting Processes. J Eng Ind (Trans ASME), 111(1): 37-47.

[8]. Cllagaddi UB. (1994). Modelling machining dynamics including damping in the tool-Workpiece interface. J Eng Ind, 116 (4): 435-9.

[9]. Feng, Jia, Min Wan, Ting-Qi Gao, and Wei-Hong Zhang. (2018). Mechanism of process damping in milling of thin-walled workpiece. Int. J. Mach. Tools Manuf., 134: 1-19.

[10]. Povlovic,R., Kozic, p., Mitic, S. and Pavlovic, I., Stochastic. (2009). Stability of rotating shaft. Arch. Appl.Mech., 79: 1163-1171.

[11]. Jang, G. H. and Lee, S. H. (2002). Free vibration analysis of a spinning flexible disk spindle system supported by ball bearing and flexible shaft using the finite element method and substructure synthsis. J. Sound Vib., 252: 59-78.

[12]. Mokhtari, Ali, Abbas Mazidi, and Mohammad M. Jalili. (2019). Investigation of rotary inertial dynamic effects on chatter boundary in milling

[18]. Feng W., Zhang K., Liu B. (2020). Dynamic modeling and vibration response analysis of a synchronous motorized spindle with inclined eccentricity. J. Vib. Control(JVC), 28: 2950–2964.

[19]. Tungsten Carbide EndMill series, 19. Union Tool co.

[20]. Salahshoor, M., and Hamid Ahmadian. (2009). Continuous model for analytical prediction of chatter in milling. Int. J. Mach. Tools Manuf., 49(14): 1136-1143.

[21]. Fluent, A. N. S. Y. S. (2011). Ansys fluent theory guide, Ansys Inc., USA 15317: 724-746.

[22]. Jin, Gang, Houjun Qi, Zhanjie Li, Jianxin Han, and Hua Li. (2017). A Method for Stability Analysis of Periodic Delay Differential Equations with Multiple Time-Periodic Delays. Mathematical Problems in Engineering, 2017(1): 9490142.

[23]. Tajalli S.A., Movahhedy M.R., Akbari J. (2014). Chatter inatability analysis of spinning micro-end mill with process damping effect via semi-siscretization approach. Acta Mech, 225(3): 715-734.

process using three-dimensional Timoshenko tool model. Proc. Inst. Mech. Eng. K: Journal of Multi-body Dynamics, 233(1): 93-110.

[13]. Mokhtari, Ali, Mohammad Mahdi Jalili, Abbas Mazidi, and Mohammad Mahdi Abootorabi. (2019). Size dependent vibration analysis of micro-milling operations with process damping and structural nonlinearities. European Journal of Mechanics-A/Solids, 76: 57-69.

[14]. Beri, Bence, Gergely Meszaros, and Gabor Stepan, (2021). Machining of slender workpieces subjected to time-periodic axial force: stability and chatter suppression. J. Sound Vib., 504: 116114.

[15]. Ma, Jingmin, Jianfeng Xu, and Yongsheng Ren. (2020). Analysis on free vibration and stability of rotating composite milling bar with large aspect ratio. Applied Sciences, 10(10): 3557.

[16]. Yao Q., Luo M., Zhang, D. (2020). Milling dynamic model based on rotatory Euler-Bernoulli beam model under distributed load. Appl. Math. Model. 83: 266–283.

[17]. Liu X , Liu D, Du C , Li Y, Wang C , Fu Z. (2024). Dynamic Modeling for Chatter Analysis in Micro-Milling by Integrating Effects of Centrifugal Force, Gyroscopic Moment and Tool Runout., Micromachines, 15: 244.