



تحلیل کمانش شبه سه بعدی صفحات ساندویچی مدرج تابعی با رویه‌های پیزوالکتریک بر اساس تئوری برشی مرتبه بالای بهبود یافته

امیر حسین سلطان آرانی^۱، علی قربان‌پور آرانی^{۲,۳*}، زهرا خدای مرقی^۴

^۱ دانشجوی دکترای تخصصی مهندسی مکانیک، گروه مکانیک جامدات، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران

^۲ استاد، مهندسی مکانیک، گروه مکانیک جامدات، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران

^۳ استاد، پژوهشکده علوم و فناوری نانو، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران

^۴ استادیار گروه مهندسی مکانیک، مرکز آموزش عالی محلات، محلات، ایران

مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۰۶/۲۰؛ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۳/۰۹/۱۴؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۱۰/۱۵

چکیده

در این پژوهش به بررسی رفتار کمانشی شبه سه‌بعدی صفحه مدرج تابعی یکپارچه شده با رویه‌های پیزوالکتریک به عنوان یک سازه ساندویچی بسیار مهم و حساس در صنایع مختلف بر اساس تئوری برشی بهبود یافته مرتبه بالا با در نظر گرفتن اثرات کششی در راستای ضخامت پرداخته شده‌است. خواص مکانیکی هسته به صورت ناهمگن فرض شده و رویه‌ها بر اساس تئوری پیزوالاستیسیته مدل‌سازی شده‌اند. معادلات حرکت با به کارگیری اصل کار مجازی بر اساس شرایط بارگذاری تک‌محوری و دو محوری استخراج شده‌اند. پس از تطبیق و ارزیابی روش حاضر، بارهای بحرانی کمانش ورق سه لایه تحت میدان الکتریکی در شرایط مختلف با استفاده از روش تحلیلی ناوبر محاسبه شده‌اند. در نهایت اثرات پارامترهای مختلف از جمله شاخص کسر حجمی، پارامترهای بی‌بعد هندسی و مقایسه مدل‌های دو بعدی و شبه سه بعدی مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج نشان می‌دهد که با افزایش نسبت عرض به طول و همچنین کاهش ضخامت اختلاف بین مدل‌های دو بعدی و شبه سه بعدی کاهش می‌یابد. در نهایت نتایج نشان می‌دهد که تئوری مورد استفاده، علاوه بر سادگی قابل توجه، در مدل‌سازی از دقت بالایی برخوردار است.

کلمات کلیدی: کمانش تک‌محوری و دو محوری؛ شبه سه بعدی؛ هسته مدرج تابعی؛ تئوری بهبود یافته

Quasi-3D Buckling Analysis of FG Sandwich Plates with Piezoelectric Face-Sheets Based on Refined High-Order Shear Deformation Theory

A. H. Soltan Arani¹, A. Ghorbanpour Arani^{2,3*}, Z. Khoddami Maraghi⁴

¹ Ph.D. Student, Department of Solid Mechanics, Faculty of Mechanical Engineering, University of Kashan, Kashan, Iran

² Prof., Department of Solid Mechanics, Faculty of Mechanical Engineering, University of Kashan, Kashan, Iran

³ Prof., Institute of Nanoscience & Nanotechnology University of Kashan, Kashan, Iran

⁴ Assist. Prof., Faculty of Engineering, Mahallat Institute of Higher Education, Mahallat, Iran

Abstract

This research investigates the quasi-3D buckling behavior of the functionally graded plate integrated with piezoelectric face sheets as a fundamental and sensitive sandwich structure in various industries is discussed based on the improved high-order shear theory by considering the stretching effects along the thickness. The mechanical properties of the core are assumed to be non-homogeneous and the face sheets are modeled based on the theory of piezoelectricity. The equations of motion are extracted using the principle of virtual work based on axial and biaxial loading conditions. After the adaptation and evaluation of the present method, the critical buckling loads of the three-layer plate subjected to an external electric field are calculated in different conditions using Navier's analytical method. Finally, the effects of various parameters including volume fraction index, geometric dimensionless parameters, and comparison of two-dimensional and pseudo-three-dimensional models are examined. The results show that the difference between the 2D and quasi-3D models decreases with the increase of the width-to-length ratio and the decrease of the thickness. Eventually, the results show that the theory used in modeling is very accurate in addition to being remarkably simple.

Keywords: Axial and Biaxial Buckling; Quasi-3D ;FG Core; Refined Theory.

۱- مقدمه

سازه‌های چند لایه یکی از ساختارهایی هستند که به طور معمول در سازه‌های مکانیکی به خصوص در صنایع هوایی و دریایی کاربرد فراوان دارند. این سازه‌ها که اصطلاحاً با عنوان سازه‌های ساندویچی شناخته می‌شوند، عموماً دارای ساختار چند لایه‌ای شامل دو رویه می‌باشند که یک هسته مرکزی را احاطه کرده‌اند. این مواد به واسطه نسبت استحکام به وزن بالا، سفتی و مقاومت ویژه بالا، وزن سبک، عایق بودن نسبی در برابر حرارت و صدا، قابلیت ساخت و پایداری مناسب به طور وسیعی در صنایع هوافضا، دریایی، خودروسازی و حمل و نقل به کار گرفته می‌شوند. مشکل اساسی استفاده از سازه‌های چندلایه احتمال جدایی بین لایه‌ها در اثر بارگذاری اعمالی به خصوص در هنگام ضربه است. امروزه به منظور رفع این مشکل، ایده استفاده از مواد مدرج تابعی در صنایع پیشرفته مطرح شده است. کسر حجمی آنها در یک یا دو راستا، به طور پیوسته و تدریجی از یک سطح به سطح دیگر تغییر می‌کند، در نتیجه یک توزیع پیوسته از خواص را فراهم می‌سازد. وجود تغییرات تدریجی در ساختار این مواد باعث کاهش تمرکز تنش و تنش‌های پسماند می‌شود. مشخصات فیزیکی و مکانیکی این مواد، استفاده از آنها را در صنایع فضایی، هوافضا، اپتوالکترونیک و بیومکانیک مطرح کرده است. در صنعت هواپیمایی، صرفه‌جویی در سوخت نقش مهمی را ایفا می‌کند که با افزایش قیمت سوخت، این موضوع اهمیت بیشتری نیز یافته و نهایتاً موجب پذیرش مواد سبک‌تر و مستحکم‌تر به منظور کاهش هزینه‌ها خواهد شد. آشناترین مواد مدرج را می‌توان نمونه‌ای از ترکیب سرامیک و فلز نام برد که وظایف ناسازگار مانند مقاومت در مقابل حرارت، خوردگی و زنگ زدن در معرض محیط‌های با درجه حرارت بالا و همچنین خواص مکانیکی بالا مانند چقرمگی و قابلیت ماشین کاری را به صورت یکجا دارد. مواد مدرج تابعی به دلیل خواص منحصربفرد و شگفت‌انگیزشان، کاندیدای مناسبی برای گسترده وسیعی از کاربردها هستند و توجه بسیاری از محققین را به خود جلب کرده است [۳-۱].

اسوامیناسان و همکاران [۴] رفتار کماتش صفحات مدرج تابعی تحت بارهای جزئی توزیع شده در لبه‌ها را با استفاده از رویکرد دینامیکی مورد مطالعه قرار دادند. نتایج نشان می‌دهد

که رفتار سازه در معرض بارهای جزئی در مقایسه با حالت بارگذاری کامل بسیار متفاوت است؛ همچنین آنها نشان دادند، هنگامی که موقعیت بار نزدیک به لبه صفحه باشد، صفحه کمتر مستعد کماتش است. حاجلوبی و همکاران [۵] رفتار کماتش حرارتی پوسته مدرج تابعی را با استفاده از رابطه اصلاح شده المان پوسته جامد تقویت شده مرتبه اول تحلیل کردند. خواص را در دو حالت تابع دما و وابسته به دما در نظر گرفتند و نتایج را با استفاده از روش المان محدود سه بعدی استخراج نمودند. حسینی هاشمی و همکاران [۶] ارتعاشات آزاد تیرهای اویلر-برنولی غیریکنواخت و مدرج تابعی تک‌محوری با شرایط مرزی غیر کلاسیک را مطالعه کرده‌اند. از فرمول کوشی برای انتگرال-گیری های مکرر استفاده کردند. همگرایی و ارزیابی نتایج آنان از طریق تحلیل المان محدود و با استفاده از آباکوس انجام گرفت. نتایج نشان می‌دهد که روش مورد استفاده از دقت بسیار خوبی در مقایسه با سایر روش‌های مورد استفاده توسط پژوهشگران برخوردار است و قادر به تحلیل ارتعاشات تیرها با طیف وسیعی از شرایط مرزی کلاسیک، غیر کلاسیک، سطح مقطع یکنواخت، غیریکنواخت، همگن و یا مدرج تابعی تک-محوری را داراست. نگویان و همکاران [۷] تحلیل کماتش حرارتی و ارتعاشات صفحات مدرج تابعی را با استفاده از تئوری مرتبه بالای برشی ارائه دادند. یک تابع توزیع نمایی جدید برای توزیع خواص در نظر گرفتند و نتایج را با استفاده از روش ریتز به دست آوردند. دهقان و همکاران [۸] تحلیل غیرخطی یک استوانه جدارضخیم مدرج تابعی را با در نظر گرفتن فشار داخلی بررسی نمودند. آنها از تئوری اغتشاش^۱ برای حل معادلات غیرخطی انتقال حرارت استوانه استفاده کردند. به منظور گسسته‌سازی شرایط مرزی و معادلات حاکم بر مسئله از روش عددی مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته^۲ بهره گرفتند. نتایج آنها نشان می‌دهد برای رسیدن به دقت مناسب در استخراج توزیع دما، باید از ترم های بیشتری از سری اغتشاشی استفاده کرد. عارفی و سلطان آرائی [۹] ارتعاشات آزاد غیرموضعی نانوصفات سه لایه مدرج تابعی را بر اساس تئوری برشی مرتبه بالا با در نظر گرفتن اثرات کشش مطالعه کردند. از اصل کار مجازی برای استخراج معادلات حاکم بر حرکت استفاده کردند. نتایج حاکی از آن است که رفتار ارتعاشی این سیستم در اثر در نظر گرفتن اثرات کشش، در مقایسه با حالتی که این

² Modified Generalized Differential Quadrature Method

¹ Perturbation Theory

پوانکاره-لیندستت اصلاح شده^۴، معادلات به منظور بررسی رفتار ارتعاشات آزاد تیر مخروطی آزاد حل شدند. فرقانی و همکاران [۱۵] از تئوری مرتبه سوم تغییر شکل برشی ردی رفتار فرکانسی تیرهای متخلخل مدرج تابعی دو جهته با سطح مقطع متغیر را روی بستر الاستیک مطالعه کردند. تغییرات خواص مکانیکی در دو راستای ضخامت و طول را به صورت دو مدل قانون نمایی و قانون توانی در نظر گرفتند. معادلات دیفرانسیلی حاکم را با در نظر گرفتن شرایط مرزی مختلف با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته حل نمودند. در نهایت تاثیر پارامترهای مختلف مانند پارامترهای هندسی، شاخص گردایان خواص مواد در دو جهت، شرایط مرزی، ضرائب بستر الاستیک و تخلخل روی فرکانس طبیعی تیرهای مدرج تابعی دو جهته مورد ارزیابی قرار گرفت. محمدی و همکاران [۱۶] پاسخ ترموالاستیک دو بعدی مخازن تحت فشار استوانه‌ای کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله کربنی مدرج تابعی را با استفاده از نظریه تغییر شکل برشی مرتبه سوم تجزیه و تحلیل کردند. خواص موثر مخازن تحت فشار استوانه‌ای را برای الگوهای مختلف تقویت کننده‌ها مطابق قانون اختلاط محاسبه کردند و معادلات حاکم بر مسئله را با استفاده از اصل کار مجازی استخراج کردند. خورشیدی و همکاران [۱۷] در پژوهشی آنالیز کمانش نانوصفحات مستطیلی مدرج تابعی را با در نظر گرفتن اثر سطح مورد بررسی قرار دادند. برای تعریف خواص مواد از مدل موری تاناکا^۴ استفاده نمودند. کوونگ-له و همکاران [۱۸] خمش استاتیک، ارتعاش آزاد و کمانش نانوصفحه مدرج سیگموئیدی^۵ را با استفاده از تئوری میندیلین، تئوری گردایان کرنش غیرمحملی و اصل کار مجازی ارائه دادند. نتایج بررسی‌های آنان نشان می‌دهد، خمش استاتیک، ارتعاش آزاد و پاسخ‌های کمانشی به طور قابل توجهی تحت تاثیر تغییرات مواد در امتداد ضخامت، محل محور خنثی، پارامتر غیرمحملی، پارامتر گردایان کرنش و شاخص مواد قرار می‌گیرند. تئوری‌های مختلفی برای تحلیل ورق‌ها وجود دارد که از پرکاربردترین آن‌ها می‌توان به تئوری کلاسیک و تئوری تغییر شکل برشی اشاره کرد. اولین تئوری، تئوری کلاسیک ورق بر اساس فرضیه لاو-کیرشهف^۶ است که اثر تغییر شکل برشی

اثر در نظر گرفته نمی‌شود؛ با کاهش فرکانس‌های طبیعی مواجه می‌شود.

یلدیز و اسن [۱۰] مدل‌سازی و تحلیل رفتار کمانش ترمومکانیکی نانوصفحات ساندویچی با هسته فوم و رویه‌های مدرج تابعی را بر اساس تئوری تغییر شکل مرتبه بالای جدید و نظریه گردایان کرنش غیرمحملی^۱ ارائه نمودند. از اصل انرژی پتانسیل کل برای استخراج سختی و ماتریس‌های هندسی استفاده شده است. در این انش صفحات مدرج تابعی مطالعه شده است. آنها نشان دادند که رفتار کمانش ترمومکانیکی نانوصفحات ساندویچی به طور قابل توجهی تحت تاثیر نوع ساندویچ، نسبت فوم حجمی هسته و توزیع آن در امتداد ارتفاع هسته فوم است. مویتا و همکاران [۱۱] کمانش خطی و غیرخطی ورق‌های کامپوزیتی و تابعی مدرج را با استفاده از تئوری برشی مرتبه بالا ارائه نمودند. آنها خواص را تابع دما در نظر گرفتند و برای حل معادلات حاکم از روش المان محدود استفاده کردند. محمدی و همکاران [۱۲] اثر تراکم ناپذیری را بر پاسخ‌های استاتیکی، دینامیکی و پایداری ورق ضخیم مدرج تابعی بررسی کردند. آنها از تئوری تغییر شکل مرتبه بالا^۲ برای استخراج معادلات حرکت استفاده کردند. آنها دریافتند که حالت کمانش بحرانی بستگی به شرایط بارگذاری، نسبت ابعاد و همچنین خصوصیات ماده دارد. همچنین نشان دادند که ظرفیت حمل بار زمانی که ورق با ترکیبی از بارهای کششی و فشاری به صورت دو محوری بارگذاری می‌شود، بالاتر خواهد بود. حل تحلیلی معادلات حرکت نانوصفحات غیر موضعی ساندویچی مدرج تابعی با در نظر گرفتن تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا برای بررسی تاثیر شاخص توانی، پارامتر غیرمحملی، پارامترهای هندسی نانوصفحه و تغییرات دما، با استفاده از روش حل ناویر توسط دایخ و همکاران [۱۳] انجام گرفته است. تجزیه و تحلیل ارتعاشات آزاد غیرخطی پوسته های مخروطی مدرج تابعی دو جهته توسط سهمانی و همکاران [۱۴] ارائه شده است. تغییر خواص مکانیکی در راستای ضخامت و طول پوسته مخروطی را بر اساس توزیع قانون توانی در نظر گرفتند. بر اساس تئوری مرتبه اول برشی و روابط کرنش جابجایی غیر خطی فون کارمن معادلات حرکت استخراج شدند و در نهایت با به کارگیری رویکرد گالرکین و روش

⁴ Mori-Tanaka Model

⁵ Sigmoid FG Nano Plate

⁶ Kirchhoff-Love Hypothesis

¹ Nonlocal Strain Gradient Theory

² Higher Order Shear Deformation Theory

³ Modified Poincaré-Lindstedt Method

دایخ و همکاران [۲۴] انحراف خمشی و توزیع تنش غیر موضعی نانوصفحات ساندویچی مدرج تابعی مستقر بر بستر الاستیک وینکلر^۶ را بر اساس تئوری شبه سه بعدی برشی هایپربولیک را بررسی نمودند. از تئوری گرادیان کرنش برای در نظر گرفتن اثرات غیرموضعی استفاده کردند. اثرات مدرج را با سه پیکربندی مختلف بررسی کردند.

ارتعاشات و کمانش تیرهای متخلخل مدرج تابعی مستقر بر بستر الاستیک وینکلر-پاسترناک متغیر^۷ با در نظر گرفتن تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالا به صورت تحلیلی توسط ملال و همکاران [۲۵] مطالعه شده است. کریمی و همکاران [۲۶] بررسی تحلیلی رفتار استاتیکی صفحات ساندویچی ساخته شده از رویه های همسانگرد و یک هسته لانه زنبوری^۸ با استفاده از تئوری های تغییر شکل برشی مرتبه بالا را ارائه نمودند. نتایج نشان می دهد که اکستیکیت هسته^۹ به شدت بر پاسخ مکانیکی سازه ساندویچی تأثیر می گذارد. طاهر و همکاران [۲۷] انتشار موج در صفحات ساندویچی مدرج تابعی مستقر بر بستر ویسکوالاستیک را با استفاده از یک تئوری شبه سه بعدی مرتبه بالا مورد مطالعه قرار دادند. از یک تابع سینوسی برای در نظر گرفتن تغییر شکل برشی همراه با اعمال اثر کشش در راستای ضخامت استفاده کردند. معادلات دیفرانسیل حاکم بر اساس اصل کار مجازی استخراج شدند و یک مسئله مقدار ویژه برای بررسی انتشار موج فرموله شده محاسبه گردید. مامندی و میرزایی قلعه [۲۸] ارتعاشات غیرخطی میکروتیر ایزوتروپیک مستقر بر بستر وینکلر را تحت تاثیر بار محوری فشاری با استفاده از مدل اویلر برنولی با در نظر گرفتن نظریه تنش کوپل اصلاح شده مطالعه کردند. در نهایت یک مطالعه پارامتری جامع برای بررسی اثرات پارامترهای مختلف بر فرکانس های غیرخطی و خطی میکروتیر انجام گرفت. نتایج نشان می دهد که با افزایش نیروی محوری، نسبت فرکانس غیرخطی به فرکانس خطی افزایش می یابد. برداشت انرژی از تیرهای ناهمگن با رویه های پیزوالکتریک با استفاده از تئوری های اصلاح شده با در نظر گرفتن حالات مختلف شرایط مرزی توسط خورشیدی و همکاران [۲۹] ارائه

عرضی را در نظر نمی گیرد. این تئوری به منظور بررسی ورق-های نازک ارائه شده و منتهی به جواب های دقیقی می شود. این در شرایطی است که با افزایش ضخامت ورق، از دقت جواب های این تئوری کاسته می شود. همانطور که بیان شد، دلیل آن نادیده گرفته شدن تغییر شکل های برشی عرضی در تئوری کلاسیک است. در تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، تاثیر کرنش های برشی عرضی و همچنین اثر اینرسی دورانی لحاظ می شود. نظریه تغییر شکل برشی مرتبه اول می تواند نتایج نسبتاً قابل قبولی را برای صفحات نسبتاً ضخیم و همچنین صفحات نازک نشان دهد. با این حال، تغییر شکل برشی در جهت ضخامت تغییر ناپذیر در نظر گرفته می شود و بنابراین تنش برشی بدست آمده، شرایط مرزی بدون کشش را نقض می کند. به عبارت دیگر با توجه به صفر نبودن تنش های برشی در سطوح آزاد ورق، یک ضریب تصحیح برش نیاز است. به منظور پیش بینی های مناسب در مورد ورق های ضخیم بدون در نظر گرفتن ضریب تصحیح برش، انواع مختلفی از تئوری-های تغییر شکل برشی مرتبه بالاتر از جمله تئوری های مرتبه سوم، مرتبه پنجم، تئوری های تغییر شکل برشی هارمونیک^۱، هایپربولیک^۲، پارابولیک^۳ و نمایی^۴، تئوری صفحه پالایش یافته^۵ و غیره ارائه می شود. در این تئوری ها به دلیل در نظر گرفتن تنش برشی صفر در سطوح آزاد ورق دیگر نیازی به استفاده از ضریب تصحیح برشی نیست. این تئوری ها تغییرات تنش برشی در راستای ضخامت ورق را به صورت غیرخطی و پارابولیک فرض می کنند و راه حل های مطمئن تری نسبت به مدل های کلاسیک و مرتبه اول هستند. تئوری های پالایش شده برای اولین بار توسط شیمپی [۱۹] تنها با چهار متغیر ناشناخته بدست آمده و توسط شیمپی و پاتل [۲۰ و ۲۱] با استفاده از دو متغیر اصلاح شد. علاوه بر این، نظریه الاستیسیته سه بعدی و نظریه شبه سه بعدی که اثر کشش ضخامت را در نظر می گیرند می توانند پیش بینی های دقیقی در مورد رفتارهای سازه ها ارائه دهند. پژوهشگران بسیاری مطالعات خود را به بررسی این تئوری استوار ساخته اند [۲۲ و ۲۳].

⁷ Variable Winkler-Pasternak Elastic Foundation

⁸ Honeycomb Core

⁹ The auxeticity of The Core

¹ Harmonic Shear Deformation Theory

² Hyperbolic Shear Deformation Theory

³ Parabolic Shear Deformation Theory

⁴ Exponential Shear Deformation Theory

⁵ Refined Plate Theory

⁶ Winkler Elastic Foundation

مطالعه نمودند. اثرات غیر محلی را با استفاده از تئوری گرادیان کرنش اعمال کردند و موقعیت سطح خنثی را به منظور حفظ تقارن در صفحه مدرج تابعی در نظر گرفتند. پس از حل نیمه تحلیلی معادلات در شرایط مرزی مختلف، به مقایسه و بررسی نتایج ارتعاشی در مدل‌های دوبعدی و شبه سه بعدی، مدل‌های محلی و غیرمحلی پرداختند. های وان و هنگ [۳۵] تحلیل کماتش و ارتعاش آزاد ضخامت غیریکنواخت صفحات متخلخل ساندویچی مدرج تابعی مستقر بر پایه های الاستیک را در یک محیط رطوبتی-حرارتی بر اساس تئوری شبه سه بعدی تصفیه شده مطالعه کردند. در نهایت یک تحلیل جامع از تأثیر عوامل مختلف بر پاسخ‌های کماتش و ارتعاشات آزاد ارائه دادند. نتایج آنها نشان می‌دهد که الگوهای تخلخل جدید، محیط رطوبتی-حرارتی و شرایط مرزی مختلف تأثیر قابل توجهی بر رفتارهای مکانیکی صفحات متخلخل دارند.

سازه‌های ساندویچی یکی از پیشرفته‌ترین و مدرن‌ترین سازه‌ها هستند که برای استحکام بخشی بر اساس مصالح به کار رفته در ساخت آن‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرند. انبارهای سردخانه‌ای ثابت و سیار، صنایع فلزی، سازه‌های فضایی، سردخانه‌های صنعتی و نیمه صنعتی نمونه‌هایی از کاربرد سازه‌های ساندویچی در صنایع مختلف است. مواد پیزوالکتریک به طور گسترده به عنوان حسگر و محرک در سیستم‌های الکترومکانیکی مورد استفاده قرار می‌گیرند. علاوه بر این، از مواد پیزوالکتریک مختلف در برداشت انرژی، مهندسی زیست پزشکی و ساخت مواد افزودنی استفاده شده است؛ بنابراین به دلیل وجود لایه‌های پیزوالکتریک، ساندویچ‌های پیزوالکتریک در صنایع پزشکی از جمله دارورسانی، غضروف‌سازی، بازسازی اعصاب، پوست، تاندون‌ها و ماهیچه‌ها و همچنین صنایع نظامی و اپتیکی کاربرد فراوانی دارند.

در طول قرون گذشته، بسیاری از محققان به بررسی رفتار سازه‌ها پرداخته‌اند. با رشد صنایع و پیشرفت فناوری، اکنون ضرورت استفاده از مدل‌ها و روش‌های جدید برای دستیابی به نتایج دقیق و قابل اعتماد احساس می‌شود. استفاده از رویه‌های پیزوالکتریک به عنوان حسگر و محرک، همچنین حفاظت از هسته مدرج تابعی، با توجه به هزینه و فرآیند تولید آن، اهمیت بالایی دارد. با توجه به پیشینه جامع و دانش نویسندگان، تاکنون هیچ تلاشی برای بررسی رفتار کماتش تک‌محوری و دو

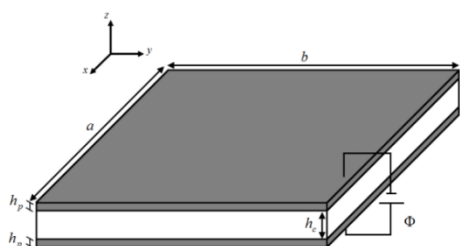
شده‌است. آنها خواص را به صورت توانی در راستای ضخامت سازه متغیر در نظر گرفتند. زنگور و الغانمی [۳۰] تئوری شبه سه بعدی تصفیه شده^۱ برای بررسی خمش صفحات ساندویچی متخلخل مدرج تابعی واقع بر بستر الاستیک را توسعه دادند. صفحات در معرض بارهای مکانیکی سینوسی قرار دارند. در این پژوهش؛ معادلات تعادل با استفاده از اصل کار مجازی استخراج و با استفاده از روش نایر حل و تأثیر پارامترهای مختلف بررسی شده‌است. حاجی و همکاران [۳۱] مطالعه تحلیل‌های کماتش و ارتعاش آزاد صفحات ساندویچی مدرج تابعی چند جهته را تحت شرایط مرزی مختلف با هسته سخت همگن و هسته نرم همگن با استفاده از تئوری صفحه تصفیه شده ارائه دادند. راه‌حل‌های تحلیلی را برای بررسی کماتش و ارتعاش آزاد صفحات ساندویچی توسعه دادند. نتایج به دست آمده نشان می‌دهد که ترکیب مواد مدرج تابعی مبتنی بر فلز و سرامیک به صورت طولی و عرضی، با استفاده از قانون توانی، متفاوت است. تجزیه و تحلیل کماتش صفحات ساندویچی متخلخل مدرج تابعی واقع بر بستر پاسترناک همراه با در نظر گرفتن تئوری تغییر شکل برشی هایپربولیک شبه سه بعدی تصفیه شده جدید توسط وو و همکاران [۳۲] مطالعه شده‌است. معادلات حاکم بر مسئله کماتش با استفاده از اصل کار مجازی به دست آمده و بر اساس استفاده از روش نایر نتایج استخراج شده‌است. در نهایت مطالعات پارامتریک جامع برای بررسی اثرات شاخص گرادیان، شاخص کسر تخلخل، نوع توزیع تخلخل، پارامترهای هندسی، نسبت تراکم دو جهته و سفتی پارامترهای بستر بر کماتش صفحات بررسی شده‌است. اکبری و همکاران [۳۳] ارتعاشات آزاد متقارن تک‌محوری صفحات ساندویچی مدرج تابعی را با استفاده از تئوری صفحه شبه سه بعدی در شرایط مرزی مختلف بررسی نموده‌اند. روش تربیع دیفرانسیل تعمیم یافته^۲ برای گسسته کردن معادلات حاکم بر صفحه ساندویچ حلقوی استفاده شده‌است. نتایج به خوبی نشان داد که تئوری کاربردی به طور دقیق فرکانس‌های طبیعی صفحات ساندویچ حلقوی مدرج تابعی را با ضخامت دلخواه پیش‌بینی می‌کند. سلطان آرائی و همکاران [۳۴] با در نظر گرفتن تئوری مرتبه بالای شبه سه بعدی تصفیه شده و اثرات سطحی رفتار ارتعاش آزاد غیرمحلی یک نانو صفحه مدرج تابعی مستقر بر بستر ویسکو پاسترناک ارتوتروپیک را

² Generalized Differential Quadrature Method¹ Refined Quasi-3D Theory

h شامل ضخامت هسته h_c و ضخامت رویه ها h_p است. رویه های پیزوالکتریک به عنوان عملگر و سنسور مورد استفاده قرار گرفته اند. ورق مورد نظر تحت بارگذاری درون صفحه در دو راستای طولی و عرضی فرض شده است. دستگاه مختصات کارتزین به طوری انتخاب شده که در آن صفحه $x - y$ منطبق بر صفحه میانی هسته باشد.

۲-۱- خاصیت مدرج تابعی

در این پژوهش هسته ورق مورد مطالعه از مواد تابعی مدرج در نظر گرفته شده و خواص مکانیکی به صورت پیوسته در راستای ضخامت بر اساس خاصیت یک ماده سرامیکی در بالاترین نقطه $z = h/2$ و یک ماده فلزی در پایین ترین نقطه $z = -h/2$ در حال تغییر است. خواص مؤثر مواد از روش اختلاط محاسبه می گردد. بر این اساس، کسر حجمی مواد و در نتیجه خواص هسته با استفاده از یک تابع توانی در راستای ضخامت تعیین می گردد [۱۰ و ۱۱].



شکل ۱- شماتیکی از دستگاه مختصات و هندسه ورق سه لایه

$$V_C = \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h_c} \right)^k \quad (1)$$

$$V_C + V_M = 1 \quad (2)$$

در رابطه فوق اندیس k شاخص تغییرات خواص یا نسبت حجمی مواد در راستای ضخامت نامیده می شود. این پارامتر برای مقادیر $k \geq 0$ معادلات را ارضا می کند. با در نظر گرفتن مقدار صفر، هسته دارای خاصیت سرامیکی خالص و با افزایش آن به سمت بی نهایت، خاصیت سرامیکی به خاصیت فلزی تبدیل خواهد شد. مدول بالک و مدول برشی مؤثر ورق مدرج تابعی با به کارگیری کسر حجمی ارائه شده در رابطه ۱ توصیف می شود. در رابطه ۲، اندیس های M و C به ترتیب مربوط به مواد

محوری ورق مدرج تابعی پوشش داده شده با رویه های پیزوالکتریک همراه با اثرات کششی صورت نگرفته است. انگیزه این مطالعه، ارائه راه حلی دقیق برای تحلیل کماتش شبه سه بعدی صفحه مدرج تابعی یکپارچه با رویه های پیزوالکتریک با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی بهبود یافته تحت تأثیر پتانسیل الکتریکی خارجی است؛ همچنین، درک رفتار کماتش سیستم های ساندویچی می تواند برای کاربرد در تشدیدگرهای الکترومکانیکی کلیدی باشد. این مطالعه برای اولین بار اثر کشش و تئوری شبه سه بعدی را برای بررسی و مقایسه رفتار دو بعدی و شبه سه بعدی صفحات ساندویچی مدرج تابعی در نظر گرفته است. نهایتاً، از نوآوری های این تحقیق، ارائه نتایج مقایسه ای در مدل های مختلف برای بار کماتش بحرانی سازه ساندویچی است.

۲-۲ مدلسازی معادلات

برای شبیه سازی رفتار سازه و همچنین نزدیک به واقعیت شدن رفتار مواد، معادلات بر اساس نظریه شبه سه بعدی در نظر گرفته شده است. تئوری پیشنهادی تغییرات مرتبه بالاتری از جابجایی عرضی در امتداد جهت ضخامت را در نظر گرفته است. ➤ به طور کلی فرض بر این است که σ_3 در مقایسه با τ_{13} و τ_{23} به جز در لبه های پوسته، بسیار کوچک است، به طوری که این فرضیه تقریب خوبی از رفتار واقعی صفحات ضخیم ارائه می دهد.

➤ فرض بر این است که رویه ها به طور ایده آل به هسته متصل می شوند. هیچگونه شرایط لغزشی بین رویه ها و هسته وجود ندارد و پیوستگی کامل بین لایه ها برقرار است؛ در نتیجه سازه یکپارچه در نظر گرفته می شود.

➤ فرض شده است که مواد مدرج تابعی به عنوان یک ماده الاستیک خطی در شرایط پیش از تسلیم مدل سازی می شود و خواص مکانیکی هسته در راستای ضخامت آن به صورت پیوسته و بر اساس قانون توانی در حال تغییر است.

➤ خواص مواد به صورت الاستیک در نظر گرفته شده است. ➤ اثرات دما و گرادیان حرارتی ثابت در نظر گرفته شده است.

یک ورق سه لایه متشکل از رویه های پیزوالکتریک و هسته مدرج تابعی، تحت میدان پتانسیل یکنواخت با طول a ، عرض b و ضخامت کلی h شکل ۱ نشان داده شده است. ضخامت کلی

فلزی و سرامیکی است [۱۰-۱۲]. خواص مؤثر مواد بر اساس فرضیات بیان شده در فوق برای دو ماده فلز و سرامیک، در رابطه ۳ و ۴ ارائه شده است. در این رابطه فرض بر این است که با تغییر خواص در راستای ضخامت هسته، جدایش بین لایه ها حادث نگردد. در این روابط P خواص مواد و V کسر حجمی فلز و سرامیک است.

فلزی و سرامیکی است [۱۰-۱۲]. خواص مؤثر مواد بر اساس فرضیات بیان شده در فوق برای دو ماده فلز و سرامیک، در رابطه ۳ و ۴ ارائه شده است. در این رابطه فرض بر این است که با تغییر خواص در راستای ضخامت هسته، جدایش بین لایه ها حادث نگردد. در این روابط P خواص مواد و V کسر حجمی فلز و سرامیک است.

$$P = P_C V_C + P_M V_M \quad (3)$$

$$P(z) = (P_C - P_M) \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{h_c} \right)^k + P_M \quad (4)$$

۲-۲- میدان جابجایی و کرنش

میدان جابجایی شبه سه بعدی بر اساس فرضیات تئوری بهبود یافته صفحات، مطابق روابط زیر ارائه می شود. در این مدل، تئوری چهار متغیره برای در نظر گرفتن اثرات کششی ضخامت توسعه داده شده است. این تئوری بدون در نظر گرفتن ضریب اصلاح برشی، به عنوان یک ابزار قدرتمند برای اعمال اثرات کششی ضخامت و تنش های و کرنش های برشی عرضی مورد استفاده قرار می گیرد. فرضیات این تئوری شامل (۱) جابجایی عرضی و درون صفحه از سه بخش خمشی، برشی و کششی تشکیل شده است (۲) بخش های خمشی جابجایی درون صفحه مشابه با بخش های خمشی تئوری ورق کلاسیک هستند (۳) بخش های برشی جابجایی درون صفحه بر اساس تغییرات مرتبه سوم کرنش های برشی ایجاد می شوند و از این رو تنش های برشی مربوط به چنین کرنش هایی در بالا و پایین ورق صفر هستند. نهایتاً رابطه کلی میدان جابجایی بر اساس فرضیات بیان شده در هر نقطه، به صورت زیر قابل بیان است که با توجه به استاتیکی بودن مساله حاضر، از وابستگی ترمها به زمان صرف نظر شده است [۲۹]:

در این نظریه تأثیرات تنش های نرمال در عمق صفحه در نظر گرفته شده است و همچنین تغییر شکل ها و تنش ها در تمام نقاط صفحه پیوسته فرض می شوند.

$$f(z) = z \left[-\frac{1}{4} + \frac{5}{3} \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right] \quad (8)$$

$$g(z) = 1 - f'(z) \quad (9)$$

بر اساس میدان جابجایی، کرنش های غیر صفر مطابق رابطه ۱۰ به دست می آیند.

$$\begin{aligned} \epsilon_{xx} &= \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - f(z) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ \epsilon_{yy} &= \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} - f(z) \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \\ \epsilon_{zz} &= \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} - f(z) \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y} - 2z \frac{\partial^2 w_b}{\partial x \partial y} - 2f(z) \frac{\partial^2 w_s}{\partial x \partial y} \quad (10) \\ \gamma_{xz} &= g(z) \left\{ \frac{\partial w_s}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \right\} \\ \gamma_{xy} &= g(z) \left\{ \frac{\partial w_s}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \right\} \\ \epsilon_{zz} &= g'(z) \phi \end{aligned}$$

روابط ساختاری و جابجایی الکتریکی بر اساس تئوری پیژو-الاستیسیته برای دو رویه پیژوالکتریک بالایی و پایینی به صورت روابط ۱۱-۱۲ می باشد [۳۲].

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= C_{11} \epsilon_{xx} + C_{12} \epsilon_{yy} + C_{13} \epsilon_{zz} - e_{31} E_z \\ \sigma_{yy} &= C_{12} \epsilon_{xx} + C_{22} \epsilon_{yy} + C_{23} \epsilon_{zz} - e_{32} E_z \\ \sigma_{zz} &= C_{13} \epsilon_{xx} + C_{23} \epsilon_{yy} + C_{33} \epsilon_{zz} - e_{33} E_z \\ \tau_{yz} &= C_{44} \gamma_{yz} - e_{24} E_y \\ \tau_{xz} &= C_{55} \gamma_{xz} - e_{15} E_x \\ \tau_{xy} &= C_{66} \gamma_{xy} \end{aligned} \quad (11)$$

$$u(x, y, z) = u_0 - z \frac{\partial w_b}{\partial x} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial x} \quad (5)$$

$$v(x, y, z) = v_0 - z \frac{\partial w_b}{\partial y} - f(z) \frac{\partial w_s}{\partial y} \quad (6)$$

$$w(x, y, z) = w_b + w_s + g(z) \phi \quad (7)$$

در معادلات فوق u_0 و v_0 جابجایی در راستای محورهای x و y دستگاه مختصات در صفحه میانی بوده و همچنین w_b

$$\begin{aligned} C_{c11} = C_{c22} = C_{c33} &= \frac{(1-\nu)E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \\ C_{c12} = C_{c13} = C_{c23} &= \frac{\nu E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \quad (16) \\ C_{c44} = C_{c55} = C_{c66} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \end{aligned}$$

۳-۲- معادلات حرکت

اصل کار مجازی برای استخراج معادلات حرکت استفاده شده که این اصل طبق رابطه ۱۷ تعریف می‌شود. در رابطه $W, 17$ بیان‌کننده کار انجام شده توسط نیروی خارجی و U انرژی کرنشی است [۳۸-۴۰].

$$\int_0^t (\delta U - \delta W) dt = 0 \quad (17)$$

با استفاده از اصل کمترین انرژی پتانسیل، تغییرات انرژی کرنشی سازه شامل هسته مدرج تابعی و رویه‌های پیزوالکتریک محاسبه می‌شود [۴۱].

$$\begin{aligned} \delta U &= \iiint [\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} - D_i \delta E_i] dV \quad (18) \\ \delta U &= \iiint \left(-\frac{\partial N_x}{\partial x} \delta u - \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \delta u - \frac{\partial N_y}{\partial y} \delta v \right. \\ &\quad - \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \delta v - \frac{\partial^2 M_{bx}}{\partial x^2} \delta w_b - \frac{\partial^2 M_{by}}{\partial y^2} \delta w_b \\ &\quad - 2 \frac{\partial^2 M_{bxy}}{\partial x \partial y} \delta w_b - \frac{\partial^2 M_{sx}}{\partial x^2} \delta w_s \\ &\quad - \frac{\partial^2 M_{sy}}{\partial y^2} \delta w_s - 2 \frac{\partial^2 M_{sxy}}{\partial x \partial y} \delta w_s \\ &\quad \left. - \left(\frac{\partial Q_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} \right) [\delta w_s - \delta \phi] \right. \\ &\quad \left. + R_{cz} \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} \right) \delta \phi + R_{sz} \left[\frac{D_z \pi}{h_p} \right] \delta \phi \right. \\ &\quad \left. + N_z \delta \phi \right) dA \end{aligned} \quad (19)$$

با جایگذاری کرنش‌ها و میدان‌های الکتریکی در رابطه فوق و با انتگرال‌گیری در راستای ضخامت سازه، رابطه ۱۹ بر اساس منتجه‌های نیرویی و ممانی به دست می‌آید. منتجه‌ها به صورت

$$\begin{aligned} D_x &= e_{15} \gamma_{xz} + \kappa_{11} E_x \\ D_y &= e_{24} \gamma_{yz} + \kappa_{22} E_y \\ D_z &= e_{31} \varepsilon_{xx} + e_{32} \varepsilon_{yy} + e_{33} \varepsilon_{zz} + \kappa_{33} E_z \end{aligned} \quad (12)$$

در این معادلات σ_{ij} و ε_{ij} معرف تنش‌ها و کرنش‌ها بوده و C_{ij} و e_{ij} و κ_{ij} به ترتیب بیانگر ضرایب سفتی الاستیک، پیزوالکتریک و دی‌الکتریک هستند؛ همچنین E_i اجزای میدان الکتریکی را بیان می‌کند که بر اساس در آن توزیع پتانسیل الکتریکی به صورت ترکیبی از یک تابع خطی و یک تابع مثلثاتی فرض شده است [۳۶-۳۲].

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \Phi(x, y, z) \quad (13)$$

$$\Phi(x, y, z) = 2 \frac{\bar{z} V_0}{h_p} - \cos \left(\frac{\pi \bar{z}}{h_p} \right) \phi(x, y) \quad (14)$$

V_0 ولتاژ اولیه خارجی اعمال شده به رویه‌های پیزوالکتریک و $\phi(x, y)$ تغییرات پتانسیل در دو راستای x و y را نمایش می‌دهد؛ همچنین $\bar{z} = z \mp \frac{h_c}{2} \mp \frac{h_p}{2}$ بیانگر ارتفاع موثر برای رویه‌های پیزوالکتریک است. از طرف دیگر معادلات ساختاری برای هسته مدرج تابعی به صورت زیر ارائه می‌شود [۳۶-۳۲].

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= C_{c11} \varepsilon_{xx} + C_{c12} \varepsilon_{yy} + C_{c13} \varepsilon_{zz} \\ \sigma_{yy} &= C_{c12} \varepsilon_{xx} + C_{c22} \varepsilon_{yy} + C_{c23} \varepsilon_{zz} \\ \sigma_{zz} &= C_{c13} \varepsilon_{xx} + C_{c23} \varepsilon_{yy} + C_{c33} \varepsilon_{zz} \\ \tau_{yz} &= C_{c44} \gamma_{yz} \\ \tau_{xz} &= C_{c55} \gamma_{xz} \\ \tau_{xy} &= C_{c66} \gamma_{xy} \end{aligned} \quad (15)$$

که در آن ضرائب الاستیک طبق رابطه ۱۶ بیان می‌شوند [۳۷].

$\delta\phi$ معادلات حاکم سازه سه لایه متشکل از هسته مدرج تابعی و رویه‌های پیزوالکتریک تحت میدان الکتریکی، بر اساس منتهجه‌ها به دست می‌آید.

$$\delta u: \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (26)$$

$$\delta v: \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (27)$$

$$\delta w_b: \frac{\partial^2 M_{bx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{by}}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{bxy}}{\partial x \partial y} + \bar{N} = 0 \quad (28)$$

$$\delta w_s: \frac{\partial^2 M_{sx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{sy}}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{sxy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial Q_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} + \bar{N} = 0 \quad (29)$$

$$\delta\phi: \frac{\partial Q_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial Q_{xz}}{\partial x} - N_z = 0 \quad (30)$$

$$\delta\phi: R_{cz} \left(\frac{\partial D_x}{\partial x} + \frac{\partial D_y}{\partial y} \right) + R_{sz} \left[\frac{D_z \pi}{h_p} \right] = 0 \quad (31)$$

در نهایت با جایگذاری روابط ۲۲-۲۰ و استفاده از روابط ۱۴-۱۰، معادلات حاکم بر اساس جابجایی‌ها به صورت زیر ارائه می‌شود.

$$\delta u: A_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + A_{12} \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} - B_{11} \frac{\partial^3 w_b}{\partial x^3} + E_{11} \frac{\partial \phi}{\partial x} - F_{11} \frac{\partial^3 w_s}{\partial x^3} - F_{12} \frac{\partial^3 w_s}{\partial y^2 \partial x} - B_{12} \frac{\partial^3 w_b}{\partial y^2 \partial x} + A_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + A_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} - 2B_{66} \frac{\partial^3 w_b}{\partial y^2 \partial x} + D_{11} \frac{\partial \phi}{\partial x} - 2F_{66} \frac{\partial^3 w_s}{\partial y^2 \partial x} \quad (32)$$

$$\delta v: A_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + A_{11} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - B_{12} \frac{\partial^3 w_b}{\partial y \partial x^2} + E_{11} \frac{\partial \phi}{\partial y} - F_{12} \frac{\partial^3 w_s}{\partial y \partial x^2} - F_{11} \frac{\partial^3 w_s}{\partial y^3} + A_{66} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} - B_{11} \frac{\partial^3 w_b}{\partial y^3} + A_{66} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 2B_{66} \frac{\partial^3 w_b}{\partial y \partial x^2} - 2F_{66} \frac{\partial^3 w_s}{\partial y \partial x^2} + D_{11} \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (33)$$

روابط ۲۲-۲۰ تعریف می‌شوند. h_r و h_{r+1} به ترتیب معرف کران‌های پایین و بالای ضخامت در لایه r ام هستند.

$$\begin{bmatrix} N_x & M_{bx} & M_{sx} \\ N_y & M_{by} & M_{sy} \\ N_{xy} & M_{bxy} & M_{sxy} \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$= \sum_{r=1}^3 \int_{h_r}^{h_{r+1}} (1 \quad z \quad f(z)) \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} dz$$

$$\begin{bmatrix} Q_{xz} & Q_{yz} \end{bmatrix} = \sum_{r=1}^3 \int_{h_r}^{h_{r+1}} g(z) \begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} dz \quad (21)$$

$$N_z = \sum_{r=1}^3 \int_{h_r}^{h_{r+1}} g'(z) \begin{Bmatrix} \sigma_{zz} \end{Bmatrix} dz \quad (22)$$

$$\begin{bmatrix} R_{cz} & R_{sz} \end{bmatrix} = \sum_{r=1}^3 \int_{h_r}^{h_{r+1}} \begin{Bmatrix} \cos\left(\frac{\pi z}{h_p}\right) & \sin\left(\frac{\pi z}{h_p}\right) \end{Bmatrix} dz \quad (23)$$

منتجه کار خارجی اعمال شده ناشی از پتانسیل الکتریکی خارجی و نیروهای درون صفحه را می‌توان به صورت زیر مدل نمود. در این رابطه N_{ex} و N_{ey} ناشی از پتانسیل الکتریکی و همچنین N_{xx} و N_{yy} ناشی از بارهای درون صفحه در راستای طولی و عرضی هستند [۴۳-۴۰].

$$\bar{N} = \begin{Bmatrix} N_{xx} + N_{ex} \\ N_{yy} + N_{ey} \end{Bmatrix} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) (w_b + w_s) \quad (24)$$

سازه سه لایه تحت بارهای دو محوره فشاری درون صفحه به صورت $N_{xx} = -N_0$ و $N_{yy} = -\gamma N_0$ قرار دارد که در آن $\gamma = N_{yy}/N_{xx}$ از سوی دیگر نیروی مربوط به پتانسیل الکتریکی در دو محور با استفاده از ولتاژ خارجی به صورت $N_{ex} = N_{ey} = -2e_{31}V_0$ توصیف می‌شود. سر انجام تغییرات کار خارجی بر اساس رابطه (۲۵) قابل ارائه است.

$$\delta W = \iint (\bar{N}) \delta w \, dA \quad (25)$$

با جایگذاری روابط ۲۵ و ۱۹ در رابطه ۱۸ و جداسازی و برابر صفر قرار دادن ضرائب $\delta u, \delta v, \delta w_b, \delta w_s, \delta\phi$ و

$$\begin{Bmatrix} A_{ij} \\ B_{ij} \\ J_{ij} \end{Bmatrix} = \sum_{r=1}^3 \int_{h_r}^{h_{r+1}} C_{ij} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ z^2 \end{Bmatrix} dz \quad i, j \quad (38)$$

$$\begin{Bmatrix} F_{ij} \\ R_{ij} \\ L_{ij} \end{Bmatrix} = \sum_{r=1}^3 \int_{h_r}^{h_{r+1}} C_{ij} \begin{Bmatrix} f(z) \\ zf(z) \\ f^2(z) \end{Bmatrix} dz \quad i, j \quad (39)$$

$$[D_{ii}] = \sum_{r=1}^3 \int_{h_r}^{h_{r+1}} C_{13} g'(z) \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \end{Bmatrix} dz \quad i = 1, 2, 3 \quad (40)$$

ضرائب سفتی و پیزوالکتریک و دی الکتریک پس از ساده سازی به صورت زیر قابل بیان است.

$$[E_{ii}] = \sum_{r=1}^3 \int_{h_r}^{h_{r+1}} \frac{\pi e_{31}}{h_p} \sin\left(\frac{\pi \bar{z}}{h_p}\right) \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \end{Bmatrix} dz \quad i = 1, 2, 3 \quad (41)$$

$$I_{11} = \sum_{r=1}^3 \int_{h_r}^{h_{r+1}} \epsilon_{11} \sin^2\left(\frac{\pi \bar{z}}{h_p}\right) dz$$

$$H_{11} = \sum_{r=1}^3 \int_{h_r}^{h_{r+1}} e_{15} g(z) \cos\left(\frac{\pi \bar{z}}{h_p}\right) dz \quad (42)$$

$$G_{11} = \sum_{r=1}^3 \int_{h_r}^{h_{r+1}} e_{15} g^2(z) dz$$

$$A_{33} = \sum_{r=1}^3 \int_{h_r}^{h_{r+1}} C_{33} (g'(z))^2 dz$$

$$B_{33} = \sum_{r=1}^3 \int_{h_r}^{h_{r+1}} \frac{\pi}{h_p} e_{33} g'(z) \sin\left(\frac{\pi \bar{z}}{h_p}\right) dz \quad (43)$$

$$I_{33} = \sum_{r=1}^3 \int_{h_r}^{h_{r+1}} \frac{\pi^2}{h_p^2} \epsilon_{33} \sin^2\left(\frac{\pi \bar{z}}{h_p}\right) dz$$

۳- روش حل

برای بررسی رفتار کمانشی و تعیین بار بحرانی ورق مدرج تابعی همراه با رویه های پیزوالکتریک، از روش حل تحلیلی استفاده شده است. این تحلیل برای حالتی که ورق دارای هندسه ساده با شرایط تکیه گاهی چهار طرف ساده در لبه ها می باشد، مورد استفاده است و شرایط مرزی دیگر با توجه به این معادلات فرض شده، قابل بررسی نمی باشند. در تکیه گاه ساده، لبه صفحه اجازه چرخش آزادانه دارد. از طرفی لبه تکیه گاه ساده

$$\begin{aligned} \delta w_b: & B_{11} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + B_{12} \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2} - J_{11} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} \\ & - 2J_{12} \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^2 \partial x^2} - R_{11} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} - 2R_{12} \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^2 \partial x^2} \\ & + D_{22} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + E_{22} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + B_{12} \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial x} \\ & + B_{11} \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} - J_{11} \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} - R_{11} \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} & + D_{22} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + E_{22} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + 2B_{66} \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2} \\ & + 2B_{66} \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial x} - 4J_{66} \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^2 \partial x^2} \\ & - 4R_{66} \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^2 \partial x^2} + \bar{N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta w_s: & F_{11} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + F_{12} \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2} - R_{11} \frac{\partial^4 w_b}{\partial x^4} \\ & - 2R_{12} \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^2 \partial x^2} - L_{11} \frac{\partial^4 w_s}{\partial x^4} - 2L_{12} \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^2 \partial x^2} \\ & + D_{33} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + E_{33} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + F_{12} \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial x} \\ & + F_{11} \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} - R_{11} \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^4} - L_{11} \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^4} \\ & + D_{33} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + E_{33} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + 2F_{66} \frac{\partial^3 v}{\partial y \partial x^2} \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} & + 2F_{66} \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial x} - 4R_{66} \frac{\partial^4 w_b}{\partial y^2 \partial x^2} \\ & - 4L_{66} \frac{\partial^4 w_s}{\partial y^2 \partial x^2} + G_{11} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + G_{11} \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} + \bar{N} \\ & - H_{11} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + G_{11} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + G_{11} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ & - H_{11} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta \phi: & G_{11} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + G_{11} \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} - H_{11} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \\ & + G_{11} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + G_{11} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} - H_{11} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - D_{11} \frac{\partial u}{\partial x} \\ & - D_{11} \frac{\partial v}{\partial y} - A_{33} \phi + D_{22} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \\ & + D_{33} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} - B_{33} \phi + D_{33} \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \delta \phi: & H_{11} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + H_{11} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} + I_{11} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \\ & + H_{11} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + H_{11} \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} + I_{11} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + E_{11} \frac{\partial u}{\partial x} \\ & + E_{11} \frac{\partial v}{\partial y} + B_{33} \phi - E_{22} \frac{\partial^2 w_b}{\partial x^2} - E_{22} \frac{\partial^2 w_b}{\partial y^2} \\ & - E_{33} \frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} - I_{33} \phi - E_{33} \frac{\partial^2 w_s}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (37)$$

نیازمند بسط دادن جابجایی‌ها و چرخش‌ها به صورت سری‌های فوریه دوگانه به شکل زیر است [۳۹ و ۴۲-۴۵].
برای این منظور توابع سعی به صورت روابط ۴۶ تعریف می‌شوند. توابع سعی ارائه شده در رابطه (۴۶)، شرایط مرزی چهار طرف تکیه گاه ساده را ارضا می‌کنند.

در این روابط $\phi_{mn}, \varphi_{mn}, W_{smn}, W_{bmn}, V_{mn}, U_{mn}$ ضرایب سری فوریه و $\eta = m\pi/a$ و $\xi = n\pi/b$ می‌باشند. با جایگذاری رابطه ۴۳ در روابط ۳۶-۳۱ و پس از ساده سازی، معادلات ماتریسی به فرم بسته به صورت رابطه ۴۶ ارائه شده که با حل آن، بار بحرانی کمانش ورق مدرج تابعی یکپارچه شده با رویه‌های پیزوالکتریک به دست می‌آید که $[K]$ ماتریس سفتی و $[S]$ ماتریس ضرائب نیروهای درون صفحه برای ورق مدرج تابعی می‌باشند.

$$([K] - [S]) \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{bmn} \\ W_{smn} \\ \varphi_{mn} \\ \phi_{mn} \end{Bmatrix} = 0 \quad (47)$$

۴- نتایج عددی و بحث

در این بخش، نتایج تحلیلی تعیین بار بحرانی کمانش سازه سه لایه، ساخته شده از هسته مدرج تابعی و رویه‌های پیزوالکتریک با استفاده از تئوری بهبود یافته شبه سه بعدی استخراج شده است. در ابتدا و پیش از ارائه نتایج، به منظور ارزیابی و صحت-سنجی تئوری ارائه شده، نتایج حاصل از تئوری حاضر با نتایج تحلیلی تئوری‌های مرتبه بالا [۴۷-۴۹] و نتایج تئوری پالایش شده [۳۶] مقایسه شده‌است. میدان جابجایی به منظور مقایسه و ارزیابی نتایج به صورت رابطه ۵۰-۴۸ در نظر گرفته شده است.

$$u(x, y, z) = u_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial x} - f(z)\theta_x \quad (48)$$

$$v(x, y, z) = v_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial y} - f(z)\theta_y \quad (49)$$

$$w(x, y, z) = w_0 \quad (50)$$

تئوری‌های مرتبه بالا به صورت تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول (FSDT)، تئوری تغییر شکل برشی پارابولیک (PSDT) تئوری تغییر شکل برشی سینوسی (SSDT)

می‌تواند به طور عمودی حرکت کند، اما این جابجایی به صورتی است که تغییر شکل صفحه را محدود می‌کند. در واقع، لبه نمی‌تواند به طور افقی جابجا شود. در تکیه‌گاه ساده، ممان خمشی در لبه صفر است. شرایط مرزی به صورت زیر قابل بیان هستند:

$$\begin{aligned} & \text{At } x = 0 \quad \text{and} \quad x = a \\ & v_0 = w_b = w_s = \frac{\partial w_b}{\partial y} = \frac{\partial w_s}{\partial y} = N_x = M_{bx} \\ & = M_{sx} = \varphi = 0 \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} & \text{At } y = 0 \quad \text{and} \quad y = b \\ & u_0 = w_b = w_s = \frac{\partial w_b}{\partial x} = \frac{\partial w_s}{\partial x} = N_y = M_{by} \\ & = M_{sy} = \varphi = 0 \end{aligned} \quad (45)$$

$$\begin{aligned} u_0(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} \cos(\eta x) \sin(\xi y) \\ v_0(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn} \sin(\eta x) \cos(\xi y) \\ w_b(x, y) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{bmn} \sin(\eta x) \sin(\xi y) \end{aligned} \quad (46)$$

$$w_s(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{smn} \sin(\eta x) \sin(\xi y)$$

$$\varphi(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{mn} \sin(\eta x) \sin(\xi y)$$

$$\phi(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \phi_{mn} \sin(\eta x) \sin(\xi y)$$

روش تحلیل ناویر یکی از روش‌های قدرتمند و محبوب در مکانیک سازه‌ها و تحلیل صفحات است. این روش بر مبنای فرضیات ساده و قابل حل از طریق ریاضیات دقیق قرار دارد. این روش عمده‌تاً برای صفحات با شرایط مرزی ساده مثل صفحات دارای شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده استفاده می‌شود. این ساده‌سازی‌ها امکان یافتن حل دقیق معادلات دیفرانسیل را فراهم می‌آورد. روش ناویر با استفاده از شرایط مرزی ساده و ریاضیات دقیق، ابزاری قدرتمند برای تحلیل سازه‌ها و صفحات فراهم می‌کند. به منظور بررسی شرایط مرزی دیگر باید از روش‌های عددی بهره گرفت. جابجایی‌ها با استفاده از روش ناویر با دقت بسیار بالایی به دست می‌آیند. این روش

است. همانطور که نشان داده شده، تطابق مناسبی بین نتایج مدل حاضر و نتایج موجود در پژوهش های دیگر برقرار است. در شکل ۲ نیز مقایسه بار بحرانی کمانشی تک محوری و دو محوری صفحه مدرج تابعی بر اساس نسبت های مختلف عرض به ضخامت مورد بررسی قرار گرفته است. همانطور که مشاهده می شود، با افزایش نسبت عرض به ضخامت صفحه، بار بحرانی کاهش می یابد؛ همچنین مشاهده می شود که بار بحرانی تک-محوری مقادیر بالاتری نسبت به بار بحرانی دو محوری دارد. همانطور که از نتایج دریافت می شود، تطابق مناسبی بین نتایج روش حاضر و نتایج موجود مشاهده می شود که دقت و کارایی روش حاضر را مورد تایید قرار می دهد.

و تئوری تغییر شکل برشی هایپربولیک جدید (NHSDT) مورد استفاده قرار گرفته است که این روابط در جدول شماره ۱ ارائه گردیده است.

جدول ۱- میدان های جابجایی مختلف [۳۶] و [۴۷-۴۹]

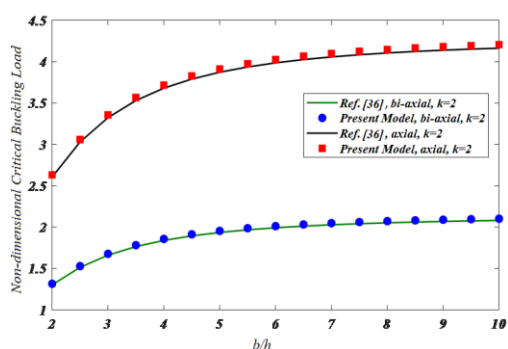
رابطه	تئوری
$f(z) = z$	FSDT [47]
$f(z) = z \left(1 - \frac{4z^2}{3h^2} \right)$	PSDT [48]
$f(z) = \frac{h}{\pi} \sin \left(\frac{\pi z}{h} \right)$	SSDT[49]
$f(z) = \frac{h}{\pi} \sinh \left(\frac{\pi z}{h} \right) - z$ $\cosh \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right)$	NHSDT[36]

در این مقایسه بار بحرانی بدون بعد برای نسبت ضخامت-های مختلف برحسب شاخص های توانی متفاوت ارائه شده

جدول ۲- مقایسه بار بحرانی بدون بعد ورق ساندویچی با هسته همگن و رویه های مدرج تابعی

k	Theory	بار بحرانی کمانشی بدون بعد					
		۱-۰-۱	۲-۱-۲	۱-۱-۲	۱-۱-۱	۱-۲-۲	۱-۲-۱
۰	FSDT [۴۷]	۶/۵۰۲۲۴	۶/۵۰۲۲۴	۶/۵۰۲۲۴	۶/۵۰۲۲۴	۶/۵۰۲۲۴	۶/۵۰۲۲۴
	درصد اختلاف	۰/۰۰۸	۰/۰۰۸	۰/۹۱۱	۰/۰۰۸	۰/۵۷۷	۰/۰۰۸
	PSDT [۴۸]	۶/۵۰۲۴۸	۶/۵۰۲۴۸	۶/۵۰۲۴۸	۶/۵۰۲۴۸	۶/۵۰۲۴۸	۶/۵۰۲۴۸
	درصد اختلاف	۰/۴۰۰	۰/۰۰۴	۰/۹۰۷	۰/۰۰۴	۰/۵۷۳	۰/۰۰۴
	SSDT [۴۹]	۶/۵۰۳۰۳	۶/۵۰۳۰۳	۶/۵۰۳۰۳	۶/۵۰۳۰۳	۶/۵۰۳۰۳	۶/۵۰۳۰۳
	درصد اختلاف	-۰/۰۰۴	-۰/۰۰۴	۰/۸۹۹	-۰/۰۰۵	۰/۵۶۹	-۰/۰۰۴
۱	NHSDT [۳۶]	۶/۵۰۲۷۶	۶/۵۰۲۷۶	۶/۵۰۲۷۶	۶/۵۰۲۷۶	۶/۵۰۲۷۶	۶/۵۰۲۷۶
	درصد اختلاف	.	.	۰/۹۰۳	.	.	.
	Present Model	۶/۵۰۲۷۶	۶/۵۰۲۷۶	۶/۵۰۲۷۶	۶/۵۰۲۷۳	۶/۵۰۲۷۳	۶/۵۰۲۷۶
	FSDT [۴۷]	۲/۵۷۱۱۸	۲/۹۰۶۹۰	۳/۰۵۸۱۰	۳/۲۱۹۴۶	۳/۴۶۲۸۶	۳/۴۷۱۸۲
	درصد اختلاف	۰/۴۲۳	۰/۴۳۸	۱/۶۹۵	۰/۵۹۷	۰/۵۹۷	۷/۵۰۶
	PSDT [۴۸]	۲/۵۸۳۵۷	۲/۹۲۰۰۳	۳/۰۹۶۹۷	۳/۲۳۲۳۷	۳/۴۷۴۷۲	۳/۵۷۲۸۲
درصد اختلاف	-۰/۰۱۷	-۰/۰۱۱	۰/۴۰۹	-۰/۰۰۴	۰/۲۵۶	۰/۰۰۷	
۵	SSDT [۴۹]	۲/۵۸۴۲۳	۲/۹۲۰۶۰	۳/۰۹۷۳۱	۳/۲۳۲۷۰	۳/۴۷۴۹۰	۳/۷۵۳۱۴
	درصد اختلاف	-۰/۰۴۲	-۰/۰۳۱	۰/۳۹۸	-۰/۰۱۴	۰/۲۵۱	-۰/۰۰۱
	NHSDT [۳۶]	۲/۵۸۳۱۵	۲/۹۱۹۷۰	۳/۰۹۶۸۶	۳/۲۳۲۲۵	۳/۴۷۴۹۰	۳/۷۵۳۵۹
	درصد اختلاف	.	.	۰/۴۱۲	.	۰/۲۵۱	.
	Present Model	۲/۵۸۳۱۴	۲/۹۱۹۷۰	۳/۰۹۶۸۸	۳/۲۳۲۲۴	۳/۴۸۳۶۴	۳/۷۵۳۵۶
	FSDT [۴۷]	۱/۳۱۹۲۱	۱/۵۱۱۲۶	۱/۶۹۲۶۹	۱/۷۷۹۷۹	۲/۰۴۶۴۲	۲/۳۵۷۳۷
درصد اختلاف	۰/۶۹۱	۰/۶۲۱	۰/۹۴۰	۰/۵۳۵	۰/۶۸۸	۰/۴۲۰	
۵	PSDT [۴۸]	۱/۳۲۹۱۰	۱/۵۲۱۲۹	۱/۷۰۱۷۶	۱/۷۸۹۷۸	۲/۰۵۶۰۵	۲/۳۶۷۳۴
	درصد اختلاف	-۰/۰۵۳	-۰/۰۳۹	۰/۴۱۰	-۰/۰۲۳	۰/۲۲۱	-۰/۰۰۱
	SSDT [۴۹]	۱/۳۳۰۰۳	۱/۵۲۲۰۳	۱/۷۰۲۲۴	۱/۷۹۰۳۲	۲/۰۵۶۴۴	۲/۳۶۷۴۴
	درصد اختلاف	-۰/۱۲۳	-۰/۰۸۷	۰/۳۸۲	-۰/۰۵۴	۰/۲۰۲	-۰/۰۰۵
	NHSDT [۳۶]	۱/۳۲۸۳۹	۱/۵۲۰۷۱	۱/۷۰۱۴۰	۱/۷۸۹۳۷	۲/۰۵۵۷۸	۲/۳۶۷۳۱

درصد اختلاف
Present Model	۱/۳۲۸۳۹	۱/۵۲۰۷۰	۱/۷۰۸۷۶	۱/۷۸۹۳۶	۲/۰۶۰۶۰	۲/۳۶۷۳۱
درصد اختلاف	۰/۶۷۲	۰/۶۸۲	۱/۰۳۱	۰/۵۸۰	۰/۷۳۹	۰/۴۴۹
PSDT [۴۸]	۱/۲۴۳۶۳	۱/۳۷۳۱۶	۱/۵۴۵۹۵	۱/۵۶۷۳۶	۱/۸۵۳۷۶	۲/۱۳۹۹۵
درصد اختلاف	-۰/۰۶۱	-۰/۰۴۹	۰/۴۶۴	۱/۸۴۷	۰/۲۳۸	-۰/۰۰۷
SSDT [۴۹]	۱/۲۴۴۷۵	۱/۳۷۴۲۲	۱/۵۶۷۲۱	۱/۵۹۷۲۸	۱/۵۷۲۸۷	۲/۱۹۰۸۷
درصد اختلاف	-۰/۱۵۱	-۰/۱۲۶	-۰/۹۰۵	-۰/۰۲۶	۱۵/۳۴۵	-۲/۳۸۶
NHSDT [۳۶]	۱/۲۴۲۸۷	۱/۳۷۲۴۹	۱/۵۴۵۵۶	۱/۵۹۶۸۷	۱/۵۸۳۴۳	۲/۱۳۹۸۲
درصد اختلاف	.	.	۰/۴۸۹	-۰/۰۰۱	۱۴/۷۸۶	.
Present Model	۱/۲۴۲۸۷	۱/۳۷۲۴۹	۱/۵۵۳۱۶	۱/۵۹۶۸۶	۱/۸۵۸۱۸	۲/۱۳۹۸۱

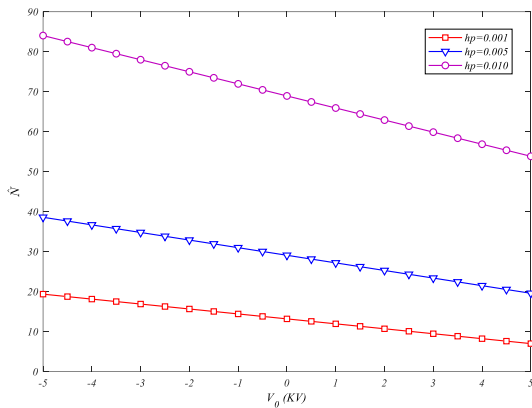


شکل ۲ - مقایسه بار بحرانی بدون بعد بر حسب نسبت عرض به ضخامت

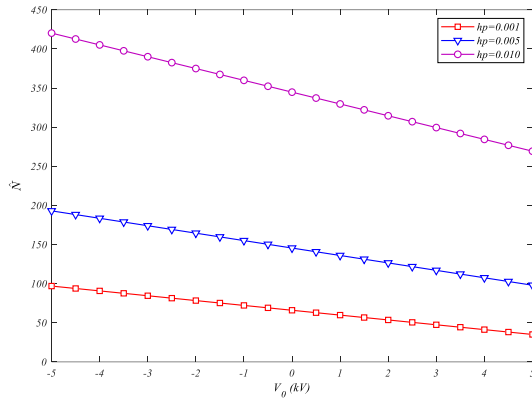
در این مثال $a/b = 2$ و $\kappa = 2$ در نظر گرفته شده است. اعمال ولتاژ خارجی به سازه به عنوان نیروهای صفحه‌ای به این صورت است که مقادیر مثبت و منفی به ترتیب به عنوان نیروهای کششی و فشاری در لبه‌ها در نظر گرفته می‌شود. با اعمال ولتاژهای منفی، بار بحرانی مورد نیاز برای کماتش سازه بیشتر می‌شود. این افزایش بار بحرانی نشان‌دهنده بهبود پایداری استاتیکی سازه تحت ولتاژهای منفی است؛ همچنین، اثر ضخامت رویه‌های پیزوالکتریک بر بار بحرانی سازه در این نمودار بررسی شده است. نمودارها نشان می‌دهند که با افزایش ضخامت رویه‌های پیزوالکتریک، سختی سازه بیشتر شده و بار بحرانی کماتش نیز افزایش می‌یابد. با اعمال ولتاژ خارجی به سازه، نیروهای صفحه‌ای ایجاد می‌شوند که مقادیر مثبت و منفی به ترتیب نیروهای کششی و فشاری را در لبه‌ها شبیه‌سازی می‌کنند. از آنجایی که نیروهای فشاری تمایل به محدود کردن تغییر شکل‌های سازه دارند، اعمال آن موجب افزایش پایداری سازه می‌شود و سازه برای رسیدن به وضعیت کماتش نیاز به نیروی

به منظور اطمینان از صحت مدل استفاده شده، با در نظر گرفتن فرایند ارزیابی و صحت سنجی مناسب، به طور دقیق و قابل اطمینانی نتایج مورد انتظار مورد بررسی قرار می‌گیرد. در این بخش مثال‌های عددی به منظور بررسی رفتار کماتشی سازه سه لایه ارائه شده است. هسته مدرج تابعی از جنس فلز و سرامیک ساخته شده که مدول یانگ فلز (آلومینیوم) و سرامیک (آلومینا) به ترتیب برابر با $E_m = 70$ و $E_c = 380$ گیگاپاسکال است. علاوه بر این نسبت پواسون هر دو ماده به صورت برابر با $\nu_c = \nu_m = 0.3$ در نظر گرفته شده است [۳۶]. از طرف دیگر رویه‌های پیزوالکتریک از جنس باریم تیتانات ($BaTiO_3$) در نظر گرفته شده است که خواص الکترو-مکانیکی آن در جدول ۳ ارائه شده است [۴۰].

به منظور بررسی نتایج، از پارامتر بار بحرانی بدون بعد بر حسب $\bar{N} = N_0(1000 * a^2/E_0 * h^3)$ استفاده شده که در آن $E_0 = 1$ مگاپاسکال در نظر گرفته شده است. تاثیر ولتاژ خارجی اولیه بر بار بحرانی بدون بعد ورق سه لایه با رویه‌های پیزوالکتریک تحت تاثیر پتانسیل الکتریکی در دو حالت تک-محوری و دو محوری در شکل ۳ نمایش داده شده است.



حالت دو محوری



حالت تک محوری

شکل ۳- بار بحرانی بدون بعد بر حسب ولتاژ اولیه با تغییرات ضخامت لایه پیزوالکتریک

با افزایش نسبت عرض به طول سازه که ناشی از افزایش عرض یا کاهش طول سازه است، سطح ورق در هر دو حالت تک محوری و دو محوری افزایش می یابد. سطح بزرگ تر به معنای انعطاف پذیری بیشتر و کاهش سفتی سازه است که در نتیجه باعث کاهش بار بحرانی کمانشی بدون بعد می شود. از سوی دیگر، افزایش نسبت ضخامت به طول ورق به دلیل افزایش جرم حجمی سازه، منجر به افزایش بار بحرانی می شود و پایداری سازه را بهبود می بخشد. سازه ای با ضخامت بیشتر، استحکام بیشتری دارد و می تواند بار بیشتری را تحمل کند قبل از اینکه دچار کمانش شود. این مسئله باعث بهبود پایداری سازه می شود. همانطور که از شکل ۴ برداشت می شود، تاثیر نسبت ضخامت به طول ورق برای مقادیر نسبت عرض به طول

بیشتری دارد. افزایش ضخامت رویه های پیزوالکتریک نیز به افزایش سختی سازه منجر می شود، چون ضخامت بیشتر به معنی مقاومت بیشتر در برابر تغییر شکل ها و بارها است. بنابراین، با افزایش ضخامت رویه ها، سازه سخت تر شده و بار بحرانی کمانش نیز افزایش می یابد. این به این معنی است که سازه قبل از رسیدن به وضعیت کمانش، می تواند بار بیشتری را تحمل کند.

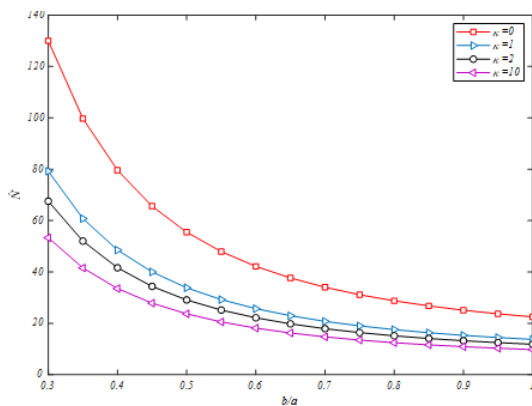
از سوی دیگر تاثیر پتانسیل اولیه با افزایش ضخامت رویه های پیزوالکتریک نیز بالاتر خواهد بود. همانطور که مشاهده می شود، شیب نمودارهای مربوط به ضخامت های بالاتر، بیشتر از موارد مربوط به ضخامت های پایین تر است که در نتیجه این رفتار، پایداری سازه افزایش می یابد. کاهش بار بحرانی در هر دو حالت کمانشی، از ولتاژ منفی به مثبت برای $h_p = 0.01$ و $h_p = 0.005$ و $h_p = 0.001$ به ترتیب برابر با $۴۹/۲$ ، $۳۵/۹$ و $۶۸/۹$ درصد است؛ همچنین میزان کاهش بار با تغییر حالت از کمانش تک محوری به کمانش دو محوری برابر با ۸۰ درصد تعیین شده است.

جدول ۳- خواص الاستیک، الکترونیک و دی الکتریک مواد پیزوالکتریک [۴۰]

مقادیر	واحد	ضرایب
$C_{11} = C_{22} = 166$ $C_{13} = C_{23} = 78$ $C_{44} = C_{55} = 43$ $C_{12} = 77$ $C_{33} = 162$ $C_{66} = 44.5$		الاستیک GPa
$e_{31} = e_{32} = -4.4$ $e_{33} = 18.6$ $e_{15} = e_{24} = -6.5$		الکترونیک C/m^2
$\kappa_{11} = \kappa_{22} = 11.2$ $\kappa_{33} = 12.6$		دی الکتریک $C/m^2 N$

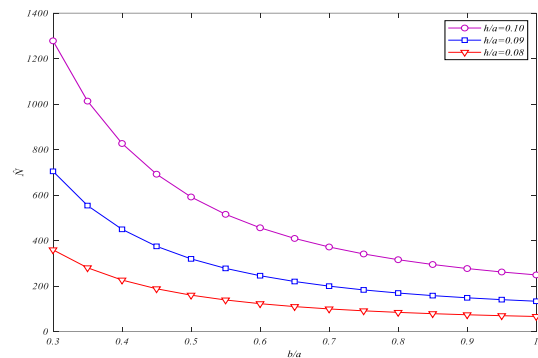
بار بحرانی بدون بعد سازه سه لایه با هسته مدرج تابعی با رویه های پیزوالکتریک بر حسب نسبت ابعاد سازه در شکل ۴ نشان داده شده است. در این شکل بار بحرانی برای مقادیر مختلف نسبت ضخامت به طول سازه بر حسب نسبت عرض به طول ورق بررسی شده است. به منظور بررسی نتایج در این بخش $h_c/h_p = 10$ ، $V_0 = 10$ و مقدار شاخص توان برابر ۲ ($\kappa = 2$) فرض شده است.

متشکل از دو ماده فلز و سرامیک در نظر گرفته شده است، بر اساس رابطه فرض شده هنگامی که $\kappa = 0$ باشد، هسته به صورت همگن است که در این حالت، تمام نقاط هسته خواص مکانیکی یکسانی دارند و این خواص مطابق با سرامیک است که معمولاً دارای سختی و استحکام بالاست. با افزایش شاخص توانی (κ) بر اساس معادله (۴)، خاصیت فلزی هسته بیشتر می‌شود که به معنای افزایش مقدار فلز در ترکیب هسته است. فلزات نسبت به سرامیک‌ها دارای خواص مکانیکی و الاستیک پایین‌تری هستند. از آنجایی که فلزات معمولاً نرم‌تر از سرامیک‌ها هستند و مدول یانگ پایین‌تری دارند، هسته ترکیبی با افزایش κ از نظر مکانیکی ضعیف‌تر و خاصیت الاستیک پایین‌تری دارد. با کاهش سختی و مدول یانگ هسته، مقاومت هسته در برابر نیروهای اعمالی کاهش می‌یابد. این موضوع باعث می‌شود که سازه راحت‌تر تحت بارهای کمتر کمانش پیدا کند و بار بحرانی کاهش یابد. از شکل‌های ۳-۵ مشاهده می‌شود که کمانش تک‌محوری بار بحرانی بالاتری را نسبت به کمانش دو محوری ارائه می‌دهد. میزان کاهش بار بحرانی برای همه مقادیر شاخص توانی در حالت تک‌محوری حدود ۹۷ درصد و در حالا دو محوری حدود ۸۲ درصد می‌باشد.

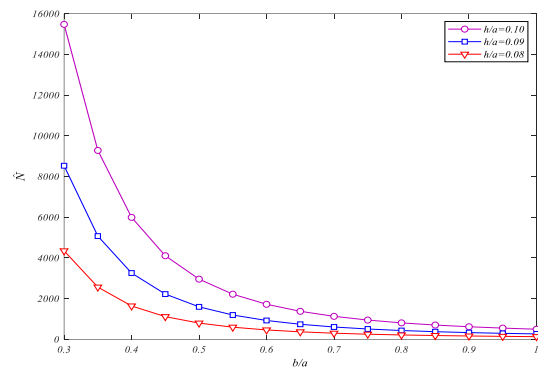


حالت دو محوری

پایین‌تر برجسته‌تر است که مشخصاً به دلیل کاهش سطح سازه و افزایش جرم حجمی سازه است. در سازه‌هایی که نسبت عرض به طول پایین دارند، سطح سازه کوچک‌تر است و بنابراین هر تغییر در ضخامت تاثیر بیشتری بر رفتار کلی سازه دارد. افزایش ضخامت در این شرایط موجب افزایش قابل توجهی در جرم و سفتی سازه می‌شود که به نوبه خود تاثیر قابل توجهی بر بار بحرانی کمانش دارد. درصد کاهش بار بحرانی با تغییر حالت از کمانش تک‌محوری به دو محوری برای هر سه مقدار h/a در $b/a = 0.3$ و $b/a = 1$ به ترتیب برابر با ۹۱/۷ و ۵۰ درصد است.



حالت دو محوری



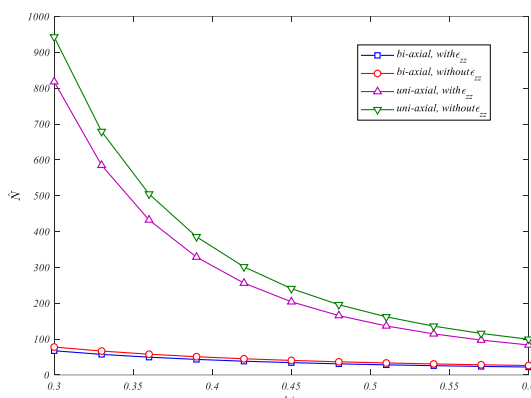
حالت تک‌محوری

شکل ۴- تغییرات بار بحرانی بدون بعد بر حسب

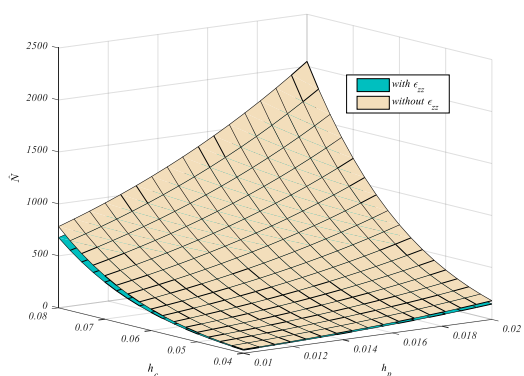
نسبت ابعاد

شکل ۵ بار بحرانی بدون بعد ورق سه لایه را در $h_c/h_p = 10, V_0 = 10$ و ضخامت کل ۶ سانتیمتر برحسب نسبت عرض به طول سازه ساندویچی برای شاخص‌های توانی مختلف ارائه می‌دهد. از آنجایی که هسته به صورت مدرج تابعی

گرفتن شرایط نزدیک به واقعیت سازه برای درک بهتر رفتار سازه‌ها یک امر ضروری و غیرقابل انکار است.

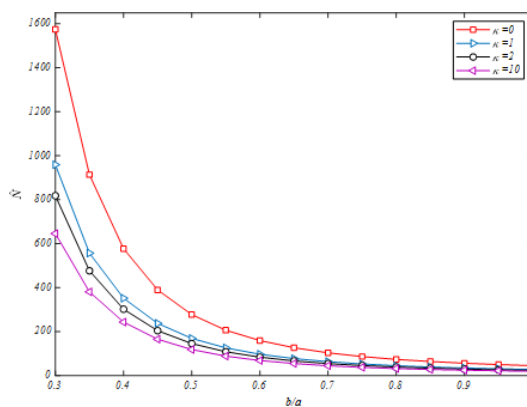


شکل ۶- مقایسه بار بحرانی بدون بعد در حالات مختلف دو بعدی و شبه سه بعدی



شکل ۷- بار بحرانی بدون بعد برای تغییرات ضخامت در حالات دو بعدی و شبه سه بعدی

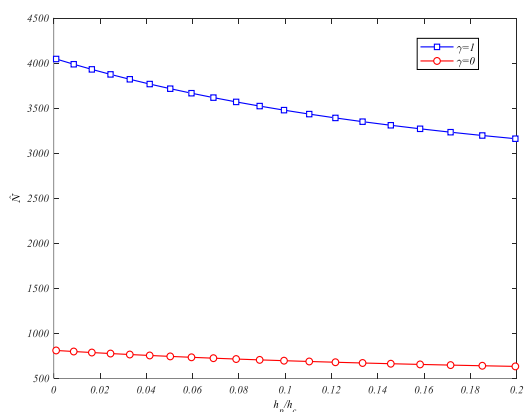
بررسی بار بحرانی کمانش دو محوری ورق سه لایه متشکل از رویه‌های پیزوالکتریک و هسته مدرج تابعی بر حسب ضخامت لایه‌ها و بر اساس تئوری‌های دو بعدی و شبه سه بعدی در شکل ۷ نشان داده شده‌است. شرایط پارامتری به صورت $V_0 = 10$, $a/b = 2$ و $\kappa = 1$ فرض شده است. نتایج نشان می‌دهند که افزایش ضخامت رویه و هسته، همانطور که پیش‌تر نیز بیان شد، به دلیل افزایش صلبیت سازه، منجر به افزایش بار بحرانی کمانش می‌شود. صلبیت بالاتر به معنای مقاومت بیشتر در برابر تغییر شکل‌ها و بارهای وارده است؛ بنابراین، بار



حالت تک‌محوری
شکل ۵- بار بحرانی بدون بعد بر حسب تغییرات شاخص توانی

به منظور سهولت در مدل‌سازی معادلات و انجام سریع محاسبات، رایج است که پژوهشگران از مدل‌ها و تئوری‌های دو بعدی استفاده می‌کنند که در نتیجه فرضیات این تئوری‌ها، نتایج به دست آمده با درصد خطای بالاتری محاسبه می‌شوند. به منظور رفع این مشکل و بررسی دقیق‌تر نتایج، مدل‌ها و تئوری‌های شبه سه بعدی به کار گرفته می‌شوند. در این تئوری‌ها، رفتار سازه به صورت شبه سه بعدی مدل‌سازی می‌شود و نتایج به دست آمده بسیار نزدیک‌تر به شرایط واقعی است. مقایسه بار بحرانی کمانش در حالت‌های تک‌محوری و دو محوری برای تئوری‌های دو بعدی و شبه سه بعدی بر اساس نسبت عرض به طول سازه در شکل ۶ نمایش داده شده‌است. در این حالت $V_0 = 10$, $h_c/h_p = 10$ و $\kappa = 2$ در نظر گرفته شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، تئوری شبه سه بعدی نتایج بار بحرانی کمتری نسبت به تئوری دو بعدی ارائه می‌دهد که با نتایج مربوط به مدل‌های سه بعدی سازگاری بیشتری دارد؛ همچنین ملاحظه می‌شود که تئوری شبه سه بعدی تاثیر بیشتری بر کمانش تک‌محوری دارد. در نظر گرفتن تئوری شبه سه بعدی منجر به ۱۳/۲ درصد کاهش بار بحرانی در $b/a = 0.3$ و ۱۶ درصد کاهش در $b/a = 0.6$ می‌شود. مشاهده می‌شود، بر خلاف نتایج شکل ۵، تاثیر مدل شبه سه بعدی برای نسبت‌های عرض به طول بالاتر برجسته‌تر است. با توجه به نتایج مدل دو بعدی و مقایسه نتایج در شکل ۶ می‌توان دریافت که استفاده از تئوری‌های شبه سه بعدی و در نظر

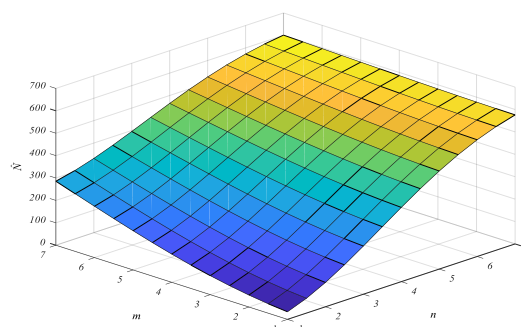
بررسی تاثیر نسبت ضخامت رویه به هسته بر بار بحرانی کمانش تک‌محوری و دو محوری برای صفحه مدرج تابعی یکپارچه شده با رویه‌های پیزوالکتریک در ضخامت کلی ثابت در شکل ۹ ارائه شده است. سایر پارامترهای مورد مطالعه به صورت $a/b = 2, V_0 = 10, \kappa = 1$ و $h = 10 \text{ cm}$ در نظر گرفته شده است. از آنجایی که رویه‌ها نسبت به هسته سفتی کمتری دارند، با افزایش h_p/h_c میزان سفتی مجموعه کاهش یافته و در نتیجه بار بحرانی کمانش کاهش می‌یابد. افزایش نسبت ضخامت‌ها از $h_p/h_c = 0$ تا $h_p/h_c = 0.2$ باعث کاهش بار بحرانی به میزان $21/8$ درصد برای هر دو حالت تک‌محوری و دو محوری می‌شود. رویه‌ها به دلیل خواص مکانیکی مختلف نسبت به هسته، سفتی کمتری دارند. با افزایش نسبت ضخامت رویه به هسته، سفتی کلی مجموعه کاهش می‌یابد. کاهش سفتی به معنای افزایش قابلیت تغییر شکل و کاهش مقاومت در برابر کمانش است که این موضوع بار بحرانی کمانش را کاهش می‌دهد. این تحلیل نشان می‌دهد که تغییرات در نسبت ضخامت و نوع بارگذاری می‌تواند تأثیرات قابل توجهی بر رفتار مکانیکی و پایداری سازه‌ها داشته باشد. همچنین لازم به ذکر است که تغییرات بار بحرانی از کمانش دو محوری به کمانش تک‌محوری در هر نقطه از نمودارها برابر 80 درصد است.



شکل ۹- تاثیر نسبت ضخامت رویه به هسته بر بار بحرانی بدون بعد

بحرانی کمانش که سازه می‌تواند تحمل کند، افزایش می‌یابد. این افزایش ضخامت به‌ویژه در ضخامت‌های بالاتر برجسته‌تر است و تأثیر کمانش در این شرایط چشم‌گیرتر می‌شود. در ضخامت‌های بالاتر، مدل دو بعدی قادر به نمایش دقیق‌تر رفتار سازه است؛ زیرا تغییرات در ضخامت و تنش‌های برشی بیشتر مورد توجه قرار می‌گیرند؛ همچنین مشاهده می‌شود که مدل دو بعدی در ضخامت‌های بالاتر تأثیرگذاری بیشتری دارد و اختلاف بین دو مدل بررسی شده افزایش می‌یابد. در ضخامت‌های بالاتر، تغییر شکل‌ها و انحنای بیشتری در سازه ایجاد می‌شود که منجر به بروز کمانش زودتر و با بار کمتر می‌شود. این نشان‌دهنده حساسیت بیشتر سازه به تغییر ضخامت است. در واقع، در ضخامت‌های پایین اختلاف ناچیزی بین مدل‌های دو بعدی و سه بعدی وجود دارد. در ضخامت‌های پایین، تغییرات در صلبیت و خواص مکانیکی سازه کم‌تر است و بنابراین مدل‌های دو بعدی و سه بعدی نتایج مشابه‌تری ارائه می‌دهند. با توجه به اینکه رفتار شبه سه‌بعدی با در نظر گرفتن کرنش در راستای ضخامت اعمال شده است، افزایش ضخامت‌های هسته و رویه‌ها تأثیر چشم‌گیری بر نتایج به‌دست‌آمده در مقایسه مدل‌های دو بعدی و شبه سه‌بعدی نشان می‌دهد.

در شکل ۸ پاسخ کمانشی ورق سه لایه بر اساس تاثیر نیم موج‌های طول و عرضی m و n مطالعه شده است. در این مدل نتایج بر اساس $\kappa = 1$ و $a/b = 2, V_0 = 10, h_c/h_p = 10$ بررسی شده است. افزایش m و n منجر به افزایش بار بحرانی کمانش دو محوری و در نتیجه افزایش پایداری استاتیکی سازه سه لایه می‌شود.



شکل ۸- تاثیر نیم موج‌های طولی و عرضی مختلف بر بار بحرانی بدون بعد

۵- نتیجه گیری

در این پژوهش رفتار شبه سه بعدی ورق سه لایه با هسته مدرج تابعی و رویه های پیزوالکتریک با استفاده از تئوری بهبود یافته بررسی شده است. سازه مذکور تحت تاثیر پتانسیل الکتریکی قرار گرفته است. هسته مدرج تابعی به صورت ترکیبی از فلز و سرامیک در نظر گرفته شده و مدل سازی معادلات برای رویه های پیزوالکتریک با استفاده از تئوری پیزو-الاستیسیته انجام شده و در نهایت معادلات حاکم بر اساس اصل کار مجازی استخراج شده است. به منظور حل معادلات حرکت، از روش تحلیلی ناویر استفاده شده است. تاثیر پارامترهای مختلف همچون نسبت ابعاد، نسبت ضخامت ها و ولتاژ خارجی اولیه بر پاسخ کماتشی ورق سه لایه بررسی شده است. نتایج نشان می دهد که ولتاژ خارجی اولیه تاثیر به سزایی بر رفتار کماتشی ورق دارد. تاثیر ولتاژ خارجی برای ضخامت های بالاتر رویه ها، برجسته تر است؛ همچنین از نتایج می توان دریافت که تاثیر نسبت ضخامت به طول ورق و شاخص توانی با افزایش نسبت عرض به طول ورق کاهش می یابد. افزایش نسبت ضخامت رویه به هسته در ضخامت ثابت باعث کاهش سفتی و کاهش بار بحرانی کماتش می شود. از مقایسه نتایج کماتش تک محوری و دو محوری می توان دریافت که بار بحرانی در حالت دو محوری حدود ۲۰ درصد بار بحرانی کماتش در حالت تک محوری است؛ همچنین بررسی ها نشان می دهد که در نظر گرفتن مدل شبه سه بعدی منجر به افزایش دقت نتایج کماتشی می شود. بر اساس این موضوع که تاثیر رفتار شبه سه بعدی با در نظر گرفتن اثرات کشش و همچنین کرنش در راستای ضخامت اعمال شده است، افزایش ضخامت های هسته و رویه ها تاثیر چشم گیری بر نتایج به دست آمده در مقایسه مدل های دو بعدی و شبه سه بعدی نشان می دهد. انتظار می رود که نتایج مدل ارائه شده به منظور شبیه سازی رفتار سازه های ساندویچی و چند لایه مورد استفاده در صنایع، مفید واقع گردد.

مراجع

- [1] Song J, Wu D, Arefi M (2022) Modified couple stress and thickness-stretching included formulation of a sandwich micro shell subjected to electromagnetic load resting on elastic foundation. *Def Technol* 18(11): 1935-1944.
- [2] Sabahi MA, Saidi AR (2023) Nonlinear vibrations of functionally graded porous micropipes conveying fluid flow. *J Solid Fluid Mech* 13(2): 89-101.
- [3] Nazemnezhad R, Shokrollahi H (2022) Surface Energy Effect on Free Axial Vibration of Cracked Nanorods Made of Functionally Graded Materials Based on Rayleigh Theory. *J Solid Fluid Mech* 12(4): 103-116
- [4] Swaminathan K, Sachin H, Rajanna T (2021) Buckling analysis of functionally graded materials by dynamic approach. *Mater Today Proc* 45: 172-178.
- [5] Hajlaoui A, Chebbi E, Dammak F (2021) Three-dimensional thermal buckling analysis of functionally graded material structures using a modified FSDT-based solid-shell element. *Int J Press Vessel Pip* 194: 104547.
- [6] Hosseini-Hashemi K, Talebitooti R, Hosseini-Hashemi, S (2023) The exact characteristic equation of frequency and mode shape for transverse vibrations of non-uniform and non-homogeneous Euler Bernoulli beam with general non-classical boundary conditions at both ends. *Mech Adv Smart Mater* 3(1): 1-20.
- [7] Nguyen TK, Thai HT, Vo TP (2020) A novel general higher-order shear deformation theory for static, vibration and thermal buckling analysis of the functionally graded plates. *J Therm Stresses* 44(3): 377-394.
- [8] Dehghan M, Shahriari B, Moosaie A (2023) Nonlinear Thermo-Elastic Analysis of FG Cylinder with Temperature-Dependent Properties with Perturbation and Differential Quadrature Methods. *J Solid Fluid Mech* 13(4): 1-14.
- [9] Arefi M, Soltan Arani AH (2020) Nonlocal vibration analysis of the three-layered FG nanoplates subjected to applied electric potential considering thickness stretching effect. *Proc Inst Mech Eng Pt L J* 234(9): 1183-1202.
- [10] Yıldız T, Esen I (2023) Effect of foam structure on thermo-mechanical buckling of foam core sandwich nanoplates with layered face plates made of functionally graded material (FGM). *Acta Mech* 234(12): 6407-6437.
- [11] Moita JS, Araújo AL, Correia VF, Soares CMM, Herskovits J (2020). Buckling behavior of composite and functionally graded material plates. *Eur J Mech A-Solids* 80: 103921.
- [12] Mohammadi M, Mohseni E, Moeinfar M (2019) Bending, buckling and free vibration analysis of incompressible functionally graded plates using higher order shear and normal deformable plate theory. *Appl Math Model* 69: 47-62.
- [13] Daikh AA, Draï A, Bensaid I, Houari MSA, Tounsi A (2021) On vibration of functionally graded

- [26] Karimi M, Khoshgoftar MJ, Karimi M, Mirzaali MJ, Javanbakht Z (2023) An analytical model for the static behaviour of honeycomb sandwich plates with auxetic cores using higher-order shear deformation theories. *Int J Mech Mater Des* 19(4): 951-969.
- [27] Tahir SI, Tounsi A, Chikh A, Al-Osta M A, Al-Dulaijan SU, Al-Zahrani MM (2022) The effect of three-variable viscoelastic foundation on the wave propagation in functionally graded sandwich plates via a simple quasi-3D HSDT. *Steel Compos Struct* 42(4): 501.
- [28] Mamandi A, Mirzaei ghaleh M (2021) Nonlinear Vibration of a Microbeam on a Winkler Foundation and Subjected to an Axial Load using Modified Couple Stress Theory. *J Solid Fluid Mech* 10(4): 181-194.
- [29] Khorshidi K, Karimi M, Rezaeisaray M (2023) Piezoelectric Energy Harvesting from Functionally Graded Beams Using Modified Shear Deformation Theories. *Mech Adv Smart Mater* 1(2): 136-154.
- [30] Zenkour AM, Alghanmi RA (2022) A refined quasi-3D theory for the bending of functionally graded porous sandwich plates resting on elastic foundations. *Thin-Walled Struct* 181: 110047.
- [31] Hadji L, Plevris V, Madan R, Ait Atmane H (2024) Multi-directional functionally graded sandwich plates: buckling and free vibration analysis with refined plate models under various boundary conditions. *Comput* 12(4): 65.
- [32] Vu TV, Cao HL, Truong GT, Kim CS (2023) Buckling analysis of the porous sandwich functionally graded plates resting on Pasternak foundations by Navier solution combined with a new refined quasi-3D hyperbolic shear deformation theory. *Mech Based Des Struct* 51(11): 6227-6253..
- [33] Akbari M, Sadighi M, Eslami MR, Kiani Y (2023) Axisymmetric free vibration analysis of functionally graded sandwich annular plates: a quasi-3D shear and normal deformable model. *Int J Struct Stab Dyn* 23(08): 2350086.
- [34] Soltan Arani AH, Ghorbanpour Arani A, Khoddami Maraghi Z (2024) Nonlocal quasi-3d vibration/analysis of three-layer nanoplate surrounded by Orthotropic Visco-Pasternak foundation by considering surface effects and neutral surface concept. *Mech Based Des Struct* : 1-36.
- [35] Hai Van NT, Hong NT (2024) Novel finite element modeling for free vibration and buckling analysis of non-uniform thickness 2D-FG sandwich porous plates using refined Quasi 3D theory. *Mech Based Des Struct* 52(6):3052-3078.
- [36] El Meiche N, Tounsi A, Ziane N, Mechab I (2011) A new hyperbolic shear deformation theory for buckling and vibration of functionally graded sandwich plate. *Int J Mech Sci* 53(4): 237-247.
- sandwich nanoplates in the thermal environment. *J Sandw Struct Mater* 23(6): 2217-2244.
- [14] Shadmani M, Afsari A, Jahedi R, Kazemzadeh-Parsi MJ (2024) Nonlinear free vibrations analysis of truncated conical shells made of bidirectional functionally graded materials. *J Vib Control* 30(13-14): 842-2856.
- [15] Forghani MA, Zahedinejhad P, Kazemzadeh Parsi MJ (2021) Frequency Analysis of Bi-directional Porous Functionally Graded Beams with Variable cross section on Elastic Foundation using Reddy Third Order Shear Deformation Theory. *J Solid Fluid Mech* 11(3): 97-118
- [16] Sitli Y, Mhada K, Bourihane O, Rhanim H (2021) Buckling and post-buckling analysis of a functionally graded material (FGM) plate by the asymptotic numerical method. *In Struct* 31:1031-1040
- [17] Khorshidi K, Ghasemi M, Bahrami M (2023) Buckling Analysis of a Functionally Graded unidirectional rectangular NanoPlate considering the surface effect. *Mech Adv Smart Mater* 3: 21-52.
- [18] Cuong-Le T, Nguyen KD, Hoang-Le M, Sang-To T, Phan-Vu P, Wahab MA (2022) Nonlocal strain gradient IGA numerical solution for static bending, free vibration and buckling of sigmoid FG sandwich nanoplate. *Phys B: Condens Matter* 631: 413726.
- [19] Shimpi RP (2002) Refined plate theory and its variants. *AIAA j* 40(1): 137-146.
- [20] Shimpi RP, Patel HG (2006) A two variable refined plate theory for orthotropic plate analysis. *Int J Solids Struct* 43(22-23): 6783-6799.
- [21] Shimpi RP, Patel HG (2006) Free vibrations of plate using two variable refined plate theory. *J Sound Vib* 296(4-5): 979-999.
- [22] Fazeli H, Adamian A, Hosseini-Sianaki A (2022) Vibration analysis of multi-directional functionally graded nanoplates with initial geometric imperfection using quasi-3d theory based on an isogeometric approach, *J Solid Fluid Mech* 11(6): 111-126
- [23] Karami B, Ghayesh MH, Fantuzzi N (2024) Quasi-3D free and forced vibrations of poroelastic microplates in the framework of modified couple stress theory. *Compos Struct* 330: 117840.
- [24] Daikh AA, Houari MSA, Eltahir MA (2021) A novel nonlocal strain gradient Quasi-3D bending analysis of sigmoid functionally graded sandwich nanoplates. *Compos Struct* 262: 113347.
- [25] Mellal F, Bennai R, Avcar M, Nebab M, Atmane H A (2023) On the vibration and buckling behaviors of porous FG beams resting on variable elastic foundation utilizing higher-order shear deformation theory. *Acta Mech* 234(9): 3955-3977.

- [43] Liu C, Ke LL, Wang YS, Yang J, Kitipornchai S (2013) Thermo-electro-mechanical vibration of piezoelectric nanoplates based on the nonlocal theory. *Compos Struct* 106: 167-174.
- [44] Ghorbanpour Arani A, Kolahdouzan F, Abdollahian M (2018) Nonlocal buckling of embedded magneto-electroelastic sandwich nanoplate using refined zigzag theory. *J Appl Math Mech* 39: 529-546.
- [45] Ghorbanpour Arani A, Soltan Arani AH, Haghparast E (2018) Bending analysis of magneto-electro-thermo-elastic functionally graded nanobeam based on first order shear deformation theory. *Int J Bio-Inorg Hybrid Nanomaterials* 7(2): 163-176.
- [46] Khoddami Maraghi Z (2019) Flutter and divergence instability of nanocomposite sandwich plate with magnetostrictive face sheets. *J Sound Vib* 457: 240-260.
- [47] Mindlin R (1951) Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. *J Appl Mech* 18(1): 31-38.
- [48] Reddy JN (1984) A simple higher-order theory for laminated composite plates. *J Appl Mech* 51(4): 745-752.
- [49] Touratier M (1991) An efficient standard plate theory. *Int J Eng Sci* 29(8): 901-916.
- [37] Van VT, Van Hieu N (2022) Buckling analysis of functionally graded sandwich plates resting on Pasternak foundation using a novel refined quasi-3D third-order shear deformation theory. *J Sci Tech Civ Eng (JSTCE)-HUCE*, 16(1): 68-79.
- [38] Khoddami Maraghi Z (2019) Vibration Analysis of Polymer Nanocomposite-Magnetostrictive Faced Sandwich Plate Including Feedback Control System. *modares mech eng* 19(11): 2823-2835.
- [39] Arefi M, Soltan Arani AH (2018) Higher order shear deformation bending results of a magneto-electrothermoelastic functionally graded nanobeam in thermal, mechanical, electrical, and magnetic environments. *Mech Based Des Struct* 46(6): 669-692.
- [40] Ghorbanpour Arani A, Kolahchi R, Zarei MS (2015) Visco-surface-nonlocal piezoelectricity effects on nonlinear dynamic stability of graphene sheets integrated with ZnO sensors and actuators using refined zigzag theory. *Compos Struct* 132: 506-526.
- [41] Haghparast E, Ghorbanpour-Arani A, Ghorbanpour Arani A (2020) Effect of fluid-structure interaction on vibration of moving sandwich plate with Balsa wood core and nanocomposite face sheets. *Int J Appl Mech* 12(07): 2050078.
- [42] Ghorbanpour-Arani A, Khoddami Maraghi Z, Ghorbanpour Arani A (2023) The Frequency Response of Intelligent Composite Sandwich Plate Under Biaxial In-Plane Forces. *J Solid Mech* 15(1): 1-18.