مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها/ سال 1393/ دوره 4/ شماره 3/ صفحه 1-9

مجله علمی پژوهشی مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها

دانشگاه شاهرود

# تشکیل سیستم‌های خود متعادل بهینه در تحلیل به روش نرمی مدل اجزا محدود چهار وجهی با استفاده از الگوریتم کلونی مورچگان

**مریم داعی[1,*] و ولی اله جانقربانی قهه[2]**

[1] استادیار، گروه مهندسی عمران، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه اصفهان

[2] دانشجو کارشناسی ارشد سازه، گروه مهندسی عمران، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه اصفهان

تاریخ دریافت: 1392/05/03؛ تاریخ بازنگری: 1393/03/13؛ تاریخ پذیرش: 1393/08/21

## چکیده

بسیاری از مسائل مکانیک سازه‌ها را می توان با استفاده از روش‌های بهینه‌یابی بصورت موثر مورد تجزیه و تحلیل قرار داد. در تحلیل سازه‌ها از مدل ریاضی یک سازه ایده‌آل سازی شده استفاده می‌شود که متشکل از مجموعه‌ای از معادلات ریاضی می‌باشد. روابط و فرمول بندی‌های این معادلات عمدتاً حاوی متغیرها و ماتریس‌هایی با ابعاد متنوع می‌باشد. تحلیل بهینه، بر تشکیل بهترین ماتریس برای حل مساله استوار است، زیرا گزینش ماتریس‌های سازه‌ای و روش‌های محاسبه آنها برای یک مدل سازه‌ای، منحصر بفرد و یکتا نیست. در این مقاله، الگوریتمی برای تشکیل سیستم‌های خود متعادل بهینه برای مدل اجزا محدود چهار وجهی پیشنهاد شده است. در مدلسازی مساله بهینه‌یابی ویژگی‌های هندسی مدل اجزا محدود چهار وجهی با گراف مرزی شبیه‌سازی شده است و برای برقراری شرط استقلال بردارهای متناظر با سیستم‌های خود متعادل، برای هر سیستم یک مولد در نظر گرفته شده است. ترتیب انتخاب مولدها به عنوان یک تور برای الگوریتم کلونی مورچگان تعریف شده است و بدین ترتیب با استفاده از الگوریتم فراابتکاری کلونی مورچگان جواب بهینه محاسبه شده است. شکل بهینه سیستم‌های خود متعادل، منجر به تشکیل ماتریس نرمی بهینه شده و هدف تحلیل موثر سازه به روش نرمی را تامین می‌نماید.

**کلمات کلیدی:** روش نرمی؛ سیستم خود متعادل؛ مدل اجزا محدود چهار وجهی؛ الگوریتم کلونی مورچگان.

# The formation of optimal self equilibrating stress systems for the force method analysis of finite element models comprising tetrahedron elements using ant colony algorithm

**M. Daei[1,*] and V. Janghorbani Ghaheh[2]**

[1] Asst. Prof., Civil Eng. Dept., Faculty of Engineering, University of Isfahan, Isfahan, Iran

[2] M. Sc. Student, Civil Eng. Dept., Faculty of Engineering, University of Isfahan, Isfahan, Iran

## Abstract

Most of structural mechanics problems can be solved efficiently by applying the optimization methods. In structural analysis, a mathematical model is created from idealized structure, which consists of a set of equations with many variables and different matrices. Since the forms of these matrices are not unique, the optimal solution seeks for the most efficient format of the matrices. In this paper, an algorithm is developed for formation of optimal self equilibrating stress systems in tetrahedron finite element models. In the proposed optimization model, the interface graph is defined to transfer the topological property of a tetrahedron element into the connectivity of a graph, and a generator is considered for each self equilibrating stress system in order to satisfy the independency of statical bases vectors. Each sequence of generators is defined as a tour for an ant travel in ant colony optimization algorithm; therefore an efficient algorithm based on the ant colony system is presented. The optimal self equilibrating stress systems result in highly sparse flexibility matrices and efficient force method.

**Keywords:** Force method analysis; Self equilibrating stress system; Tetrahedron finite element model; Ant colony algorithm.

* نویسنده مسئول؛ تلفن: 03137934102 ؛ فکس: 03137934060

آدرس پست الکترونیک: m.daei@eng.ui.ac.ir

## 1- مقدمه

مطالعات اولیه در مورد تحلیل ماتریسی به روش نرمی در آثار دنک[1] [1]، ویوبک[2] [2] و آرجایرس[3] و همکارانش [3] وجود دارد که حتی برای تحلیل سازه هواپیماها نیز از روش نرمی استفاده شده است. این روش بطور گسترده ای تا سال 1960 مورد توجه محققین بود، ولی پس از آن با افزایش حافظه و سرعت کامپیوترها و جوابگویی روش تغییر مکانها برای انواع مختلف المان‌ها، توجه بیشتر محققین به روشهای تغییر مکانی سوق داده شد. در نتیجه روش نرمی و مزایای آن در تحلیل غیر خطی و بهینه یابی سازه ها نادیده گرفته شد.

اگر چه پس از این روند پیشرفت روش نرمی کند بوده است، اما تحقیقات زیادی در جهت بهبود این روش انجام شده است. کاربرد روش توپولوژیکی نرمی در مدلهای اجزا محدود را می‌توان در کار کَسِل[4] [4] پیدا کرد و روش‌های مناسب برای برنامه نویسی کامپیوتری توسط کاوه [5 و 6] گسترش یافته است.

اولین روش جبری توسط دنک [7] ارائه شده است. روش پیشنهادی وی استفاده از روش حذف گوس- جردن برای بدست آوردن پایه استاتیکی از روی معادلات تعادل می باشد. رابینسون[5] [8] روش نیروهای رتبه ای را گسترش داده است که آن را می توان به عنوان یکی از کاربردهای روش حذف گوس- جردن در نظر گرفت. توپکو[6] [9] روش حذف گوس را به جای روش حذف گوس-جردن ارائه داده و روش موثری با عنوان روش افراز LU بازگشتی طراحی کرده است. کانِکو[7] و همکاران [10] ارتباط بین روش کمترین مربعات و روش نرمی را نشان داده اند و تکنیکهای تجزیه گوناگونی را برای تشکیل ماتریس های نرمی توضیح داده اند. روش جبری پیشنهادی برای تحلیل نرمی موثر مدل های اجزا محدود در کار سویر و توپکو[8] [11] دیده می شود.

روش‌های جبری طبیعتاً ساده و کلی هستند اما حافظه و تعداد عملیات مورد نیاز آنها بطور کلی بیشتر از سایر روش‌ها می‌باشد. به منظور افزایش قابلیت‌های روش های جبری، در مراحل مختلف عملیات جبری، روش‌های ترکیبی جایگزین شده‌اند. روش‌های مختلط جبری - توپولوژیکی که کارایی بیشتری دارند توسط گیلبرت[9] و همکاران [12] و پتن[10] [13] ارائه شــده‌اند.

روش نیروهای مجتمع اولین بار توسط پاتنیک[11] [14] ارائه گردیده است که در آن معادلات تعادل و شرایط سازگاری به طور همزمان بر روی متغییرهای نیرویی اعمال می‌شوند. این روش با هدف افزایش کارایی در بکارگیری ماتریس‌های مربوطه، بهبود یافته و در تحلیل دینامیکی بکار برده شده‌است.

مشکل اساسی در کاربرد روش‌های نرمی، تشکیل ماتریس سیستم‌های خود متعادل به گونه‌ای است که منجر به ماتریس نرمی خوش ساختار شود. روش‌های توپولوژیکی و ترکیباتی عمدتاً برای حالت‌های خاصی از سازه‌ها بویژه قاب‌ها با اتصالات صلب موثر بوده و روش‌های عمومی نمی‌باشند. از طرف دیگر روش‌های جبری کاربرد عمومی‌تر داشته و بازه گسترده‌ای از سازه‌ها را پوشش می‌دهند، ولی حافظه لازم و تعداد عملیات مورد نیاز آنها زیاد می‌باشد.

در سال‌های اخیر کاوه و همکاران [15-17] با بهره‌گیری از تئوری گراف‌ها روش‌های کارآمدی را در تحلیل به روش نرمی مدل‌های اجزا محدود ارائه داده‌اند.

برای رفع مشکلات روش‌های کلاسیک و به عنوان یک رویکرد دیگر مساله تشکیل ماتریس سیستم‌های خود متعادل بصورت یک مساله بهینه‌یابی مدلسازی شده است که در آن هدف پیدا کردن تنک‌ترین ماتریس می‌باشد. اگر چه پیدا کردن ماتریس نرمی خوش ساختار در قالب یک مساله بهینه‌یابی، یک مساله NP-hard است، اما با استفاده از

[1] Denke
[2] Veubeke
[3] Argyris
[4] Cassell
[5] Robinson
[6] Topcu
[7] Kaneko
[8] Soyer & Topcu
[9] Gilbert
[10] Pothen
[11] Patnaik

الگوریتم‌های فراابتکاری می‌توان با دقت مناسب و سرعت بالا جواب نزدیک به بهینه را برای این مساله پیدا کرد [18].

در این مقاله مساله یافتن ماتریس سیستم‌های خود متعادل تنک برای تحلیل به روش نرمی مدل‌های اجزا محدود چهار وجهی، بصورت یک مساله بهینه‌یابی مدلسازی شده و به کمک الگوریتم فراابتکاری کلونی مورچگان [19] حل می‌شود.

## 2- تاثیر انتخاب سیستم های خود متعادل در تحلیل به روش نرمی

برای یک سازه با $M$ عضو و $N$ گره که $\gamma(S)$ مرتبه نامعین استاتیکی می باشد. از بین مجهولات به تعداد $\gamma(S)$ نیرو مجهول مستقل از هم که در اصطلاح زائد استاتیکی گفته می‌شوند، انتخاب می‌گردند. این مجهولات را می‌توان از بین نیروهای داخلی و یا عکس العمل‌های خارجی انتخاب کرد که بصورت زیر نمایش داده می‌شوند:

$$q = \{q_1, q_2, ..., q_{\gamma(S)}\}^t \qquad (1)$$

با حذف زائدهای استاتیکی، سازه تبدیل به یک سازه معین استاتیکی شده که در اصطلاح سازه پایه گفته می‌شود.

بارگذاری گرهی خارجی بصورت زیر نشان داده می‌شود که $n$ تعداد بارهای گرهی می‌باشد.

$$p = \{p_1, p_2, ..., p_n\}^t \qquad (2)$$

بر این اساس می‌توان بردار تلاش‌های داخلی $r$ ناشی از بارگذاری خارجی $p$ را بصورت زیر بیان کرد:

$$r = B_0 p + B_1 q \qquad (3)$$

در این رابطه $B_0$ و $B_1$ ماتریس‌های مستطیلی می‌باشند که به تعداد کل مجهولات $m$ ردیف دارند و تعداد ستون‌های آن‌ها به ترتیب به تعداد بار خارجی گرهی $n$ و به تعداد درجه نامعینی استاتیکی سازه $\gamma(S)$ می باشد. در این رابطه $B_0 p$ جواب ویژه مساله می‌باشد که شرط تعادل تحت اثر نیروهای خارجی را ارضا می‌نماید و $B_1 q$ جواب مکمل می‌باشد که از روی مجموعه سیستم‌های خود متعادل[1] (SES) که در اصطلاح پایه استاتیکی گفته می‌شوند، بدست می‌آید.

با استفاده از رابطه نیرو - تغییر مکان برای هر عضو و جمع‌بندی آن در ماتریس قطری اسمبل نشده نرمی $F_m$، و با بکارگیری اصل کار مجازی مقدار تلاش‌های داخلی $r$ از رابطه زیر بدست می‌آید [20] :

$$r = [B_0 - B_1(B_1^t F_m B_1)^{-1} B_1^t F_m B_0]\, p \qquad (4)$$

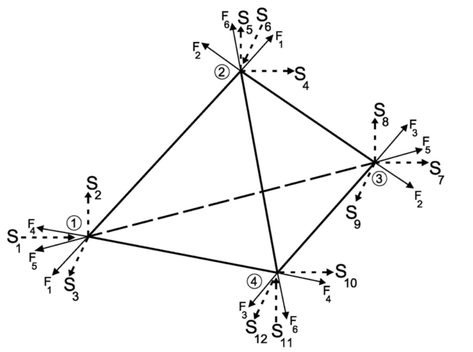
در این رابطه $G = B_1^t F_m B_1$ به عنوان ماتریس نرمی سازه می‌باشد.

برای تحلیل بهینه سازه به روش نرمی، ماتریس نرمی $G$ می‌بایست در حد امکان تنک و خوش ساختار باشد. برای رسیدن به این ویژگی‌ها در ماتریس $G$، لازم است ماتریس $B_1$ به گونه مناسب طراحی گردد، زیرا شکل ماتریس $F_m$ که مربوط به سازه بصورت منفک شده می‌باشد ثابت و غیر قابل تغییر می‌باشد و یا به بیان دیگر می‌بایست سیستم‌های خود متعادل مناسب انتخاب گردد.

## 3- مشخصات مدل اجزا محدود چهار وجهی

یک مدل اجزا محدود چهار وجهی[2] که در آن نیروها بصورت مولفه‌هایی در راستا لبه‌های المان عمل می‌کنند، در شکل 1 نشان داده شده است.

بدین ترتیب در هر مدل برای المان $i$ام شش نیرو بصورت $F_i = \{F_{1i}, F_{2i}, F_{3i}, ..., F_{6i}\}$ وجود دارد در حالیکه در دستگاه مختصات کلی، 12 نیرو گرهی برای هر المان (3 نیروی گرهی در هر گوشه) وجود دارد که در شکل ترسیم شده است.



**شکل 1- نیروها در یک مدل اجزا محدود چهار وجهی**

---

[1] Self Equilibrating Stress System

[2] Tetrahedron Element

برای این المان، ماتریس نرمی المان $f$ بصورت $f=[f_{ij}]$ است که $i,j=1,2,...,6$ و ضریب $f_{ij}$ بصورت زیر می باشد:

$$f_{ij}=\frac{s_i s_j}{EV}[(1+\upsilon)\cos^2\theta_{ij}-\upsilon] \quad (5)$$

در رابطه فوق $s_i$ طول لبه المان متناظر با راستا $i$ و $\theta_{ij}$ زاویه بین راستاهای $i$ و $j$ می باشد.

با توجه به شکل 1، ملاحظه می‌شود شش نیرو مستقل موثر بر المان $(F_1-F_6)$ همگی بر گره ها وارد شده و در راستا لبه های المان می‌باشند، لذا می‌توان اسکلت چهار وجهی را مانند یک خرپا سه بعدی شبیه سازی کرد. درجه نامعینی استاتیکی یک خرپا فضایی با $m$ عضو و $n$ گره از رابطه $\gamma(S)=m-3n+6$ بدست می‌آید، بر این اساس می‌توان درجه نامعینی استاتیکی یک مدل اجزا محدود چهار وجهی که معین خارجی می‌باشد، را با رابطه زیر نشان داد:

$$\gamma(S)=6M-3N+6 \quad (6)$$

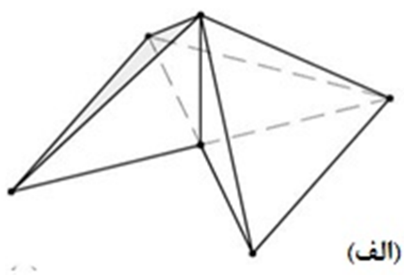
که در این رابطه $M$ تعداد المان‌های چهار وجهی و $N$ تعداد گره‌ها در کل مدل می‌باشد.

در مدلسازی مساله بهینه‌یابی ویژگی‌های هندسی مدل اجزا محدود با گراف مرزی شبیه‌سازی می‌شود. این گراف به سادگی بر پایه دو قانون زیر ایجاد می‌شود:

یک تناظر یک به یک بین گره‌های مدل اجزا محدود و گره‌های گراف ایجاد می‌شود.

برای هر لبه از هر المان در مدل اجزا محدود، متناظراً یک عضو در گراف در نظر گرفته می‌شود.

بر اساس تعریف فوق اگر به تعداد $k$ چهار وجهی با هم یک لبه مشترک داشته باشند، متناظراً در گراف مرزی یک عضو $k$-گانه در نظر گرفته می‌شود. در شکل 2 یک نمونه مدل اجزا محدود شامل سه عدد چهار وجهی و گراف مرزی متناظر با آن نشان داده شده است.





**شکل 2- (الف) نمونه از یک مدل اجزا محدود (ب)گراف مرزی متناظر با آن**

## 4- مدل برنامه ریزی ریاضی مساله بهینه یابی

مساله بهینه‌یابی با هدف رسیدن به مجموعه سیستم‌های خود متعادل تنک (بیشینه تعداد درایه‌های صفر یا کمینه تعداد درایه‌های غیرصفر) تعریف می‌شود. در صورتیکه هر ستون از ماتریس $B_1$ با $F_i$ نشان داده شود داریم:

$$B_1=[F_1,F_2,...,F_g,...,F_t] \quad (7)$$

لازم است در هر سیستم خود متعادل شرایط تعادل با ارضا رابطه زیر در هر گره تامین شود، در حالی که استقلال بردارها برقرار باشد.

$$\sum S_x=0,\sum S_y=0,\ \sum S_z=0 \quad (8)$$

برای برقراری شرط استقلال ستون‌ها بصورت زیر عمل می‌شود.

بردار $F_1$ نسبت به اولین درایه آن به کمک رابطه زیر نرمال می‌شود:

$$e_1^t F_1=1 \quad (9)$$

در این رابطه $e_1=\{1\ 0...0...0\}$ یک بردار یکه $m\times 1$ می‌باشد که درایه اول آن یک و سایر درایه های آن صفر می‌باشند، لذا براساس رابطه ارائه شده می‌بایست اولین درایه $F_1$ یک بوده ولی سایر درایه‌های آن می‌توانند هر عددی باشند با شرط آن که رابطه تعادل را ارضا نمایند.

بردار $F_2$ نسبت به دومین درایه آن نرمال شده و برای برقراری شرط استقلال آن نسبت به $F_1$، رابطه تعامد بردارها نوشته می‌شود. بدین صورت که اولین درایه آن (که بردار $F_1$ نسبت به آن نرمال شده است) می‌بایست صفر باشد. این شرایط بصورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} e_1^t F_2&=0\\ e_2^t F_2&=1 \end{aligned} \quad (10)$$

در این رابطه $e_2 = \{0\ 1\ 0 \ldots 0 \ldots 0\}$ یک بردار یکه می‌باشد که درایه دوم آن یک و سایر درایه های آن صفر می‌باشند، لذا براساس روابط ارائه شده می‌بایست اولین درایه $F_2$ صفر و دومین درایه آن یک بوده ولی سایر درایه‌های آن می‌توانند هر عددی باشند با شرط آن که رابطه تعادل را ارضا نمایند. به همین ترتیب برای سایر ستونهای ماتریس $B_1$ نیز می‌توان شرط استقلال را برقرار نمود. بنابراین در حالت کلی شرط استقلال برای $g$امین سیستم خود متعادل بصورت زیر بیان می‌شود:

$$[I_g \quad 0]F_g = \bar{e}_g \tag{11}$$

در این رابطه $\bar{e}_g$ بردار یکه‌ایی می‌باشد که $g$امین درایه آن یک است.

اولین سیستم خود متعادل به ساده‌ترین شکل ممکن بصورت اختیاری انتخاب می‌شود و در هر گام مطابق توضیحات فوق سیستم خود متعادلی تولید می‌شود که معادلات شرایط تعادل و استقلال مربوطه را ارضا نماید، در حالیکه کمترین تعداد درایه‌های غیر صفر را داشته باشد.

در هر سیستم خود متعادل، درایه‌ای که نسبت به آن بردار نرمال شده در حالیکه این درایه در سایر بردارهای بعدی صفر می‌باشد در اصطلاح مولد آن بردار عنوان می‌شود برای رسیدن به جواب بهینه مجموعه مولدها متغییر تصمیم می‌باشند. انتخاب مجموعه مولدها به نحوی که منجر به سیستم‌های خود متعادل بهینه گردد، در دو مرحله به شرح زیر انجام می‌شود:

در مرحله اول از اعضا چندگانه گراف به عنوان مولد استفاده می‌شود زیرا با این مولدها سیستم خود متعادل به ساده ترین شکل ممکن بدست می‌آید که بردار پایه متناظر با آن فقط دو مولفه غیر صفر دارد.

برای هر عضو $k$-گانه در گراف مرزی، $k-1$ سیستم خود متعادل مستقل می‌توان ایجاد کرد. به بیان دیگر بر روی یک عضو $k$-گانه که $k$ عضو آن بصورت $(i_1, j_2, l_3, \ldots, f_{k-1}, h_k)$ با در نظر گرفتن $(i < j < l < \ldots < f < h)$ می‌باشند، هر دو عضوی از این مجموعه می‌تواند معرف یک سیستم خود متعادل باشد در نتیجه $k(k-1)/2$ ترکیب دو عضوی از این مجموعه می‌توان انتخاب کرد، اما برای کاهش عرض باند ماتریس پایه‌های استاتیکی، اعضا براساس شماره به ترتیب صعودی منظم شده و از این مجموعه منظم به ترتیب از ابتدا دو به دو از اعضا، هر یک به عنوان یک سیستم خود متعادل، انتخاب می شوند بدین ترتیب برای عضو $k$-گانه که $k$ عضو آن بصورت $(i_1, j_2, l_3, \ldots, f_{k-1}, h_k)$ با در نظر گرفتن $(i < j < l < \ldots < f < h)$ می‌باشند، $k-1$ جفت اعضا بصورت $((i,j),(j,l),\ldots,(f,h))$ انتخاب می‌شوند.

بردار پایه استاتیکی متناظر با سیستم‌های خود متعادلی که بدین ترتیب ساخته می‌شوند فقط دارای دو درایه غیر صفر می‌باشد برای مثال برای سیستم خود متعادل بصورت $(i,j)$ ، بردار پایه استاتیکی در ردیف $i$ام دارای مقدار عددی یک و در ردیف $j$ ام دارای مقدار عددی، منفی یک می‌باشد در حالیکه سایر درایه‌ها صفر می‌باشد.
برای مدل‌های اجزا محدود متشکل از المان‌های چهار وجهی حدود 85 درصد سیستم‌های خود متعادل به این روش بدست می‌آیند. پس از این، مرحله دوم تشکیل سایر سیستم‌های خود متعادل با استفاده از الگوریتم کلونی مورچگان می‌باشد که شرح آن در بخش‌های بعدی آمده است.

## 5- کاربرد الگوریتم سیستم کلونی مورچگان

همانطور که قبلاً عنوان شد در روش پیشنهادی برای ساخت سیستم‌های خودمتعادل، به منظور برقراری شرط استقلال بردارها، برای هر سیستم خودمتعادل یک مولد انتخاب می‌شود. از آنجا که ساختار ماتریس $B_1$ از نحوه انتخاب مولدها تاثیر می‌پذیرد، برای انتخاب مجموعه مولدها از الگوریتم کلونی مورچگان استفاده می‌شود. بدین صورت که هر مجموعه از مولدها به عنوان یک تور برای هر مورچه می‌تواند باشد و مورچه منتخب تلاش می‌کند با ردگیری فرمون‌ها مولدهایی را انتخاب کند که منتج به ماتریس $B_1$ پرصفر گردد.

در الگوریتم پیشنهادی مورچه ها برای انتخاب مولدها، از قاعده انتقال حالت استفاده می‌کنند. قاعده انتقال حالت یک تابع احتمال تصادفی است که ترکیبی از تابع فرومون $\tau$ و تابع ابتکاری $\eta$ نظیر هر انتخاب می‌باشد. از آنجا که علاوه بر شماره المان مولد، ترتیب انتخاب نیز در شکل سیستم‌های خود متعادل حاصله موثر است، فرمون‌گذاری با دو پارامتر $i$ و $j$ انجام می‌شود بدین صورت که $\tau_{ij}$ فرمون برای انتخاب

$j$ امین عضو به عنوان $i$ امین مولد می‌باشد. فرایند انتخاب مولد جدید با استفاده از قاعده انتقال حالت تا دستیابی به یک جواب موجه ادامــه می‌یابد.

مورچه $k$ برای انتخاب $r$ امین مولد براساس رابطه زیر عمل می‌کند:

$$j=\begin{cases}\arg\max_{u\in L_k(r)}\left(\tau_{ru}\cdot\eta_{ru}^{\beta}\right) & if\ q\le q_0\\ J & Otherwise\end{cases}\qquad(12)$$

در این رابطه $q\in[0\ 1]$ یک عدد تصادفی یکنواخت و $q_0\in(0\ 1]$ یک پارامتر آستانه‌ای می‌باشد. $\beta$ پارامتر بیانگر اهمیت نسبی تابع ابتکاری و تابع فرومون است. در صورتی که مقدار تصادفی $q$ از پارامتر $q_0$ کمتــر باشــد، از بین انتخاب‌های مجاز، انتخابی کــه حداکثــر مقدار $\tau_{ru}\cdot\eta_{ru}^{\beta}$ را دارد، انتـخـاب می‌شود در غیر این صورت $J$ براساس تابع احتمالی زیر انتخاب می‌شود. در این الگوریتم مقدار پارامتر آستانه ای 0/7 لحاظ شده است.

$$P_{rs}^{k}=\begin{cases}\dfrac{\tau_{rs}\cdot\eta_{rs}^{\beta}}{\sum_{u\in L_k(r)}\tau_{ru}\cdot\eta_{ru}^{\beta}} & if\ s\in L_k(r)\\ 0 & Otherwise\end{cases}\qquad(13)$$

در این رابطه $L_k(r)$ مجموعه شماره‌های موجه باقیمانده برای انتخاب توسط مورچه $k$ به عنوان $r$ امین مولد می‌باشد.

پس از این که یک جواب موجه توسط یک مورچه ساخته شد، از قاعده به هنگام کردن محلی استفاده می‌شود. قاعده به هنگام کردن محلی، مقدار فرومون را با استفاده از رابطه زیر تغییر می‌دهد.

$$\tau_{rs}\leftarrow(1-\xi)\cdot\tau_{rs}+\xi\cdot\tau_0\qquad(14)$$

در این رابطه $\xi\in(0\ 1]$ پارامتر تنزیل محلی فرومون و مقداری ثابت در الگوریتم می‌باشد که برابر 0/1 در نظر گرفته شده است.

در انتهای هر تکرار زمانی که مورچه‌ها جواب‌های موجه خود را تولید نمودند، قاعده به هنگام کردن نهایی با استفاده از رابطه زیر انجام می‌شود:

$$\tau_{rs}\leftarrow(1-\rho)\cdot\tau_{rs}+\rho\cdot\Delta\tau_{rs}\qquad(15)$$

در این رابطه $\rho\in(0\ 1]$ پارامتر تنزیل کلی فرومون و مقداری ثابت در الگوریتم می‌باشد که برابر 0/1 در نظر گرفته شده است و $\Delta\tau_{rs}$ از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

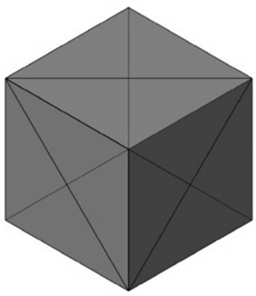
$$\Delta\tau_{rs}=\begin{cases}\left(D_{gb}\right)^{-1} & if\quad (r,s)\in global\quad best\quad tour\\ 0 & Otherwise\end{cases}\qquad(16)$$

در این رابطه $D_{gb}$ ضریب تنکی (تعداد درایه های غیر صفر) مربوط به بهترین تور انتخاب شده تا پایان تکرار جاری می‌باشد.

## 6- نتایج عددی

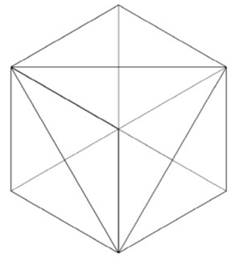
به منظور نشان دادن قابلیت الگوریتم پیشنهادی در این بخش مثال‌های عددی ارائه می‌شود. به عنوان اولین مثال یک مدل اجزا محدود مکعبی شکل مطابق شکل 3 که متشکل از 24 المان چهار وجهی و 105 درجه نامعین استاتیکی می‌باشد، بررسی می‌شود. این مدل دارای 36 لبه دو گانه، 6 لبه چهار گانه و 8 لبه شش گانه می‌باشد، لذا مطابق رابطه زیر به تعداد 94 عدد بردار پایه استاتیکی با دو درایه غیر صفر براســاس لبــه‌های چندگانه ساخته می‌شوند.

$$(2-1)\times36+(4-1)\times6+(6-1)\times8=94\qquad(17)$$



**شکل 3- یک مدل اجزا محدود مکعبی شکل متشکل از 24 المان چهار وجهی**

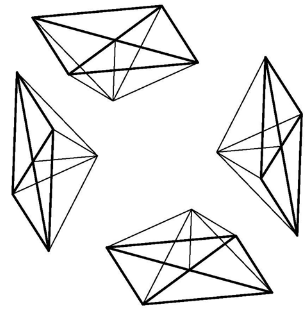
پس از حذف این مولدها، گراف مرزی متناظر با یک خرپا فضایی با 50 عضو و 15 گره مطابق شکل 4 می‌باشد، که $50-3\times15+6=11$ درجه نامعین استاتیکی است، لذا 11 سیستم خود متعادل دیگر براساس این مدل انتخاب می‌شوند.



**شکل 4- گراف متناظر پس از حذف مولدهای مربوط به لبه های چند گانه**

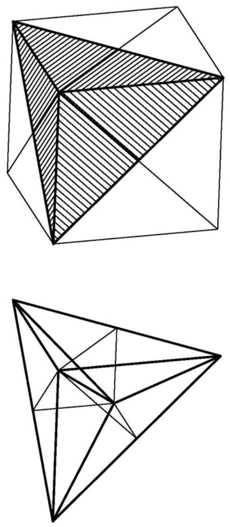
انتخاب مورچه منتخب برای 11 سیستم خود متعادل، دارای دو تیپ سیستم خود متعادل بصورت زیر می‌باشد:

هر وجه از مکعب گراف متناظر (شکل 4)، شامل 4 عدد چهار وجهی که لبه‌های چندگانه آن‌ها حذف شده، می‌باشد. هر کدام از این مجموعه‌ها یک سیستم خود متعادل در جواب بهینه می‌باشد که در شکل 5 نشان داده شده است. هر کدام از لبه‌هایی که به صورت پر رنگ نشان داده شده اند می‌توانند مولد برای این نوع سیستم خود متعادل باشند، اعضایی که بصورت کم رنگ ترسیم شده‌اند در واقع اعضا صفر نیرویی می‌باشند و شرط این که هر سیستم خود متعادل می‌بایست یک درجه نامعین استاتیکی باشد، را برقرار می‌نمایند.



**شکل 5- هر وجه از مکعب به عنوان یک سیستم خود متعادل**

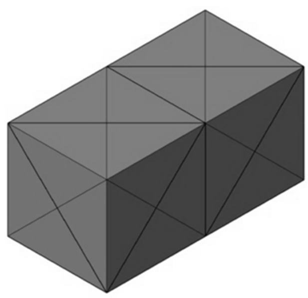
هر گوشه از مکعب گراف متناظر (شکل 4)، شامل 6 عدد چهار وجهی می‌باشد که البته لبه‌های چند گانه آن حذف شده است. هر مجموعه از این چند وجهی‌ها در گوشه مکعب، یک سیستم خود متعادل در جواب بهینه می‌باشند که در شکل 6 نشان داده شده است. در شکل 6 اعضایی که می‌توانند به عنوان مولد برای تولید این نوع سیستم خودمتعادل باشند، بصورت پر رنگ نشان داده شده‌اند.



**شکل 6- الگوی سیستم خود متعادل ساخته شده بر روی هر گوشه مکعب**

جواب مورچه منتخب شامل 6 سیستم خود متعادل مشابه الگوی معرفی شده در شکل 5 و 5 سیستم خود متعادل مشابه الگو شکل 6 می‌باشد. که این جواب با نتیجه بهینه قطعی بدست آمده از مدل برنامه ریزی خطی تطابق دارد.

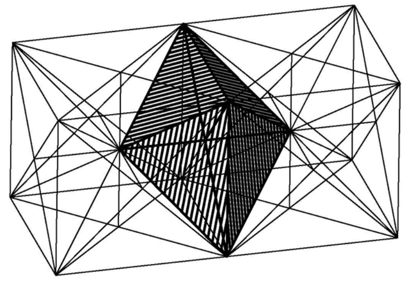
در مثال بعدی یک مدل اجزا محدود شامل دو مکعب (48 المان چهار وجهی) مطابق شکل 7 بررسی می‌شود. این مدل 219 درجه نامعین استاتیکی می‌باشد.



**شکل 7- یک مدل اجزا محدود متشکل از 48 المان و 219 درجه نامعین استاتیکی**

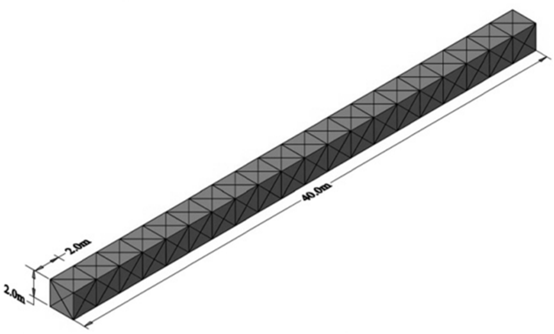
الگوریتم پیشنهادی جواب بهینه را بصورت زیر انتخاب می‌کند: 196 بردار پایه پوچی براساس لبه‌های چندگانه

ساخته می‌شوند که فقط دارای دو درایه غیر صفر بصورت 1 و -1 می‌باشند. مطابق مثال قبل، برای هر مکعب 11 سیستم خود متعادل بهینه قابل تولید می‌باشد، لذا 22 سیستم خود متعادل نیز مشابه مثال قبل می‌باشد. بدین ترتیب 218 سیستم خود متعادل بهینه ایجاد می‌گردد. مورچه منتخب آخرین سیستم خود متعادل را مطابق شکل 8 از مرز بین دو مکعب انتخاب می‌نماید.



**شکل 8- آخرین سیستم خود متعادل براساس انتخاب مورچه منتخب**

در شکل 9 مثال دیگری که یک مدل اجزا محدود تیر مانند متشکل از 20 بلوک مکعبی (480 المان چهار وجهی) نشان داده شده است.



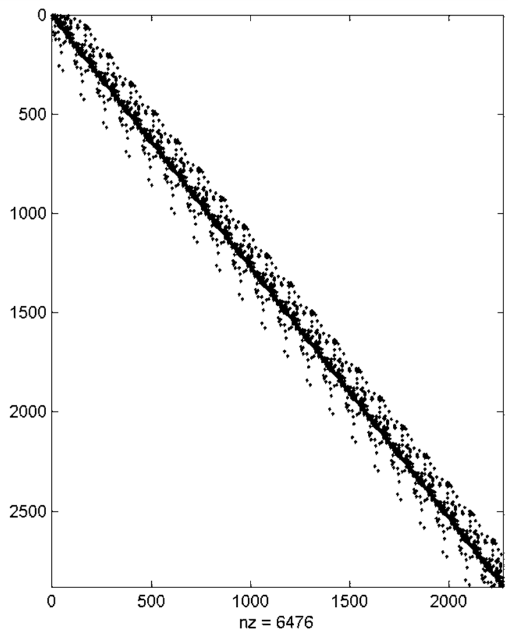

**شکل 9- یک مدل اجزا محدود به شکل تیر**

ویژگی‌های این مدل در جدول 1 بطور خلاصه ذکر شده است.

**جدول 1- ویژگی‌های مدل شکل 9**

| | |
|---|---|
| تعداد المانهای چهاروجهی | 480 |
| تعداد کل گره ها در مدل | 205 |
| درجه نامعینی استاتیکی مدل اجزا محدود | 2271 |
| تعداد لبه های دوگانه | 416 |
| تعداد لبه های چهارگانه | 272 |
| تعداد لبه های شش گانه | 160 |

با توجه به لبه های چندگانه به تعداد 2032 بردار پایه استاتیکی با دو درایه غیر صفر تشکیل می‌گردد که پس از حذف مولد این سیستم‌های خود متعادل، گراف متناظر به صورت یک خرپای فضایی با 848 عضو و 205 گره تبدیل می‌شود. این خرپا 239 درجه نامعین استاتیکی می‌باشد و سایر 239=2032-2271 سیستم‌های خود متعادل از روی خرپا فضایی بدست می‌آیند که با توجه به مثال‌های قبلی متشکل از 120 سیستم خود متعادل از روی وجوه مکعب‌ها و 100 سیستم خود متعادل از روی گوشه مکعب‌ها و 19 سیستم خود متعادل از روی مرز دو مکعب مجاور هم می‌باشد. ماتریس پایه استاتیکی بهینه در شکل 10 نشان داده شده است. ملاحظه می شود که این ماتریس کاملاً ویژگی‌های ماتریس خوش ساختار را دارد.




**شکل 10- شکل ماتریس پایه استاتیکی بهینه براساس انتخاب مورچه منتخب**

## 7- جمع بندی

در این مقاله، الگوریتم ابتکاری جهت یافتن سیستم‌های خودمتعادل بهینه برای مدل اجزا محدود چهار وجهی ارائه

شده است. شکل بهینه ماتریس پایه استاتیکی، منجر به تشکیل ماتریس نرمی بهینه شده و هدف تحلیل موثر سازه به روش نرمی را تامین می‌سازد.

در طراحی الگوریتم سازنده، برای برقراری شرط استقلال بردارهای پایه استاتیکی، از خواص جبری استفاده شده است. بدین صورت که هر بردار نسبت به یک درایه که در اصطلاح مولد عنوان شده است نرمال شده و رابطه تعامد با سایر بردارها نوشته می‌شود.

با بکارگیری الگوریتم کلونی مورچگان مولدها به نحوی انتخاب می‌شوند که جواب نزدیک به بهینه حاصل شود، در حالیکه اجرای مدل ریاضی برنامه ریزی خطی برای مثال‌های حل شده نشان می‌دهد جواب حاصل بهینه قطعی است.

## مراجع


[1] Denke PH (1964) Digital analysis of non-linear structures by the force method, in matrix methods of structural analysis. Pergamon Press, London: 317–342.

[2] Veubeke BMF, Voller R (1964) Upper and lower bounds in matrix structural analysis, in matrix methods of structural analysis. Pergamon Press, London: 165–201.

[3] Argyris JH, Kelsey S, Kamel H (1964) Matrix methods of structural analysis; a precise of recent developments, in matrix methods of structural analysis. Pergamon Press, London: 1–201.

[4] Cassell AC (1976) An alternative method for finite element analysis; a combinatorial approach to the flexibility method. Proc R Soc London A352: 73–89.

[5] Kaveh A (1986) An efficient flexibility analysis of structures. Comput Struct 22: 973–977.

[6] Kaveh A (2006) Optimal structural analysis. Second ed, Research Studies Press (Wiley), Somerset, UK.

[7] Denke PH (1962) A general digital computer analysis of statically indeterminate structures. NASA TD D-1666.

[8] Robinson J (1973) Intergrated theory of finite element methods. John Wiley, New York.

[9] Topcu A (1979) A contribution to the systematic analysis of finite element structures using the force method. Doctoral dissert, Essen Uni.

[10] Kaneko I, Lawo M, Thierauf G (1982) On computational procedures for the force method. Int J Numer Meth Eng 18: 1469–1495.

[11] Soyer E, Topc-u A (2001) Sparse self-stress matrices for the finite element force method. Int J Numer Methods Eng 50: 2175–2194.

[12] Gilbert JR, Heath MT (1987) Computing a sparse basis for the null space. SIAM J Alg Disc Meth 8: 446–459.

[13] Pothen A (1989) Sparce null basis computation in structural optimization. Numer Math 55: 501–519.

[14] Patnaik SN, Yadagiri S (1982) Frequency analysis of structures by intergrated force method. J Sound Vib 83: 93–109.

[15] Kaveh A, Koohestani K (2009) Efficient graph-theoretical force method for two-dimensional rectangular finite element analysis. Commun Numer Methods Eng: 25 951–971.

[16] Kaveh A, NaseriNasab E (2010) A new four-node quadrilateral plate bending element for highly sparse and banded flexibility matrices. Acta Mech 209: 295–309.

[17] Kaveh A, TolouKian MJ (2012) Efficient finite element analysis using graph-theoretical force method with brick elements. Finite Elem Anal Des 54: 1–15.

[18] Kaveh A, Daei M (2009) Efficient force method for the analysis of finite element models comprising of triangular elements using ant colony optimization. Finite Elem Anal Des 45: 710–720.

[19] Dorigo M, Stutzle TH (2004) Ant colony optimization. Massachusetts Institute of Technology.

[20] Kaveh A (2004) Structural mechanics: graph and matrix methods. 3rd edn, Research Studies Press (Wiley), Somerset, UK.