



به کارگیری روش آیزوژئومتریکی جهت تحلیل ارتعاشات درون صفحه و برون صفحه تیر کامپوزیتی

چند لایه

طاهره شکیب^۱، سمن صدری پور^۲، رضانعلی جعفری تلوکلای^{۳*}^۱ کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل، ایران^۲ دکتری، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل، ایران^۳ دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل، ایران

یادداشت تحقیقاتی، تاریخ دریافت: ۱۴۰۳/۰۴/۲۹؛ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۳/۰۶/۲۳؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۳/۰۸/۰۷

چکیده

این مقاله به تحلیل ارتعاشات درون صفحه و برون صفحه تیرهای کامپوزیتی با لایه چینی دلخواه با استفاده از روش آیزوژئومتریکی پرداخته است. در این بررسی، از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول و توابع نرَبز به عنوان توابع شکل روش آیزوژئومتریکی استفاده می‌شود. کوپلینگ‌های مواد یعنی کوپلینگ‌های خمشی-کششی، خمشی-پیچشی و کششی-پیچشی همراه با اثرات تغییر شکل برشی، اینرسی دورانی و اثر پواسون در نظر گرفته شده‌اند. نتایج به دست آمده با استفاده از روش آیزوژئومتریکی تطابق مناسبی با نتایج به دست آمده از حل اجزاء محدود و نیمه تحلیلی دارند. همگرایی پاسخ‌ها با استفاده از سه روش بهبود k و p ، h محاسبه شده‌است و به این ترتیب مشاهده می‌شود که در روش آیزوژئومتریکی می‌توان با تعداد المان‌هایی به مراتب کمتر از روش اجزاء محدود به همگرایی و جواب قابل قبول رسید. در انتها تاثیر نسبت لاغری، ناهمسانگردی مواد و تاثیر نسبت عرض به ضخامت روی چهار مود ارتعاشی خمشی درون صفحه، خمشی خارج از صفحه، محوری و پیچشی مورد بررسی قرار گرفته است.

کلمات کلیدی: تحلیل آیزوژئومتریکی؛ توابع نرَبز؛ تیر کامپوزیتی چند لایه؛ ارتعاشات خارج از صفحه؛ ارتعاشات درون صفحه.

Employing the Isogeometric method for analyzing the in-plane and out-of-plane vibrations of multi-layered composite beams

T. Shakib¹, S. Sadripour², R. -A. Jafari-Talookolaei^{3*}¹MSc, Mech. Eng., Babol Univ., Babol, Iran²Ph.D, Mech. Eng., Babol Univ., Babol, Iran³Assoc. Prof., Mech. Eng., Babol Univ., Babol, Iran

Abstract

This research mainly presents the in-plane and out-of-plane vibration analysis of laminated composite beams with arbitrary lay-ups using isogeometric approach. In this study, the first-order shear deformation theory and NURBS basis functions are used to obtain the free vibration response of the structure. The material couplings, i.e., bending-stretching, bending-twisting, and stretching-twisting couplings, and the effects of shear deformation, rotary inertia and poisson's effect are considered. The obtained results using the isogeometric approach show excellent agreement with the results which are available in the open literature. The convergence study has been done using three different refinement schemes such as h-, p-, and k-refinement. It is observed that p-refinement has a faster convergence than h-refinement, and k-refinement is more suitable than p-refinement due to the lower number of degrees of freedom. It can also be concluded that using isogeometric analysis, the frequencies converged rapidly compared to the finite element method. Finally, the effects of slenderness ratio, material anisotropy, and width to thickness ratios on the in-plane, out-of-plane, axial, and torsional vibration modes in different boundary conditions are studied.

Keywords: Isogeometric analysis; NURBS functions; Laminated composite beam; Out-of-plane vibration; In-plane vibration.

۱- مقدمه

در صنایع مهندسی، برای بهبود کیفیت کار اغلب از سازه‌های کامپوزیتی به دلیل دارا بودن خواص منحصر به فرد از جمله مقاومت بالا، وزن کم و ایمن بودن در برابر خوردگی و خستگی استفاده می‌شود؛ بنابراین، مطالعه و بررسی سازه‌های کامپوزیتی و درک ویژگی‌های دینامیکی آن‌ها از اهمیت بالایی برخوردار است.

از طرفی سازه‌ها به سه روش تحلیلی، نیمه تحلیلی و روش‌های عددی مورد تحلیل و بررسی قرار می‌گیرند. روش‌های تحلیلی به روش‌هایی گفته می‌شود که در آن پاسخ سیستم با استفاده از حل معادلات ریاضی به صورت یک تابع ریاضی به دست می‌آید، در روش تحلیلی پاسخ به دست آمده کاملاً دقیق است، اما این روش تنها برای مسائل ساده با برخی شرایط مرزی قابل استفاده است و حتی برای چنین مسائلی هزینه و زمان حل با توجه به مساله ممکن است، بسیار زیاد باشد. در روش نیمه تحلیلی، پاسخ سیستم به صورت سری-هایی حدس زده می‌شود که بایستی سری‌های مذکور حداقل شرایط مرزی ضروری سیستم را اکتفا نمایند. یافتن سری قابل قبول برای روش نیمه تحلیلی در بسیاری از مسائل که دارای پیچیدگی‌هایی در هندسه و بارگذاری می‌باشند، عملاً غیر ممکن و یا بسیار مشکل می‌باشد، لازم به ذکر است که دقت پاسخ به دست آمده در روش نیمه تحلیلی تقریبی و وابسته به سری حدس اولیه است. روش‌های عددی دسته‌ای دیگر از روش‌های حل هستند، در روش‌های عددی دامنه حل گسسته شده و با یافتن پاسخ بر روی این دامنه گسسته می‌توان پاسخ را به سایر نقاط نیز بسط داد. از میان روش‌های عددی روش اجزاء محدود شناخته شده‌ترین و انعطاف‌پذیرترین روش عددی است. در سال‌های اخیر، برای بهبود نواقص این روش روش عددی جدیدی تحت عنوان روش آیزوژئومتریکی ایجاد گردیده است.

به منظور بررسی و تحلیل سازه‌ها در جهت درک رفتار دینامیکی و استاتیکی آن‌ها کاربردهای متفاوت سازه‌ها به خصوص سازه‌های کامپوزیتی، منجر به استفاده از روش‌های مختلف برای تحلیل آن‌ها شده است. به گونه‌ای که کریشناسومی و همکاران [۱] به مطالعه ویژگی‌های ارتعاشی تیرهای کامپوزیتی چند لایه با لایه چینی دلخواه با استفاده از حل تحلیلی پرداختند. تاثیر تغییر شکل برشی عرضی، اینرسی

دورانی، اینرسی درون صفحه، اثر پواسون و کوپلینگ‌های مواد در مطالعه‌ی آن‌ها در نظر گرفته شده است. آن‌ها برآیند نیرو/ممان را در جهت خارج از صفحه نادیده گرفتند؛ همچنین فریدمن و آبراموویچ [۲] رفتار ساختاری تیرهای کامپوزیتی چند لایه تحت فشار محوری با استفاده از لایه‌های پیژوالکتریک را بررسی نمودند. در این بررسی، آن‌ها یک مدل ریاضی را با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول توسعه دادند و روابطی را برای زاویه خمش، جابه‌جایی‌های محوری و جانبی در امتداد تیر برای شرایط مرزی مختلف ارائه دادند. سپس فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای مرتبط با آن‌ها و همچنین بارهای کمانشی برای تیرهای با لایه‌های پیژوالکتریک و بدون تاثیر پیژوالکتریک را بررسی نمودند. جعفری و همکاران [۳] پاسخ تحلیلی برای تحلیل ارتعاشات آزاد تیرهای کامپوزیتی متورق شده دوار با لایه چینی دلخواه ارائه کردند. در این پژوهش برای استخراج معادلات حاکم از اصل همپلتون و اثرات تغییر شکل برشی، اینرسی دورانی، کوپلینگ‌های مواد و اثر پواسون استفاده می‌شود. راه حل تحلیلی برای محاسبه فرکانس‌های طبیعی و شکل مودها با استفاده از روش ضرایب لاگرانژ ارائه شده است و آیدوغان نیز [۴] به تحلیل کمانش حرارتی تیرهای کامپوزیتی چند لایه متقاطع با شرایط مرزی مختلف پرداخته است. در این پژوهش، تحلیل براساس تئوری تغییر شکل برشی با سه درجه آزادی انجام شده و دماهای بحرانی کمانش حرارتی با استفاده از روش ریتز به دست آمده‌اند که در آن سه مولفه جابجایی در یک سری چندجمله‌ای ساده بیان شده‌اند.

در استفاده از روش نیمه تحلیلی، جعفری و همکاران با استفاده از فرمول‌بندی ارائه شده در [۱] به بررسی تحلیل ارتعاشات آزاد تیرهای کامپوزیتی چند لایه براساس تئوری تیر تیموشنکو و با استفاده از روش ضرایب لاگرانژ پرداختند [۵]. اثرات تغییر شکل برشی، اینرسی دورانی، اثر پواسون و کوپلینگ‌های مواد شامل کوپلینگ خمشی-کششی، خمشی-پیچشی و کوپلینگ کششی-پیچشی در این پژوهش در نظر گرفته شده است. همچنین با استفاده از همان فرمول‌بندی و با در نظر گرفتن شرایطی مشابه حالت قبل، ارتعاش اجباری تیر کامپوزیتی متورق شده با لایه چینی دلخواه را براساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول [۶] ارائه نمودند؛ همچنین کارگرنوبین و همکاران [۷] یک روش نیمه تحلیلی نسبتاً جدید

تیموشنکو با استفاده از روش آیزوژئومتریکی توسط لی و پارک انجام شده است [۱۳]. ایشان با استفاده از این روش فرکانس-های طبیعی تیر براساس تئوری تیر تیموشنکو را با در نظر گرفتن اثر تغییر شکل برشی عرضی و اینرسی دورانی به دست آوردند. همچنین با به کارگیری سه روش بهبود k ، p ، h نشان دادند که در مرتبه‌های بالاتر توابع پایه مشکل پدیده قفل شدگی برشی که در تحلیل‌های عددی به وجود می‌آید، برطرف می‌شوند. بورداس و همکاران [۱۴] در پژوهش خود خلاصه‌ای از روندها و پیشرفت‌های اخیر در زمینه آیزوژئومتریکی را ارائه کردند. ایشان به بررسی و ارائه فرمول بندی به روش آیزوژئومتریکی برای مسائل یک، دو و سه بعدی پرداختند و مسائل مختلفی را در این زمینه مورد بررسی قرار دادند. همچنین لی و پارک [۱۵] با شرایطی مشابه [۱۳] تحلیل استاتیکی تیرهای تیموشنکو را با استفاده از روش آیزوژئومتریکی ارائه کردند. کیم و همکاران [۱۶] نیز به بررسی ارتعاشات آزاد تیرهای منحنی شکل با انحنای دلخواه با استفاده از تحلیل آیزوژئومتریکی براساس تئوری تیر منحنی شکل تیموشنکو پرداختند. ایشان اثرات کشش محوری، تغییر شکل برشی و اینرسی دورانی را در مطالعه خود در نظر گرفتند. تحلیل کمانش تیر کامپوزیتی چند لایه با شرایط مرزی مختلف با استفاده از روش آیزوژئومتریکی توسط وانگ و همکاران انجام شده است [۱۷]. ایشان یک المان تیر با چهار درجه آزادی در هر نقطه کنترل و با استفاده از توابع پایه نربز را مورد بررسی قرار دادند. سانگامش و هری [۱۸] تحلیل مودال و استاتیکی سازه‌های مختلف را با استفاده از تحلیل آیزوژئومتریکی انجام دادند. ایشان ماتریس سفتی و جرم سازه‌های مختلف یک و دو بعدی را با استفاده از توابع بی‌اسپلین به دست آوردند؛ همچنین حسینی و همکاران [۱۹] تحلیل آیزوژئومتریکی تیرهای خمیده آزاد و کاربرد آن در طراحی و تحلیل پره توربین بادی را مورد مطالعه قرار داده‌اند. در این پژوهش، از تحلیل آیزوژئومتریکی برای حل مسئله یک تیر منحنی شکل با هندسه پیچیده، بارگذاری دلخواه و سفتی محوری/انعطاف‌پذیر متغیر استفاده شده است. پاوان و همکاران [۲۰] تیرهای چندلایه کامپوزیتی را از دیدگاه استاتیکی، ارتعاشاتی و کمانش با استفاده از روش ترکیبی آیزوژئومتریکی نقطه‌گزینی مورد بررسی قرار دادند و به این نتیجه رسیدند که این روش در مقایسه با روش‌های معمول المان محدود کارایی بیشتری دارد.

برای تحلیل ارتعاشات آزاد تیرهای تیموشنکو کامپوزیتی چند لایه با تک لایه متورق شده ارائه نمودند. یک راه‌حل نیمه تحلیلی برای تحلیل ارتعاشات آزاد تیرهای با سطح مقطع متغیر که روی پایه الاستیک و تحت نیروی محوری قرار داشتند، توسط میرزابیگی ارائه شد [۸]. ایشان ابتدا معادلات حاکم بر ارتعاشات آزاد را استخراج و سپس فرکانس‌های بی‌بعد را با استفاده از یک روش نیمه تحلیلی ارائه نمود و نشان داد که فرکانس‌های بی‌بعد بر نیروهای محوری حساس هستند. با استفاده از روش اجزاء محدود، بانگرا و چاندرا [۹] نیز مدل اجزاء محدود مسئله‌ای مشابه حالت قبل را با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالاتر ارائه نمودند. تا به اینجا در تیرهای کامپوزیتی چند لایه با لایه چینی دلخواه ارتعاشات خارج از صفحه با استفاده از روش اجزاء محدود مورد توجه محققان قرار نگرفت. ارتعاشات خارج از صفحه در صفحه‌ای رخ می‌دهد که شامل محور طولی تیر و عرض آن است. ارتعاشات درون صفحه به صفحه‌ای اشاره دارد که شامل محور طولی تیر و ضخامت آن است. ضخامت تیر از تعدادی لایه‌های ارتوتروپیک تشکیل شده است. تا اینکه کیرال و بیلدیرم [۱۰] و همچنین چالیم [۱۱] ارتعاشات خارج از صفحه را در مطالعه خود در نظر گرفتند. به گونه‌ای که مطالعه اول به تیرهای چند لایه متقاطع محدود می‌شود و دومی فقط رفتار دینامیکی تیرهای کامپوزیت چند لایه متقارن را در نظر می‌گیرد. در نهایت با استفاده از این پژوهش‌ها، جعفری و همکاران [۱۲] تحلیل ارتعاشات درون صفحه و خارج از صفحه تیرهای کامپوزیتی چند لایه نازک تا نسبتاً ضخیم با لایه چینی دلخواه را با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول ارائه کردند. در این پژوهش کولپینگ‌های مواد شامل کولپینگ‌های خمشی-کششی، خمشی-پیچشی و کششی-پیچشی همراه با اثرات تغییر شکل برشی، اینرسی دورانی و اثر پواسون در نظر گرفته شده است؛ همچنین ایشان در نتایج استخراج شده نشان می‌دهند که نادیده گرفتن جابه‌جایی خارج از صفحه در مدل‌های یک بعدی می‌تواند منجر به خطاهای قابل توجهی در محاسبه مودهای پیچشی تیرهای کامپوزیتی چند لایه شود.

این در حالی است که در روش آیزوژئومتریکی ارتعاشات خارج از صفحه به خصوص در تیرهای کامپوزیتی چند لایه با لایه چینی دلخواه مورد تحلیل و بررسی قرار نگرفته است. به گونه ای که مطالعاتی روی تحلیل ارتعاشات آزاد تیرهای

۲- مدل‌سازی ریاضی

۲-۱-۲- مرور مختصری بر بی اسپیلاین و نربز

۲-۱-۱- بی اسپیلاین

۲-۱-۱-۲- بردار گره

بی اسپیلاین‌ها بر روی بردار گره‌ی Ξ تعریف می‌شوند. بردار گره یک مجموعه از اعداد حقیقی متوالی و غیر نزولی در فضای پارامتری به صورت زیر است.

$$\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\} \quad (1)$$

در این بردار ξ_i گره i ام ($i = 1, 2, \dots, n + p + 1$)، که در آن p مرتبه چند جمله‌ای و n تعداد توابع پایه است. در بردار گره، گره‌ها فضای پارامتری را به فواصلی تقسیم می‌کند که دهانه گره‌ی (ξ_i, ξ_{i+1}) نامیده می‌شود. در صورتی که فاصله بین گره‌ها برابر باشد، بردار گره یکنواخت نامیده می‌شود و در غیر این صورت بردار گره‌ی غیر یکنواخت است. اگر مقدار یک گره بیش از یک بار وجود داشته باشد، یک گره تکراری نامیده می‌شود. بردار گره‌ی که مقادیر ابتدا و انتهای آن $p + 1$ مرتبه تکرار شوند، بردار گره‌ی باز نامیده می‌شود.

۲-۱-۱-۲- توابع بی اسپیلاین

با داشتن یک بردار گره‌ی می‌توان توابع پایه بی اسپیلاین $N_{i,p}(\xi)$ در فضای پارامتری از مرتبه p را به صورت زیر تعریف نمود:

$$p = 0: \\ N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{if } \xi_i \leq \xi \leq \xi_{i+1} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \\ p \geq 1: \\ N_{i,p}(\xi) \\ = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) \\ + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (2)$$

که در آن i شماره‌دهنده نقاط کنترلی است. برخی از ویژگی‌های برجسته توابع بی اسپیلاین را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

غفاری و رضائی‌پژند [۲۱]، تیرهای کامپوزیتی با سطح مقطع دلخواه را با استفاده از روش آیزوژئومتریک و روش کاهش ابعادی مورد بررسی قرار دادند. نتایج به دست آمده در این مقاله با روش المان محدود مورد مقایسه قرار گرفت و نتایج نشان داد که استفاده از توابع پایه اسپیلاین موجب تسریع همگرایی و مدل‌سازی دقیق‌تر هندسه می‌شود. بخوچا [۲۲] با استفاده از روش آیزوژئومتریک به بررسی ارتعاشات آزاد درون صفحه تیر دوار اولر-برنولی با سطح مقطع یکنواخت پرداخت. در این مقاله کوپلینگ میان تغییرشکل محوری و خمشی با استفاده از یک ترم کوریولیس در نظر گرفته شد. در این پژوهش اثر سرعت زاویه‌ای، نسبت لاغری، شعاع هاب و شرایط مرزی مورد بررسی قرار گرفت. لوو و همکاران [۲۳]، ارتعاشات آزاد تیرهای کامپوزیتی چندلایه عمیق به شکل منحنی و براساس تئوری تیموشنکو و با شعاع انحنای دلخواه را با استفاده از تحلیل آیزوژئومتریک بر مبنای توابع نربز مورد تحلیل و بررسی قرار دادند. در این پژوهش به منظور اعتبارسنجی روش آیزوژئومتریک به کار رفته، فرکانس‌های بی‌بعد چند نمونه تیر چندلایه کامپوزیتی از نوع دایروی و بیضوی به دست آمد و نتایج به دست آمده با نتایج موجود مورد مقایسه قرار گرفت. روش آیزوژئومتریک در طول یک دهه‌ی گذشته به عنوان یک روش قدرتمند در حوزه تحلیل به ویژه تحلیل سازه‌ها مورد توجه محققین قرار گرفته است؛ همچنین با توجه به مطالعات انجام شده در راستای تحلیل سازه‌ها مشاهده می‌شود که ارتعاشات خارج از صفحه تیرها به خصوص تیرهای کامپوزیتی با لایه چینی دلخواه کمتر مورد توجه محققان قرار گرفته است. به این منظور در این پژوهش ارتعاشات آزاد درون صفحه و برون صفحه یک تیر چندلایه کامپوزیتی با لایه چینی دلخواه با در نظر گرفتن کوپلینگ‌های مادی با استفاده از روش آیزوژئومتریک مورد بررسی قرار گرفته است. هدف و نوآوری این پژوهش کاربرد روش آیزوژئومتریک به عنوان یک روش قدرتمند در حل این مساله و بررسی اعتبار و مزایای آن در مقایسه با روش المان محدود است.

۲-۱-۳- بهبود

یکی از ویژگی‌های شاخص بی‌اسپلین‌ها، روش‌های بهبود شبکه هستند که با استفاده از آن‌ها می‌توان توابع را غنی‌سازی نمود. در روش آیزوژئومتریک این روش‌ها به سه دسته افزایش گره، افزایش مرتبه و افزایش مرتبه و پیوستگی تقسیم بندی می‌شوند. دو روش اول به ترتیب معادل بهبود h و بهبود p در روش اجزاء محدود هستند. روش سوم که به آن بهبود k گفته می‌شود، معادلی در روش اجزاء محدود ندارد. ویژگی مهم این روش‌ها این است که با اعمال هر یک از آن‌ها، منحنی از نظر هندسی و پارامتری بدون تغییر می‌ماند.

۲-۱-۳-۱- بهبود h

اولین روش، اضافه کردن گره جدید به بردار گرهی موجود و در نتیجه افزایش تعداد المان‌ها است. فرض کنید $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$ بردار گرهی اولیه باشد، با وارد کردن گره جدید و دلخواه $(\xi_k, \xi_{k+1}) \in \xi$ ، یک واحد به توابع پایه اضافه می‌شود؛ بنابراین $n+1$ تابع پایه جدید طبق روابط بازگشتی (۲) به دست می‌آیند؛ همچنین $n+1$ نقطه کنترلی جدید $\{\bar{P}_1, \bar{P}_2, \dots, \bar{P}_{n+1}\}$ از ترکیب خطی نقاط کنترلی اصلی $\{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ به صورت زیر محاسبه خواهند شد:

$$\bar{P}_i = \alpha_i P_i + (1 - \alpha_i) P_{i-1} \quad (۶)$$

$$\alpha_i = \begin{cases} 1, & 1 \leq i \leq k-p \\ \frac{\bar{\xi} - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i}, & k-p+1 \leq i \leq k \\ 0, & i \geq k+1 \end{cases} \quad (۷)$$

در این روش با افزودن یک گره جدید، پیوستگی در آن نقطه یک مرتبه کاهش می‌یابد.

۲-۱-۳-۲- بهبود p

دومین روش، افزایش مرتبه توابع بدون افزایش تعداد المان‌ها است. در این روش، با افزودن یک واحد به مرتبه تعداد تکرار هر گره به اندازه یک واحد افزایش می‌یابد. با افزایش تعداد تکرار گره‌های داخلی و خارجی به اندازه یک واحد، تعداد نقاط کنترل و توابع پایه افزایش یافته و تعداد المان‌ها و پیوستگی در مرزهای المان ثابت باقی می‌ماند.

- هر تابع پایه بر روی دامنه پارامتری همواره مثبت است $(N_{i,p}(\xi) \geq 0)$.
- در بازه دلخواه $[\xi_i, \xi_{i+1}]$ مجموع مقادیر این توابع برابر واحد است $(\sum_{i=1}^{p+1} N_{i,p}(\xi) = 1)$.
- این توابع مستقل خطی هستند.
- تعداد حداکثر $p+1$ مقدار از این توابع در بازه $[\xi_i, \xi_{i+1}]$ غیر صفر هستند.

به طور کلی توابع پایه از مرتبه p روی گره‌ها دارای پیوستگی C^{p-1} و بین دو گره مجزا دارای پیوستگی C^∞ است. یک گره با k مرتبه تکرار، پیوستگی C^{p-k} دارد. در این حالت اگر مقدار تکرار برابر p باشد، توابع در آن گره درونیاب می‌باشند و اگر مقدار تکرار $p+1$ در نظر گرفته شود، گسستگی رخ می‌دهد. در حالت کلی در یک بردار گرهی با تکرار هر یک از نقاط، یک درجه از پیوستگی نقطه گرهی کاهش می‌یابد. مشتق اول تابع پایه بی‌اسپلین از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\frac{d}{d\xi} N_{i,p}(\xi) = \frac{p}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) - \frac{p}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (۳)$$

مشتق مرتبه $m-k$ تابع پایه با استفاده از رابطه (۴) محاسبه می‌شود.

$$N_{i,p}^{(k)}(\xi) = p \left(\frac{N_{i,p-1}^{(k-1)}(\xi)}{\xi_{i+p} - \xi_i} - \frac{N_{i+1,p-1}^{(k-1)}(\xi)}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} \right) \quad (۴)$$

۲-۱-۲- منحنی بی‌اسپلین

منحنی چندجمله‌ای تکه‌ای بی‌اسپلین از ترکیب خطی توابع پایه و نقاط کنترلی به صورت رابطه (۵) به دست می‌آید:

$$C(\xi) = \sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) P_i \quad (۵)$$

که در آن $N_{i,p}(\xi)$ توابع بی‌اسپلینی هستند که روی بردار گره تعریف می‌شوند و $P_i \in R^d$ مختصات نقاط کنترلی است.

۲-۳-۱-۳- بهبود k

بهبود k که معادلی در روش اجزا محدود ندارد، ترکیبی از دو روش قبلی است؛ به طوریکه روش بهبود k با پرهیز از معایب دو روش افزایش گره و مرتبه به طور هم‌زمان، روشی قدرتمند به حساب می‌آید. روند کار در این روش به این صورت است که در ابتدا مرتبه به مقدار q افزایش یابد و سپس گره ξ وارد شود. در این حالت پیوستگی مشتقات توابع پایه در ξ ، $q-1$ می‌باشد. به این روند بهبود k گفته می‌شود.

۲-۴-۱-۲- نرَبز

بی اسپلین‌ها برای مدل‌سازی اشکال پیچیده مناسب هستند، اما توانایی نمایش دقیق مقاطع مخروطی را ندارند. به همین دلیل است که از بی اسپلین‌های تعمیم یافته‌ای به نام نرَبز در رسم دقیق اشکال ساده مانند دایره و بیضی استفاده می‌شود. بی اسپلین‌ها توابع چند جمله‌ای قطعه‌ای هستند، در حالی که نرَبزها چند جمله‌ای‌های کسری قطعه‌ای می‌باشند. تمام ویژگی‌هایی که برای بی اسپلین‌ها بیان شد، برای نرَبز نیز صدق می‌کند.

۲-۴-۱-۲- توابع نرَبز

توابع پایه نرَبز به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$R_{i,p}(\xi) = \frac{N_{i,p}(\xi)w_i}{W(\xi)} \quad (8)$$

$$W(\xi) = \sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi)w_i \quad (9)$$

در روابط بالا $N_{i,p}(\xi)$ توابع پایه بی اسپلین از مرتبه p و w_i وزن‌های نرَبز هستند. انتخاب وزن‌های مناسب امکان توصیف انواع مختلف منحنی‌ها از جمله چند جمله‌ای‌ها و کمان‌های دایره‌ای را فراهم می‌نماید.

۲-۴-۱-۲- منحنی نرَبز

منحنی نرَبز که از ترکیب نقاط کنترلی و توابع نرَبز به دست می‌آید، به صورت زیر بیان می‌شود:

$$C(\xi) = \sum_{i=1}^n R_{i,p}(\xi)P_i \quad (10)$$

که در آن $R_{i,p}(\xi)$ توابع نرَبز و P_i نقاط کنترلی است. همانطور که مشاهده می‌شود، رابطه بالا از لحاظ ساختاری مشابه منحنی بی اسپلین است.

۲-۲- فرمول بندی پایه

شکل ۱ تیر کامپوزیتی چند لایه، به طول L ، سطح مقطع مستطیلی A ، ضخامت h و عرض b را نشان می‌دهد. مبداء مختصات در سطح میانی تیر قرار دارد که محور x در جهت طول تیر، محور y در جهت عرض تیر و محور z در جهت ضخامت تیر است. فرض شده‌است که ضخامت و جنس لایه‌ها با هم برابر بوده است. با در نظر گرفتن حرکات درون صفحه و برون صفحه‌ای تیر و براساس تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول، میدان تغییر مکان برای تیر مورد نظر به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, t) + z\psi(x, t) \\ &\quad - y\theta(x, t) \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, t) - z\varphi(x, t) \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, t) + y\varphi(x, t) \end{aligned} \quad (11)$$

که در رابطه فوق u و v و w بیان‌گر جابجایی یک نقطه دلخواه از تیر به ترتیب در جهات x ، y و z است؛ همچنین پارامترهای (u_0, φ) ، (v_0, ψ) و (w_0, θ) به ترتیب جابجایی‌های محور میانی و دوران‌های سطح مقطع تیر در راستای x ، y و z می‌باشند. جهت مثبت این پارامترها در شکل ۲ نمایش داده شده‌است.

با استفاده از معادله (۱۱)، مولفه‌های غیر صفر کرنش در هر نقطه از تیر به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= u_{,x} = u_{0,x} + z\psi_{,x} - y\theta_{,x} \\ &= \varepsilon_x^0 + z\kappa_1 - y\kappa_2 \\ \varepsilon_{xy} &= u_{,y} + v_{,x} = -\theta + v_{0,x} - z\varphi_{,x} \\ &= \varepsilon_{xy}^0 - z\kappa \\ \varepsilon_{xz} &= u_{,z} + w_{,x} = \psi + w_{0,x} + y\varphi_{,x} \\ &= \varepsilon_{xz}^0 + y\kappa \end{aligned} \quad (12)$$

که ε_x بیانگر کرنش نرمال و $(\varepsilon_{xy}, \varepsilon_{xz})$ کرنش‌های برشی یک نقطه دلخواه از تیر هستند؛ همچنین پارامترهای ε_x^0 و $(\varepsilon_{xy}^0, \varepsilon_{xz}^0)$ به ترتیب کرنش نرمال و کرنش‌های برشی در سطح میانی تیر است. علاوه بر این، $\kappa_1 = \psi_{,x}$ و $\kappa_2 = \theta_{,x}$ به ترتیب

(۱۳) ابتدا $\sigma_{33} = 0$ قرار داده تا رابطه‌ای اصلاح شده از تنش صفحه‌ای به دست آید. سپس نتایج از سیستم مختصات اصلی به سیستم مختصات مسئله، یعنی سیستم مختصات XYZ تبدیل می‌شود.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (14)$$

$$\begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (15)$$

که \bar{Q}_{ij}^k سفتی کاهش یافته در سیستم مختصات XYZ برای تنش صفحه‌ای اصلاح شده است. برای تبدیل از مدل دو بعدی به یک بعدی، $\sigma_y = 0$ و $\tau_{yz} = 0$ قرار داده می‌شوند؛ در حالی که مولفه تنش برشی مربوط به تغییر شکل خارج از صفحه τ_{xy} و مولفه برشی درون صفحه τ_{xz} نادیده گرفته نمی‌شوند. بنابراین در ابتدا معادله (۱۴) به صورت زیر بازنویسی می‌شود.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} + \begin{bmatrix} \bar{Q}_{12} \\ \bar{Q}_{26} \end{bmatrix}^{(k)} \varepsilon_y^{(k)} \quad (16)$$

$$\sigma_y^{(k)} = 0 = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{26} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} + \bar{Q}_{22}^{(k)} \varepsilon_y^{(k)} \quad (17)$$

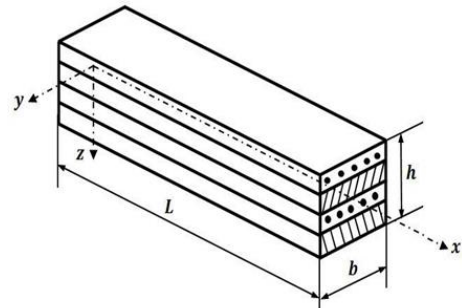
از معادله (۱۷) $\varepsilon_y^{(k)}$ برحسب $\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)}$ به دست می‌آید که با جایگذاری آن در رابطه (۱۶) داریم:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} \quad (18)$$

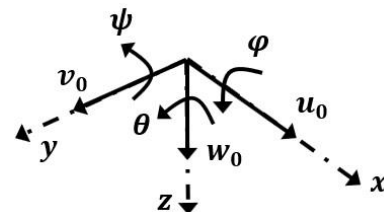
$$\begin{aligned} \bar{\bar{Q}}_{11} &= \bar{Q}_{11} - \frac{\bar{Q}_{12}^2}{\bar{Q}_{22}}, \\ \bar{\bar{Q}}_{16} &= \bar{Q}_{16} - \frac{\bar{Q}_{12}\bar{Q}_{26}}{\bar{Q}_{22}}, \\ \bar{\bar{Q}}_{66} &= \bar{Q}_{66} - \frac{\bar{Q}_{26}^2}{\bar{Q}_{22}} \end{aligned} \quad (19)$$

انحنای خمشی صفحه میانی در صفحات xz و xy هستند و $\kappa = \varphi, x$ انحنای پیچشی صفحه میانی است. توجه داشته باشید که در اینجا زیرنویس ویرگول به معنای مشتقات جزئی است. به عنوان مثال، $u_{0,x} = \frac{\partial u_0}{\partial x}$ است. رابطه تنش-کرنش برای ماده ارتوتروپیک در مختصات اصلی را می‌توان به صورت زیر بیان نمود:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (13)$$

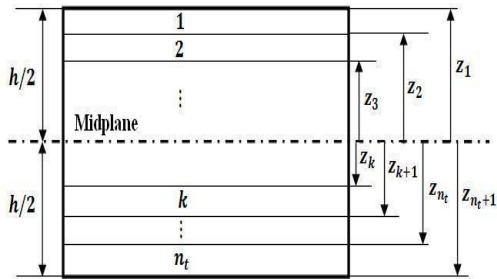


شکل ۱- هندسه تیر کامپوزیتی چند لایه [۱۲]



شکل ۲- جهات مثبت جابجایی‌ها و دوران‌ها [۱۲]

که ε_{ij} و σ_{ij} به ترتیب مولفه‌های تانسور تنش و کرنش در مختصات ماده هستند و C_{ij} ضرایب الاستیک ماده ارتوتروپیک در سیستم مختصات اصلی است. به منظور محاسبه رابطه متناظر برای مدل تیر چند لایه یک بعدی شکل ۱، در رابطه



شکل ۴- نحوه نامگذاری لایه‌ها در تیر کامپوزیتی چند لایه [۱۲]

با استفاده از معادله (۲۲)، تنش‌های برآیند که روی سطح مقطع تیر اعمال می‌شود، به صورت زیر فرض می‌شوند:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_{xy} \\ M_{1x} \\ M_{2x} \\ T \\ Q_{xz} \end{Bmatrix} = \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x^{(k)} \\ \tau_{xy}^{(k)} \\ \sigma_x^{(k)} z \\ \sigma_x^{(k)} y \\ \tau_{xz}^{(k)} y - \tau_{xy}^{(k)} z \\ \tau_{xz}^{(k)} \end{Bmatrix} dz dy \quad (23)$$

در روابط بالا، N_x نیروی برآیند محوری، N_{xy} و Q_{xz} به ترتیب برآیندهای نیروی برشی درون صفحه و عرضی می‌باشند. M_{1x} و M_{2x} برآیندهای گشتاور خمشی و T برآیند گشتاور پیچشی است که در شکل ۳ نشان داده شده‌اند. با جایگذاری روابط (۱۸) - (۲۰) در رابطه (۲۳) و با انتگرال‌گیری بر روی ضخامت و عرض تک لایه معادل، معادله ماتریسی رابطه (۲۴) به دست می‌آید که در پیوست زیر آورده شده‌است.

به طور مشابه رابطه (۱۵) نیز با برابر صفر قرار دادن τ_{yz} به صورت معادله (۲۰) به دست می‌آید

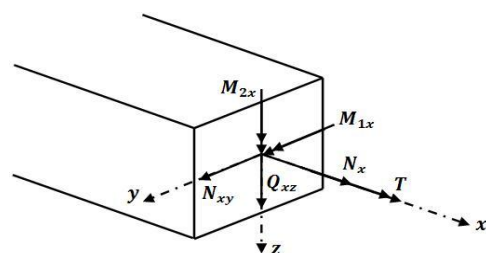
$$\tau_{xz}^{(k)} = \bar{Q}_{55}^{(k)} \varepsilon_{xz}^{(k)} = \left(\bar{Q}_{55} - \frac{\bar{Q}_{45}^2}{\bar{Q}_{44}} \right)^{(k)} \varepsilon_{xz}^{(k)} \quad (20)$$

معادلات (۱۸) و (۲۰) روابط سازنده برای تیر چند لایه حاضر در حضور ارتعاشات خارج از صفحه در جهت y و ارتعاشات درون صفحه در جهت z هستند. در ادامه از این روابط برای توسعه معادلات نیرو و گشتاور برآیند در جهات مختلف استفاده می‌شود. با استفاده از مولفه‌های تنش غیر صفر به دست آمده در معادله (۱۸) و (۲۰) و با انتگرال‌گیری روی حجم تیر، انرژی کرنشی سیستم به صورت زیر بیان می‌شود:

$$U_B = \frac{1}{2} \int_0^L \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x^{(k)} \varepsilon_x^{(k)} + \tau_{xy}^{(k)} \varepsilon_{xy}^{(k)} + \tau_{xz}^{(k)} \varepsilon_{xz}^{(k)}) dz dy dx \quad (21)$$

با جایگذاری رابطه (۱۲) در رابطه (۲۱)، داریم:

$$U_B = \frac{1}{2} \int_0^L \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x^{(k)} \varepsilon_x^{(k)} + \tau_{xy}^{(k)} \varepsilon_{xy}^{(k)} + \tau_{xz}^{(k)} \varepsilon_{xz}^{(k)}) dz dy dx \quad (22)$$



شکل ۳- برآیندهای نیرو و گشتاور [۱۲]

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_{xy} \\ M_{1x} \\ M_{2x} \\ T \\ Q_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} bA_{11} & bA_{16} & bB_{11} & 0 & bB_{16} & 0 \\ bA_{16} & bA_{66} & bB_{16} & 0 & bB_{66} & 0 \\ bB_{11} & bB_{16} & bD_{11} & 0 & bD_{16} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (b^3/12)A_{11} & 0 & 0 \\ bB_{16} & bB_{66} & bD_{16} & 0 & bD_{66} + (b^3/12)A_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & bA_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \\ \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \kappa \\ \varepsilon_{xz}^0 \end{Bmatrix} \quad (24)$$

$$U_B = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ bA_{11}u_{0,x}^2 + bD_{11}\psi_{,x}^2 + \frac{b^3}{12}A_{11}\theta_{,x}^2 + 2bB_{11}u_{0,x}\psi_{,x} + bA_{66}(\theta^2 + v_{0,x}^2 - 2\theta v_{0,x}) + (bD_{66} + \frac{b^3}{12}A_{55})\varphi_{,x}^2 - 2bB_{66}(\varphi_{,x}v_{0,x} - \theta\varphi_{,x}) + 2bA_{16}(u_{0,x}v_{0,x} - \theta u_{0,x}) + 2bB_{16}(\psi_{,x}v_{0,x} - \theta\psi_{,x} - u_{0,x}\varphi_{,x}) - 2bD_{16}\psi_{,x}\varphi_{,x} + bA_{55}(\psi^2 + w_{0,x}^2 + 2\psi w_{0,x}) \right\} dx \quad (27)$$

علاوه بر این، رابطه‌ی انرژی جنبشی برای تیر کامپوزیتی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$K = \frac{1}{2} \int_0^L \int_{-b/2}^{b/2} \int_{-h/2}^{h/2} \rho^{(k)}(u_{,t}^2 + v_{,t}^2 + w_{,t}^2) dz dy dx \quad (28)$$

با جایگذاری معادله (۱۱) در معادله (۲۸) داریم:

$$K = \frac{1}{2} \int_0^L \left[I_1 b(u_{0,t}^2 + v_{0,t}^2 + w_{0,t}^2) + I_3 b(\varphi_{,t}^2 + \psi_{,t}^2) + I_1 \frac{b^3}{12}(\varphi_{,t}^2 + \theta_{,t}^2) + 2I_2 b(u_{0,t}\psi_{,t} - \varphi_{,t}v_{0,t}) \right] dx \quad (29)$$

$$I_1 = \sum_{k=1}^{n_t} \rho^{(k)}(z_{k+1} - z_k), \quad (30)$$

ضرایب A_{ij} , B_{ij} و D_{ij} ($i, j = 1, 6$) و A_{55} برحسب مولفه‌های سفتی لایه $\bar{Q}_{ij}^{(k)}$ به صورت زیر تعریف می‌شوند.

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_{xy} \\ M_{1x} \\ M_{2x} \\ T \\ Q_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_{xy} \\ M_{1x} \\ M_{2x} \\ T \\ Q_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{cases} A_{ij} = \sum_{k=1}^{n_t} \bar{Q}_{ij}^{(k)}(z_{k+1} - z_k), & (i, j = 1, 6) \\ B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_t} \bar{Q}_{ij}^{(k)}(z_{k+1}^2 - z_k^2), & (i, j = 1, 6) \\ D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n_t} \bar{Q}_{ij}^{(k)}(z_{k+1}^3 - z_k^3), & (i, j = 1, 6) \\ A_{55} = \sum_{k=1}^{n_t} k_s \bar{Q}_{55}^{(k)}(z_{k+1} - z_k), & k_s = \frac{5}{6} \end{cases} \quad (25)$$

در این روابط، n_t تعداد کل لایه‌های تیر مورد نظر و k شماره هر لایه است. با توجه به شکل ۴ برای شناسایی هر لایه، مجموعه‌ای از مختصات z اختصاص داده شده که در آن z_k و z_{k+1} به ترتیب فاصله‌ی سطوح بالا و پایین لایه‌ی k -ام تا سطح میانی است. k_s ضریب تصحیح برش است.

بنابراین پس از ساده‌سازی معادله (۲۲)، انرژی کرنشی تیر براساس نیروها و گشتاورهای برآیند به صورت زیر بیان می‌شود:

$$U_B = \frac{1}{2} \int_0^L [N_x \varepsilon_x^0 + M_{1x} \kappa_{1x} + M_{2x} \kappa_{2x} + N_{xy} \varepsilon_{xy}^0 + T \kappa + Q_{xz} \varepsilon_{xz}^0] dx \quad (26)$$

سپس با جایگذاری معادلات (۲۴) و (۱۱) در رابطه (۲۶)، انرژی کرنشی تیر کامپوزیتی براساس میدان تغییر مکان به صورت زیر به دست می‌آید:

در تحلیل آیزوژنومتریک، توابع پایه نریز برای تقریب میدان جابه‌جایی تیر کامپوزیتی چند لایه استفاده می‌شود. در مسئله حاضر، هر نقطه کنترلی دارای شش درجه آزادی است که شامل جابه‌جایی محوری u_i ، خیزهای جانبی و عرضی v_i و w_i و سه دوران مستقل θ_i ، φ_i و ψ_i که در آن $i = 1:n$ است. n تعداد کل نقاط کنترل است؛ بنابراین، میدان‌های جابه‌جایی المان تیر به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} u^e &= \sum_{i=1}^n R_i u_i \\ v^e &= \sum_{i=1}^n R_i v_i \\ w^e &= \sum_{i=1}^n R_i w_i \\ \theta^e &= \sum_{i=1}^n R_i \theta_i \\ \varphi^e &= \sum_{i=1}^n R_i \varphi_i \\ \psi^e &= \sum_{i=1}^n R_i \psi_i \end{aligned} \quad (33)$$

که در رابطه بالا، R_i توابع پایه نریز و n تعداد توابع پایه غیر صفر روی هر المان است؛ بنابراین بردار درجات آزادی برای المان تیر به صورت رابطه (۳۴) بیان می‌شود:

$$\{\delta\} = \{u_1, v_1, w_1, \varphi_1, \psi_1, \theta_1, u_2, v_2, w_2, \varphi_2, \psi_2, \theta_2, \dots, u_n, v_n, w_n, \varphi_n, \psi_n, \theta_n\}^T \quad (34)$$

که در آن n تعداد نقاط کنترل مربوط به هر المان است؛ بنابراین، رابطه (۳۳) را می‌توان به صورت رابطه (۳۵) بازنویسی نمود.

$$\begin{aligned} u &= [R_u]\{\delta\} = [R_1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ R_2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ R_n \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \{\delta\} \\ v &= [R_v]\{\delta\} = [0 \ R_1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ R_2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ R_n \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \{\delta\} \\ w &= [R_w]\{\delta\} = [0 \ 0 \ R_1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ R_2 \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 \ R_n \ 0 \ 0 \ 0] \{\delta\} \\ \theta &= [R_\theta]\{\delta\} = [0 \ 0 \ 0 \ R_1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ R_2 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 \ 0 \ R_n \ 0 \ 0] \{\delta\} \\ \varphi &= [R_\varphi]\{\delta\} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ R_1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ R_2 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ R_n \ 0] \{\delta\} \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_t} \rho^{(k)} (z_{k+1}^2 - z_k^2), \\ I_3 &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{n_t} \rho^{(k)} (z_{k+1}^3 - z_k^3) \end{aligned}$$

که $\rho^{(k)}$ چگالی جرمی هر لایه است. با داشتن انرژی‌های جنبشی و کرنشی سیستم ارتعاشی، اصل همپلتون برای مدل مورد بررسی به صورت $\delta \int_0^{t_1} (K - U_B) dt = 0$ نوشته می‌شود که در آن δ نماد تغییرات مرتبه اول بوده و t_1 لحظه زمانی دلخواه است. در نهایت معادلات حرکت برای ارتعاشات آزاد و شرایط مرزی تیر مورد نظر با جایگذاری روابط انرژی جنبشی و کرنشی در رابطه اصل همپلتون به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} N_{x,x} &= I_1 b u_{0,tt} + I_2 b \psi_{tt} \\ N_{xy,x} &= I_1 b v_{0,tt} - I_2 b \varphi_{tt} \\ Q_{xz,x} &= I_1 b w_{0,tt} \\ N_{xy} + M_{2x,x} &= \frac{I_1 b^3}{12} \theta_{,tt} \\ M_{xy,x} &= I_3 b \varphi_{,tt} + \frac{I_1 b^3}{12} \varphi_{,tt} - I_2 b v_{0,tt} \end{aligned} \quad (31)$$

$$M_{1x,x} - Q_{xz} = I_3 b \psi_{,tt} + I_2 b u_{0,tt}$$

شرایط مرزی:

$$\begin{aligned} x = 0: \\ N_x = 0, \quad M_{1x} = 0, \quad M_{2x} = 0, \\ N_{xy} = 0, \quad T = 0, \quad Q_{xy} = 0, \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} x = L: \\ N_x = 0, \quad M_{1x} = 0, \quad M_{2x} = 0, \\ N_{xy} = 0, \quad T = 0, \quad Q_{xy} = 0, \end{aligned}$$

۳- فرمول‌بندی آیزوژنومتریک

$$\psi = [R_\psi]\{\delta\} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ R_1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ R_2 \ \dots \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ R_n]\{\delta\}$$

در روابط فوق $n = p + 1$ بوده و p مرتبه تابع است. با جایگذاری رابطه (۳۵) در رابطه (۲۷) انرژی پتانسیل کرنشی هر المان بر اساس بردار درجات آزادی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} [K_e] = \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{J_\xi} [R_{u,\xi}]^T bA_{11} \frac{1}{J_\xi} [R_{u,\xi}] + \frac{1}{J_\xi} [R_{\psi,\xi}]^T bD_{11} \frac{1}{J_\xi} [R_{\psi,\xi}] + \frac{1}{J_\xi} [R_{\theta,\xi}]^T \frac{b^3}{12} A_{11} \frac{1}{J_\xi} [R_{\theta,\xi}] \right. \\ + bB_{11} \left(\frac{1}{J_\xi} [R_{u,\xi}]^T \frac{1}{J_\xi} [R_{\psi,\xi}] + \frac{1}{J_\xi} [R_{\psi,\xi}]^T \frac{1}{J_\xi} [R_{u,\xi}] \right) \\ + bA_{66} \left([R_\theta]^T [R_\theta] + \frac{1}{J_\xi} [R_{v,\xi}]^T \frac{1}{J_\xi} [R_{v,\xi}] - \frac{1}{J_\xi} [R_{v,\xi}]^T [R_\theta] - [R_\theta]^T \frac{1}{J_\xi} [R_{v,\xi}] \right) \\ + \left(bD_{66} + \frac{b^3}{12} A_{55} \right) \frac{1}{J_\xi} [R_{\phi,\xi}]^T \frac{1}{J_\xi} [R_{\phi,\xi}] \\ + bB_{66} \left([R_\theta]^T \frac{1}{J_\xi} [R_{\phi,\xi}] + \frac{1}{J_\xi} [R_{\phi,\xi}]^T [R_\theta] - \frac{1}{J_\xi} [R_{v,\xi}]^T \frac{1}{J_\xi} [R_{\phi,\xi}] \right. \\ \left. - \frac{1}{J_\xi} [R_{\phi,\xi}]^T \frac{1}{J_\xi} [R_{v,\xi}] \right) \\ + bA_{16} \left(-\frac{1}{J_\xi} [R_{u,\xi}]^T [R_\theta] - [R_\theta]^T \frac{1}{J_\xi} [R_{u,\xi}] + \frac{1}{J_\xi} [R_{u,\xi}]^T \frac{1}{J_\xi} [R_{v,\xi}] \right. \\ + \frac{1}{J_\xi} [R_{v,\xi}]^T \frac{1}{J_\xi} [R_{u,\xi}] \left. \right) - bB_{16} \left(\frac{1}{J_\xi} [R_{u,\xi}]^T \frac{1}{J_\xi} [R_{\phi,\xi}] + \frac{1}{J_\xi} [R_{\phi,\xi}]^T \frac{1}{J_\xi} [R_{u,\xi}] \right) \\ + bB_{16} \left(-\frac{1}{J_\xi} [R_{\psi,\xi}]^T [R_\theta] - [R_\theta]^T \frac{1}{J_\xi} [R_{\psi,\xi}] + \frac{1}{J_\xi} [R_{\psi,\xi}]^T \frac{1}{J_\xi} [R_{v,\xi}] \right. \\ + \frac{1}{J_\xi} [R_{v,\xi}]^T \frac{1}{J_\xi} [R_{\psi,\xi}] \left. \right) - bD_{16} \left(\frac{1}{J_\xi} [R_{\psi,\xi}]^T \frac{1}{J_\xi} [R_{\phi,\xi}] + \frac{1}{J_\xi} [R_{\phi,\xi}]^T \frac{1}{J_\xi} [R_{\psi,\xi}] \right) \\ + bA_{55} \left([R_\psi]^T [R_\psi] + \frac{1}{J_\xi} [R_{w,\xi}]^T \frac{1}{J_\xi} [R_{w,\xi}] + \frac{1}{J_\xi} [R_{w,\xi}]^T [R_\psi] \right. \\ \left. + [R_\psi]^T \frac{1}{J_\xi} [R_{w,\xi}] \right) \Big] |J| d\xi \end{aligned} \tag{۳۷}$$

$$J_\xi = \frac{1}{2} (\xi_{i+1} - \xi_i) \tag{۳۹}$$

$$x^e(\xi) = \sum_{i=1}^n P_i^e R_i^e(\xi) \tag{۴۰}$$

$$J_\xi = \frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^n P_i^e \frac{\partial R_i^e(\xi)}{\partial \xi} \tag{۴۱}$$

که در آن، J ژاکوبین مربوط به نگاشتی است که با توجه به شکل ۵ سه فضا را به هم مرتبط می‌کند و به صورت زیر بیان می‌شود:

$$|J| = |J_\xi| |J_\xi| \tag{۳۸}$$

که در آن، n تعداد توابع پایه غیر صفر مربوط به هر المان $x^e(\xi)$ و هندسه مسئله است.

که در آن J_ξ نگاشت از فضای اصلی به فضای پارامتری و J نگاشت از فضای پارامتری به فضای فیزیکی است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$([K] - \lambda[M])\{\Delta_0\} = \{0\} \quad (45)$$

که ω فرکانس طبیعی تیر مورد نظر و $\{\Delta_0\}$ شکل مورد متناظر آن است. راه‌حل‌های غیر ضروری برای معادله (۴۵) را می‌توان با حل معادله $det([K] - \lambda[M]) = 0$ به دست آورد که فرکانس‌های طبیعی (مقادیر ویژه) و مدهای نرمال مربوطه (بردارهای ویژه) مرتبط با ارتعاش آزاد تیر چند لایه کامپوزیتی را به دست می‌دهد.

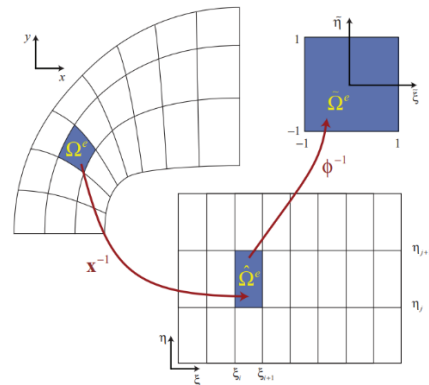
۴- نتایج و بحث

در این بخش، با استفاده از روش آیزوژئومتریکی مشخصه‌های ارتعاشی تیر کامپوزیتی چند لایه با لایه چینی دلخواه استخراج شده است. در تمام قسمت‌ها، تیر کامپوزیتی با سطح مقطع یکنواخت مستطیل شکل، با نسبت طول به ضخامت $\frac{L}{h} = 15$ و عرض واحد ($b = 1$) در نظر گرفته شده است. در تحلیل‌های انجام شده تمامی لایه‌های تیر از جنس گرافیت/اپوکسی (AS4/3501) و با خواص مکانیکی به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} E_{11} &= 144.8 \text{ GPa}, \\ E_{22} &= 9.65 \text{ GPa}, \\ G_{12} &= G_{13} = 4.14 \text{ GPa}, \\ G_{23} &= 3.45 \text{ GPa}, \\ \nu_{12} &= 0.33, \\ \rho &= 1389.23 \text{ kg/m}^3 \end{aligned} \quad (46)$$

۴-۱- مطالعه همگرایی

ابتدا، نرخ همگرایی حل آیزوژئومتریکی با استفاده از سه روش بهبود h ، p و k محاسبه شده و با نتایج مرجع [۱۲] مقایسه می‌شود. تیرهای با لایه‌چینی نامتقارن [45/-45/45/-45] (شکل ۴) و دو شرایط مرزی متفاوت در نظر گرفته شده‌است. در تمام قسمت‌ها از بردار گره باز استفاده شده‌است. پنج فرکانس طبیعی اول برای سه بهبود مورد نظر در جداول ۱ تا ۶ برای شرایط مرزی گیردار-گیردار و گیردار-آزاد نشان داده شده‌است. ما تعداد المان‌ها را افزایش دادیم و مشاهده شد که در روش آیزوژئومتریکی پاسخ‌ها نسبت به روش اجزای محدود سریع‌تر به همگرایی می‌رسند. شکل مدهای مربوط به پنج فرکانس طبیعی اول این تیر با شرایط مرزی دو سر گیردار در جدول ۱ در شکل ۶ ترسیم شده‌است. در این شکل، خطوط توپر، خط تیره و خط-نقطه به رنگ مشکی به ترتیب بیانگر



شکل ۵- نگاشت بین سه فضای فیزیکی، پارامتری و

اصلی [۲۴]

به روش مشابه، با جایگذاری رابطه (۳۵) در معادله (۲۹) انرژی جنبشی هر المان به صورت زیر بیان می‌شود:

$$T_B^{(e)} = \frac{1}{2} \{\delta\}^T [M_e] \{\delta\} \quad (42)$$

در رابطه بالا، $[M_e]$ ماتریس جرم المان تیر کامپوزیتی است که به صورت زیر حاصل می‌گردد:

$$\begin{aligned} [M_e] &= \int_{-1}^1 I_1 b ([R_u]^T [R_u] + [R_v]^T [R_v] \\ &\quad + [R_w]^T [R_w]) \\ &\quad + I_3 b ([R_\phi]^T [R_\phi] \\ &\quad + [R_\psi]^T [R_\psi]) \\ &\quad + \frac{I_1 b^3}{12} ([R_\phi]^T [R_\phi] \\ &\quad + [R_\theta]^T [R_\theta]) \\ &\quad + I_2 b ([R_u]^T [R_\psi] \\ &\quad + [R_\psi]^T [R_u] - [R_v]^T [R_\phi] \\ &\quad - [R_\phi]^T [R_v]) \Big] |J| d\xi \end{aligned} \quad (43)$$

در نهایت، معادلات حاکم بر حرکت کل سیستم در حالت ارتعاشات آزاد به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$[M]\{\ddot{\Delta}\} + [K]\{\Delta\} = \{0\} \quad (44)$$

که $\{\Delta\}$ بردار شامل درجات آزادی کل سیستم است. با فرض $\{\Delta\} = \{\Delta_0\} e^{i\omega t}$ و $\lambda = \omega^2$ معادله (۴۴) به شکل زیر بازنویسی خواهد شد:

نتيجه گرفت که شکل مودهای اول، سوم و پنجم، مودهای خمشی درون صفحه اول، دوم و سوم و شکل مودهای دوم و چهارم، مودهای خمشی خارج از صفحه اول و دوم را نشان می‌دهند.

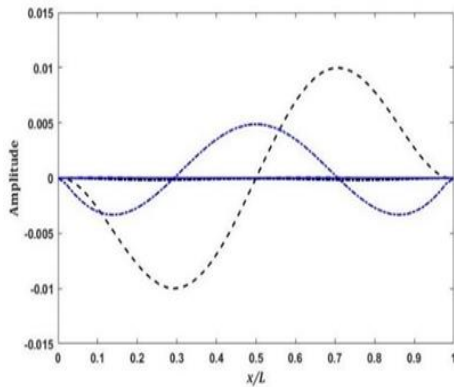
دامنه ارتعاش جابه‌جایی محوری (U)، جابه‌جایی‌های خمشی خارج از صفحه (V) و درون صفحه (W) می‌باشند. علاوه بر این، خطوط توپر، خط تیره و خط-نقطه به رنگ آبی به ترتیب دامنه ارتعاش پیچشی (φ)، دوران‌های خمشی درون صفحه (ψ) و خارج از صفحه (θ) را نشان می‌دهند؛ همچنین می‌توان

جدول ۱- بررسی همگرایی و مقایسه فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد تیر کامپوزیتی با لایه چینی [45/-45/45/-45] و شرایط مرزی دو سر گیردار ($L/h = 15$) با استفاده از بهبود h

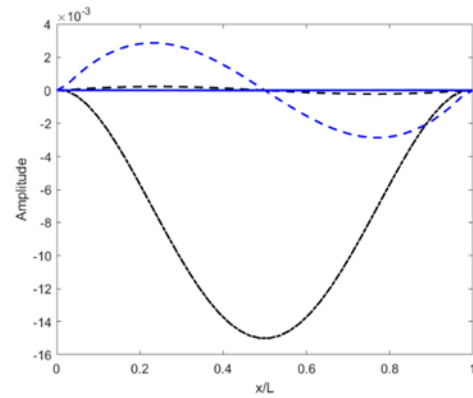
Mode No.					n_{el}	P
۵	۴	۳	۲	۱		
۹/۵۷۶۲	۵/۶۴۲۹	۵/۱۴۳۳	۲/۰۶۵۸	۱/۹۵۳۸	۱۰	۲
۹/۴۷۱۷	۵/۵۴۹۳	۵/۱۱۷۹	۲/۰۵۲۰	۱/۹۵۰۰	۲۰	
۹/۴۶۷۴	۵/۵۴۴۹	۵/۱۱۶۷	۲/۰۵۱۳	۱/۹۴۹۸	۳۰	
۹/۴۶۹۶	۵/۵۴۴۹	۵/۱۱۶۷	۲/۰۵۱۱	۱/۹۴۹۸	۱۰	۳
۹/۴۶۶۴	۵/۵۴۳۸	۵/۱۱۶۴	۲/۰۵۱۱	۱/۹۴۹۸	۲۰	
۹/۴۶۶۴	۵/۵۴۳۸	۵/۱۱۶۴	۲/۰۵۱۱	۱/۹۴۹۸	۳۰	
۹/۴۶۶۵	۵/۵۴۳۸	۵/۱۱۶۴	۲/۰۵۱۱	۱/۹۴۹۸	۱۰	۴
۹/۴۶۶۴	۵/۵۴۳۸	۵/۱۱۶۴	۲/۰۵۱۱	۱/۹۴۹۸	۲۰	
۹/۴۶۶۴	۵/۵۴۳۸	۵/۱۱۶۴	۲/۰۵۱۱	۱/۹۴۹۸	۳۰	
۹/۴۶۴۶	۵/۵۴۳۴	۵/۱۱۵۴	۲/۰۵۰۸	۱/۹۴۹۳	Ana [۱۲]	
۹/۴۶۴۷	۵/۵۴۳۵	۵/۱۱۵۴	۲/۰۵۰۸	۱/۹۴۹۳	FEM [۱۲]	

جدول ۲- بررسی همگرایی و مقایسه فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد تیر کامپوزیتی با لایه چینی [45/-45/45/-45] و شرایط مرزی گیردار-آزاد ($L/h = 15$) با استفاده از بهبود h

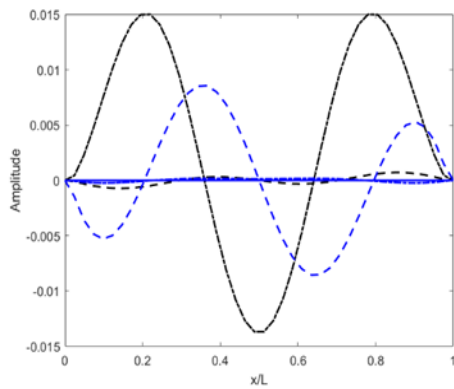
Mode No.					n_{el}	P
۵	۴	۳	۲	۱		
۵/۱۰۰۵	۲/۰۳۱۴	۱/۹۴۱۶	۰/۳۲۶۸	۰/۳۱۸۰	۱۰	۲
۵/۱۰۰۵	۲/۰۲۲۳	۱/۹۳۸۹	۰/۳۲۶۶	۰/۳۱۷۹	۲۰	
۵/۱۰۰۵	۲/۰۲۱۸	۱/۹۳۸۷	۰/۳۲۶۶	۰/۳۱۷۹	۳۰	
۵/۱۰۰۵	۲/۰۲۱۷	۱/۹۳۸۷	۰/۳۲۶۶	۰/۳۱۷۹	۱۰	۳
۵/۱۰۰۵	۲/۰۲۱۷	۱/۹۳۸۷	۰/۳۲۶۶	۰/۳۱۷۹	۲۰	
۵/۱۰۰۵	۲/۰۲۱۷	۱/۹۳۸۷	۰/۳۲۶۶	۰/۳۱۷۹	۳۰	
۵/۱۰۰۵	۲/۰۲۱۷	۱/۹۳۸۷	۰/۳۲۶۶	۰/۳۱۷۹	۱۰	۴
۵/۱۰۰۵	۲/۰۲۱۷	۱/۹۳۸۷	۰/۳۲۶۶	۰/۳۱۷۹	۲۰	
۵/۱۰۰۵	۲/۰۲۱۷	۱/۹۳۸۷	۰/۳۲۶۶	۰/۳۱۷۹	۳۰	
۵/۱۰۹۱	۲/۰۲۱۳	۱/۹۳۸۳	۰/۳۲۶۵	۰/۳۱۷۸	Ana [۱۲]	
۵/۱۰۹۱	۲/۰۲۱۴	۱/۹۳۸۳	۰/۳۲۶۵	۰/۳۱۷۸	FEM [۱۲]	



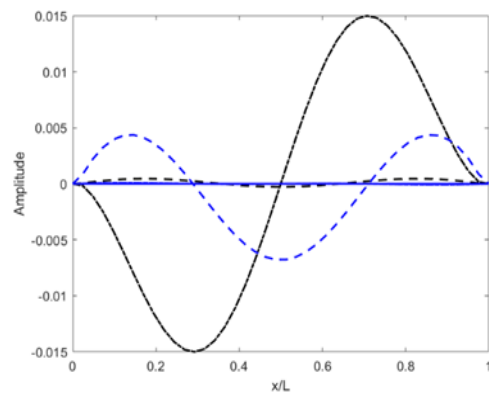
(د) شکل مودهای چهارم



(الف) شکل مودهای اول

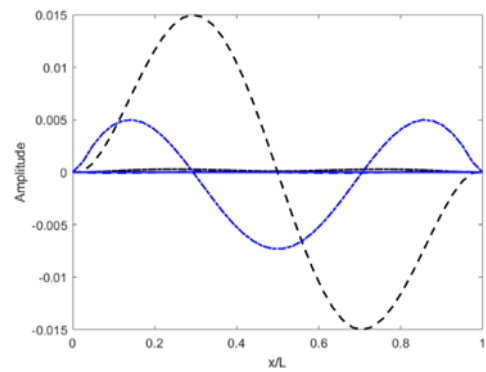


(ه) شکل مودهای پنجم



(ب) شکل مودهای دوم

شکل ۶- پنج شکل مود اول تیر با لایه چینی
 [45/-45/45/-45] و شرایط مرزی دو سر گیردار
 $(L/h = 15)$



(ج) شکل مودهای سوم

جدول ۳- بررسی همگرایی و مقایسه فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد تیر کامپوزیتی با لایه چینی [45/-45/45/-45] و

شرایط مرزی دو سر گیردار ($L/h = 15$) با استفاده از بهبود p

Mode No.					P	n_{el}
۵	۴	۳	۲	۱		
۹/۵۳۶۴	۵/۶۰۷۷	۵/۱۳۷۱	۲/۰۶۱۸	۱/۹۵۳۳	۲	۱۰
۹/۴۶۶۸	۵/۵۴۴۰	۵/۱۱۶۵	۲/۰۵۱۱	۱/۹۴۹۸	۳	
۹/۴۶۶۴	۵/۵۴۳۸	۵/۱۱۶۴	۲/۰۵۱۱	۱/۹۴۹۸	۴	
۹/۴۸۱۱	۵/۵۵۸۴	۵/۱۲۰۷	۲/۰۵۳۵	۱/۹۵۰۵	۲	۱۵
۹/۴۶۶۴	۵/۵۴۳۸	۵/۱۱۶۴	۲/۰۵۱۱	۱/۹۴۹۸	۳	
۹/۴۶۶۴	۵/۵۴۳۸	۵/۱۱۶۴	۲/۰۵۱۱	۱/۹۴۹۸	۴	
۹/۴۷۱۱	۵/۵۴۸۷	۵/۱۱۷۸	۲/۰۵۱۹	۱/۹۵۰۰	۲	۲۰
۹/۴۶۶۴	۵/۵۴۳۸	۵/۱۱۶۴	۲/۰۵۱۱	۱/۹۴۹۸	۳	
۹/۴۶۶۴	۵/۵۴۳۸	۵/۱۱۶۴	۲/۰۵۱۱	۱/۹۴۹۸	۴	
۹/۴۶۶۶	۵/۵۴۳۴	۵/۱۱۵۴	۲/۰۵۰۸	۱/۹۴۹۳	Ana [۱۲]	
۹/۴۶۶۷	۵/۵۴۳۵	۵/۱۱۵۴	۲/۰۵۰۸	۱/۹۴۹۳	FEM [۱۲]	

جدول ۴- بررسی همگرایی و مقایسه فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد تیر کامپوزیتی با لایه چینی [45/-45/45/-45] و

شرایط مرزی گیردار-آزاد ($L/h = 15$) با استفاده از بهبود p

Mode No.					P	n_{el}
۵	۴	۳	۲	۱		
۵/۱۰۰۵	۲/۰۲۸۶	۱/۹۴۱۱	۰/۳۲۶۷	۰/۳۱۸۰	۲	۱۰
۵/۱۰۰۵	۲/۰۲۱۷	۱/۹۳۸۷	۰/۳۲۶۶	۰/۳۱۷۹	۳	
۵/۱۰۰۵	۲/۰۲۱۷	۱/۹۳۸۷	۰/۳۲۶۶	۰/۳۱۷۹	۴	
۵/۱۰۰۵	۲/۰۲۳۳	۱/۹۳۹۲	۰/۳۲۶۶	۰/۳۱۷۹	۲	۱۵
۵/۱۰۰۵	۲/۰۲۱۷	۱/۹۳۸۷	۰/۳۲۶۶	۰/۳۱۷۹	۳	
۵/۱۰۰۵	۲/۰۲۱۷	۱/۹۳۸۷	۰/۳۲۶۶	۰/۳۱۷۹	۴	
۵/۱۰۰۵	۲/۰۲۲۲	۱/۹۳۸۹	۰/۳۲۶۶	۰/۳۱۷۹	۲	۲۰
۵/۱۰۰۵	۲/۰۲۱۷	۱/۹۳۸۷	۰/۳۲۶۶	۰/۳۱۷۹	۳	
۵/۱۰۰۵	۲/۰۲۱۷	۱/۹۳۸۷	۰/۳۲۶۶	۰/۳۱۷۹	۴	
۵/۱۰۹۱	۲/۰۲۱۳	۱/۹۳۸۳	۰/۳۲۶۵	۰/۳۱۷۸	Ana [۱۲]	
۵/۱۰۹۱	۲/۰۲۱۴	۱/۹۳۸۳	۰/۳۲۶۵	۰/۳۱۷۸	FEM [۱۲]	

جدول ۵- بررسی همگرایی و مقایسه فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد تیر کامپوزیتی با لایه چینی [45/-45/45/-45] و

شرایط مرزی دو سر گیردار ($L/h = 15$) با استفاده از بهبود k

Mode No.					P	n_{el}
۵	۴	۳	۲	۱		
۹/۵۷۶۲	۵/۶۴۲۹	۵/۱۴۳۳	۲/۰۶۵۸	۱/۹۵۳۸	۲	۱۰
۹/۴۶۹۶	۵/۵۴۴۹	۵/۱۱۶۷	۲/۰۵۱۱	۱/۹۴۹۸	۳	

۹/۴۶۶۵	۵/۵۴۳۸	۵/۱۱۶۴	۲/۰۵۱۱	۱/۹۴۹۸	۴	۱۵
۹/۴۸۴۵	۵/۵۶۱۸	۵/۱۲۱۳	۲/۰۵۳۹	۱/۹۵۰۵	۲	
۹/۴۶۶۶	۵/۵۴۳۹	۵/۱۱۶۴	۲/۰۵۱۱	۱/۹۴۹۸	۳	
۹/۴۶۶۴	۵/۵۴۳۸	۵/۱۱۶۴	۲/۰۵۱۱	۱/۹۴۹۸	۴	
۹/۴۷۱۷	۵/۵۴۹۳	۵/۱۱۷۹	۲/۰۵۲۰	۱/۹۵۰۰	۲	۲۰
۹/۴۶۶۴	۵/۵۴۳۸	۵/۱۱۶۴	۲/۰۵۱۱	۱/۹۴۹۸	۳	
۹/۴۶۶۴	۵/۵۴۳۸	۵/۱۱۶۴	۲/۰۵۱۱	۱/۹۴۹۸	۴	
۹/۴۶۴۶	۵/۵۴۳۴	۵/۱۱۵۴	۲/۰۵۰۸	۱/۹۴۹۳	Ana [۱۲]	
۹/۴۶۴۷	۵/۵۴۳۵	۵/۱۱۵۴	۲/۰۵۰۸	۱/۹۴۹۳	FEM [۱۲]	

جدول ۶- بررسی همگرایی و مقایسه فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد تیر کامپوزیتی با لایه چینی [45/-45/45] و

شرایط مرزی گیردار-آزاد ($L/h = 15$) با استفاده از بهبود k

Mode No.					P	n_{el}
۵	۴	۳	۲	۱		
۵/۱۰۰۵	۲/۰۳۱۴	۱/۹۴۱۶	۰/۳۲۶۸	۰/۳۱۸۰	۲	۱۰
۵/۱۰۰۵	۲/۰۲۱۷	۱/۹۳۸۷	۰/۳۲۶۶	۰/۳۱۷۹	۳	
۵/۱۰۰۵	۲/۰۲۱۷	۱/۹۳۸۷	۰/۳۲۶۶	۰/۳۱۷۹	۴	
۵/۱۰۰۵	۲/۰۲۳۶	۱/۹۳۹۳	۰/۳۲۶۶	۰/۳۱۷۹	۲	۱۵
۵/۱۰۰۵	۲/۰۲۱۷	۱/۹۳۸۷	۰/۳۲۶۶	۰/۳۱۷۹	۳	
۵/۱۰۰۵	۲/۰۲۱۷	۱/۹۳۸۷	۰/۳۲۶۶	۰/۳۱۷۹	۴	
۵/۱۰۰۵	۲/۰۲۲۳	۱/۹۳۸۹	۰/۳۲۶۶	۰/۳۱۷۹	۲	۲۰
۵/۱۰۰۵	۲/۰۲۱۷	۱/۹۳۸۷	۰/۳۲۶۶	۰/۳۱۷۹	۳	
۵/۱۰۰۵	۲/۰۲۱۷	۱/۹۳۸۷	۰/۳۲۶۶	۰/۳۱۷۹	۴	
۵/۱۰۹۱	۲/۰۲۱۳	۱/۹۳۸۳	۰/۳۲۶۵	۰/۳۱۷۸	Ana [۱۲]	
۵/۱۰۹۱	۲/۰۲۱۴	۱/۹۳۸۳	۰/۳۲۶۵	۰/۳۱۷۸	FEM [۱۲]	

این منظور، لایه‌چینی‌های متعامد، متقارن زاویه‌ای و نامتقارن در نظر گرفته شده‌است. در نتایج به دست آمده برای لایه‌چینی متقارن مشاهده شده‌است که هر چه زاویه قرارگیری فیبرها نسبت به راستای طول تیر بیشتر شود، فرکانس طبیعی کمتر است و سفتی کلی تیر نیز کمتر می‌شود.

۴-۲- تیر چند لایه کامپوزیتی با لایه چینی مختلف در این قسمت، تیرهای چند لایه کامپوزیت با لایه‌چینی مختلف و شرایط مرزی دو سر گیردار مورد مطالعه قرار گرفته‌اند. سه فرکانس طبیعی اول این تیرها برای چهار حالت ارتعاشات خمشی درون صفحه، خمشی برون صفحه، محوری و پیچشی به ترتیب در جداول ۷ تا ۱۰ ارائه شده‌است. برای

جدول ۷- سه فرکانس طبیعی اول برای ارتعاشات خمشی درون صفحه تیر کامپوزیتی در لایه‌چینی‌های مختلف و شرایط

مرزی C-C

Unsymmetric			Angle ply $[\theta/-\theta]_s$			Cross ply			Mode No.
$[60/45]_2$	$[60/90]_2$	$[0/45]_2$	$\theta = 75$	$\theta = 60$	$\theta = 45$	$[0/90]_2$	$[90]_4$	$[0]_4$	
۱/۷۳۷۶	۱/۶۲۰۴	۳/۷۶۶۳	۱/۶۰۵۴	۱/۶۲۶۹	۱/۸۹۲۴	۳/۷۰۳۰	۱/۶۱۵۰	۴/۸۴۱۳	Ω_1
۴/۵۹۲۴	۴/۲۹۹۷	۸/۹۲۱۷	۴/۲۶۱۰	۴/۳۱۸۶	۴/۹۷۳۵	۸/۸۱۵۲	۴/۲۸۳۵	۱۰/۸۱۴۷	Ω_2
۸/۵۵۸۶	۸/۰۴۸۱	۱۵/۲۹۸۱	۷/۹۷۸۳	۸/۰۸۶۷	۹/۲۱۴۵	۱۵/۰۴۵۲	۸/۰۱۴۱	۱۷/۸۰۵۷	Ω_3

جدول ۸- سه فرکانس طبیعی اول برای ارتعاشات خمشی خارج از صفحه تیر کامپوزیتی در لایه‌چینی‌های مختلف و شرایط

مرزی C-C

Unsymmetric			Angle ply $[\theta/-\theta]_s$			Cross ply			Mode No.
$[60/45]_2$	$[60/90]_2$	$[0/45]_2$	$\theta = 75$	$\theta = 60$	$\theta = 45$	$[0/90]_2$	$[90]_4$	$[0]_4$	
۱/۸۶۱۷	۱/۶۴۴۹	۴/۳۷۲۶	۱/۶۲۳۴	۱/۶۵۷۸	۲/۰۵۱۲	۴/۰۶۳۶	۱/۶۲۹۴	۵/۰۲۸۵	Ω_1
۵/۰۲۳۶	۴/۴۲۶۵	۱۰/۹۶۴۳	۴/۳۵۹۷	۴/۴۷۶۷	۵/۵۴۴۴	۹/۷۷۳۲	۴/۳۶۲۱	۱۱/۴۲۲۸	Ω_2
۹/۵۴۶۱	۸/۴۲۰۷	۱۹/۳۸۷۰	۸/۲۶۹۳	۸/۵۴۵۳	۱۰/۵۹۵۰	۱۶/۷۹۴۷	۸/۲۴۴۹	۱۸/۹۶۷۴	Ω_3

جدول ۹- سه فرکانس طبیعی اول برای ارتعاشات پیچشی تیر کامپوزیتی در لایه‌چینی‌های مختلف و شرایط مرزی C-C

Unsymmetric			Angle ply $[\theta/-\theta]_s$			Cross ply			Mode No.
$[60/45]_2$	$[60/90]_2$	$[0/45]_2$	$\theta = 75$	$\theta = 60$	$\theta = 45$	$[0/90]_2$	$[90]_4$	$[0]_4$	
۵۹۰۶/۹	۰۱۸۲/۸	۱۳۲۴/۹	۶۷۰۶/۷	۷۱۸۱/۸	۵۲۹۰/۱۰	۴۸۳۰/۷	۳۳۴۲/۷	۶۲۸۹/۷	Ω_1
۲۰۱۹/۱۹	۰۵۰۴/۱۶	۲۱۳۴/۱۸	۳۴۱۱/۱۵	۴۳۲۷/۱۷	۰۵۹۷/۲۱	۹۶۶۱/۱۴	۶۶۸۵/۱۴	۲۵۷۸/۱۵	Ω_2
۶۸۰۶/۲۸	۰۸۰۸/۲۴	۴۰۱۰/۲۷	۰۱۱۲/۲۳	۱۵۲۹/۲۶	۴۶۶۹/۳۱	۴۴۹۱/۲۲	۰۰۸/۲۲	۸۸۶۸/۲۲	Ω_3

جدول ۱۰- سه فرکانس طبیعی اول برای ارتعاشات محوری تیر کامپوزیتی در لایه‌چینی‌های مختلف و شرایط مرزی C-C

Unsymmetric			Angle ply $[\theta/-\theta]_s$			Cross ply			Mode No.
$[60/45]_2$	$[60/90]_2$	$[0/45]_2$	$\theta = 75$	$\theta = 60$	$\theta = 45$	$[0/90]_2$	$[90]_4$	$[0]_4$	
۵۹۰۶/۹	۰۱۸۲/۸	۱۳۲۴/۹	۶۷۰۶/۷	۷۱۸۱/۸	۵۲۹۰/۱۰	۴۸۳۰/۷	۳۳۴۲/۷	۶۲۸۹/۷	Ω_1
۲۰۱۹/۱۹	۰۵۰۴/۱۶	۲۱۳۴/۱۸	۳۴۱۱/۱۵	۴۳۲۷/۱۷	۰۵۹۷/۲۱	۹۶۶۱/۱۴	۶۶۸۵/۱۴	۲۵۷۸/۱۵	Ω_2
۶۸۰۶/۲۸	۰۸۰۸/۲۴	۴۰۱۰/۲۷	۰۱۱۲/۲۳	۱۵۲۹/۲۶	۴۶۶۹/۳۱	۴۴۹۱/۲۲	۰۰۸/۲۲	۸۸۶۸/۲۲	Ω_3

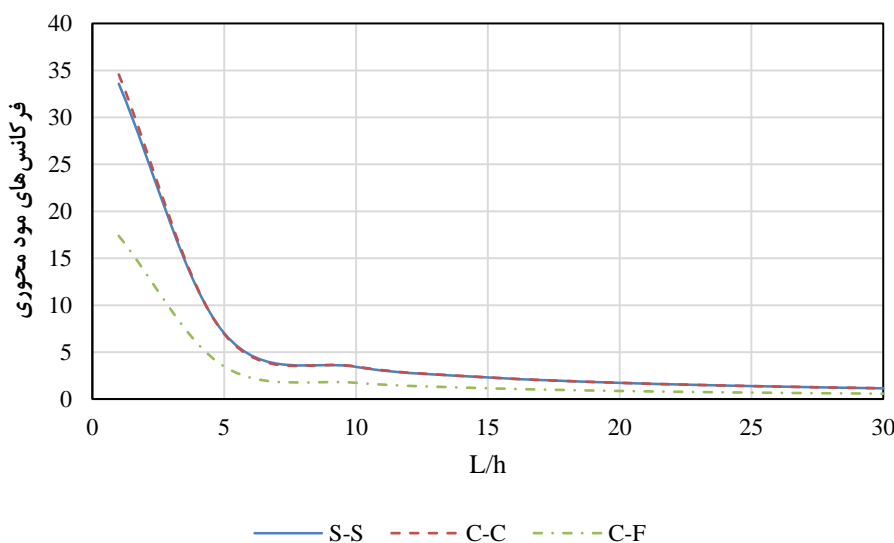
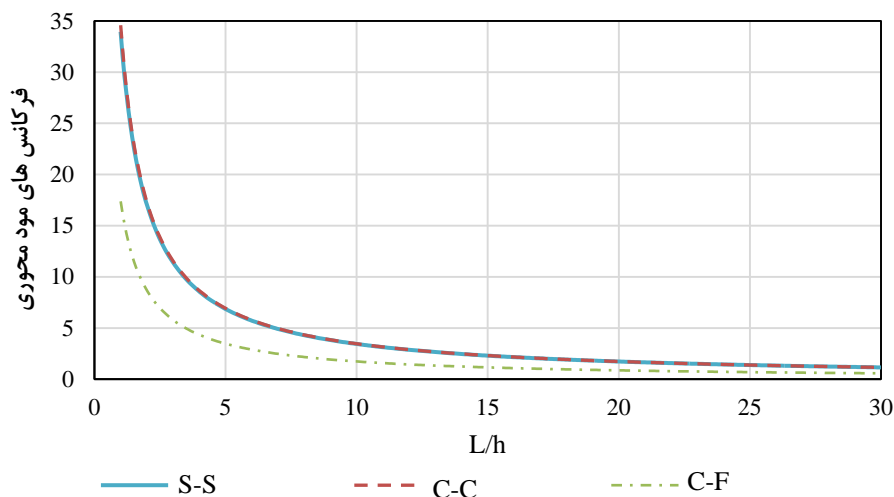
علاوه بر این، برای مقایسه، تمام فرکانس‌های بی‌بعد در این مثال براساس نسبت لاغری ثابت $L/h = 15$ محاسبه شده‌اند. با دقت در شکل‌های زیر مشاهده می‌شود که، فرکانس‌های اولیه در تمام جهات با افزایش نسبت لاغری کاهش می‌یابند. برای مقادیر کوچک L/h تمام فرکانس‌های اولیه با یک نسبت سریع کاهش می‌یابند؛ در حالی که برای مقادیر بالاتر L/h ، آن‌ها تمایل دارند ثابت باشند و تاثیر L/h تقریباً ناچیز است. براین اساس، می‌توان گفت که برای مقادیر بالاتر L/h ، تئوری

۳-۴- تاثیر نسبت لاغری و ناهمسانگردی مواد روی ارتعاشات آزاد

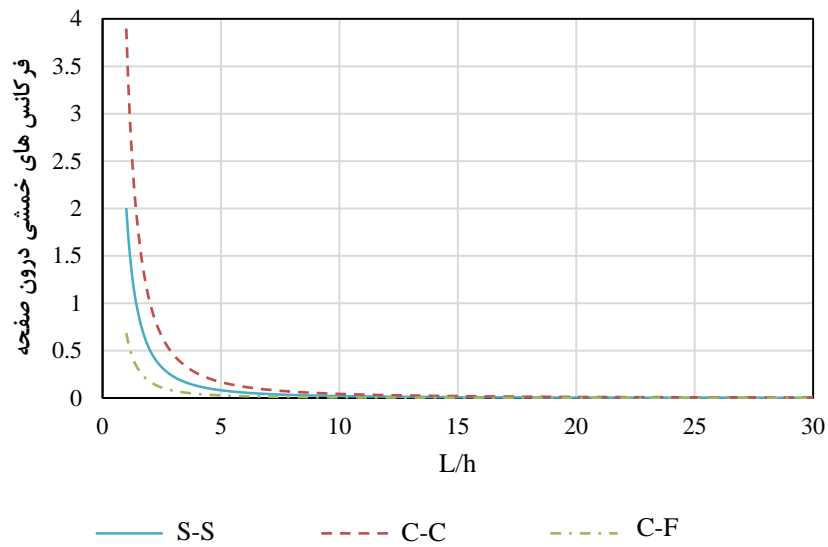
تاثیر نسبت لاغری (L/h) بر فرکانس‌های اولیه بی‌بعد تیر برای ارتعاشات محوری، خمشی درون صفحه، خمشی خارج از صفحه و پیچشی با شرایط مرزی مختلف در شکل ۷ نشان داده شده‌است. در این قسمت لایه‌چینی نامتقارن $[0^\circ 45^\circ 0^\circ 45^\circ]$ در نظر گرفته شده‌است. برای محاسبه نتایج در این حالت، ضخامت تیر h ثابت نگه داشته شده و طول تیر L تغییر می‌کند.

[۱]. توجه به اين نکته ضروري است که در محاسبه اين فرکانس ها مقدار E_{11} تغيير مي کند؛ در حالی که ساير ثابت های الاستيک يعنی E_{22} ، G_{12} ، G_{13} و G_{23} ثابت نگه داشته می شوند و برابر با خواص ماده گرافيت/اپوکسي (AS4/3501) در رابطه (۴۶) هستند. علاوه بر اين برای مقایسه، تمام فرکانس های اوليه در حالت بی بعد با استفاده از $E_{11} = 144.8 \text{ GPa}$ ارائه شده اند. مشاهده می شود که تمام فرکانس های طبیعی تير برای ارتعاشات محوری، خمشی درون صفحه، خمشی خارج از صفحه و پیچشی با افزایش ناهمسانگردی مواد افزایش می یابند. نسبت تغيير برای مقادير پايين ناهمسانگردی مواد سریعتر از مقادير بالاتر آن است.

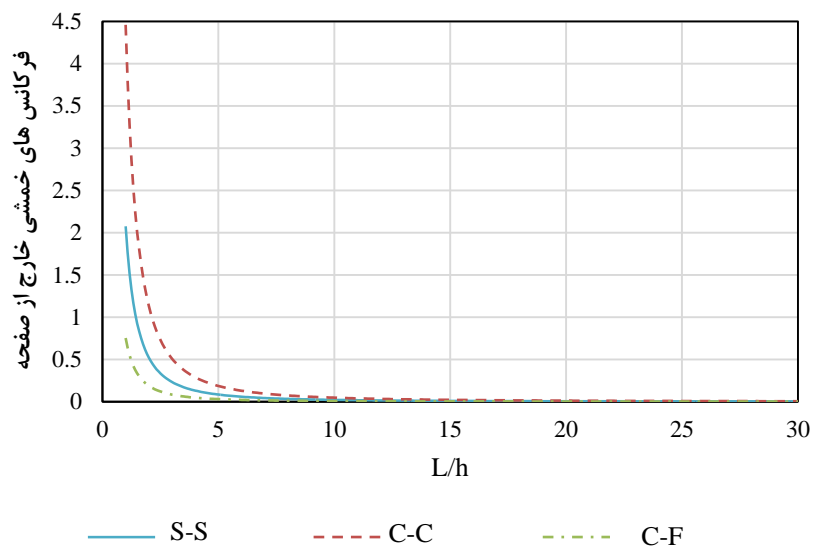
تغيير شکل برشی و کلاسیک نتایج یکسانی دارند؛ همچنین مشاهده می شود که فرکانس های محوری و پیچشی برای شرایط مرزی دو سر گیردار و ساده بسیار نزدیک به هم هستند. سپس، اثرات ناهمسانگردی مواد بر فرکانس های اوليهی بدون بعد مودهای ارتعاشی محوری، خمشی درون صفحه، خمشی خارج از صفحه و پیچشی تير چند لایه کامپوزيتي مورد مطالعه قرار گرفته است. در اين حالت، تيري با نسبت لاغری $L/h = 15$ و با لایه چینی نامتقارن $[0^\circ 45^\circ 0^\circ 45^\circ]$ در نظر گرفته شده است. شکل ۸، تاثیر ناهمسانگردی مواد را بر فرکانس های اوليه تير با شرایط مرزی مختلف نشان می دهند. ناهمسانگردی مواد به صورت نسبت E_{11}/E_{22} تعريف می شود



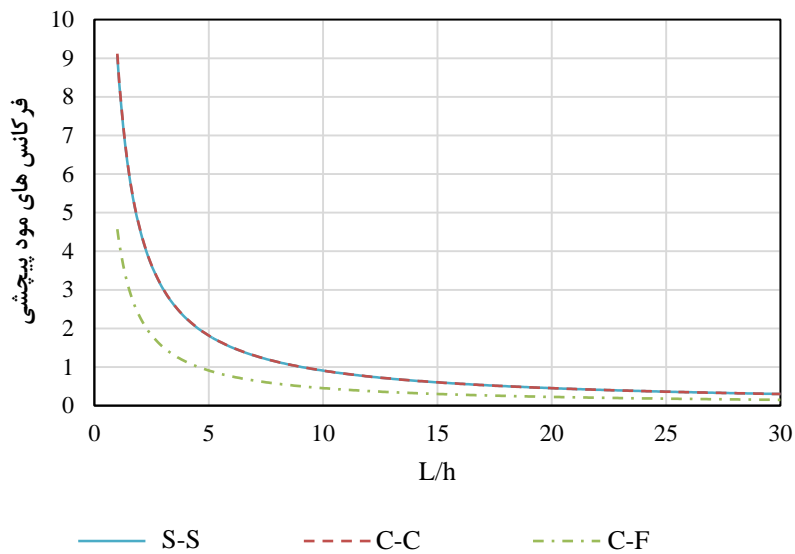
(الف) مود محوری



(ب) مود خمشی درون صفحه

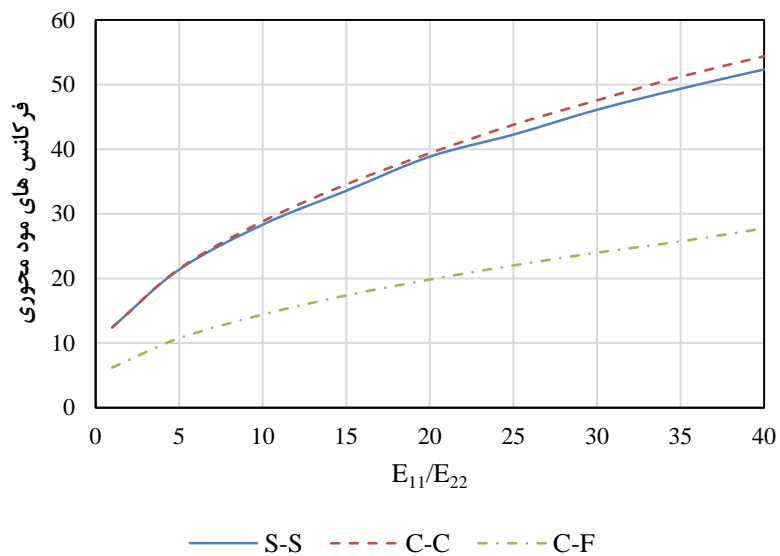


(ج) مود خمشی خارج از صفحه

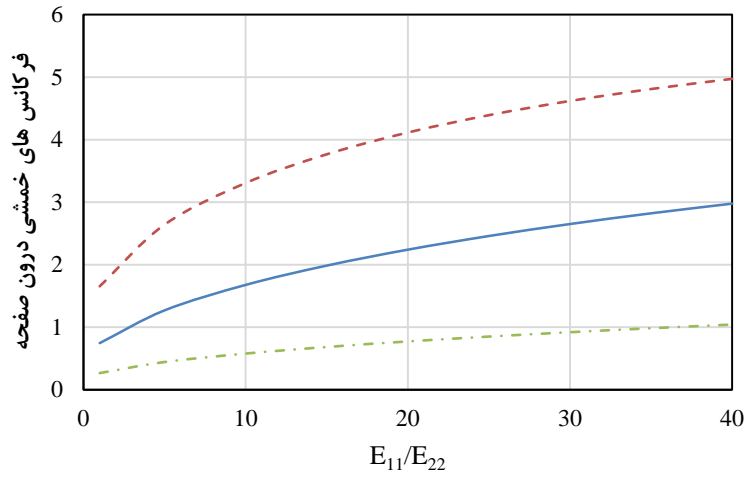


(د) مود پیچشی

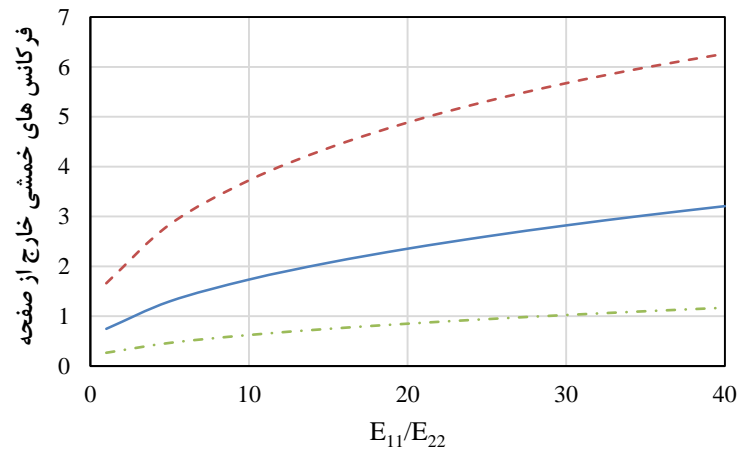
شکل ۷- تاثیر نسبت لاغری (L/h) روی فرکانس های اولیه بی بعد تیر کامپوزیتی چند لایه با شرایط مرزی مختلف



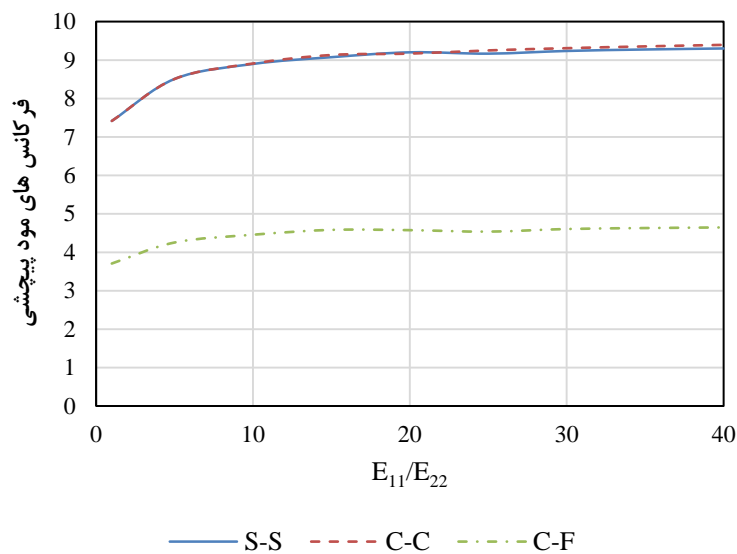
(الف) مود محوری



(ب) مود خمشی درون صفحه



(ج) مود خمشی خارج از صفحه



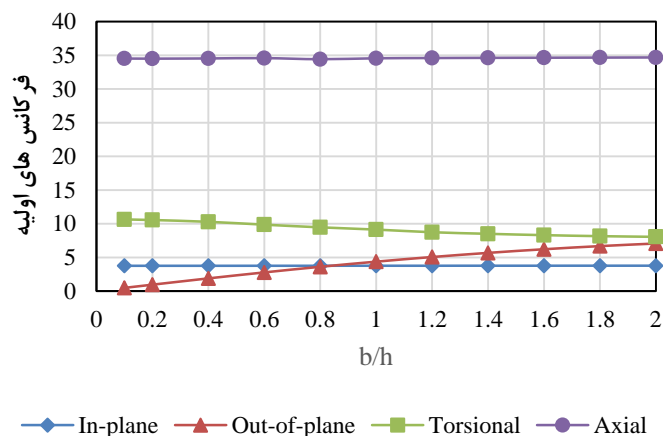
(د) مود پیچشی

شکل ۸- تاثیر ناهمسانگردی مواد (E_{11}/E_{22}) بر روی فرکانس‌های اولیه بی بعد تیر کامپوزیتی چند لایه با شرایط مرزی مختلف

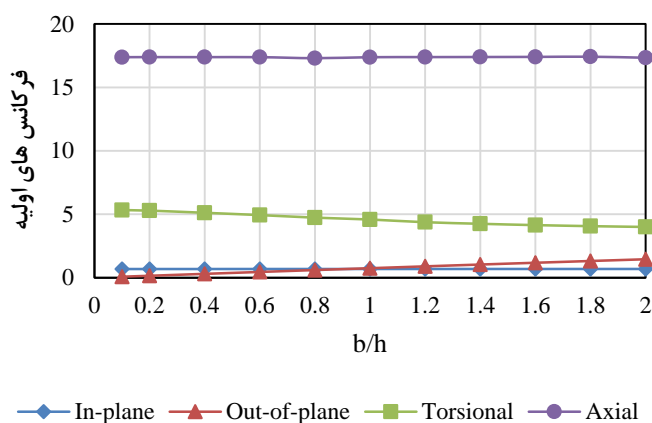
شده و عرض تیر تغییر می‌کند. با توجه به شکل مشاهده می‌شود که فرکانس‌های بی‌بعد برای ارتعاشات محوری و خمشی درون صفحه به طور قابل توجهی تحت تاثیر افزایش نسبت b/h قرار نگرفته است، در حالی که ارتعاشات خمشی خارج از صفحه و پیچشی تحت تاثیر قرار گرفته‌اند. به عبارت دیگر، برای مقادیر کوچک b/h ، مودهای ارتعاشی در جهت خارج از صفحه کوچکتر از مودهای مربوطه در جهت درون صفحه هستند، در حالی که برای مقادیر بزرگتر b/h ، عکس آن اتفاق می‌افتد. مودهای پیچشی نیز با افزایش نسبت b/h کاهش می‌یابند.

۴-۴- تاثیر نسبت عرض به ضخامت بر روی ارتعاشات آزاد

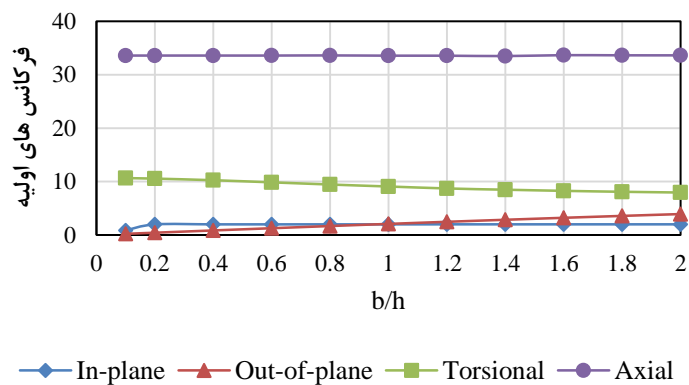
در بخش انتهایی، تاثیر نسبت عرض به ضخامت (b/h) بر فرکانس‌های اولیه بدون بعد مودهای ارتعاشی محوری، خمشی درون صفحه، خمشی خارج از صفحه و پیچشی در شکل ۹ نشان داده شده است. تیر مورد نظر دارای نسبت لاغری $L/h = 15$ و با لایه‌چینی نامتقارن $[0^\circ 45^\circ 0^\circ 45^\circ]$ می‌باشد. در این حالت برای محاسبه فرکانس‌ها، ضخامت تیر ثابت نگه داشته



(الف) شرط مرزی گیردار-گیردار



(ب) شرط مرزی گیردار-آزاد



(ج) شرط مرزی ساده-ساده

شکل ۹- تاثیر نسبت عرض به ضخامت تیر (b/h) بر روی فرکانس‌های اولیه بی بعد تیر کامپوزیتی چند لایه برای ارتعاشات محوری، خمشی درون صفحه، خارج از صفحه و پیچشی

۵- نتیجه گیری

در این مقاله با استفاده از روش آیزوژنومتری که یک روش نوین در حل‌های عددی محسوب می‌شود، به بررسی ویژگی‌های دینامیکی تیرهای کامپوزیتی چند لایه با لایه چینی دلخواه و شرایط مرزی مختلف در حضور تغییر شکل خارج از صفحه پرداخته شده است؛ بنابراین با توجه به اهداف پژوهش، از توابع پایه نرَبز به عنوان توابع شکل جهت تحلیل آیزوژنومتری تیر کامپوزیتی استفاده شده است. به منظور بررسی همگرایی با استفاده از سه روش بهبود موجود در تحلیل آیزوژنومتری، فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد در شرایط تکیه‌گاهی مختلف و برای المان‌ها و مرتبه‌های مختلف محاسبه شده‌اند. با مطابقت مناسب میان نتایج به دست آمده از این روش و نتایج روش اجزاء محدود به درستی نتایج به دست آمده با استفاده از روش آیزوژنومتری پی برده شد؛ همچنین مشاهده شد که در روش آیزوژنومتری می‌توان با تعداد المان‌هایی به مراتب کمتر از روش اجزاء محدود به همگرایی و جواب قابل قبول رسید؛ بنابراین سرعت رسیدن به جواب درست در این روش افزایش و به مراتب خطاهای محاسباتی کاهش می‌یابند.

به منظور یافتن پاسخ ارتعاش آزاد تیر از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول استفاده شده است؛ بنابراین اثر تغییر شکل برشی عرضی، اینرسی دورانی و همچنین اثر پواسون و کوپلینگ‌های مواد در جابجایی‌های محوری، درون صفحه و خارج از صفحه در نظر گرفته شده است. به این ترتیب، تمام مودهای ارتعاشی یعنی مودهای خمشی درون صفحه، خارج از صفحه، مودهای محوری و پیچشی تیرهای کامپوزیتی چند لایه با لایه چینی دلخواه به کمک روش آیزوژنومتری به دست آمده است.

برای تمام مودهای ارتعاشی بیان شده، تاثیر نسبت لاغری (نسبت طول به ضخامت) بر فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد در شرایط تکیه‌گاهی مختلف با یکدیگر مقایسه شده‌اند. از نتایج به دست آمده مشاهده می‌شود، همانطور که انتظار می‌رفت با افزایش نسبت طول به ضخامت فرکانس‌های اولیه بی‌بعد در تمام مودهای ارتعاشی و در تمام شرایط تکیه‌گاهی کاهش می‌یابند و در شرایط مرزی دو سر گیردار نسبت به شرایط مرزی دیگر حساسیت بیشتری در فرکانس‌های طبیعی مشاهده شده است.

همچنین تاثیر ناهمسانگردی مواد نیز بر فرکانس‌های اولیه بی‌بعد در شرایط تکیه‌گاهی مختلف مورد بررسی قرار گرفت و مشاهده شد که با افزایش ناهمسانگردی مواد در تمام مودهای ارتعاشی و شرایط تکیه‌گاهی مختلف فرکانس‌های طبیعی افزایش می‌یابند و نسبت تغییر در مقادیر پایین‌تر ناهمسانگردی مواد سریع‌تر از مقادیر بالاتر آن است.

همچنین از بررسی تاثیر نسبت عرض به ضخامت بر فرکانس‌های اولیه بی‌بعد در تمام مودهای ارتعاشی خمشی درون صفحه، خارج از صفحه، محوری و پیچشی و برای شرایط تکیه‌گاهی مختلف مشاهده شده است که فرکانس‌های بی‌بعد برای ارتعاشات محوری و خمشی درون صفحه به طور قابل توجهی تحت تاثیر افزایش نسبت عرض به ضخامت قرار نگرفته‌اند. مودهای پیچشی با افزایش نسبت b/h کاهش یافته‌اند. در حالی که مودهای ارتعاشی خارج از صفحه در مقادیر کوچک b/h کوچکتر از مودهای مربوطه در جهت درون صفحه بوده و در مقادیر بزرگتر عکس آن اتفاق افتاده است.

تأییدیه اخلاقی: نویسندگان متعهد هستند که مطالب این مقاله را در هیچ مجله دیگری به چاپ نرسانده‌اند.

تعارض منافع: تمامی مطالب مذکور توسط نویسندگان انجام شده و هیچ فرد یا نهادی در تهیه آن نقش نداشته است.

منابع مالی: تمامی منابع مالی این تحقیق توسط نویسندگان مقاله تأمین شده است.

مراجع

- [1]. Krishnaswamy, S., K. Chandrashekhara, and W. Wu, (1992) Analytical solutions to vibration of generally layered composite beams. *Journal of Sound and Vibration*, 159(1): p. 85-99.
- [2]. Fridman, Y. and H. Abramovich, (2008) Enhanced structural behavior of flexible laminated composite beams. *Composite Structures*, 82(1): p. 140-154.
- [3]. Jafari-Talookolaei, R.-A., (2015) Analytical solution for the free vibration characteristics of the rotating composite beams with a delamination. *Aerospace Science and Technology*, 45: p. 346-358.
- [4]. Aydogdu, M., (2007) Thermal buckling analysis of cross-ply laminated composite beams with general boundary conditions. *Composites Science and Technology*, 67(6): p. 1096-1104.
- [5]. Jafari-Talookolaei, R.A., et al., (2012) An analytical approach for the free vibration analysis of generally laminated composite beams with shear effect and rotary inertia. *International Journal of Mechanical Sciences*, 65(1): p. 97-104.

- [15] Lee, S.J. and K.S. Park, (2014) Static Analysis of Timoshenko Beams using Isogeometric Approach. ARCHITECTURAL RESEARCH, 16: p. 57-65.
- [16] Luu, A.-T., N.-I. Kim, and J. Lee, (2015) Isogeometric vibration analysis of free-form Timoshenko curved beams. Meccanica, 50(1): p. 169-187.
- [17] Wang, X., X. Zhu, and P. Hu, (2015) Isogeometric finite element method for buckling analysis of generally laminated composite beams with different boundary conditions. Int. J. Mech. Sci., 104: p. 190-199.
- [18] GONDEGAON, S. and H.K. (2016) VORUGANTI, STATIC STRUCTURAL AND MODAL ANALYSIS USING ISOGEOMETRIC ANALYSIS. J. Theo. Appl. Mech., 46(4): p. 36-75.
- [19] Hosseini, S.F., et al., (2018) Pre-bent shape design of full free-form curved beams using isogeometric method and semi-analytical sensitivity analysis. Structural and Multidisciplinary Optimization, 58(6): p. 2621-2633.
- [20] Pavan, G.S., H. Muppidi, and J. Dixit, Static, (2022) free vibrational and buckling analysis of laminated composite beams using isogeometric collocation method. European Journal of Mechanics - A/Solids, 96: p. 104758.
- [21] Ghafari, E. and J. Rezaeepazhand, (2017) Isogeometric analysis of composite beams with arbitrary cross-section using dimensional reduction method. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 318: p. 594-618.
- [22] Bekhoucha, F., (2021) Isogeometric analysis for in-plane free vibration of centrifugally stiffened beams including Coriolis effects. Mechanics Research Communications, 111: p. 103645.
- [23] Luu, A.-T., N.-I. Kim, and J. Lee, NURBS- (2015) based isogeometric vibration analysis of generally laminated deep curved beams with variable curvature. Composite Structures, 119: p. 150-165.
- [24] Cottrell, J.A., T.J. Hughes, and Y. Bazilevs, (2009) Isogeometric analysis: toward integration of CAD and FEA.: John Wiley & Sons.
- [6] Jafari-Talookolaei, R.-A., M.H. (2013) Kargarnovin, and M.T. Ahmadian, Dynamic response of a delaminated composite beam with general lay-ups based on the first-order shear deformation theory. Composites Part B: Engineering, 55: p. 65-78.
- [7]. Kargarnovin, M.H., et al., (2013) Semi-analytical solution for the free vibration analysis of generally laminated composite Timoshenko beams with single delamination. Composites Part B: Engineering, 45(1): p. 587-600.
- [8]. Mirzabeigy, A., (2014) Semi-analytical approach for free vibration analysis of variable cross-section beams resting on elastic foundation and under axial force. International Journal of Engineering, 27(3): p. 385-394.
- [9]. Chandrashekhara, K. and K.M. Bangera, (1992) Free vibration of composite beams using a refined shear flexible beam element. Computers & structures, 43(4): p. 719-727.
- [10]. Yıldırım, V. and E. Kırıl, (2000) Investigation of the rotary inertia and shear deformation effects on the out-of-plane bending and torsional natural frequencies of laminated beams. Composite Structures, 49(3): p. 313-320.
- [11]. Çalın, F.F., (2009) Free and forced vibrations of non-uniform composite beams. Composite Structures, 88(3): p. 413-423.
- [12]. Jafari-Talookolaei, R.-A., M. Abedi, and M. Attar, (2017) In-plane and out-of-plane vibration modes of laminated composite beams with arbitrary lay-ups. Aerospace Science and Technology, 66: p. 366-379.
- [13]. Lee, S.J. and K.S. Park, (2013) Vibrations of Timoshenko beams with isogeometric approach. Applied Mathematical Modelling, 37(22): p. 9174-9190.
- [14]. Nguyen, V.P., S.e.P.A. Bordas, and T. Rabczuk, (2012) Isogeometric analysis: an overview and computer implementation aspects. arXiv e-prints, p. 1205.2129.