مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها/ سال ۱۴۰۳/ دوره ۱۴/ شماره ۵/ صفحه ۱۵۵-۱۶۵

نشریه مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها

DOI: **10.22044/jsfm.2025.14658.3870**

تحلیل ارتعاشات آزاد ورق تاخورده‌ی آگزتیک با استفاده از روش لوی-تفاضل مربعات

نیما مهندسی [۱]، مصطفی طالبی توتی [۲،*]، محمد فدایی [۲]

[۱] دانشجوی دکتری مکانیک- طراحی کاربردی، دانشکده مکانیک، دانشگاه صنعتی قم، قم ، ایران

[۲] دانشیار- طراحی کاربردی، دانشکده مکانیک، دانشگاه صنعتی قم، قم ، ایران

مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۰۳/۲۲؛ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۳/۰۶/۲۸؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۰۸/۰۱

چکیده

در این پژوهش، ارتعاشات ورق‌های تاخورده متشکل از سلول‌های آگزتیکی بررسی می‌شود. ابتدا با استفاده از پارامترهای هندسی و جنس سلول، ثابت‌های الاستیک و چگالی ورق آگزتیک ارائه می‌شود. ورق تاخورده به صورت دو ورق مجزا در نظر گرفته می‌شود. سپس با توجه به نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول و با استفاده از اصل همیلتون، معادلات حرکت حاکم بر هر ورق و شرایط مرزی در لبه‌ها بدست می‌آید. در ادامه با استفاده از روش ترکیبی لوی-تفاضل مربعات، ابتدا معادلات با مشتقات جزئی به شکل معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل و سپس گسسته‌سازی می‌شوند. با لحاظ کردن شرایط پیوستگی در قسمت تاخورده ورق، معادلات حرکت، شرایط مرزی و معادلات پیوستگی بر هم تنیده و سپس به روش مقادیر ویژه حل شده و پاسخ‌های فرکانسی ارتعاش آزاد ورق تاخورده‌ی آگزتیکی حاصل می‌گردد. برای صحه‌سنجی نتایج بدست آمده از حل تحلیلی لوی-تفاضل مربعات، ورق آگزتیکی در نرم افزار اجزای محدود آباکوس مدل و تحلیل می‌گردد. نزدیکی نتایج حاصل از دو روش مذکور، نشان از صحت مدلسازی ریاضی ورق تاخورده و روش تحلیلی دارد. در انتها اثر پارامترهای هندسی ورق بر فرکانس طبیعی ورق تاخورده مورد مطالعه قرار می‌گیرد. نتایج نشان داد که با تغییر زاویه تاخوردگی از ۱۸۰ درجه به کمتر یعنی با تبدیل ورق تخت به ورق تاخورده، ابتدا فرکانس طبیعی افزایش و سپس تقریبا ثابت می‌ماند.

کلمات کلیدی: ورق تاخورده؛ آگزتیک؛ ارتعاشات آزاد؛ روش تفاضل مربعات؛ المان محدود.

Free vibration analysis of a folded auxetic plate using the Levy-differential quadrature method

Nima Mohandesi[1], Mostafa Talebitooti[2*], Mohammad Fadaee[2]

[1]Ph.D. Student, Mechanical Engineering, Qom University of technology, Qom, Iran

[2]Assoc. Prof., Mechanical Engineering, Qom University of technology, Qom, Iran

Abstract

In this study, the vibrations of a folded plate made of auxetic cells were examined. Initially, the elastic constants and density of the auxetic plate were determined based on the geometrical and material parameters of unit cell. The folded plate was considered as two jointed rectangular plates. Utilizing the first-order shear deformation theory and applying Hamilton's principle, the equations of motion governing each plate and the boundary conditions at the plate's edges were derived. Next, employing the combined Levy-differential quadrature method, the transformed equations of motion from the partial type to ordinary one has been solved. Assembling the equations of motion with boundary and continuity relations leads to an eigenvalue problem that its solution can present the frequency response function of folded plate. To validate the results obtained from the Levy-differential quadrature solution, the auxetic plate was simulated by a finite element analysis software (ABAQUS), and the comparison results demonstrated the accuracy of presented analytical method. Finally, the effects of plate's geometrical parameters on the natural frequencies of the folded plate were investigated. The results showed that by changing the folding angle from 180 degrees to less, or in other words, by converting the flat plate to a folded plate, the natural frequency first increases and then remains almost constant.

Keywords: Folded Plate; Auxetic; Free Vibration; Differential Quadrature Method; Finite Element Method.

* نویسنده مسئول؛ تلفن: ۰۲۵-۳۶۱۶۹۰۰۰؛ فکس: ۰۲۵-۳۶۱۶۹۳۵۹

آدرس پست الکترونیک: talebi@qut.ac.ir

۱- مقدمه

در سال‌های اخیر استفاده از مواد آگزتیک۱ به دلیل نسبت استحکام به وزن و جذب انرژی بالا مورد توجه قرار گرفته‌است. آگزتیک به موادی اطلاق می‌شود که در صورت کشیده‌شدن، هم به صورت طولی و هم به صورت جانبی افزایش طول پیدا می‌کند و برعکس. برای اولین بار رفتار آگزتیکی در مواد تک-کریستالی گزارش شد [۱]. برای مواد همسانگرد سه بعدی ضریب پواسون مواد بین محدوده‌ی ۱- تا ۰/۵ و در حالت دوبعدی در محدوده‌ی ۱- تا ۱ گزارش شده است [۲]. در سال ۱۹۸۷ لیکس[2] فوم‌هایی را با ضریب پواسون منفی توسعه داد که در طبیعت وجود دارد و یا می‌توان ساخت [۳]. مطالعات نشان می‌دهند که مواد آگزتیکی مقاومت بهتری در مقابل شکست دارند [۴]. سازه‌های آگزتیکی باتوجه به استحکام به وزن بالا، می‌توانند جایگزین سازه‌های مرسوم در صنایع مختلف همانند صنایع هوایی، نظامی و عمرانی شود. یکی از کاربردهای سازه‌های آگزتیکی جذب انرژی بالای این سازه‌ها است که به دلیل این ویژگی مهم می‌توانند در مقابل ضربه‌های قوی همانند انفجار از خود مقاومت نشان دهند [۵]؛ همچنین می‌توانند در خودروسازی برای ساخت جعبه تصادف ایمن به جهت افزایش ایمنی خودروها استفاده شوند [۶]. برای مواد آگزتیکی توپولوژی‌های مختلفی در نظر گرفته می‌شود که یکی از پرکاربردترین آن‌ها، آگزتیک‌های زاویه منفی[3] می‌باشد که سلول‌های آگزتیک لانه زنبوری، پاپیونی و ستاره‌ای از این نوع می‌باشند. آگزتیک‌های زاویه منفی، برای اولین بار توسط گیبسون[4] و اشبی[5] معرفی شدند [۷، ۸ و۹]. براساس رویکرد المان محدود، سلول‌های واحد آگزتیک لانه‌زنبوری و پاپیونی مورد بررسی قرار گرفت و با استفاده از حل تحلیلی، ضریب پواسون برای انواع مختلفی از این سازه‌ها محاسبه گردید [۱۰].

در مطالعه دیگر، استنت آگزتیکی به صورت عددی و تحلیلی بررسی و بهینه‌سازی شد [۱۱]. ویژگی‌های مکانیکی یک نوع آگزتیک جدید در یک پژوهش تحلیلی و عددی تحت بارگذاری عرضی بدست آمد [۱۲]. در پژوهشی دیگر، یک نوع آگزتیک جدید شبیه آسیاب بادی با میزان جذب انرژی بالا پیشنهاد شد [۱۳]. با توجه به اهمیت سازه‌های آگزتیکی و کاربردی شدن این سازه‌ها در صنایع مختلف، مطالعه‌ی آنها از جنبه‌های مختلف مهم است. بر این اساس مطالعه‌ای در مورد ارتعاشات غیرخطی کامپوزیت‌های تقویت شده با نانوکربن با ضریب پواسون منفی تحت محیط گرمایی با استفاده از نظریه تغییر شکل برشی مرتبه سوم گزارش شد [۱۴]. در تحقیقی دیگر، یک سازه جدار نازک پر شده با آگزتیک دو پیکانی[6] پیشنهاد شد و از منظر جذب انرژی مورد بررسی قرار گرفت [۱۵]. براساس نظریه ورق میندلین[7] و با استفاده از روش حل المان محدود یک ورق ساندویچی با هسته‌ی آگزتیک لانه-زنبوری بر روی بستر الاستیک و تحت بار نوسانی مورد تحلیل دینامیکی قرار گرفت [۱۶]؛ همچنین، ارتعاشات آزاد ورق مستطیلی آگزتیک ستاره‌ای به روش عددی ریلی- ریتز تحلیل گشت [۱۷]. تأثیر هسته‌های مختلف آگزتیک بر فرکانس‌های طبیعی و رفتار ارتعاش اجباری تیر ساندویچی بر اساس نظریه تغییر شکل برشی مرتبه سوم بررسی گردید [۱۸]. کمانش حرارتی وابسته به دما و رفتار ارتعاش آزاد نانوصفحات ساندویچی هوشمند با هسته آگزتیک و رویه‌های مغناطیسی- الکترو الاستیک تحلیل شد [۱۹]. ارتعاشات آزاد ورق ساندویچی با هسته آگزتیک به روش المان محدود توسط جیانگ و همکاران[8] بررسی شد و فرکانس‌های طبیعی بدست آمد [۲۰]. ورق‌های تاخورده می‌توانند کاربردهای وسیعی در صنایع هوافضا همانند ایرفویل بال‌های تاخورده، بدنه‌ی هواپیماهای رادار گریز و صفحات خورشیدی فضاپیماها داشته باشند. براساس نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول، ارتعاش ورق تاخورده از مواد درجه‌بندی شده‌ی تابعی بررسی شد [۲۱]. در مطالعه‌ای دیگر، ارتعاش یک ورق تاخورده از جنس کامپوزیت درجه‌بندی تابعی تقویت شده با گرافن به روش حل عددی تفاضل مربعی مورد بررسی قرار گرفت [۲۲]؛ همچنین در پژوهشی دیگر رفتار دینامیکی ورق‌های تخت و تاشده در یک محیط گرمایی با استفاده از نظریه‌ی تغییر شکل برشی غیر چند جمله‌ای بررسی شد [۲۳]. از نظریه تغییر شکل برشی مرتبه بالا ورق، برای تحلیل دینامیک گذرا صفحات کامپوزیت

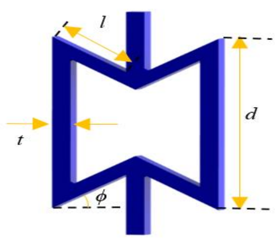
[1] Auxetic
[2] Lakes
[3] Re-entarnt
[4] Gibson
[5] Ashby
[6] Arrow
[7] Mindlin
[8] Jiang

تاخورده تحت بارگذاری مختلف استفاده شد [۲۴]. ارتعاش آزاد ورق تاخورده با سه قسمت مسطح که در آن یک قسمت در دو لبه عمود بر یکدیگر به دو قسمت دیگر متصل می‌شود، توسط ژانگ و لی[۱] مورد مطالعه قرار گرفت [۲۵].

با توجه به مروری بر ادبیات پژوهش و کاربرد سازه‌های آگزتیکی در صنایع مختلف، تحلیل ارتعاشاتی صفحات متشکل از سلول‌های آگزتیکی تاخورده می‌تواند بسیار مهم باشد که تا کنون مورد مطالعه قرار نگرفته است؛ همچنین به کارگیری روش ترکیبی لوی-تفاضل مربعات که نسبت به روش‌های عددی مورد استفاده از سرعت، دقت و سهولت در به کارگیری بیشتری برخوردار است، از دیگر نوآوری‌های مطالعه حاضر است. در این پژوهش معادلات حرکت و شرایط مرزی یک ورق متشکل از سلول‌های آگزتیک تاخورده با بهره‌گیری از نظریه‌ی تغییر شکل برشی مرتبه‌اول و استفاده از اصل همیلتون بدست می‌آید. با استفاده از روش حل ترکیبی لوی-تفاضل مربعات (Levy-DQM) معادلات دیفرانسیل حاکم حل و نتایج با نرم افزار آباکوس[۲] مقایسه می‌گردد.

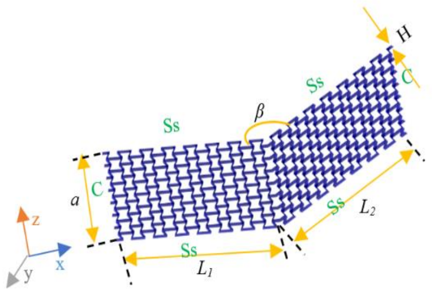
۲- هندسه و ثابت‌های الاستیک ورق تاخورده‌ی آگزتیکی

در شکل ۱ شماتیکی از سلول واحد آگزتیکی نمایش داده شده است. مطابق شکل ۱ پارامترهای t، d و l به ترتیب به ضخامت تیرهای سازنده، طول و عرض سلول واحد اشاره می‌کند. پارامتر ϕ زاویه‌ی بین دیواره‌ی تورفته‌ی سلول آگزتیکی و راستای افق است.



شکل ۱- شماتیکی از سلول واحد آگزتیک پاپیونی

از کنار هم قرار دادند سلول‌های واحد آگزتیکی، ورق آگزتیکی تاخورده مطابق با شکل ۲ حاصل می‌شود. مطابق شکل ۲، ورق تاخورده از دو ورق تخت با سیستم مختصاتی متفاوت تشکیل می‌شود که در یکی از لبه‌ها به هم متصل شده‌اند. L_1، L_2 و a به ترتیب به طول ورق اول، طول ورق دوم و عرض ورق‌ها اشاره دارد و همچنین β زاویه‌ی بین دو ورق تاخورده است؛ همچنین Ss و C به ترتیب به شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده[۳] و گیردار[۴] اشاره دارند.



شکل ۲- شماتیکی از ورق تاشده‌ی متشکل از سلول‌های آگزتیکی

ثابت‌های الاستیک سلول آگزتیک پاپیونی به صورت روابط (۱) بر اساس خصوصیات ماده و پارامترهای هندسی سلول ارائه می‌شود [۲۶و۲۷].

$$
\begin{aligned}
E_1 &= E\frac{\eta_3^3(\eta_1-\sin\phi)}{\cos\phi[1+(\tan\phi^2+\eta_1\sec\phi^2)\eta_3^2]},\\
E_2 &= E\frac{\eta_3^3}{\cos\phi(\eta_1-\sin\phi)(\tan\phi^2+\eta_3^2)},\\
G_{12} &= G\frac{\eta_3^2}{\eta_1(1+2\eta_1)\cos\phi},\\
G_{23} &= G\frac{\eta_3\cos\phi}{\eta_1-\sin\phi},\\
G_{13} &= G\frac{\eta_3}{2\cos\phi}\left[\frac{\eta_1-\sin\phi}{1+2\eta_1}+\frac{\eta_1+2\sin\phi^2}{2(\eta_1-\sin\phi)}\right]\\
\mu_{12} &= -\frac{\sin\phi(1-\eta_3^2)(\eta_1-\sin\phi)}{\cos\phi^2[1+(\tan\phi^2+\sec\phi^2\eta_1)\eta_3^2]}
\end{aligned}
\tag{۱}
$$

---

[1] Zhang and Li
[2] Abaqus
[3] Simply Supported
[4] Clamped

$$\mu_{21} = -\frac{\sin\phi(1-\eta_3^2)}{(\tan\phi^2+\eta_3^2)(\eta_1-\sin\phi)}$$
$$\rho_k = \rho\frac{\eta_3(\eta_1+2)}{2\cos\phi\,(\eta_1-\sin\phi)}$$

که E، G، μ و ρ به ترتیب، نشان‌دهنده‌ی مدول یانگ، مدول برشی، ضریب پواسون و چگالی سلول می‌باشند و پارامتر های η_1 و η_3 به صورت رابطه (۲) تعریف می‌شود.

$$\eta_1 = \frac{d}{l}, \eta_3 = \frac{t}{l} \qquad (۲)$$

۳- معادلات دینامیکی حاکم

با استفاده از نظریه تغییر شکل برشی مرتبه‌ی اول (FSDT[1]) رابطه میدان جابه‌جایی-کرنش و تنش-کرنش به صورت روابط (۳) بیان می‌گردد.

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix}\epsilon_{x_kx_k}\\ \epsilon_{y_ky_k}\\ \gamma_{x_ky_k}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\partial u_k/\partial x_k\\ \partial v_k/\partial y_k\\ \partial u_k/\partial y_k + \partial v_k/\partial x_k\end{bmatrix} + z\begin{bmatrix}\partial\theta_{xk}/\partial x_k\\ \partial\theta_{yk}/\partial y_k\\ \partial\theta_{xk}/\partial y_k + \partial\theta_{yk}/\partial x_k\end{bmatrix},\\
&\begin{bmatrix}\gamma_{x_kz_k}\\ \gamma_{y_kz_k}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\theta_{xk} + \partial w_k/\partial x_k\\ \theta_{yk} + \partial w_k/\partial y_k\end{bmatrix},\\
&\begin{bmatrix}\sigma_{x_kx_k}\\ \sigma_{y_ky_k}\\ \sigma_{x_ky_k}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}Q_{k11} & Q_{k12} & 0\\ Q_{k21} & Q_{k22} & 0\\ 0 & 0 & Q_{k33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\epsilon_{x_kx_k}\\ \epsilon_{y_ky_k}\\ \epsilon_{x_ky_k}\end{bmatrix},\\
&\begin{bmatrix}\sigma_{x_kz_k}\\ \sigma_{y_kz_k}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}Q_{k44} & 0\\ 0 & Q_{k55}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\epsilon_{x_kz_k}\\ \epsilon_{y_kz_k}\end{bmatrix},\\
&k=1,2.
\end{aligned} \qquad (۳)$$

جایی که (u_k، v_k، w_k، θ_xو θ_y) نشان‌دهنده‌ی مولفه‌های میدان جابه‌جایی و چرخش در نظریه FSDT می‌باشند. درایه‌های ماتریس سفتی برای سازه‌های آگزتیکی با توجه به تئوری FSDT مطابق با رابطه‌ی (۴) محاسبه می‌گردد.

$$\begin{aligned}
&Q_{k11} = \frac{E_1}{1-\mu_{12}\mu_{21}},\\
&Q_{k12} = \frac{\mu_{12}E_2}{1-\mu_{12}\mu_{21}}, Q_{k22} = \frac{E_2}{1-\mu_{12}\mu_{21}},\\
&Q_{k33} = G_{12}, Q_{k44} = G_{23}, Q_{k55} = G_{13}
\end{aligned} \qquad (۴)$$

با استفاده از اعمال اصل همیلتون به انرژی‌های جنبشی و پتانسیل، معادلات حاکم بر ورق و شرایط مرزی در لبه‌های آن، بدست می‌آید که به صورت رابطه‌ی (۵) بیان می‌شود.

$$\delta\int_0^t (U_k - T_k)\,dt = 0 \qquad (۵)$$

در معادلات فوق U_k و T_k به ترتیب به انرژی پتانسیل کرنشی و انرژی جنبشی اشاره دارند که به صورت تابعی از تنش‌ها، کرنش‌ها و جابه‌جایی‌ها به کمک روابط (۶) بدست می‌آید.

$$\begin{aligned}
U_k = \frac{1}{2}\int_0^{L_k}\int_0^a\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (&\sigma_{x_kx_k}\epsilon_{x_kx_k} + \sigma_{y_ky_k}\epsilon_{y_ky_k}\\
&+ \sigma_{x_kz_k}\epsilon_{x_kz_k} + \sigma_{y_kz_k}\epsilon_{x_kz_k})\,dzdydx,\\
T_k = \frac{1}{2}\int_0^{L_k}\int_0^a\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho_k \Big[&(\frac{\partial u_k}{\partial t} + z\frac{\partial\theta_{xk}}{\partial t})^2 + (\frac{\partial v_k}{\partial t} + z\frac{\partial\theta_{yk}}{\partial t})^2 + (\frac{\partial w_k}{\partial t})^2\Big]\,dzdydx
\end{aligned} \qquad (۶)$$

به کمک رابطه (۵) و (۶)، انتگرال‌گیری جزء به جزء و انجام برخی محاسبات ریاضی، پنج معادله‌ی حاکم دینامیکی برای هر قسمت ورق تاخورده مطابق با روابط (۷) بدست می‌آید.

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial N_{x_kx_k}}{\partial x} + \frac{\partial N_{x_ky_k}}{\partial y} = J_{k1}\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} + J_{k2}\frac{\partial^2\theta_{xk}}{\partial t^2},\\
&\frac{\partial N_{y_ky_k}}{\partial y} + \frac{\partial N_{x_ky_k}}{\partial x} = J_{k1}\frac{\partial^2 v_k}{\partial t^2} + J_{k2}\frac{\partial^2\theta_{yk}}{\partial t^2},\\
&\frac{\partial M_{x_kx_k}}{\partial x} + \frac{\partial M_{x_ky_k}}{\partial y} - Q_{x_k} = J_{k2}\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2} + J_{k3}\frac{\partial^2\theta_{xk}}{\partial t^2},\\
&\frac{\partial M_{y_ky_k}}{\partial y} + \frac{\partial M_{x_ky_k}}{\partial x} - Q_{y_k} = J_{k2}\frac{\partial^2 v_k}{\partial t^2} + J_{k3}\frac{\partial^2\theta_{yk}}{\partial t^2},\\
&\frac{\partial Q_{xk}}{\partial x} + \frac{\partial Q_{yk}}{\partial y} = J_{k1}\frac{\partial^2 w_k}{\partial t^2},
\end{aligned} \qquad (۷)$$

در معادلات بالا، منتجه‌های نیرو و ممان به صورت رابطه‌ی (۸) است.

[1] First-order Shear Deformation Theory

$$
\begin{gathered}
\left(N_{x_k x_k} \quad N_{x_k y_k} \quad N_{y_k y_k}\right) \\
=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\left(\sigma_{x_k x_k} \quad \sigma_{x_k y_k} \quad \sigma_{y_k y_k}\right) d z, \\
\left(M_{x_k x_k} \quad M_{x_k y_k} \quad M_{y_k y_k}\right) \\
=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\left(\sigma_{x_k x_k} \quad \sigma_{x_k y_k} \quad \sigma_{y_k y_k}\right) z\, d z, \\
\left[Q_{x_k} \quad Q_{y_k}\right]=K_S \int_{-h/2}^{h/2}\left(\sigma_{x_k z_k} \quad \sigma_{y_k z_k}\right) d z
\end{gathered} \tag{۸}
$$

در رابطه‌ی (۸)، K_S اشاره به ضریب تصحیح برشی دارد و برابر با $K_S=\frac{5}{6}$ در نظر گرفته می‌شود.

J_{ki} در رابطه (۷) بیانگر، ممان‌های اینرسی می‌باشند که مطابق رابطه‌ی (۹) بدست می‌آید.

$$
\left(J_{k1} \quad J_{k2} \quad J_{k3}\right)=\int_{-h/2}^{h/2} \rho_k\left(1 \quad z \quad z^2\right) d z \tag{۹}
$$

با جایگذاری رابطه (۸) در رابطه (۷)، معادلات حرکت به فرم رابطه (۱۰) بر حسب مولفه‌های میدان جابه‌جایی حاصل می‌شوند.

$$
\begin{gathered}
A_{11} \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k^2}+A_{33} \frac{\partial^2 u_k}{\partial y_k^2}+\left(A_{12}+A_{33}\right) \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_k \partial y_k}+ \\
B_{11} \frac{\partial^2 \theta_{xk}}{\partial x_k^2}+B_{33} \frac{\partial^2 \theta_{xk}}{\partial y_k^2}+\left(B_{12}+B_{33}\right) \frac{\partial^2 \theta_{yk}}{\partial x_k \partial y_k}= \\
J_{k1} \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2}+J_{k2} \frac{\partial^2 \theta_{xk}}{\partial t^2}, \\
\left(A_{11}+A_{33}\right) \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k \partial y_k}+A_{33} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_k^2}+A_{22} \frac{\partial^2 v_k}{\partial y_k^2}+\left(B_{12}+\right. \\
\left.B_{33}\right) \frac{\partial^2 \theta_{xk}}{\partial x_k \partial y_k}+B_{33} \frac{\partial^2 \theta_{yk}}{\partial x_k^2}+B_{22} \frac{\partial^2 \theta_{yk}}{\partial y_k^2}=J_{k1} \frac{\partial^2 v_k}{\partial t^2}+ \\
J_{k2} \frac{\partial^2 \theta_{yk}}{\partial t^2}, \\
B_{11} \frac{\partial u_k}{\partial x_k}+B_{33} \frac{\partial^2 u_k}{\partial y_k^2}+\left(B_{12}+B_{33}\right) \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_k \partial y_k}+D_{11} \frac{\partial^2 \theta_{xk}}{\partial x_k^2}+ \\
D_{33} \frac{\partial^2 \theta_{xk}}{\partial y_k^2}+\left(D_{12}+D_{33}\right) \frac{\partial^2 \theta_{yk}}{\partial x_k \partial y_k}-A_{44}\left(\theta_{xk}+\frac{\partial w_k}{\partial x_k}\right)= \\
J_{k2} \frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2}+J_{k3} \frac{\partial^2 \theta_{xk}}{\partial t^2}, \\
\left(B_{12}+B_{33}\right) \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k \partial y_k}+B_{33} \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_k^2}+B_{22} \frac{\partial^2 v_k}{\partial y_k^2}+\left(D_{12}+\right. \\
\left.D_{33}\right) \frac{\partial^2 \theta_{xk}}{\partial x_k \partial y_k}+D_{33} \frac{\partial^2 \theta_{yk}}{\partial x_k^2}+D_{22} \frac{\partial^2 \theta_{yk}}{\partial y_k^2}-A_{55}\left(\theta_{yk}+\right. \\
\left.\frac{\partial w_k}{\partial y_k}\right)=J_{k2} \frac{\partial^2 v_k}{\partial t^2}+J_{k2} \frac{\partial^2 \theta_{yk}}{\partial t^2}, \\
A_{44}\left(\frac{\partial \theta_{xk}}{\partial x_k}+\frac{\partial^2 w_k}{\partial x_k^2}\right)+A_{55}\left(\frac{\partial \theta_{yk}}{\partial y_k}+\frac{\partial^2 w_k}{\partial y_k^2}\right)=J_{k1} \frac{\partial^2 w_k}{\partial t^2}
\end{gathered} \tag{۱۰}
$$

در جایی که

$$
\begin{gathered}
\left(A_{ij} \quad B_{ij} \quad D_{ij}\right) \\
=\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{kij}\left(1 \quad z \quad z^2\right) d z
\end{gathered} \tag{۱۱}
$$

$$
i, j=1,2,3,4,5
$$

با اعمال اصل همیلتون علاوه بر معادلات حاکم بر ورق، معادلات شرایط مرزی در لبه‌های ورق نیز استخراج می‌گردد. با استفاده از این اصل می‌توان شرایط مرزی را برای همه سناریوها تعیین کرد. برای ورق تاخورده، برای شش لبه شرایط مرزی اعمال می‌شود. در مطالعه حاضر شرایط مرزی *C-Ss-Ss-C-Ss-Ss* در بررسی اثر پارامترهای مختلف در نظر گرفته شده است.

شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده در لبه‌ها در امتداد محور x_k ها

$$
u_k=v_k=w_k=\theta_{xk}=M_{y_k y_k}=0 \tag{۱۲}
$$

شرایط مرزی گیردار در لبه‌ها در امتداد محور y_k ها

$$
u_k=v_k=w_k=\theta_{xk}=\theta_{yk}=0 \tag{۱۳}
$$

شرایط مرزی تکیه گاه ساده در لبه‌ها در امتداد محور y_k ها

$$
u_k=v_k=w_k=M_{x_k x_k}=\theta_{y_k}=0 \tag{۱۴}
$$

شرایط مرزی آزاد در لبه‌ها در امتداد محور y_k ها

$$
N_{x_k x_k}=N_{x_k y_k}=M_{x_k x_k}=M_{x_k y_k}=Q_{x_k} \tag{۱۵}
$$

در معادلات بالا شرایط مرزی در شش لبه‌ی ورق تاخورده‌ی آگزتیکی نشان داده شد. در مرز اتصال بین دو ورق به یکدیگر شرایط پیوستگی جابه‌جایی، پیچش، نیرو و ممان حاکم است. شرایط مرزی در لبه‌ی اتصال دو ورق می‌تواند به صورت رابطه زیر در نظر گرفته شود.

پیوستگی جابه‌جایی‌ها و پیچش‌ها:

$$
\begin{aligned}
& u_1\left(L_1, y\right)=-u_2(0, y) \times \cos \beta-w_2(0, y) \times \sin \beta \\
& v_1\left(L_1, y\right)=v_2(0, y) \\
& w_1\left(L_1, y\right)=u_2(0, y) \times \sin \beta-w_2(0, y) \times \cos \beta \\
& \theta_{x1}\left(L_1, y\right)=\theta_{x2}(0, y) \\
& \theta_{y1}\left(L_1, y\right)=\theta_{y2}(0, y)
\end{aligned} \tag{۱۶}
$$

پیوستگی نیروها و ممان‌ها:

$$\begin{aligned}&-N_{x_1x_1}(L_1,y)\times\cos\beta+Q_{x_1}(L_1,y)\\&\qquad\times\sin\beta=N_{x_2x_2}(0,y)\\&N_{x_1y_1}(L_1,y)=N_{x_2y_1}(0,y)\\&-N_{x_1x_1}(L_1,y)\times\sin\beta-Q_{x_1}(L_1,y)\\&\qquad\times\cos\beta=Q_{x_2}(0,y)\\&M_{x_1x_1}(L_1,y)=M_{x_2x_2}(0,y)\\&M_{x_1y_1}(L_1,y)=M_{x_2y_2}(0,y)\end{aligned} \qquad (۱۷)$$

۴- روش حل ترکیبی لوی-تفاضل مربعات

با توجه به شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده در لبه‌های نشان داده شده در شکل ۲ و همچنین پایستار بودن سیستم، میدان جابه‌جایی در راستای محور y به کمک حل لوی و بر حسب زمان به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$\begin{bmatrix}u_k(x_k,y_k,t)\\v_k(x_k,y_k,t)\\w(x_k,y_k,t)\\\theta_{xk}(x_k,y_k,t)\\\theta_{yk}(x_k,y_k,t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\tilde{u}_k(x_k)\sin\lambda y\\\tilde{v}_k(x_k)\cos\lambda y\\\tilde{w}_k(x_k)\sin\lambda y\\\tilde{\theta}_{xk}(x_k)\sin\lambda y\\\tilde{\theta}_{yk}(x_k)\cos\lambda y\end{bmatrix}e^{i\omega t} \qquad (۱۸)$$

که در رابطه (۱۸)، $\lambda=\frac{n\pi}{a}$ است که n بیانگر شماره موج در راستای عرضی ورق است و پارامتر m که در نتایج استفاده شده است، شماره موج در راستای طولی ورق x است. با جاگذاری رابطه (۱۸) در رابطه (۱۰)، معادلات حرکت به صورت معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌شوند که در ضمیمه ارائه شده است.

در ادامه جهت حل معادلات حاصل از روش تفاضل مربعات استفاده می‌شود. روش حل تفاضل مربعات یک روش حل عددی مرتبه بالا است و بر این اساس که مشتق یک تابع مانند ψ در یک نقطه با مجموع مقدار تابع در آن نقطه و نقاط مجاور با ضرایب وزنی مختلف، برابر است که فرم ریاضی آن در رابطه (۱۹) ارائه شده‌است.

$$\begin{aligned}\left.\frac{d\psi}{dx_k}\right|x_k=x_k^f&=\sum_{p=1}^{N_{L_k}}\mathbb{C}_{x_k}^{1-fp}\psi(x_x^p),\\\left.\frac{d^2\psi}{dx_k^2}\right|x_k=x_k^f&=\sum_{p=1}^{N_{L_k}}\mathbb{C}_{x_k}^{2-fp}\psi(x_x^p),\end{aligned} \qquad (۱۹)$$

در جایی که N_{L_k} تعداد نقاط شبکه بندی در راستای x_k است. $\mathbb{C}_{x_k}^{1-fp}$ و $\mathbb{C}_{x_k}^{2-fp}$ به ترتیب بیانگر ضرایب ثابت وزنی برای مشتق مرتبه اول و دوم نسبت به x_k می‌باشند. مقادیر ضرائب وزنی به تعداد نقاط شبکه و طول کل ورق بستگی دارد و به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\mathbb{C}_{x_k}^1=\begin{cases}\dfrac{\Pi_{i=1,i\neq f}^{N_{L_k}}(x_f-x_i)}{(x_f-x_i)\Pi_{i=1,i\neq f}^{N_{L_k}}(x_f-x_i)} & f\neq p\\[2ex] -\displaystyle\sum_{i=1,i\neq f}^{N_{L_k}}\mathbb{C}_{x_k}^{1-fi} & f=p\end{cases}$$

$$\mathbb{C}_{x_k}^2=\begin{cases}2\left(\mathbb{C}_{x_k}^{1-fp}\mathbb{C}_{x_k}^{1-ff}-\frac{\mathbb{C}_{x_k}^{1-fp}}{(x_f-x_i)}\right) & f\neq p\\ -\sum_{i=1,i\neq f}^{N_{L_k}}\mathbb{C}_{x_k}^{1-fi} & f=p\end{cases} \qquad (۲۰)$$

با جایگذاری میدان جابه‌جایی رابطه (۱۸) در معادلات حرکت و روابط حاکم بر شرایط مرزی، این معادلات برحسب ($\tilde{u}_k$، $\tilde{v}_k$، $\tilde{w}_k$، $\tilde{\theta}_x$ و $\tilde{\theta}_y$) بیان می‌شوند. با استفاده از روش تفاضل مربعات، این معادلات در نقاط دامنه، مرز ورق و محل پیوستگی دو ورق به صورت معادلات جبری رابطه‌ی (۲۱) بدست می‌آید.

$$\left\{\begin{bmatrix}\tilde{k}_{DD}&\tilde{k}_{DB}\\\tilde{k}_{BD}&\tilde{k}_{BB}\end{bmatrix}-\omega^2\begin{bmatrix}\tilde{m}_{DD}&\tilde{m}_{DB}\\\tilde{m}_{BD}&0\end{bmatrix}\right\}\begin{Bmatrix}\vec{x}_d\\\vec{x}_b\end{Bmatrix}=0 \qquad (۲۱)$$

که $\vec{x}_d$ بردار درجات آزادی مرتبط با دامنه و دارای $5\left(N_{L_1}+N_{L_2}-4\right)$ درایه و $\vec{x}_b$ بردار درجات آزادی مرتبط با لبه‌های مرز و ناحیه پیوستگی دارای ۲۰ درایه است. با تبدیل معادله فوق به فرم استاندارد مسئله مقدار ویژه و حل آن، مقدار فرکانس طبیعی حاصل خواهد شد.

۵- صحت‌سنجی

برای بررسی روش حل ترکیبی لوی-تفاضل مربعات و مدل-سازی ریاضی مسئله، ورق تاشده متشکل از سلول‌های آگزتیکی در نرم‌افزار اجزای محدود آباکوس، مدل سازی و نتایج آن با نتایج حاصل از حل تحلیلی مورد اشاره مقایسه گردید که نزدیکی نتایج، نشان از صحت روند حل و مدلسازی دارد.

ویژگی‌های ماده مورد نظر به شرح جدول (۱) است؛ همچنین ویژگی‌های هندسی سلول واحد و ورق آگزتیک به شرح جدول

(۲) است. مقدار پارامترها در تمام نتایج این بخش، مطابق با جدول (۱) و (۲) و شرایط مرزی ***C-Ss-Ss-C-Ss-Ss*** است، مگر اینکه در نتایج غیر آن ذکر شود. در این مطالعه شکل مود عرضی اول مورد توجه قرار گرفته است؛ بنابراین نیم موج عرضی (n) برابر با ۱ در نظر گرفته شده‌است و برای نیم موج-های طولی (m) مختلف نتایج بدست آمده‌است.

جدول ۱- ویژگی‌های مادی ورق آگزتیکی تاخورده

ρ	ν	$E(Gpa)$
۷۸۰۰	۰/۳	۲۱۰

جدول ۲- ویژگی‌های هندسی ورق آگزتیکی تاخورده

H^*	t^*	l^*	d^*	ϕ^o	β^o	a^*	L_2^*	L_1^*
۰/۵	۱	۲۰	۴۰	۴۵	۱۶۰	۳۹۵/۹	۲۵۸/۶	۵۱۷/۲

*ابعاد به میلی‌متر است

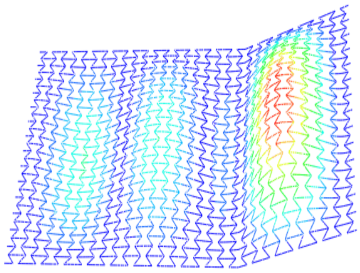
با توجه به جدول ۳، نزدیکی نتایج روش حاضر و روش اجزای محدود، نشان از صحت مدلسازی ریاضی ورق و روش ترکیبی لوی-تفاضل مربعات دارد.

جدول ۳- مقایسه فرکانس طبیعی (هرتز) ورق تاخورده حاصل از روش تفاضل مربعی و اجزای محدود به کمک نرم-افزار آباکوس

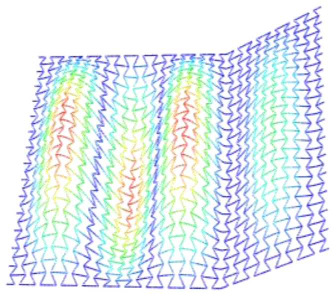
شماره مود (n, m)	روش حاضر	آباکوس	درصد خطا
(۱و۱)	۷/۴۸۲	۷/۱۸۹	۴/۰
(۱و۲)	۱۸/۰۵۴	۱۸/۷۷۵	۳/۸
(۱و۳)	۲۴/۹۹۹	۲۵/۸۶۷	۳/۳
(۱و۴)	۳۶/۸۵۲	۳۸/۹۸۹	۵/۴

چهار شکل مود عرضی نخست ورق تاخورده‌ی آگزتیکی از تحلیل المان محدود برای نتایج جدول ۳ مطابق با شکل ۳ است.

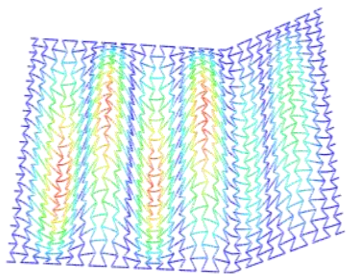
Frequency= 18.775



Frequency= 25.867 Hz



Frequency= 38.989 Hz



شکل ۳- چهار شکل مود نخست ورق تاخورده آگزتیکی با زاویه ۱۶۰

۶- بحث و نتایج

پارامترهای هندسی ورق تاخورده متشکل از سلول‌های آگزتیکی و همچنین شرایط مرزی می‌توانند در پاسخ فرکانسی ارتعاشی موثر باشد. برای بررسی بیشتر ورق تاخورده‌ی آگزتیکی و اثر پارامترهای مختلف بر ارتعاشات آن، جنس ورق تاخورده با مشخصات مطابق جدول ۱ در نظر گرفته می‌شود.

شرط مرزی ***C-Ss-Ss-C-Ss-Ss*** در بخش صحه‌سنجی بررسی شد و بقیه‌ی نتایج مربوط به پارامترهای هندسی نیز براساس این شرط مرزی بررسی خواهد شد. به قصد بررسی اثر شرایط مرزی، در جدول ۴، فرکانس طبیعی ورق تاخورده با شرایط مرزی ***F-Ss-Ss-F-Ss-Ss*** و ***Ss-Ss-Ss-Ss-Ss-Ss*** ارائه می‌گردد. پر واضح است که فرکانس طبیعی ورق تاخورده با دو سر تکیه گاه ساده به دلیل سفتی بالاتر نسبت به دو سر آزاد، دارای مقدار بیشتری است.

جدول۴- چهار فرکانس طبیعی اول (هرتز) ورق تاخورده آگزتیک در شرایط مرزی مختلف

شماره مود (n, m)	*Ss-Ss-Ss-Ss-Ss-Ss*	*F-Ss-Ss-F-Ss-Ss*
(۱و۱)	۵/۹۵۰	۱/۲۲۶
(۱و۲)	۱۴/۴۸۵	۴/۸۱۴
(۱و۳)	۱۸/۸۱۹	۱۴/۳۴۹
(۱و۴)	۳۱/۷۶۹	۲۱/۱۱۵

تغییر عرض ورق تاخورده‌ی آگزتیکی از پارامترهایی است که می‌تواند در فرکانس طبیعی تاثیرگذار باشد. با ثابت ماندن سایر پارامترها، نتایج تغییر عرض ورق در فرکانس طبیعی مطابق با جدول ۵ است. با افزایش عرض ورق فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد، اما این کاهش در مودهای طولی ابتدایی، محسوستر است. علت این امر کاهش طول موج در راستای طولی در مودهای بالاتر نسبت به راستای عرضی است که شماره مود ۱ است.

جدول۵- اثر تغییر عرض ورق بر چهار فرکانس طبیعی اول (هرتز) ورق تاخورده آگزتیک

شماره مود (n, m)	۳۰۰(mm)	۴۰۰(mm)	۵۰۰(mm)	۶۰۰(mm)
(۱و۱)	۸/۸۷۴	۷/۴۴۸	۶/۸۴۰	۶/۵۱۲
(۱و۲)	۱۹/۶۳۹	۱۸/۰۱۳	۱۷/۲۴۸	۱۶/۸۲۷
(۱و۳)	۲۶/۲۸۶	۲۴/۹۴۴	۲۴/۳۳۹	۲۳/۹۶۹
(۱و۴)	۳۸/۴۱۴	۳۶/۷۷۷	۳۶/۰۴۲	۳۵/۵۸۱

یکی از پارامترهای مهمی که می‌تواند در ارتعاشات ورق تا خورده‌ی آگزتیکی موثر باشد، زاویه‌ی تاخوردگی است. فرکانس‌های طبیعی برای زاویه‌های مختلف مطابق با جدول ۶ بدست آمده است.

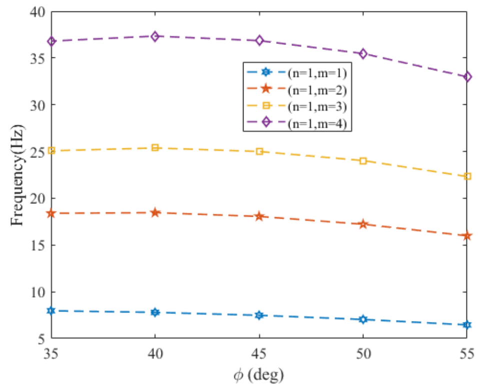
جدول ۶- چهار فرکانس طبیعی نخست برای زاویه‌های مختلف تاخوردگی L_1= ۳۸۷,۹ و L_2= ۳۸۷,۹

n, m	β=۱۸۰	β=۱۷۰	β=۱۶۰	β=۱۵۰	β=۱۴۰
(۱و۱)	۴/۶۱۴۰	۱۰/۲۵۰۲	۱۰/۲۵۰۳	۱۰/۲۵۰۳	۱۰/۲۵۰۳
(۱و۲)	۱۰/۲۵۰۳	۱۳/۵۲۰۲	۱۳/۵۲۷۹	۱۳/۵۲۹۴	۱۳/۵۲۹۹
(۱و۳)	۱۸/۳۸۵۶	۲۹/۰۹۲۰	۲۹/۰۹۲۰	۲۹/۰۹۲۰	۲۹/۰۹۲۰
(۱و۴)	۲۹/۰۹۲۰	۳۵/۰۲۵۶	۳۵/۰۷۶۳	۳۵/۰۸۵۷	۳۵/۰۸۸۹

مشاهده می‌گردد که با تغییر زاویه از ۱۸۰ درجه (ورق تخت) به زاویه‌ی ۱۷۰ و کمتر از آن فرکانس طبیعی افزایش پیدا کرده و سپس تقریبا ثابت می‌ماند. این پدیده به این علت رخ می‌دهد که با کاهش زاویه از ۱۸۰، بلافاصله ورق تخت تبدیل به ورق تاخورده شده و هندسه‌ی ورق تغییر محسوسی پیدا می‌کند. ناظر بر این تغییر، ناحیه‌ی تاخوردگی به عنوان گره در شکل مودهای ورق تاخورده عمل می‌کند. ناحیه‌ی تاخوردگی سفتی ورق را افزایش داده و همین امر باعث افزایش فرکانس طبیعی می‌شود؛ اما با کاهش بیشتر زاویه‌ی تاخوردگی، این ناحیه تغییر پیدا نکرده و شکل مودها و فرکانس‌های طبیعی ورق تاخورده ثابت مانده و رفتار ارتعاشی ورق تاخورده شبیه رفتار ارتعاشی دو ورق مجزا است.

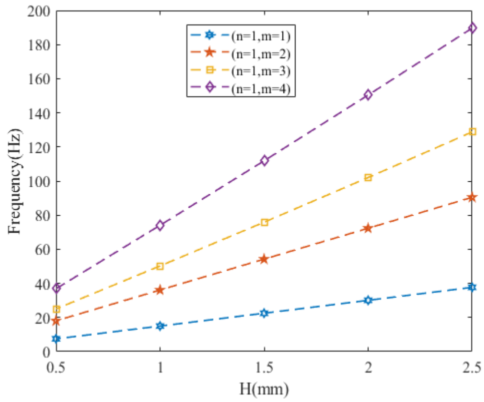
تغییر زاویه‌ی دیواره‌ی سلول واحد با افق (ϕ) می‌تواند بر ارتعاشات ورق تاخورده‌ی آگزتیکی موثر باشد. در زاویه تاخوردگی ۱۶۰ درجه و زاویه ϕهای مختلف، چهار فرکانس طبیعی نخست ورق تاخورده‌ی آگزتیکی بدست آمد که در شکل (۴) نشان شده‌است. با افزایش این زاویه فرکانس طبیعی در دو مود نخست کاهش می‌یابد و در مودهای سوم و چهارم ابتدا افزایش و سپس کاهش پیدا می‌کند، ولی به صورت کلی افزایش زاویه سبب کاهش فرکانس طبیعی می‌شود که این کاهش در مودهای بالاتر محسوس‌تر است. علت این تغییرات به این علت است که با افزایش ϕ از ۳۵ تا ۵۵ درجه، مقدار مدول الاستیسیته E_1 کاهش و چگالی سلول افزایش که اثر منفی در سفتی سازه آگزتیک دارد، در عین حال با افزایش این

زاویه مقدار مدول الاستیسیته E_2 و G_{12} افزایش می‌یابد که این دو عامل باعث افزایش سفتی سازه می‌گردند؛ همچنین تغییرات ضریب پواسون نسبت به تغییرات زاویه یکنواخت نیست. در هر یک از مودها نیز اثر این پارامترها مختلف است؛ بنابراین تغییرات فرکانس طبیعی سیستم در مودهای مختلف متفاوت و پیچیده است.



شکل ۴- چهار فرکانس طبیعی نخست برای ϕهای مختلف

شکل ۵ اثر تغییرات ضخامت ورق (H) بر ارتعاشات ورق تاخورده‌ی آگزتیکی بررسی شده‌است. همانطور که انتظار می‌رود، با افزایش ضخامت، فرکانس افزایش می‌یابد، اما آنچه حائز اهمیت است، این است که این افزایش در مودهای بالاتر با شیب بیشتری افزایش می‌یابد. این پدیده به این علت رخ می‌دهد که با افزایش ضخامت ورق، سفتی ورق افزایش پیدا می‌کند و این افزایش سفتی ورق باعث افزایش فرکانس طبیعی سیستم می‌گردد. با توجه به این که در مودهای بالاتر، ورق تغییر شکل پیچیده‌تری از خود نشان می‌دهد و دارای موجهای بیشتری است، بنابراین قسمت‌های بیشتری از ورق درگیر ارتعاش هستند. در این صورت اثر افزایش ضخامت بر افزایش سفتی ورق به مراتب بیشتر از اثر آن بر افزایش جرم ورق بوده و در نتیجه فرکانس طبیعی ورق با افزایش ضخامت در مودهای بالاتر با شیب بیشتری افزایش پیدا می‌کند.



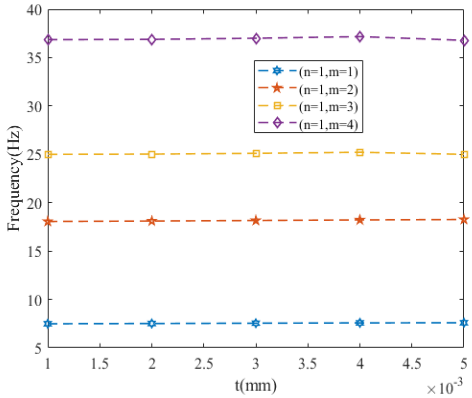
شکل ۵- چهار فرکانس طبیعی نخست برای ضخامت ورق‌های مختلف

در بررسی های قبلی نسبت $K=\frac{L_1}{L_2}$ ثابت در نظر گرفته شده است. یکی از پارامترهایی که می‌تواند در ارتعاش ورق تاخورده موثر باشد، تغییر این نسبت است. با فرض اینکه مجموع طول‌های L_1 و L_2 ثابت باشند و نسبت K تغییر یابد، نتایج به شرح جدول ۷ است. بررسی نتایج حاکی از آن است که اگر موقعیت تاخوردگی دیرتر اتفاق افتد، فرکانس ورق در دو مود نخست کاهش پیدا می‌کند، اما در مود سوم و چهارم ابتدا افزایش و سپس کاهش پیدا می‌کند.

جدول۷- چهار فرکانس طبیعی نخست برای Kهای مختلف

n, m	K=۲	K=۳	K=۴	K=۵	K=۶
(۱و۱)	۷/۴۸۳۹	۶/۴۰۰۱	۵/۹۰۱۲	۵/۶۱۳۶	۵/۴۳۳۲
(۱و۲)	۱۸/۰۵۵۹	۱۵/۴۰۳۳	۱۳/۹۸۰۸	۱۳/۱۴۷۶	۱۲/۶۲۲۵
(۱و۳)	۲۴/۹۹۹۱	۲۸/۳۱۹۶	۲۵/۷۹۶۹	۲۴/۱۶۵۴	۲۳/۱۱۹۵
(۱و۴)	۳۶/۸۵۲۴	۴۰/۵۲۵۸	۴۱/۲۱۰۳	۳۸/۷۳۱۶	۳۷/۰۲۰۴

مطابق شکل ۶ مشاهده می‌گردد که با افزایش پارامتر t فرکانس طبیعی ورق تاخورده در دو مود نخست افزایش پیدا می‌کند و در مود سوم و چهارم ابتدا افزایش و سپس کاهش پیدا می‌کند؛ اما این تغییرات با توجه به چند برابر شدن ضخامت بسیار ناچیز است و می‌توان نتیجه گرفت، تغییر ضخامت چندان در تغییر فرکانس موثر نمی‌باشد.



شکل ۶- چهار فرکانس طبیعی نخست برای tهای مختلف

۷- نتیجه‌گیری

در مطالعه‌ی حاضر، ارتعاشات ورق تاشده متشکل از سلول‌های آگزتیکی با استفاده از روش لوی-تفاضل مربعات مورد بررسی قرار گرفت. نتایج حل با نتایج حاصل از تحلیل المان محدود مقایسه شد که نشان‌دهنده دقت قابل قبول روش لوی-تفاضل مربعات حاضر است. برخی نتایج به شرح زیر است:

۱. با افزایش عرض ورق و ثابت ماندن بقیه‌ی پارامترها فرکانس طبیعی کاهش پیدا می‌کند.
۲. با کاهش زاویه β از ۱۸۰ به پایین و تبدیل شدن ورق از حالت تخت به ورق تاخورده، فرکانس‌های طبیعی خیلی سریع افزایش یافته و سپس ثابت می‌ماند.
۳. با افزایش زاویه‌ی ϕ فرکانس طبیعی در اغلب مودها و بیشتر حالت‌ها کاهش پیدا می‌کند.
۴. با افزایش ضخامت ورق فرکانس‌های طبیعی افزایش پیدا می‌کند.
۵. با افزایش نسبت K فرکانس‌های طبیعی در دو مود نخست کاهش پیدا می‌یابد و در مود سوم و چهارم ابتدا افزایش و سپس کاهش پیدا می‌کند.
۶. اثر افزایش ضخامت تیرهای سازنده‌ی سلول آگزتیکی بر فرکانس طبیعی تقریباً غیرمحسوس است.

ضمیمه

$$
\begin{aligned}
&(A_{11}+A_{33})\lambda\frac{\partial\tilde{u}_k(x_k)}{\partial x_k}+A_{33}\frac{\partial^2 v_k}{\partial x_k^2}-A_{22}\lambda^2\tilde{v}_k(x_k)\\
&\quad+(B_{12}+B_{33})\lambda\frac{\partial\tilde{\theta}_{xk}(x_k)}{\partial x_k}\\
&\quad+B_{33}\frac{\partial^2\tilde{\theta}_{yk}(x_k)}{\partial x_k^2}-B_{22}\lambda^2\tilde{\theta}_{yk}(x_k)\\
&\quad+\omega^2\left(J_{k1}\tilde{v}_k(x_k)+J_{k2}\tilde{\theta}_{yk}(x_k)\right)\\
&\quad=0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&B_{11}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}-B_{33}\lambda^2\tilde{u}_k(x_k)-(B_{12}+B_{33})\lambda\frac{\partial\tilde{v}_k(x_k)}{\partial x_k}\\
&\quad+D_{11}\frac{\partial^2\theta_{xk}}{\partial x_k^2}-D_{33}\lambda^2\tilde{\theta}_{xk}(x_k)\\
&\quad-(D_{12}+D_{33})\lambda\frac{\partial\tilde{\theta}_{yk}(x_k)}{\partial x_k}\\
&\quad-A_{44}\left(\tilde{\theta}_{xk}(x_k)+\frac{\partial\tilde{w}_k(x_k)}{\partial x_k}\right)\\
&\quad+\omega^2\left(J_{k2}\tilde{u}_k(x_k)+J_{k3}\tilde{\theta}_{xk}(x_k)\right)\\
&\quad=0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(B_{12}+B_{33})\lambda\frac{\partial\tilde{u}_k(x_k)}{\partial x_k}+B_{33}\frac{\partial^2\tilde{v}_k(x_k)}{\partial x_k^2}\\
&\quad-B_{22}\lambda^2\tilde{v}_k(x_k)\\
&\quad+(D_{12}+D_{33})\lambda\frac{\partial\tilde{\theta}_{xk}(x_k)}{\partial x_k}\\
&\quad+D_{33}\frac{\partial^2\tilde{\theta}_{yk}(x_k)}{\partial x_k^2}-D_{22}\lambda^2\tilde{\theta}_{yk}(x_k)\\
&\quad-A_{55}\left(\tilde{\theta}_{yk}(x_k)+\lambda\tilde{w}_k(x_k)\right)\\
&\quad+\omega^2\left(J_{k2}\tilde{v}_k(x_k)+J_{k2}\tilde{\theta}_{yk}(x_k)\right)\\
&\quad=0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&A_{44}\left(\frac{\partial\tilde{\theta}_{xk}(x_k)}{\partial x_k}+\frac{\partial^2\tilde{w}_k(x_k)}{\partial x_k^2}\right)\\
&\quad-A_{55}\left(\lambda\tilde{\theta}_{yk}(x_k)+\lambda^2\tilde{w}_k(x_k)\right)\\
&\quad+J_{k1}\omega^2\tilde{w}_k(x_k)=0
\end{aligned}
$$

مراجع

[1] Voigt W, Lehrbuch der Kristallphysik. B. G. Teubner-Verlag, (1928) Leipzig Berlin.

[2] Lempriere B M, AIAA J (1968), Poisson's ratio in orthotropic materials. Aiaa 6, 2226.

[3] Lakes. R (1987) Foam structures with a negative Poisson's ratio .Science. 1987: 1038–1041.

[4] Donoghue J P, Alderson K L, and Evans K E (2009) the fracture toughness of composite laminates with a negative Poisson's ratio. Phys. Status Solidi B 246.9: 2011 2017.

[5] Bohara R P, Linforth S, Ghazlan A, Nguyen T, Remennikov A, & Ngo T (2022) Performance of an auxetic honeycomb-core sandwich panel under close-in and far-field detonations of high explosive. Compos. Struct 280, 114907.

[6] Luo C, Han C Z, Zhang X Y, Zhang X G, Ren X, Xie Y M (2021) Design manufacturing and applications of auxetic tubular structures: A review. Thin-Walled Struct. 163 107682.

[7] Gibson L J, Ashby M F, Proc R, Soc, Lond A (1982), 382, 43.

[8] Gibson L J, Ashby M F, Schayer G S, Robertson C I, Proc. Roy. Soc. Lond. (1982) A, 382, 25.

[9] Gibson L J (1981) The elastic and plastic behaviour of cellular materials, Ph.D. Thesis, Churchill College, University of Cambridge, UK

[10] Dutta S, Menon HG, Hariprasad MP, Krishnan A, Shankar B (2020). Study of auxetic beams under bending: A finite element approach. Mater. Today

[۱۱] بهین فر, پارسا & ,نورانی, امیر. (۱۴۰۱). حل تحلیلی و عددی استنت آگزتیک با هندسه‌ی Re-entrant و بهینه‌سازی چندهدفه‌ی آن. *مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها*, *12*(6), 125-137. doi: 10.22044/jsfm.2023.12193.3637

[12] Mondal P, Jayaganthan R, (2024) Theoretical and Numerical Investigation of Mechanical Properties of Auxetic S-structure under Transverse Load.

[13] Zhang C, Lu F, Wei T, Huang Y, He Y, Zhu Y. (2024) A novel windmill-shaped auxetic structure with energy absorption enhancement. Int. J. Mech. Sci. 280, 109635

[14] Yang J, Huang X-H, Shen H-S (2020). Nonlinear vibration of temperature-dependent FG-CNTRC laminated plates with negative Poisson's ratio. Thin-Walled Struct.

[15] Gao Q, Liao W-H (2021) Energy absorption of thin walled tube filled with gradient auxetic structures-theory and simulation. Int J Mech Sci 201:106475

[16] Tran TT, Pham QH, Nguyen-Thoi T, Van TT (2020) Dynamic analysis of sandwich auxetic honeycomb plates subjected to moving oscillator load on elastic foundation. Adv Mater Sci Eng 2020:1–16.

[17] Mohandesi N, Talebitooti M, Fadaee M (2024) Mathematical modeling of free vibration of star-shaped auxetic rectangular plate. Arch. Appl. Mech.: 1-13.

[18] Hosseini R, Babaei M, Naddaf Oskouei A (2023) The influences of various auxetic cores on natural frequencies and forced vibration behavior of sandwich beam fabricated by 3D printer based on third-order shear deformation theory. JCAMECH 54(2), 285-308.

[19] Aktas K G, Pehlivan F, Esen I (2024). Temperature-dependent thermal buckling and free vibration behavior of smart sandwich nanoplates with auxetic core and magneto-electro-elastic face layers. Mech Time-Depend Mat 1-41.

[20] Jiang W, Zhou J, Liu J, Zhang M, & Huang W (2023) Free vibration behaviours of composite sandwich plates with reentrant honeycomb cores. Appl. Math. Model. 116, 547-568.

[21] H Mohammadi, A Setoodeh (2020), FSDT-based iso geometric analysis for free vibration behavior of functionally graded skew folded plates, Iran. J. Sci. Technol. Trans. Mech. Eng. 44 841-863.

[22] Javani M, Kiani Y, Eslami M R (2022) on the free vibrations of FG-GPLRC folded plates using GDQE procedure. Compos. Struct 286: 115273

[23] Thakur B R, Verma S, Singh B N, & Maiti D K (2021). Dynamic analysis of flat and folded laminated composite plates under hygrothermal environment using a nonpolynomial shear deformation theory. Compos. Struct 274, 114327.

[24] Lee S Y, Wooh S C, Yhim S S (2004) Dynamic behavior of folded composite plates analyzed by the third order plate theory, Int. J. Solids Struct. 41: 1879-1892.

[25] Zhang J, Li L (2023) Free vibration of functionally graded graphene platelets reinforced composite porous L-shaped folded plate, Eng. Struct. 297: 116977.

[26] QING T D, ZHI C Y (2010) Wave propagation in sandwich panel with auxetic core. J. Solid Mech.

[27] Zhu X, Zhang J, Zhang W, Chen J, (2019) Vibration frequencies and energies of an auxetic honeycomb sandwich plate. MAMS vol. 26, no. 23, pp. 1951-1957.