

فضای کاری ربات موازی 3-RRR با استفاده از تلفیق آنالیز بازه‌ای با روش‌های پالایش و در نظر گرفتن محدودیت حرکت مفاصل فعال

پیام ورشووی جاغرق^{۱*}، مهدی طالع ماسوله^۲، مهدی کریمی^۳ و فاطمه پورکریمان^۴

^۱ استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی، دانشگاه صنعتی همدان، همدان، ایران

^۲ دانشیار، آزمایشگاه تعامل انسان و ربات، دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر، دانشگاه تهران، تهران، ایران

^۳ استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی، دانشگاه بوعلی سینا همدان، همدان، ایران

^۴ کارشناسی ارشد، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی، دانشگاه بوعلی سینا همدان، همدان، ایران

مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۴۰۲/۱۲/۰۹، تاریخ بازنگری: ۱۴۰۲/۰۲/۲۲، تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۵/۰۹

چکیده

در این مقاله، با تلفیق آنالیز بازه‌ای با دو روش مختلف پالایش، به ارائه دو الگوریتم برای محاسبه فضای کاری ربات موازی با در نظر گرفتن محدودیت حرکت مفاصل فعال پرداخته می‌شود. در این روش‌ها، ابتدا بر پایه استفاده از مختصات مفاصل و قیود هندسی حاکم بر زنجیره‌های سینماتیکی ربات موازی، عبارت‌های سینماتیکی زنجیره‌ها محاسبه می‌شوند. در ادامه با استفاده از تلفیق مفاهیم آنالیز بازه‌ای با دو الگوریتم پالایش به نام‌های فرم مقدار میانگین و فرم شیب، به ارائه دو روش برای محاسبه فضای کاری ربات موازی پرداخته می‌شود. دو روش پیشنهاد شده و روش عمومی آنالیز بازه‌ای بدون پالایش، بر روی ربات موازی سه درجه آزادی صفحه‌ای 3-RRR اعمال و فضاهای کاری جهت ثابت آن‌ها به ازای محدودیت‌های مختلف حرکت مفاصل فعال بدست می‌آیند. برای اعتبارسنجی نتایج، فضای کاری ربات موازی 3-RRR با استفاده از روش هندسی نیز محاسبه و نشان داده می‌شود که در صورت استفاده از پالایش در آنالیز بازه‌ای، فضای کاری ربات موازی کاملاً مطابق با روش هندسی حاصل می‌گردد.

کلمات کلیدی: ربات موازی 3-RRR؛ فضای کاری؛ محدودیت حرکت مفاصل؛ آنالیز بازه‌ای؛ عملیات پالایش.

Workspace of 3-RRR parallel robot using the combination of interval analysis and refinement methods by considering the limitation of active joints movement

Payam Varshovi-Jaghargh^{1*}, Mehdi Tale Masouleh², Mehdi Karimi³, Fatemeh Pourkariman⁴

¹ Assist. Prof., Faculty of Engineering, Mech. Eng., Hamedan University of Technology, Hamedan, Iran

² Assoc. Prof., Human and Robot Interaction Lab., School of Electrical and Computer Eng., University of Tehran, Tehran, Iran

³ Assist. Prof., Faculty of Engineering, Mech. Eng., Bu-Ali Sina University, Hamedan, Iran

⁴ MSc, Faculty of Engineering, Mech. Eng., Bu-Ali Sina University, Hamedan, Iran

Abstract

In this paper, two new algorithms are presented for calculating the workspace of parallel robot considering the limitation of active joints movement by combining interval analysis with two refinement methods. In proposed methods, the kinematic expressions of the chains are calculated based on the joint coordinates and geometrical constraints governing the kinematic chains of the parallel robot. In the following, two methods are presented for calculating the workspace of parallel robot by combining the concepts of interval analysis with two refinement algorithms, namely mean value form and slope form. The two presented algorithms and the interval analysis method without refinement operation are implemented on the 3-RRR planar parallel robot and the constant-orientation workspaces are obtained for different limitation of active joints movement. For the sake of comparison, the constant-orientation workspace of 3-RRR parallel robot is also obtained using the geometric method, and it is shown that if refinement is used in the interval analysis, the workspace of the parallel robot is entirely consistent with the results of the geometric method.

Keywords: 3-RRR parallel robot; Workspace; Limitation of joints movement; Interval analysis; Refinement.

۱- مقدمه

ربات موازی، مکانیزم حلقه بسته‌ای است که در آن سکوی متحرک توسط حداقل دو زنجیره سینماتیکی سری به سکوی ثابت متصل شده است. فضای کاری ربات‌های موازی، فصل مشترک فضای قابل دسترس توسط راس هر یک از زنجیره‌های سری است که سکوی متحرک را به تکیه‌گاه متصل می‌کنند. محاسبه فضای کاری ربات‌های موازی، نقش مهمی در طراحی، ساخت و ارتقای این دسته از ربات‌ها اعمال می‌کند [۱]. مرلت و همکاران [۲]، الگوریتمی هندسی ارائه کردند که انواع فضاهای کاری ربات‌های موازی ۳ درجه آزادی صفحه‌ای را محاسبه می‌نماید. الگوریتم ارائه شده در آن تحقیق به این ترتیب است که با توجه به قیود هندسی موجود بر روی پایه‌های ربات موازی 3-RPR، فضای کاری راس آن‌ها محاسبه شده و سپس با انتقال تمامی فضاهای کاری به یک نقطه مبنا و به دست آوردن اشتراک فضاهای کاری راس هر پایه، فضای کاری کل تعیین می‌گردد. گاوو و همکاران [۳]، به بررسی ارتباط بین شکل‌های فضای کاری و طول رابط‌های ربات‌های موازی صفحه‌ای سه درجه آزادی پرداختند. بونو و ریو [۴]، یک روش هندسی با استفاده از سیستم کد-کم^۱ از نرم‌افزار کتیا^۲، برای استخراج فضای کاری مکان ثابت ربات موازی شش درجه آزادی 6-PRRS ارائه کردند. در این روش، با توجه به قیود موجود بر روی مفاصل یک پایه، فضای راس هر پایه به دست آورده و بر اساس آن، فضای کاری جهت-ثابت مکانیزم مذکور محاسبه می‌گردد. چابلات و همکاران [۵] با استفاده از روشی مبتنی بر آنالیز بازه‌ای به تحلیل فضای کاری یک ربات موازی سه درجه آزادی با الگوی حرکتی سه درجه انتقالی پرداختند. تی‌سای و لین [۶]، الگوریتمی برای محاسبه فضای کاری ربات شش درجه آزادی گو-استیوارت با استفاده از منحنی‌های مرزی ارائه کردند. الگوریتم ذکر شده در آن تحقیق، مرزهای فضای کاری را تعیین کرده و از اطلاعات به دست آمده در هر مقطع، برای پیش‌بینی فضای کاری مقاطع دیگر استفاده می‌کند. کارترو و پوند [۷]، با استفاده از روشی برای فرمول‌بندی ماتریس ژاکوبین، به بررسی و مقایسه فضای کاری ماهر ربات‌های سه درجه آزادی 3-PRS، 3-RPS و Tricest پرداختند. وانگ و همکاران [۸]، با استفاده از قیود

فیزیکی ربات‌های موازی، الگوریتم عددی به نام الگوریتم تعیین مرز فضای کاری طبقه‌بندی شده، برای تعیین فضای کاری ماهر و دسترس‌پذیر این نوع ربات‌ها ارائه کردند. این الگوریتم، مرزهای فضای کاری را محاسبه کرده و همچنین توانایی محاسبه‌ی اندازه فضای کاری را نیز دارد. گوتفارده و همکاران [۹]، به تعیین فضای کاری ربات‌های موازی کابلی با استفاده از روش‌های مبتنی بر تحلیل بازه‌ای پرداختند.

در مواردی معدود نیز پژوهش‌هایی بر روی ربات‌های موازی با درجات آزادی محدود، نظیر ربات موازی چهار درجه آزادی نامتقارن 2-PUUR+2-PUU [۱۰] و پنج درجه آزادی متقارن 5-PRUR [۱۱] صورت گرفته است. کلورزی و همکاران [۱۲] بزرگ‌ترین دایره عاری از تکینگی در فضای کاری ربات موازی 3-RPR را به دست آوردند. زارع و همکاران [۱۳]، یک ربات موازی سه درجه آزادی انتقالی ارائه و فضای کاری بدون نقاط تکین نوع اول آن را تعیین کردند. انوری و همکاران [۱۴] با بکارگیری یک روش هندسی، فضای کاری از تداخل مکانیکی در مکانیزم‌های موازی صفحه‌ای، شامل تداخل لینک‌ها با یکدیگر و برخورد لینک‌ها و سکوی متحرک با موانع را محاسبه کردند. کلورزی و همکاران [۱۵] فضای کاری بدون برخورد با موانع مکانیزم‌های موازی 3-RPR و 6-UPS با مفاصل فعال کشویی را با استفاده از روشی مبتنی بر آنالیز بازه‌ای به دست آوردند. در آن تحقیق، یک مانع به صورت دایره (در حالت صفحه‌ای) و یک مانع به شکل کره (در حالت فضایی) در نظر گرفته شد و تداخل مکانیکی آن‌ها با زنجیره‌های سینماتیکی مورد بررسی قرار گرفت. حمیدا و همکاران [۱۶]، یک رویکرد مبتنی بر هندسه برای تحلیل فضای کاری مکانیزم‌های موازی انتقالی ارائه کردند. کارنام و همکاران [۱۷]، به بررسی فضای کاری ایمن عاری از تکینگی و تداخل مکانیکی ربات‌های موازی صفحه‌ای و فضایی پرداختند. جیانگ و همکاران [۱۸]، فضای کاری موثر ربات موازی دلتا چهار میله‌ای را با توجه به اندازه بازوها بهینه‌سازی کردند. زردست و همکاران [۱۹] فضای کاری انتقالی و دورانی یک ربات هیبرید شش درجه آزادی که از اتصال یک ربات موازی کروی با سه درجه آزادی دورانی به ربات موازی دلتا حاصل شده را به دست آوردند. مالیشف و همکاران [۲۰]، فضای کاری یک سیستم رباتیک متشکل از یک ربات سری با یک ربات موازی شبیه دلتا

² CATIA¹ CAD/CAM

ابتدا مفاهیم کلی آنالیز بازه‌ای بیان و نحوه عملکرد و چگونگی استفاده از آنالیز بازه‌ای در مسائل تشریح می‌گردد. سپس، عملیات پالایش و دو روش فرم مقدار میانگین^۱ و فرم شیب^۲ تشریح می‌شود. در بخش چهارم، دو الگوریتم بر پایه ترکیب آنالیز بازه‌ای با دو روش پالایش، برای تحلیل فضای کاری ربات موازی با در نظر گرفتن محدودیت حرکت مفاصل فعال ارائه می‌گردد. در بخش پنجم، دو الگوریتم ارائه شده بر روی ربات موازی 3-RRR اعمال و نتایج آن، با روش هندسی و روش عمومی استفاده از آنالیز بازه‌ای بدون عملیات پالایش مقایسه می‌گردد. در بخش آخر نیز، به بیان نتیجه‌گیری و دستاوردهای این مقاله پرداخته می‌شود.

۲- فضای کاری ربات‌های موازی

ترسیم هندسه تمام درجات آزادی فضای کاری ربات‌های موازی تنها برای ربات‌های با سه درجه آزادی امکان‌پذیر است. در شرایطی که ربات موازی دارای n درجه آزادی باشد به صورتی که $n > 3$ ، تعداد $n - 3$ درجه آزادی ثابت و هندسه سه درجه آزادی باقیمانده نمایش داده می‌شود. بر این اساس، انواع مختلفی از فضای کاری می‌تواند برای یک مکانیزم موازی تعریف گردد که از متداول‌ترین آن‌ها می‌توان به فضای کاری جهت ثابت^۳ یا فضای کاری انتقالی^۴ و فضای کاری مکان ثابت^۵ یا فضای کاری دورانی^۶ اشاره نمود. فضای کاری جهت ثابت، فضایی است که سکوی متحرک ربات موازی می‌تواند با یک جهت ثابت به آن‌ها دست یابد. در فضای کاری مکان ثابت، تمام جهت‌گیری‌هایی تعیین می‌شود که مجری نهایی می‌تواند در یک مکان ثابت به آن‌ها برسد. فضای کاری دسترس‌پذیر^۷ و فضای کاری ماهر^۸ نیز دو نوع دیگر از فضاهای کاری می‌باشند که می‌تواند برای یک ربات موازی تعریف شود. در صورتی که سکوی متحرک ربات موازی بتواند با حداقل یک جهت‌گیری به فضایی دست یابد، به آن فضای کاری دسترس‌پذیر یا بیشینه گویند و در شرایطی که بتواند با تمام جهت‌گیری‌ها به آن برسد، آن را فضای کاری ماهر می‌نامند.

را با استفاده از روشی مبتنی بر تحلیل ماتریس ژاکوبین و تداخل مکانیکی تحلیل کردند. جین و همکارانش [۲۱] الگوریتمی مبتنی بر آنالیز بازه‌ای برای تعیین فضای کاری قابل دسترس ربات‌های موازی کابلی دو و سه درجه آزادی صفحه‌ای ارائه کردند. یی و همکاران [۲۲] روشی بر پایه گسسته‌سازی بازه‌ای برای تعیین فضای کاری ربات‌های موازی پیشنهاد کردند.

همان‌گونه که ملاحظه شد، اغلب پژوهش‌ها در زمینه فضای کاری ربات‌های موازی، با استفاده از روش‌های مبتنی بر هندسه یا روش‌های عددی مانند جستجوی نقاط انجام شده است. در سال‌های اخیر، تحقیقات کمی هم بر پایه آنالیز بازه‌ای در تحلیل فضای کاری ربات‌های موازی صورت گرفته است. در بیشتر این تحقیقات، هندسه مکانیزم به عنوان قید مورد استفاده در تحلیل بازه‌های فضای کاری در نظر گرفته شده و در هیچ کدام از آن‌ها، عملیات پالایش نیز انجام نشده است. در صورت بکارگیری معادلات سینماتیکی به عنوان قیود و عدم استفاده از عملیات پالایش، بازه بدست آمده به ازای هر یک از معادلات، دارای عرض اضافی خواهد بود و این عرض اضافی، باعث می‌شود که فضای کاری حاصل، بزرگ‌تر از فضای کاری واقعی ربات موازی به دست آید. با توجه به این موضوع و همچنین اهمیت بررسی سیستماتیک فضای کاری ربات‌های موازی، در این مقاله، با استفاده از ترکیب معادلات سینماتیکی، محدودیت حرکت مفاصل فعال، آنالیز بازه‌ای و دو روش پالایش، به ارائه دو الگوریتم سیستماتیک برای تحلیل فضای کاری ربات‌های موازی پرداخته می‌شود. برای اعتبار سنجی، نتایج حاصل از این دو روش بر روی ربات موازی سه درجه آزادی صفحه‌ای 3-RRR اعمال و با دو روش دیگر، یکی بدون استفاده از عملیات پالایش و دیگری روش هندسی مقایسه می‌گردد.

بر این اساس، این مقاله دارای ساختار زیر می‌باشد. در بخش اول این مقاله، برخی از مهم‌ترین تحقیقات انجام شده و ضرورت انجام این پژوهش ارائه می‌گردد. بخش دوم به انواع فضای کاری ربات‌های موازی اختصاص دارد. در بخش سوم،

⁶ Orientation workspace

⁷ Reachable workspace

⁸ Dexterous workspace

¹ Mean value form

² Slope form

³ Constant-orientation workspace

⁴ Translation workspace

⁵ Constant-point workspace

نشان داده می‌شوند. حتی اعداد صحیح نیز می‌توانند به صورت یک بازه که دارای یک عدد می‌باشد، مشخص گردند [۲۴]. تمامی مراحل تحلیل بازه‌ای در ورژن ۱۱ خریداری شده از بسته نرم‌افزاری اینتلب^۵ [۲۵]، نصب شده بر روی متلب ۲۰۱۴، انجام می‌گیرد. این بسته نرم‌افزاری، جعبه ابزار الصاق شده به نرم‌افزار متلب است که با نصب و اجرای آن در محیط متلب می‌توان عملیات حساب بازه‌ای را انجام داد.

یک بازه در آنالیز بازه‌ای می‌تواند به دو صورت نشان داده شود [۲۴]:

- ۱- با استفاده از کران پایین و کران بالا به شکل
$$\mathbf{X} = [\underline{X}, \overline{X}]$$
- ۲- به کمک نقطه میانی یک بازه و شعاع آن به شکل
$$\mathbf{X} = [m(X), r(X)]$$

$$m(X) = \frac{1}{2}(\underline{X} + \overline{X}) \quad (1)$$

$$r(X) = \frac{1}{2}(\underline{X} - \overline{X})$$

که در روابط فوق، m نقطه میانی و r شعاع بازه می‌باشد. عرض بازه نیز به صورت اختلاف بین کران پایین و بالای یک بازه به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$w(X) = \overline{X} - \underline{X} \quad (2)$$

قدر مطلق یک بازه، بیشینه مقدار قدرمطلق کران بالا و پایین آن بازه می‌باشد:

$$|X| = \max\{\underline{X}, \overline{X}\} \quad (3)$$

دو بازه \mathbf{X} و \mathbf{Y} در صورتی مساوی می‌باشند که $\underline{X} = \underline{Y}$ و $\overline{X} = \overline{Y}$ از طرفی، اشتراک و اجتماع دو بازه مذکور نیز به صورت روابط زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{X} \cap \mathbf{Y} = \{z: z \in \mathbf{X} \text{ and } z \in \mathbf{Y}\} \\ = [\max\{\underline{X}, \underline{Y}\}, \min\{\overline{X}, \overline{Y}\}] \quad (4)$$

$$\mathbf{X} \cup \mathbf{Y} = \{z: z \in \mathbf{X} \text{ or } z \in \mathbf{Y}\} \\ = [\min\{\underline{X}, \underline{Y}\}, \max\{\overline{X}, \overline{Y}\}] \quad (5)$$

روش‌های متفاوتی نیز برای محاسبه فضای کاری ربات های موازی ارائه شده است که در حالت کلی می‌توان آن‌ها را به دو دسته روش‌های گسسته‌سازی^۱ یا جستجوی نقاط^۲ [۱] و روش‌های هندسی^۳ [۲ و ۲۳] تقسیم کرد. در روش‌های گسسته‌سازی یا جستجوی نقاط، فضای کاری ربات موازی شبکه‌بندی شده و برای هر شبکه، قیود سینماتیکی حاکم بر ربات موازی بررسی می‌شود. هر شبکه‌ای که این قیود را برآورده کند، متعلق به فضای کاری ربات می‌باشد. این گونه از روش‌ها، زمان اجرای بالایی دارند و این زمان اجرا، با بالا رفتن دقت شبکه‌ها به صورت نمایی افزایش خواهد یافت. همچنین این روش‌ها، حافظه‌ی بالایی را برای ذخیره‌ی اطلاعات مربوطه به خود اختصاص می‌دهند. از جمله برتری‌های این روش‌ها می‌توان به سهولت در اجرا و در نظر گرفتن تمامی قیود سینماتیکی حاکم بر ربات موازی اشاره کرد. در روش‌های هندسی، ابتدا فضایی که هر یک از زنجیره‌های سینماتیکی ربات موازی می‌تواند به آن دست یابد، با استفاده از قیود حاکم بر آنها استخراج می‌شود. سپس فضای کاری ربات موازی، از اشتراک فضاهای کاری راس این زنجیره‌های سینماتیکی به دست خواهد آمد. دقت روش‌های هندسی در مقایسه با دیگر روش‌ها زیاد است، اما پیاده‌سازی آن برای انواع مختلف مکانیزم‌های موازی، به خصوص مکانیزم‌های موازی فضایی دشوار است.

۳- آنالیز بازه‌ای و عملیات پالایش

آنالیز بازه‌ای^۴ بخشی از علم ریاضیات است که به بررسی بازه‌ها پرداخته و همانند حساب اعداد حقیقی یا ریاضیات فازی، قوانین خاص خود را دارا می‌باشد. این قوانین، با آنچه که تا به حال در حساب اعداد حقیقی مطالعه گردیده، متفاوت است. به طور خلاصه، آنالیز بازه‌ای قابلیت‌هایی از قبیل عملیات حسابی، محاسبات مربوط به بازه‌ها و ارائه‌ی تقریب‌های مربوط به آن‌ها، رسم نمودار توابع بازه‌ای، حل دستگاه معادلات خطی بازه‌ای به کمک رسم نمودار جواب‌ها، حل دستگاه معادلات غیر خطی بازه‌ای و محاسبات مربوط به مشتقات و شیب‌ها در حساب بازه‌ای دارد [۲۴]. تمامی اعداد در آنالیز بازه‌ای، به صورت بازه

⁴ Interval analysis

⁵ INTLAB

¹ Discretization method

² Node search

³ Geometrical approach

$$= [\underline{X} - \bar{X}^2, \bar{X} - \underline{X}^2]$$

$$\Rightarrow \mathbf{G}[0,1] = [-1,1]$$

با توجه به نتایج حاصل از روابط ۱۰ و ۱۱ ملاحظه می‌گردد، دو عبارت که در علم حساب اعداد حقیقی با هم برابر هستند، ممکن است در علم حساب بازه‌ای با هم برابر نباشند. برای رفع این مشکل، باید عملیات پالایش^۱ بر روی تابع انجام گردد تا عرض اضافی بازه‌ی تابع محاسبه و حذف گردد. اگر $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ یک بسط بازه‌ای بر روی بازه‌ی \mathbf{X} باشد، آنگاه کمیت بازه‌ای رابطه‌ی زیر، پالایش \mathbf{F} بر روی \mathbf{X} را تعریف می‌کند:

$$F_N(\mathbf{X}) = \bigcup_{j=1}^N F(X_{1,j}, \dots, X_{n,j}) \quad (12)$$

در واقع پالایش تابع $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ برابر با اجتماع مقادیر بازه‌ای تابع \mathbf{F} بر روی عناصر زیربازه‌های یکنواخت بازه \mathbf{X} است. هدف از به دست آوردن زیربازه‌های یکنواخت یک بازه این است که به جای قرار دادن بازه‌ی \mathbf{X} در تابع، با قرار دادن زیربازه‌های یکنواخت آن بازه، تخمین دقیق‌تری از مقادیر بسط بازه‌ای تابع حاصل گردد. به طور کلی، اگر N یک عدد صحیح مثبت باشد، زیربازه‌های یکنواخت بردار بازه‌ای $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$ به صورت رابطه‌ی زیر تعریف می‌گردد.

$$X_{i,j} = [\underline{X}_i + (j-1)w(X_i)/N, \underline{X}_i + jw(X_i)/N], \quad j = 1, \dots, N$$

$$X_i = \bigcup_{j=1}^N X_{i,j} \quad (13)$$

$$w(X_{i,j}) = w(X_i)/N$$

در واقع با انجام این عملیات، بازه‌ی \mathbf{X}_i به N بخش تقسیم گردیده که هر یک از آن‌ها یک زیربازه نامیده می‌شوند. همانگونه که در بالا توضیح داده شد، برای انجام پالایش بر روی یک تابع، بازه‌ی \mathbf{X} به N زیربازه تقسیم گردیده و سپس مقدار بازه‌ای تابع $\mathbf{F}_N(\mathbf{X})$ برای هر یک از آن‌ها به دست آورده می‌شود. در ادامه با گرفتن اجتماع از بازه‌های $\mathbf{F}_N(\mathbf{X})$ مقدار بازه‌ای تابع $\mathbf{F}(\mathbf{X})$ محاسبه می‌گردد. به عنوان مثال، تابع

عملیات ریاضی در حساب بازه‌ای نیز به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$\mathbf{X} + \mathbf{Y} = [\underline{X} + \underline{Y}, \bar{X} + \bar{Y}] \quad (6)$$

$$\mathbf{X} - \mathbf{Y} = [\underline{X} - \bar{Y}, \bar{X} - \underline{Y}] \quad (7)$$

$$\mathbf{X} \times \mathbf{Y} = [\min S, \max S] \quad (8)$$

$$S = \{\underline{X}\underline{Y}, \underline{X}\bar{Y}, \bar{X}\underline{Y}, \bar{X}\bar{Y}\}$$

$$\frac{\mathbf{X}}{\mathbf{Y}} = \mathbf{X} \times (1/\mathbf{Y}) \quad (9)$$

$$1/\mathbf{Y} = \{y: 1/y \in \mathbf{Y}\} = [1/\bar{Y}, 1/\underline{Y}]$$

با قرار دادن یک بردار بازه‌ای در یک تابع، می‌توان مقدار بازه‌ای تابع را در محدوده‌ی متغیرهای ورودی به دست آورد؛ اما بازه‌ی محاسبه شده برای اکثر توابع، بازه‌ای بزرگ‌تر از بازه‌ی حقیقی آن تابع است و دارای عرض اضافی است. برای مثال توابع $\mathbf{f}(x) = x(1-x)$ و $\mathbf{g}(x) = x - x^2$ به ازای بازه $x \in [0,1]$ در حساب اعداد حقیقی با هم برابر هستند؛ زیرا اگر هر عدد حقیقی بین صفر و یک در این دو تابع قرار داده شود، مقادیر واقعی این دو تابع به صورت $\mathbf{f}[0,1] = \mathbf{g}[0,1] = [0,0.25]$ حاصل خواهد شد. حال به بررسی این توابع در علم حساب بازه‌ای پرداخته می‌شود. این توابع در علم حساب بازه‌ای و با قوانین حاکم بر این علم با هم برابر نمی‌باشند؛ زیرا خواهیم داشت:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{X} \cdot (1 - \mathbf{X})$$

$$= [\underline{X}, \bar{X}] \cdot ([1,1] - [\underline{X}, \bar{X}])$$

$$= [\underline{X}, \bar{X}] \cdot ([1,1] + [-\bar{X}, -\underline{X}])$$

$$= [\underline{X}, \bar{X}] \cdot ([1 - \bar{X}, 1 - \underline{X}]) \quad (10)$$

$$= [\min S, \max S]$$

$$S = \{\underline{X}(1 - \bar{X}), \underline{X}(1 - \underline{X}), \bar{X}(1 - \bar{X}), \bar{X}(1 - \underline{X})\};$$

$$\Rightarrow \mathbf{F}[0,1] = [0,1]$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{X}) = \mathbf{X} - \mathbf{X}^2$$

$$= [\underline{X}, \bar{X}] - [\underline{X}, \bar{X}]^2$$

$$= [\underline{X}, \bar{X}] - [\underline{X}^2, \bar{X}^2] \quad (11)$$

$$= [\underline{X}, \bar{X}] + [-\bar{X}^2, -\underline{X}^2]$$

¹ Refinement

که در رابطه فوق، $D_i F$ بسط بازه‌ای $\partial f / \partial x_i$ و $F_{mv}(\mathbf{X})$ بسط مقدار میانگین تابع \mathbf{f} بر روی \mathbf{X} است.

۳-۲- فرم شیب

در فرم شیب، بسط‌های بازه‌ای $D_i F(\mathbf{X})$ در فرم مقدار میانگین با بازه‌های $S_i(\mathbf{F}, \mathbf{X}, m)$ که اغلب باریک‌تر و محدودتر از $D_i F(\mathbf{X})$ هستند، جایگزین می‌گردد و منجر به یک محدوده‌ی بازه‌ای برای \mathbf{f} می‌شود. لازم به ذکر است که $S_i(\mathbf{F}, \mathbf{X}, m)$ یک چهارچوب بازه‌ای برای شیب \mathbf{f} در m بر روی بردار بازه‌ای \mathbf{X} می‌باشد [۲۴]. با فرض اینکه $f: D \subseteq \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ ، $x \in \mathbb{R}^m$ و $y \in \mathbb{R}^m$ ، در این شرایط، شیب $s(\mathbf{f}, \mathbf{x}, y)$ به صورت عددی تعریف می‌شود که:

$$\mathbf{f}(y) - \mathbf{f}(x) = s(\mathbf{f}, \mathbf{x}, y)(y - x) \quad (15)$$

اگر \mathbf{f} مشتق اول پیوسته داشته باشد، آنگاه $s(\mathbf{f}, \mathbf{x}, y) = \mathbf{f}'(\xi)$ بیان می‌شود که در این رابطه، ξ مقداری بین x و y است. برای توابع چند متغیره رابطه فرم شیب به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) \in \mathbf{F}_s(\mathbf{X}, y) = \mathbf{f}(y) + \sum_{i=1}^n Y_i S_i(\mathbf{f}, \mathbf{X}, y) \quad (16)$$

در رابطه فوق، y عدد ثابت است و می‌تواند هر نقطه‌ای در دامنه‌ی \mathbf{f} انتخاب شود. برای توابع چند متغیره نیز، y به صورت برداری مقداردهی می‌شود، یعنی برای هر متغیر یک عدد به عنوان y در محدوده بازه‌های مورد نظر انتخاب می‌گردد.

۴- محاسبه فضای کاری ربات موازی با استفاده از

ترکیب روش‌های پالایش با آنالیز بازه‌ای

روش پیشنهادی در این تحقیق به این صورت است که در ابتدا با استفاده از مختصات مفاصل و قیود حاکم بر زنجیره‌های سینماتیکی ربات موازی و همچنین بکارگیری روش حذفی برآیند [۲۶] عبارت‌های سینماتیک هر زنجیره از ربات موازی بدست آورده می‌شود. این عبارت‌ها، موقعیت و جهت‌گیری سکوی متحرک (x, y, θ) را بر حسب متغیرهای مفاصل فعال ربات موازی $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ بیان می‌کنند و یک سیستم معادلات غیر خطی n متغیره را تشکیل می‌دهند که در این رابطه n

به ازای $x \in [0, 1]$ در نظر گرفته می‌شود. همانطور که پیش از این بیان شد مقدار این تابع در حساب اعداد حقیقی برابر $\mathbf{f}(0, 1) = [0, 0.25]$ می‌باشد. این در حالی است که با قوانین حساب بازه‌ای، مقدار تابع \mathbf{f} برابر با $\mathbf{f}(0, 1) = [-1, 1]$ حاصل می‌گردد. در نتیجه عرض اضافی آن برابر با مقدار $2 - 0.25 = 1.75$ است. با فرض تقسیم بازه‌ی $[0, 1]$ به N زیربازه، بر اساس رابطه‌ی $\mathbf{F}_N(\mathbf{X})$ بر روی زیربازه‌های آن و به ازای N های مختلف، در جدول ۱ آورده شده است. ملاحظه می‌گردد که با انجام پالایش بر روی تابع \mathbf{F} مقدار صحیح آن در محدوده‌ی بازه‌ی \mathbf{X} حاصل می‌شود؛ همچنین هر چه تعداد زیر بازه‌ها بیشتر باشد، آنگاه بازه‌ی به دست آمده برای تابع \mathbf{F} دقیق‌تر خواهد بود. چندین روش برای پالایش توابع وجود دارد که فرم مقدار میانگین و فرم شیب از مهم‌ترین این الگوریتم‌ها در آنالیز بازه‌ای محسوب می‌شوند که در ادامه به توضیح هر دو روش پرداخته می‌شود:

جدول ۱- دامنه‌ی مقادیر $\mathbf{F}_N(\mathbf{X})$ بر روی زیربازه‌های آن

به ازای N های مختلف	
$\mathbf{F}_N(\mathbf{X})$	N
$[-1, 1]$	1
$[-0.5, 0.75]$	2
$[-0.1, 0.35]$	10
$[-0.01, 0.26]$	100
$[-0.001, 0.251]$	1000
$[-0.0001, 0.2501]$	10000

۳-۱- فرم مقدار میانگین

فرم مقدار میانگین مبتنی بر بسط بازه‌ای مشتقات جزئی تابع است که عرض اضافی را از مقدار نهایی تابع حذف کرده و مقدار صحیح‌تری از تابع در بازه‌ی مورد نظر به دست می‌آورد. در این روش، با فرض اینکه \mathbf{X} یک بردار بازه‌ای در \mathbf{X}_0 و $m = m(\mathbf{X})$ نقطه میانی بازه باشد، به وسیله تئوری مقدار میانگین برای تمامی $\mathbf{X} \subseteq \mathbf{X}_0$ خواهیم داشت [۲۴]:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) \subseteq \mathbf{F}_{mv} = \mathbf{f}(m) + \sum_{i=1}^n D_i F(x)(X_i - m_i) \quad (14)$$

قسمت تقسیم می‌شود. نحوه تقسیم بازه‌ها نیز به این صورت انجام می‌شود که بین بازه‌های $x, y, k\theta_1, k\theta_2, k\theta_3$ از المان مورد بررسی، بازه بزرگ‌تر به دو بخش تقسیم شده و در نتیجه، المان مورد بررسی نیز به دو المان تقسیم می‌گردد. با توجه به ابعاد هندسی ربات موازی، ضریب k برای هر ربات به صورت یک عدد ثابت انتخاب می‌گردد. سپس هر یک از المان‌های ایجاد شده، به صورت جداگانه در معادلات قرار داده شده، بازه‌های f_i مجدداً محاسبه و شرط وجود جواب در این بازه‌ها آزمایش می‌شود ($0 \in f_i$). در انتها، مجموعه بازه‌هایی که جواب در آن‌ها وجود داشته باشد، نگه داشته می‌شوند و مابقی مجموعه بازه‌ها حذف می‌گردند. عملیات تقسیم بازه‌ها و بررسی شرط وجود جواب در آن‌ها باید آنقدر تکرار شود تا عرض بازه‌های متغیرها به دقت مورد نظر یعنی ε برسند. مجموعه بازه‌های باقیمانده در انتهای الگوریتم، فضای کاری ربات موازی را تشکیل می‌دهند. تمام مراحل تشریح شده در این بخش برای محاسبه فضای کاری با استفاده از تلفیق آنالیز بازه‌ای با روش‌های پلایش و در نظر گرفتن محدودیت حرکت مفاصل فعال به صورت یک شبه کد در الگوریتم ۱ بیان و فلوچارت آن نیز در شکل ۱ نشان داده شده است.

الگوریتم ۱: شبه کد روش پیشنهادی برای محاسبه فضای کاری

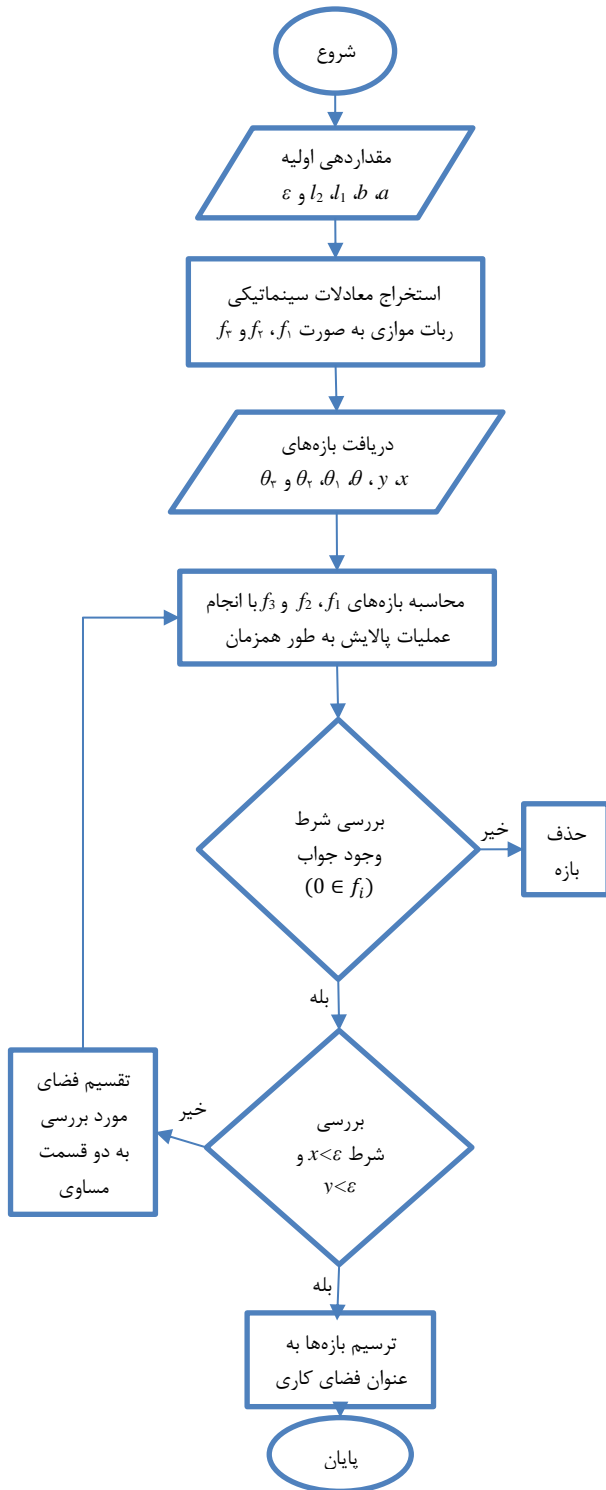
- ۱- مقداردهی اولیه a, b, d, l_2 و ε
- ۲- استخراج معادلات سینماتیکی ربات موازی 3-
RRR به صورت f_1, f_2, f_3
- ۳- دریافت بازه‌های x, y و مقدار θ به عنوان فضای کاری تحت بررسی
- ۴- دریافت بازه‌ی حرکت مفاصل فعال $\theta_1, \theta_2, \theta_3$
- ۵- محاسبه بازه‌های f_1, f_2, f_3 و انجام عملیات پلایش با یکی از روش‌های فرم مقدار میانگین یا فرم شیب
- ۶- اگر $0 \in f_1$ و $0 \in f_2$ و $0 \in f_3$ (شرط وجود جواب)

آنگاه

- ۷- اگر $x > \varepsilon$ یا $y > \varepsilon$ (شرط توقف) آنگاه تقسیم فضای مورد بررسی به دو بازه مساوی و انتقال به مرحله ۵

تعداد درجات آزادی ربات موازی است [۲۷]. پس از به دست آوردن تمام عبارت‌های سینماتیکی زنجیره‌های ربات موازی، با استفاده از ترکیب آنالیز بازه‌ای و دو الگوریتم فرم مقدار میانگین و فرم شیب، به شناسایی فضای کاری ربات موازی پرداخته می‌شود.

در واقع این الگوریتم به این ترتیب عمل می‌کند که در ابتدا یک سیستم معادلات غیر خطی شامل عبارت‌های سینماتیکی ربات موازی به صورت f_1, \dots, f_n در نظر گرفته می‌شود. لازم به ذکر است که تعداد معادلات بدست آمده با تعداد زنجیره‌ها یا همان تعداد درجات آزادی ربات موازی برابر است. در ادامه بازه‌ی حرکت مفاصل فعال به همراه بازه‌ای برای مقادیر x و y به عنوان ورودی به سیستم معادلات داده می‌شود. بازه مقادیر x و y باید آنقدر بزرگ انتخاب شود که فضای کاری ربات موازی در داخل آن قرار گیرد. در حساب اعداد حقیقی، نقطه‌ای متعلق به فضای کاری ربات می‌باشد که تمامی معادلات سینماتیکی آن همزمان برقرار باشد، به این معنی که به ازای قرار دادن مقادیر x, y و θ و همچنین مقادیر متغیرهای مفصلی متناظر با آن، تمامی سیستم معادلات f_1, \dots, f_n برابر صفر حاصل شوند. در حساب بازه‌ای نیز در ابتدا، بازه حرکتی متغیرهای مفصلی و همچنین بازه انتخاب شده برای x و y در سیستم معادلات f_1, \dots, f_n قرار داده شده و بازه‌ی معادلات f_1 الی f_n محاسبه می‌گردند. شرط وجود جواب در سیستم معادلات بازه‌ای این است که مقدار صفر در تمامی بازه‌های f_i وجود داشته باشد ($0 \in f_i$). حتی اگر مقدار صفر جزء بازه‌ی یکی از f_i ها نباشد، سیستم معادلات دارای جواب نبوده و آن بازه، از فضای کاری ربات موازی حذف می‌گردد. همانطور که در بخش قبل نیز توضیح داده شد، برای محاسبه دقیق‌تر بازه معادلات f_1 الی f_n ، باید عملیات پلایش نیز به طور همزمان بر روی آن‌ها انجام شود. در واقع، با توجه به پیچیدگی معادلات سینماتیکی ربات موازی، در صورت عدم استفاده از عملیات پلایش، بازه بدست آمده به ازای هر یک از معادلات، دارای عرض اضافی خواهد بود. برای حذف عرض اضافی معادلات سینماتیکی و محاسبه دقیق‌تر بازه هر یک از معادلات، از دو روش فرم شیب و فرم مقدار میانگین استفاده می‌گردد. پس از محاسبه بازه هر یک از معادلات سینماتیکی، اگر مقدار صفر در تمامی بازه‌های بدست آمده برای f_i ها موجود باشد، یکی از بازه‌های x, y, θ_1, θ_2 یا θ_3 نصف گردیده و آن بازه به دو



شکل ۱- فلوچارت الگوریتم پیشنهادی برای محاسبه فضای کاری ربات موازی

در غیر این صورت ذخیره مجموعه بازه مورد بررسی به عنوان فضای کاری

در غیر این صورت حذف فضای مورد بررسی به علت عدم تعلق به فضای کاری

۸- ترسیم مجموعه بازه‌های ذخیره شده در انتهای الگوریتم به عنوان فضای کاری ربات موازی

۵- تحلیل فضای کاری ربات موازی 3-RRR با استفاده از دو الگوریتم پیشنهادی

نمای کلی ربات موازی صفحه‌ای 3-RRR در شکل ۲ نشان داده شده است. برای به دست آوردن معادلات سینماتیکی زنجیره‌های این ربات، در ابتدا چارچوب ثابت O_{xyz} و چارچوب متحرک $O_{x'y'z'}$ به ترتیب بر روی مفاصل ابتدایی (متصل به سکوی ثابت) و انتهایی (بر روی سکوی متحرک) از اولین زنجیره از ربات موازی جایگذاری می‌شود.

علاوه بر این، موقعیت مفاصل انتهایی در هر زنجیره، یعنی C_i ها نیز به صورت روابط ۱۸ الی ۲۰ بیان می‌شود.

$$C_1 = [x, y] \quad (۱۸)$$

$$C_2 = [x + b \cos \theta, y + b \sin \theta] \quad (۱۹)$$

$$C_3 = [x + 0.5b \cos \theta - b \sin \theta, y + 0.5b \sin \theta + b \cos \theta] \quad (۲۰)$$

با نوشتن معادله $B_i C_i$ و قرار دادن مقادیر C_i ها و B_i ها، عبارت‌های سینماتیکی زنجیره‌های اول تا سوم به صورت تابعی از پارامترهای $x, y, \theta, \theta_1, \theta_2, \theta_3, d_1, d_2, a$ و b به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$f_1 = B_1 C_1 = (x - l_1 c_1)^2 + (y - l_1 s_2)^2 - l_2^2; \quad (۲۱)$$

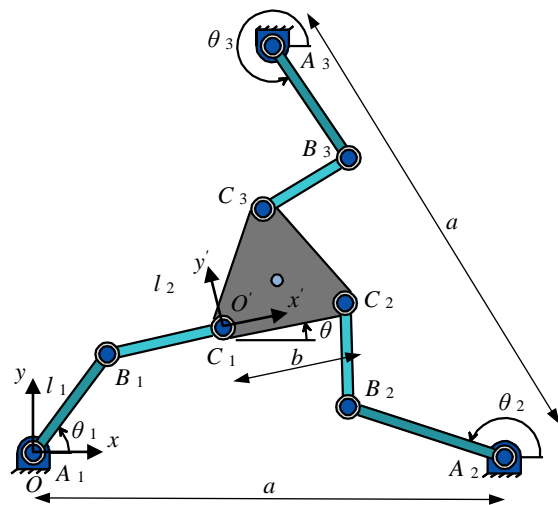
$$f_2 = B_2 C_2 = x^2 + y^2 + l_1^2 - l_2^2 + a^2 + b^2 + 2bys_\theta - 2ax - 2(a-x)bc_\theta + 2(a-x-bc_\theta)l_1c_2 - 2(bs_\theta + y)l_1s_2; \quad (۲۲)$$

$$f_3 = B_3 C_3 = x^2 + y^2 + l_1^2 - l_2^2 + a^2 - ax + 1.25b^2 - 2yl_1s_3 + (a-2x)l_1c_3 - (l_1c_3 + 2l_1s_3 + 0.5a - x - 2y)bc_\theta + (2l_1c_3 - l_1s_3 + a - 2x + y)bs_\theta - (bc_\theta + 0.5bs_\theta - l_1s_3 + y)\sqrt{3}a; \quad (۲۳)$$

که در روابط فوق، $c_i = \cos \theta_i$ ، $s_i = \sin \theta_i$ ، $c_\theta = \cos \theta$ و $s_\theta = \sin \theta$ می‌باشد. لازم به توضیح است که مفاصل فعال ربات مذکور بر روی رئوس یک مثلث متساوی الاضلاع به طول اضلاع a در نظر گرفته شده است. همچنین، سکوی متحرک نیز به صورت یک مثلث متساوی الساقین به طول قاعده و ارتفاع b طراحی شده است. به ازای مقادیر معلوم پارامترهای هندسی نشان داده شده در جدول ۲ و همچنین محدودیت‌های مختلف حرکتی مفاصل فعال، فضای کاری جهت ثابت ربات موازی 3-RRR با استفاده از سه روش ترکیب آنالیز بازه‌ای با فرم میانگین، ترکیب آنالیز بازه‌ای با فرم شیب و همچنین فرم عمومی آنالیز بازه‌ای به دست آورده

در هر زنجیره سینماتیکی، اولین مفصل لولایی فعال و دو مفصل دیگر غیر فعال می‌باشند. مفاصل لولایی متصل به سکوی ثابت و متحرک از i -امین زنجیره سینماتیکی، به ترتیب با A_i و C_i و مفصل قرار گرفته در بین این دو مفصل نیز با B_i نشان داده می‌شوند. با توجه به حرکت صفحه‌ای این ربات موازی، جهت‌گیری محور z' از چارچوب متحرک، همواره ثابت و در جهت محور z از چارچوب ثابت است، اما جهت‌گیری محورهای x' و y' با تغییر ورودی‌های مکانیزم، تغییر می‌کنند. در واقع، چهارچوب متحرک بر روی سکوی متحرک قرار می‌گیرد و با تغییر جهت سکوی متحرک نیز تغییر می‌کند؛ همچنین، با توجه به هندسه مکانیزم، موقعیت مفاصل A_i و پارامترهای هندسی l_1 و l_2 نیز معلوم می‌باشند؛ بنابراین موقعیت مفاصل B_i از رابطه زیر حاصل می‌گردد.

$$\begin{bmatrix} x_{B_i} & y_{B_i} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} x_{A_i} + l_1 \cos \theta_i & y_{A_i} + l_1 \sin \theta_i \end{bmatrix}^T \quad (۱۷)$$



شکل ۲ طرح شماتیک ربات موازی صفحه‌ای 3-RRR

جدول ۲- مقادیر پارامترهای هندسی در تحلیل فضای

کاری ربات موازی 3-RRR

a (cm)	b (cm)	l_1 (cm)	l_2 (cm)
۱۲۰	۴۰	۳۰	۳۰

عرض اضافی می‌باشد. اما در صورت تلفیق آنالیز بازه‌ای با فرم مقدار میانگین، این بازه برابر $[-524.3, 359.8]$ و در صورت تلفیق آنالیز بازه‌ای با فرم شیب، بازه مذکور برابر با $[-525.7, 361.2]$ به دست می‌آید. مشاهده می‌گردد که استفاده از عملیات پالایش به صورت فرم مقدار میانگین و فرم شیب، تاثیر قابل ملاحظه‌ای در کاهش عرض اضافی بازه و افزایش دقت نتایج خواهد داشت.

روش تشریح شده در این تحقیق بر روی حالت‌های مختلف محدودیت‌های حرکت مفاصل فعال ربات موازی 3-RRR پیاده‌سازی و نتایج حاصل از سه روش ترکیب آنالیز بازه‌ای با فرم مقدار میانگین، ترکیب آنالیز بازه‌ای با فرم شیب و همچنین فرم عمومی آنالیز بازه‌ای بدون پالایش با روش هندسی مقایسه گردید. به عنوان نمونه، در شکل ۳، محدودیت حرکت مفاصل فعال ربات موازی 3-RRR برابر با مقادیر بازه‌ای $\theta_1 = [20^\circ, 70^\circ]$ و $\theta_2 = [110^\circ, 160^\circ]$ و زاویه دوران سکوی متحرک برابر $\theta_3 = [245^\circ, 295^\circ]$ و مقدار دقت 0.1172cm در نظر گرفته شده است. در شکل ۴ نیز، از محدودیت حرکت مفاصل فعال برابر $\theta_1 = [-15^\circ, 75^\circ]$ و $\theta_2 = [105^\circ, 195^\circ]$ و زاویه دوران سکوی متحرک برابر $\theta_3 = [225^\circ, 315^\circ]$ و مقدار دقت 0.3125cm استفاده شده است.

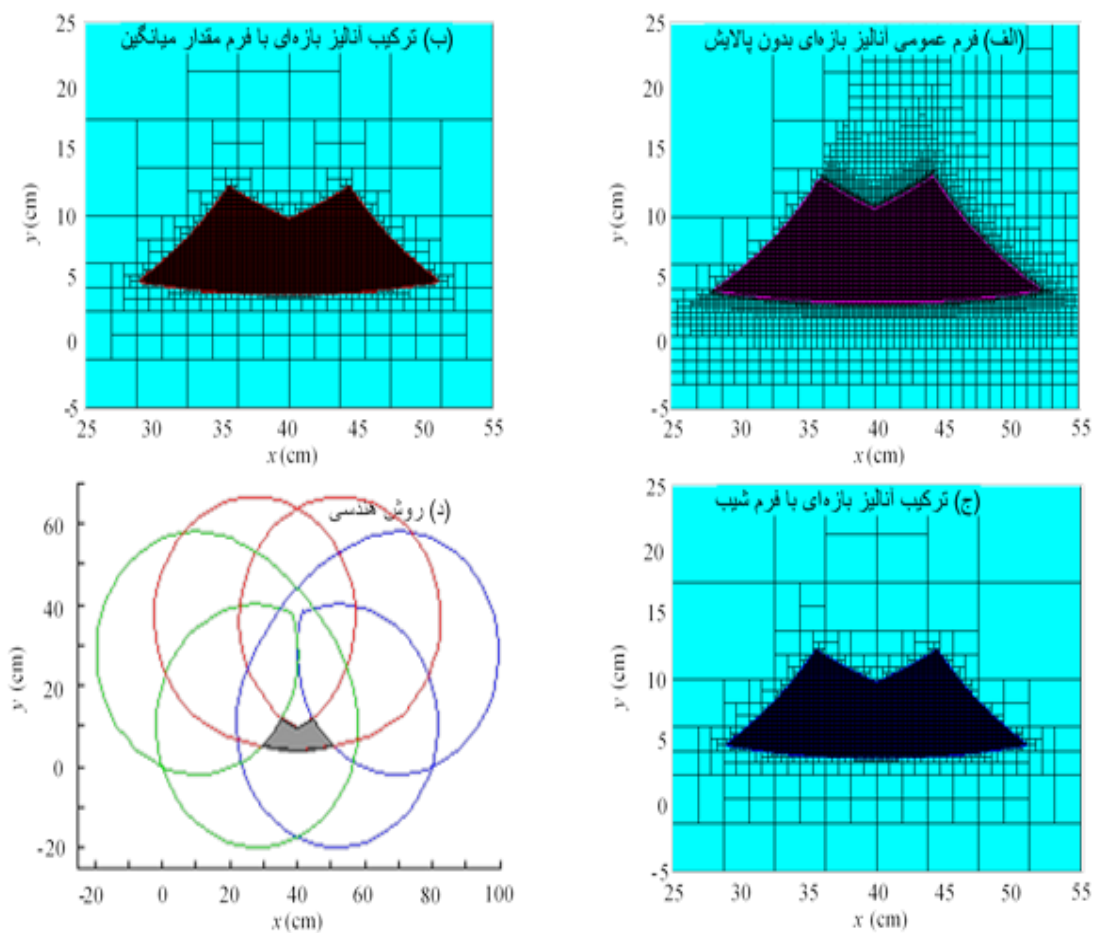
مشاهده می‌گردد که در شرایط استفاده از روش‌های ترکیب آنالیز بازه‌ای با فرم مقدار میانگین و ترکیب آنالیز بازه‌ای با فرم شیب، فضای کاری جهت ثابت ربات موازی کاملاً مشابه جواب حاصل از روش هندسی بدست آمده است. این در شرایطی است که فضای کاری به دست آمده از فرم عمومی آنالیز بازه‌ای بدون پالایش، بزرگ‌تر از فضای کاری حقیقی ربات موازی حاصل می‌شود. علاوه بر این، مساحت فضای کاری ربات موازی 3-RRR به همراه زمان پردازش الگوریتم، به ازای مقادیر در نظر گرفته شده در شکل‌های ۳ و ۴، به ترتیب در جداول ۳ و ۴ آورده شده است.

شد و نتایج آن‌ها با نتایج حاصل از روش هندسی مقایسه گردید.

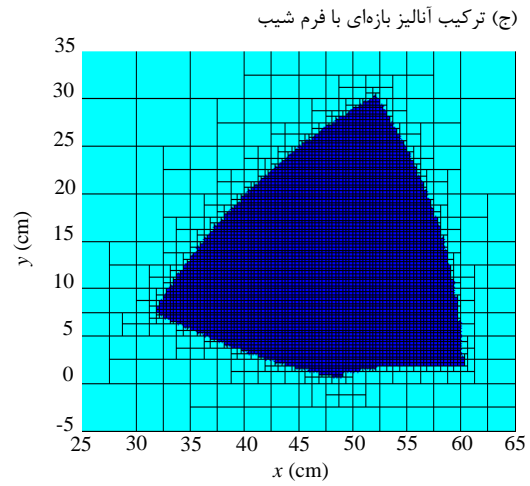
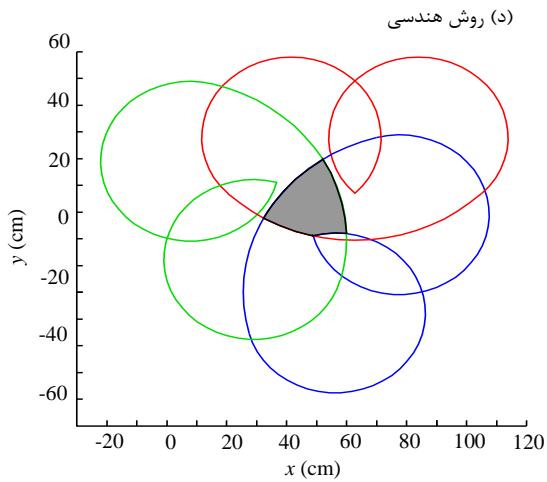
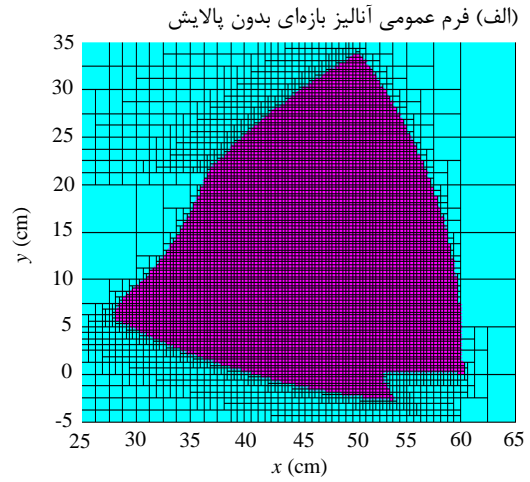
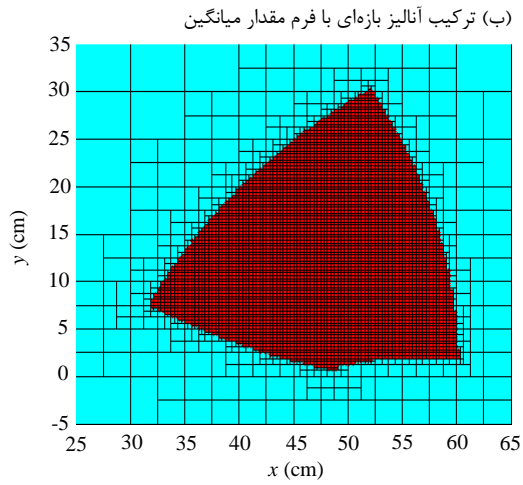
به عنوان نمونه، برای نشان دادن تاثیر نوع عملیات پالایش در محاسبات، بازه عبارت سینماتیکی سوم از ربات موازی 3-RRR به ازای بازه‌های حرکتی مفاصل فعال $\theta_1 = [50^\circ, 70^\circ]$ و $\theta_2 = [140^\circ, 160^\circ]$ در بازه‌های $x = [38, 38.25]$ و $y = [14.5, 14.75]$ و $\theta = \frac{\pi}{6}$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}
 f_3 &= B_3 C_3 \\
 &= [38, 38.25]^2 + [14.5, 14.75]^2 + 30^2 - 30^2 + 120^2 + 1.25(40)^2 - \\
 &2[14.5, 14.75](30) \sin\left[\frac{13\pi}{9}, \frac{14\pi}{9}\right] - \\
 &120[38, 38.25] + (120 - \\
 &2[38, 38.25])(30) \cos\left[\frac{13\pi}{9}, \frac{14\pi}{9}\right] - \\
 &\left((30) \cos\left[\frac{13\pi}{9}, \frac{14\pi}{9}\right] + \right. \\
 &2(30) \sin\left[\frac{13\pi}{9}, \frac{14\pi}{9}\right] + 0.5(120) - \\
 &[38, 38.25] - \\
 &2[14.5, 14.75]) (40) \cos\frac{\pi}{6} + \\
 &\left. (2(30)c_3 - (30) \sin\left[\frac{13\pi}{9}, \frac{14\pi}{9}\right] + 120 - \right. \\
 &2[38, 38.25] + \\
 &[14.5, 14.75]) (40) \sin\frac{\pi}{6} - \left. (40 \cos\frac{\pi}{6} + \right. \\
 &0.5(40) \sin\frac{\pi}{6} - (30) \sin\left[\frac{13\pi}{9}, \frac{14\pi}{9}\right] + \\
 &\left. [14.5, 14.75]) \sqrt{3}(120) \right)
 \end{aligned} \tag{24}$$

بدون انجام عملیات پالایش در علم حساب بازه‌ای، مقدار f_3 برابر با بازه $[-787.4, 663.8]$ حاصل می‌شود که دارای



شکل ۳- فضای کاری ربات موازی 3-RRR با در نظر گرفتن محدودیت حرکت مفاصل فعال $\theta_1 = [20^\circ, 70^\circ]$ بدون پالایش، (ب) ترکیب آنالیز بازه‌ای با فرم مقدار میانگین، (ج) ترکیب آنالیز بازه‌ای با فرم شیب و (د) روش هندسی $\theta_2 = [110^\circ, 160^\circ]$ و $\theta_3 = [245^\circ, 295^\circ]$ با دقت 0.1172cm و به ازای روش‌های الف) فرم عمومی آنالیز بازه‌ای



شکل ۴- فضای کاری ربات موازی 3-RRR با در نظر گرفتن محدودیت حرکت مفاصل فعال $\theta_1 = [-15^\circ, 75^\circ]$ بدون پالایش، (ب) ترکیب آنالیز بازه‌ای با فرم مقدار میانگین، (ج) ترکیب آنالیز بازه‌ای با فرم شیب و (د) روش هندسی $\theta_2 = [105^\circ, 195^\circ]$ و $\theta_3 = [225^\circ, 315^\circ]$ با دقت 0.3125cm و $\theta = 30^\circ$ به ازای روش‌های الف) فرم عمومی آنالیز بازه‌ای

جدول ۴- مساحت فضای کاری ربات موازی 3-RRR و زمان اجرای الگوریتم به ازای دقت 0.3125cm در نظر گرفتن $\theta_1 = [-15^\circ, 75^\circ]$ ، $\theta_2 = [105^\circ, 195^\circ]$ و $\theta_3 = [225^\circ, 315^\circ]$ و $\theta = 30^\circ$

زمان (s)	مساحت (cm ²)	روش مورد استفاده
۵۰۵۴۰۰	۷۱۱/۲	فرم عمومی آنالیز بازه‌ای بدون پالایش
۴۴۱۴۳	۵۱۱/۳	تلفیق آنالیز بازه‌ای با فرم شیب
۹۳۶۹	۵۱۱/۸	تلفیق آنالیز بازه‌ای با فرم مقدار میانگین
-	۴۸۷	روش هندسی

جدول ۳- مساحت فضای کاری ربات موازی 3-RRR و زمان اجرای الگوریتم به ازای دقت 0.1172cm در نظر گرفتن $\theta_1 = [20^\circ, 70^\circ]$ ، $\theta_2 = [110^\circ, 160^\circ]$ و $\theta_3 = [245^\circ, 295^\circ]$ و $\theta = 0^\circ$

زمان (s)	مساحت (cm ²)	روش مورد استفاده
۲۴۹۳۹۰	۱۳۴/۶	فرم عمومی آنالیز بازه‌ای بدون پالایش
۳۶۰۳۸	۱۱۰/۷	تلفیق آنالیز بازه‌ای با فرم شیب
۸۷۷۳	۱۱۰/۸	تلفیق آنالیز بازه‌ای با فرم مقدار میانگین
-	۱۰۶/۸	روش هندسی

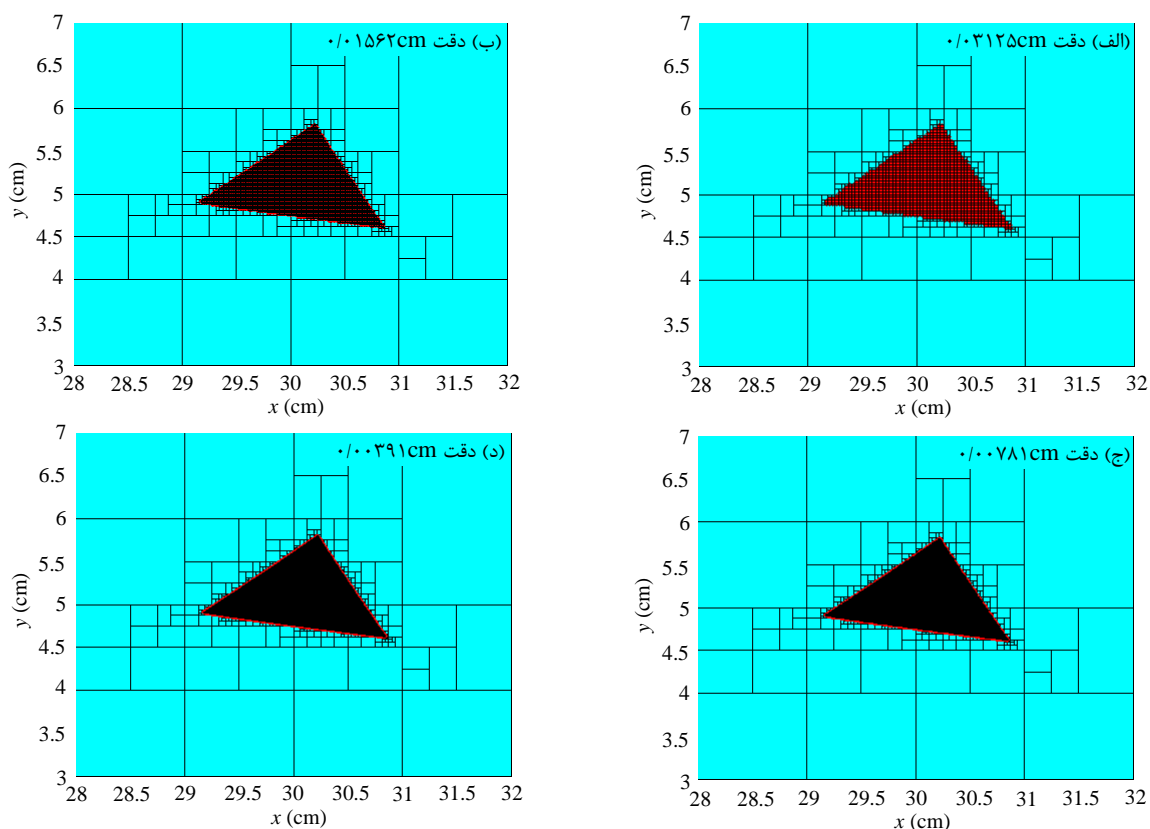
با فرم مقدار میانگین یا فرم شیب، با مساحت حقیقی فضای کاری ربات موازی محاسبه شده با استفاده از روش هندسی کاملاً توجیه‌پذیر است. این اختلاف بسیار کم در اثر استفاده از بازه‌های مربعی در مرزهای فضای کاری حاصل می‌شود. هر چقدر بازه‌های مربعی کوچک‌تری برای تحلیل فضای کاری مورد بررسی قرار گیرد، دقت در مرزهای فضای کاری بیشتر و مساحت فضای کاری به دست آمده با استفاده از الگوریتم‌های پیشنهادی به مساحت فضای کاری محاسبه شده با استفاده از روش هندسی نزدیک‌تر می‌شود. در واقع در حد، وقتی طول و عرض بازه‌های مورد تحلیل به صفر میل می‌کند، مساحت فضای کاری ربات موازی به دست آمده از روش تلفیق آنالیز بازه‌ای با یکی از فرم‌های شیب یا مقدار میانگین برابر با مساحت فضای کاری واقعی به دست آمده از روش هندسی خواهد شد.

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله به ارائه دو روش برای بررسی فضای کاری ربات‌های موازی با تلفیق آنالیز بازه‌ای و عملیات پالایش پرداخته شد. برای تحلیل مناسب فضای کاری، از معادلات سینماتیکی ربات موازی، محدودیت حرکت مفاصل فعال، آنالیز بازه‌ای و فرم‌های مقدار میانگین و شیب استفاده گردید. نتایج این تحقیق نشان می‌دهد که در صورت عدم استفاده از عملیات پالایش در آنالیز بازه‌ای، فضای کاری محاسبه شده از نظر هندسی، شبیه به فضای کاری واقعی ربات موازی می‌باشد، اما مساحت آن به میزان قابل توجهی بزرگ‌تر از مساحت فضای کاری ربات موازی حاصل می‌گردد. این در شرایطی است که تلفیق آنالیز بازه‌ای با یکی از عملیات پالایش به فرم مقدار میانگین یا فرم شیب، باعث کاهش عرض اضافی در معادلات سینماتیکی ربات موازی گردیده و نتایج حاصل از آن هم از نظر هندسی و هم از لحاظ مساحت، مشابه فضای کاری واقعی ربات موازی به دست می‌آید. علاوه بر این، با در نظر گرفتن زمان مورد نیاز برای اجرای الگوریتم، مشاهده شد که روش تلفیق آنالیز بازه‌ای با فرم مقدار میانگین در مقایسه با روش تلفیق آنالیز بازه‌ای با فرم شیب زمان کمتری را صرف کرده و برای تحلیل فضای کاری ربات موازی مناسب‌تر است.

مقایسه مقادیر جداول ۳ و ۴ نشان می‌دهد که در حالت استفاده از روش تلفیق آنالیز بازه‌ای با یکی از فرم‌های مقدار میانگین یا شیب، مساحت فضای کاری بسیار نزدیک به مساحت فضای کاری حقیقی ربات موازی حاصل می‌شود؛ اما در صورت عدم استفاده از عملیات پالایش، مساحت فضای کاری بسیار بزرگ‌تر از فضای کاری حقیقی ربات موازی به دست می‌آید. این نتایج به وضوح، تاثیر غیر قابل انکار عملیات پالایش را در تعیین فضای کاری ربات موازی بیان می‌کند. از طرفی، با در نظر گرفتن زمان مورد نیاز برای اجرای الگوریتم، این نتیجه حاصل می‌شود که روش تلفیق آنالیز بازه‌ای با فرم مقدار میانگین در مقایسه با روش تلفیق آنالیز بازه‌ای با فرم شیب زمان کمتری را صرف کرده و مناسب‌تر می‌باشد.

دقت فضای کاری به دست آمده، علاوه بر نوع روش پالایش مورد استفاده، به دقت بازه‌ها در آنالیز بازه‌ای نیز بستگی دارد. به این صورت که در ابتدای استفاده از سه روش مبتنی بر آنالیز بازه‌ای، یک عدد به عنوان دقت به الگوریتم وارد می‌شود. در واقع الگوریتم محاسبه فضای کاری در شرایطی متوقف می‌شود که طول و عرض تمام بازه‌هایی با احتمال وجود جواب، از عدد در نظر گرفته شده به عنوان دقت، کوچک‌تر باشد. اعدادی که به عنوان دقت الگوریتم در نظر گرفته می‌شوند، ضرایبی کوچک‌تر از عرض بازه اولیه مورد استفاده برای فضای کاری و کوچک‌تر از یک می‌باشند. به عنوان نمونه، نتایج فضای کاری ربات موازی 3-RRR با در نظر گرفتن محدودیت حرکت مفاصل فعال $\theta_1 = [50^\circ, 70^\circ]$ ، $\theta_2 = [140^\circ, 160^\circ]$ و $\theta_3 = [260^\circ, 280^\circ]$ و زاویه دوران سکوی متحرک برابر $\theta = 0^\circ$ با استفاده از روش تلفیق آنالیز بازه‌ای با فرم مقدار میانگین به ازای دقت‌های 0.01562cm ، 0.03125cm ، 0.0781cm و 0.1562cm در شکل ۵ و جدول ۵ آورده شده است. با در نظر گرفتن این نتایج ملاحظه می‌گردد، با افزایش دقت در اثر کاهش عرض بازه‌ها، مساحت فضای کاری ربات موازی 3-RRR به مساحت فضای کاری واقعی به دست آمده از روش هندسی نزدیک‌تر می‌شود. با توجه به اینکه در روش پیشنهادی، بازه‌های مربعی تشکیل دهنده مرزهای فضای کاری می‌باشند، لذا اختلاف بسیار کم مساحت فضای کاری به دست آمده با استفاده از یکی از روش‌های تلفیق آنالیز بازه‌ای



شکل ۵- فضای کاری ربات موازی 3-RRR به ازای محدودیت حرکت مفاصل فعال $\theta_1 = [50^\circ, 70^\circ]$ ، $\theta_2 = [140^\circ, 160^\circ]$ و $\theta_3 = [260^\circ, 280^\circ]$ (الف) دقت ۰/۰۳۱۲۵cm^۲ (ب) ۰/۰۱۵۶۲cm^۲ (ج) ۰/۰۰۷۸۱cm^۲ (د) ۰/۰۰۳۹۱cm^۲

- [2] Merlet JP, Gosselin CM, Mouly N (1998) Workspaces of planar parallel manipulators. *Mechanism and Machine Theory*, 33(1): 7-20.
- [3] Gao F, Liu XJ, Chen X (2001) The relationships between the shapes of the workspaces and the link lengths of 3-DOF symmetrical planar parallel manipulators. *Mechanism and Machine Theory* 36(2): 205-220.
- [4] Bonev IA, Ryu J (2001) A new approach to orientation workspace analysis of 6-DOF parallel manipulators. *Mechanism machine theory* 36(1): 15-28.
- [5] Chablat D, Wenger P, Merlet JP (2002) Workspace analysis of the orthoglide using interval analysis. *Advances in Robot Kinematics: Theory and Applications*, 397-406.
- [6] Tsai K, Lin J (2006) Determining the compatible orientation workspace of Stewart-Gough parallel manipulators. *Mechanism and machine theory* 41(10): 1168-1184.
- [7] Pond G, Carretero JA (2007) Quantitative dexterous workspace comparison of parallel manipulators.

جدول ۵- مساحت فضای کاری و زمان اجرای الگوریتم تلفیق آنالیز بازه‌ای با فرم مقدار میانگین بر روی ربات موازی 3-RRR با در نظر گرفتن $\theta_1 = [50^\circ, 70^\circ]$ ، $\theta_2 = [140^\circ, 160^\circ]$ و $\theta_3 = [260^\circ, 280^\circ]$ (مساحت با استفاده از روش هندسی: ۰/۸۷۹cm^۲)

زمان (s)	مساحت (cm ²)	دقت یا عرض کوچکترین بازه (cm)
۵۶۳	۰/۹۷۳	۰/۰۳۱۲۵
۲۲۵۷	۰/۹۲۵	۰/۰۱۵۶۲
۱۰۹۶۸	۰/۹۰۲	۰/۰۰۷۸۱
۷۱۲۷۰	۰/۸۹۰	۰/۰۰۳۹۱

مراجع

- [1] Merlet JP (2006) *Parallel robots*. 2th edn. Springer Science & Business Media.

- working zones of planar and spatial parallel manipulators. *Robotica* 38(5): 861-885.
- [18] Jiang H, Leng J, Niu Z (2021) Structural design and efficient workspace optimization of a four-bar delta parallel picking robot. 2nd International Conference on Artificial Intelligence and Information Systems 1-8
- [19] Zardst A, Ahmadi H, Sharifnia M (2022) Kinematic and inverse kinematic analysis of hybrid Delta parallel robot with spherical wrist using adaptive neuro fuzzy inference system. *J. Solid Fluid Mech.* 12(5): 13-30.
- [20] Malyshev D, Rybak L, Carbone G, Semenenko T, Nozdracheva A (2022) Optimal design of a parallel manipulator for aliquoting of biomaterials considering workspace and singularity zones. *Applied Sciences* 12(4): 2070.
- [21] Jin X, Jiang X, Li Q (2022) Interval-analysis-based determination of the trajectory-reachable workspace of planar cable-suspended parallel robots. *Mechanism and Machine Theory* 177: 105060.
- [22] Ye P, You J, Xi F, Wang J, Ru Y (2022) An interval discretization method for workspace determination of parallel mechanisms. *Arabian J. Sci. Eng.* 47: 8805-8827.
- [23] Kim D, Chung WK, Youm Y (1997) Geometrical approach for the workspace of 6-dof parallel manipulators. *Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 4: 2986-2991.
- [24] Moore RE, Kearfott RB, Cloud MJ (2009) *Introduction to interval analysis*. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia.
- [25] Rump SM. (1999). *INTLAB—interval laboratory*. pp. 77-104. Springer Netherlands.
- [26] Naderi D, Tale Masouleh M, Varshovi-Jaghargh P (2016) Gröbner basis and resultant method for the forward displacement of 3-DoF planar parallel manipulators in seven-dimensional kinematic space. *Robotica* 34(11): 2610-2628.
- [27] Varshovi-Jaghargh P, Naderi D, Tale Masouleh M (2012) Forward kinematic problem of two 4-RRUR with different geometric structures and one 4-RUU parallel robots. *Modares Mechanical Engineering* 12(4): 105-119.
- Mechanism and Machine Theory 42(10): 1388-1400.
- [8] Wang Z, Ji S, Li Y, Wan Y (2010) A unified algorithm to determine the reachable and dexterous workspace of parallel manipulators. *Robotics and computer-integrated manufacturing* 26(5): 454-460.
- [9] Gouttefarde M, Daney D, Merlet JP (2010) Interval-analysis-based determination of the wrench-feasible workspace of parallel cable-driven robots. *IEEE Transactions on Robotics* 27(1): 1-13.
- [10] Jaafarzadeh N, Mahboubkhah M (2014) Design and analysis of workspace and singularity of a 4 degree of freedom parallel robot. *Modares Mechanical Engineering* 14(8): 28-36.
- [11] Saadatzi MH, Tale Masouleh M, Taghirad HD (2012) Workspace analysis of 5-PRUR parallel mechanisms (3T2R). *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing* 28(3): 437-448.
- [12] Farzaneh Kaloorazi MH, Tale Masouleh M, Mashhadi Gholamali B (2014) Determination of the maximal singularity-free circle in the workspace of planar parallel mechanisms using interval analysis and constructive geometric approach. *Sharif Journal of Mechanical Engineering* 30-3(1): 143-150.
- [13] Mazare M, Taghizadeh M, Najafi MR (2016) Design, manufacturing, kinematic analysis of a kind of a 3-DOF translational parallel manipulator. *Modares Mechanical Engineering* 16(7): 327-334.
- [14] Anvari Z, Varshovi-Jaghargh P, Tale Masouleh M (2017) The Mechanical interference-free workspace of the planar parallel robots using geometric approach. *Modares Mechanical Engineering* 17(4): 101-110.
- [15] FarzanehKaloorazi M, Tale Masouleh M, Caro S (2017) Collision-free workspace of parallel mechanisms based on an interval analysis approach. *Robotica* 35(8): 1747-1760.
- [16] Ben Hamida I, Laribi M, Mlika A, Romdhane L, Zegloul S (2018) Geometric based approach for workspace analysis of translational parallel robots. *Robot Design, Dynamics and Control: Proceedings of the 22nd CISM IFToMM Symposium*, 180-188.
- [17] Karnam MK, Baskar A, Srivatsan RA, Bandyopadhyay S (2020) Computation of the safe