



## مدلسازی امواج هدایت شده در یک ورق با عرض بی نهایت با استفاده از روش نیمه تحلیلی المان محدود نوع پی

الیاس میرزایی کاخکی<sup>۱\*</sup>، جلیل رضایی پژند<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup> دانشجوی دکتری، گروه مکانیک، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران  
<sup>۲</sup> استاد، آزمایشگاه سازه های هوشمند و کامپوزیتی گروه مکانیک، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد، ایران  
 مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۱۲/۰۱؛ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۲/۰۲/۱۱؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۵/۰۹

### چکیده

یکی از مسائل حائز اهمیت که همواره در زمینه مدل سازی و تحلیل مسائل مهندسی مورد توجه ویژه قرار گرفته است، تعادل میان دقت و هزینه محاسباتی روش بکار گرفته شده است؛ لذا، مسئله مدل سازی انتشار موج در سازه‌ها و ارائه منحنی‌های پراکنش مربوطه که در زمینه پایش سلامت سازه و شناسایی خواص مواد به کار گرفته می‌شود، نیز از این اصل مستثنی نمی‌باشد. اهمیت حفظ این تعادل به ویژه در مواردی که نیاز به تکرار در مدلسازی وجود دارد، نمود پیدا می‌کند. در مقاله حاضر سعی بر آن شده است که با بکارگیری توابع شکل سلسله مراتبی در روش نیمه تحلیلی المان محدود و ایجاد روشی همانند روش المان محدود نوع پی، دقت و هزینه محاسباتی این روش را بهبود بخشید. علاوه بر روش ارائه شده به تاثیر درجات آزادی مدل سازی در محاسبه فرکانس قطع و به طبع آن دقت منحنی های پراکنش و افزایش خطای مدلسازی ناشی از آن پرداخته می‌شود.

**کلمات کلیدی:** روش نیمه تحلیلی المان محدود؛ روابط پراکنش؛ موج هدایت شده؛ فرکانس قطع.

## Guided wave modeling of a plate with infinite width using p version of semi analytical finite element method

Elyas Mirzaee Kakhki<sup>1,\*</sup>, Jalil Rezaeepajhand<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Ph.D. Student, Mech. Eng., Ferdowsi University. of Mashhad, Mashhad, Iran

<sup>2</sup> Prof., Mech. Eng., Ferdowsi University. of Mashhad, Mashhad, Iran

### Abstract

Balancing accuracy and computational cost in modeling and analyzing engineering problems has always been a crucial concern in the field. The same principle applies to the modeling of wave propagation in structures and deriving dispersion curves, which are crucial in structural health monitoring and material property identification. The importance of maintaining this balance appears especially in cases where there is a need for repetition in modeling. In this study, we aimed to improve the accuracy and computational cost of the semi-analytical finite element method by incorporating hierarchical shape functions. The results indicate that using appropriate shape functions can enhance the performance of the semi-analytical finite element method for modeling wave propagation in structures. The study also investigated the impact of the number of degrees of freedom on the calculation of the cutoff frequency, the accuracy of the dispersion curves and the increase in modelling error as a result of this point.

**Keywords:** SAFE; dispersion relation; guided wave; cut-off frequency.

## ۱- مقدمه

روش های متداول شناخته شده پایش سلامت سازه به دو دسته آزمون های مخرب و غیر مخرب تقسیم می شوند [۱، ۲]. پایش سلامت سازه با استفاده از امواج هدایت شده به دسته دوم تعلق دارد. در این روش به دلیل پیچیدگی های موجود، مدل سازی انتشار موج و مطالعه رفتار آن در سازه از اهمیت ویژه ای برخوردار است. در همین راستا رویکردهای متفاوتی برای مدل سازی موج در سازه توسط محققان ارائه شده است. بر طبق مطالعات صورت گرفته روش های موجود را می توان به روش های تحلیلی، نیمه تحلیلی و عددی طبقه بندی نمود [۳]. روش های تحلیلی معمولاً مبتنی بر ماتریس انتقال<sup>۱</sup> یا ماتریس مرجع<sup>۲</sup> [۴-۶] می باشند و حل دقیق مسئله را ارائه می نمایند. حجم محاسبات در روش های تحلیلی در مقایسه با روش های عددی معمولاً ناچیز است با این وجود، این روش ها اغلب به سیستم های خاص با هندسه ساده، انواع موج های خاص و محدوده فرکانس پایین محدود می شوند. به منظور رفع محدودیت های ذکر شده در روش های تحلیلی موجود برای مدل سازی انتشار موج در ساختارهای پیچیده، روش های عددی متفاوتی مانند روش المان محدود<sup>۳</sup> (FEM)، روش المان طیفی<sup>۴</sup> (SEM)، تفاضل محدود<sup>۵</sup> (FD) و تجزیه و تحلیل ایزوژئومتری<sup>۶</sup> (IGA) ارائه شده اند [۳، ۷]. با این حال، حجم محاسبات آنها به ویژه در سازه های بزرگ، پیچیده و در فرکانس های بالا به شکل قابل توجهی افزایش می یابد. به عنوان مثال، در مورد مدل سازی انتشار موج در یک سازه با استفاده از روش المان محدود حداقل ۷ تا ۱۰ المان در هر طول موج مورد نیاز است [۸]؛ بنابراین در فرکانس های بالاتر که طول موج ها بسیار کوتاه است، تقسیمات صورت گرفته در سازه باید بسیار کوچک باشد [۹]. از طرف دیگر، مطابق با نتایج و دقت مورد نیاز، روش های ترکیبی وجود دارد که از محاسن روش های عددی در مدل سازی ساختارهای پیچیده و همچنین دقت بالا و حجم محاسبات کم موجود در روش های تحلیلی بهره می برد. این روش ها در اصطلاح روش های نیمه تحلیلی نامیده می شوند.

بدیهی است که این روش ها طبیعتاً محدودیت های هر دو روش را نیز تا حدودی به ارث می برند. از جمله روش های نیمه تحلیلی مورد استفاده در زمینه امواج هدایت شده می توان به روش نیمه تحلیلی المان محدود<sup>۷</sup> (SAFE)، روش المان مرزی<sup>۸</sup> (SBFEM) و روش المان محدود موجک<sup>۹</sup> (WFEM) اشاره نمود [۱۰، ۱۱].

روش نیمه تحلیلی المان محدود، برای مسائل انتشار موج در سازه های با سطح مقطع ثابت دلخواه، توسط اعلمی [۱۲] و لاگاس [۱۳] در سال ۱۹۷۳ ارائه شد. این روش که پیش از آن توسط دیگران در مهندسی سازه استفاده می شد [۱۴]، ارتباط نزدیکی با روش المان نواری<sup>۱۰</sup> و روش المان نازک<sup>۱۱</sup> دارد [۳]. در این روش سطح مقطع سازه با استفاده از المان ها تقسیم بندی می گردد و در جهت انتشار موج یک عبارت تحلیلی در نظر گرفته می شود. با استفاده از این روش، ضمن حفظ ابعاد مدل و استفاده از مزایای روش های عددی، حجم محاسبات مدل سازی در مقایسه با رویکردهای عددی که در آنها کل سازه شبکه بندی می گردد، به طور چشمگیری کاهش می یابد.

این روش پس از آن طی سال ها توسط محققین دیگر توسعه یافته است تا ساختارها با هندسه های پیچیده تر و مواد متفاوت مانند ریل ها [۲۳-۱۵]، تیر با سطح مقطع I [۲۵]، سیلندرها / لوله ها [۲۷-۲۵]، گوه ها با اشکال مختلف [۲۷، ۲۸]، تیرهای فولادی زاویه دار [۲۷]، صفحه های آلومینیومی شیاردار [۲۹]، سازه های دارای انحنا در امتداد انتشار موج مانند حلقه های با مقطع مستطیلی [۲۸]، سازه های مارپیچ مانند فنرها و کابل های تابیده [۳۰]، لوله های پره دار [۳۱]، مواد ناهمسانگرد [۳۳، ۳۲، ۱۹]، سیلندرها متشکل از مواد مدرج تابعی<sup>۱۲</sup> [۲۵]، اتصالات چسبی دو صفحه از جنس مواد مرکب [۳۴، ۱۹]، صفحات مواد مرکب دارای پیش تنش [۳۵]، صفحات مغناطیسی الکتروالاستیک متشکل از مواد مدرج تابعی [۳۶]، لوله های فولادی جدار نازک، پروفیل های آلومینیومی، پروفیل های لوله ای ارتوتروپیک و نبشی های فولادی [۲۷]، میرایی

<sup>8</sup> Scaled boundary finite element method

<sup>9</sup> Wavelet finite element method

<sup>10</sup> Strip element method

<sup>11</sup> Thin element method

<sup>12</sup> Functionally graded materials

<sup>1</sup> Transfer matrix

<sup>2</sup> Global matrix

<sup>3</sup> Finite element method

<sup>4</sup> Spectral element method

<sup>5</sup> Finite difference

<sup>6</sup> Isogeometric analysis

<sup>7</sup> Semi-analytical finite element method

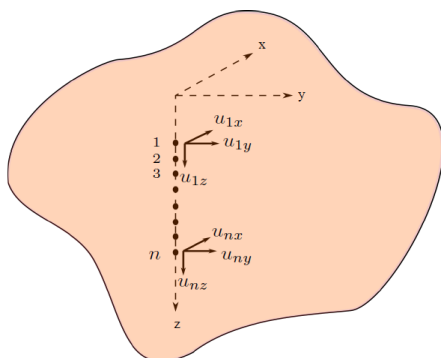
به منظور مدل سازی سازه‌های با تقارن محوری مدفون یا غوطه ور از توابع شکل مرتبه بالا استفاده کرده‌اند. او و همکارانش با استفاده از روش نیمه تحلیلی المان محدود یک بعدی برای مدلسازی سازه و از روش لایه کاملاً منطبق<sup>۲</sup> (PML) به منظور مدل سازی محیط اطراف استفاده نمودند. روش لایه کاملاً منطبق برای مدل سازی امواج در سازه‌ها مدفون و یا غوطه ور در محیط پیرامونی کاربرد زیادی دارند. این روش، هندسه اصلی را در یک سیستم مختصات جدید ترسیم می‌کند و همزمان هندسه مفروض به عنوان محیط پیرامونی را بسط می‌دهد و مکانیزم میرایی موج را از طریق دستگاه مختصات مختلط اعمال می‌نماید. برای این منظور آنها از توابع شکل چند جمله‌ای لاگرانژ بر روی نقاط گاوس-لوباتو-لژاندر<sup>۳</sup> (GLL) استفاده کردند. شیائو و همکارانش [۵۶] از المان‌های یک بعدی برای مدل سازی انتشار موج هدایت شده در صفحه الکترومغناطیسی از جنس مواد مدرج تابعی از روش المان طیفی چبیشف<sup>۴</sup> استفاده نمودند. در روش پیشنهادی آنها چند جمله‌ای‌های متعامد چبیشف بر روی نقاط گاوس-لوباتو-چبیشف<sup>۵</sup> (CGL) استفاده می‌شود. ترسده و همکارانش [۵۷] هندسه را با المان‌های طیفی دوبعدی شبکه بندی نمودند و مدهای فرکانس بالا با نشتی<sup>۶</sup> کم در سازه‌های مدفون را محاسبه نمودند. اخیراً سیف الدینی و همکاران [۵۸] از توابع پایه بی-اسپیلاین یکنواخت نسبتی<sup>۷</sup> (NURBS) در روش نیمه تحلیلی المان محدود برای مدل سازی انتشار موج در صفحات همسانگرد استفاده نمودند.

با توجه به موارد ذکر شده و بررسی‌های صورت گرفته، نوآوری صورت گرفته در مقاله حاضر در زمینه تلفیق توابع شکل سلسله مراتبی<sup>۸</sup> بر اساس انتگرال نرمال شده چند جمله ای‌های لژاندر با روش نیمه تحلیلی المان محدود و ارائه روش نیمه تحلیلی المان محدود نوع پی و بررسی عملکرد آن از منظر هزینه‌های محاسباتی و میزان کارایی است؛ همچنین در مقاله حاضر به طور جامع به بررسی خطای موجود در فرکانس قطع<sup>۹</sup> و تاثیر آن در افزایش خطای کلی مدلسازی عددی ارائه شده پرداخته شده است. با توجه به اینکه در مقالات ارائه شده تعداد

ویسکوالاستیک با استفاده از مدل کلونین-ویگت در صفحات [۲۶،۲۹] و سازه‌های با تقارن محوری [۲۶،۲۹] مدل هیستریک<sup>۱</sup> برای میرایی در ریل [۲۲] و دال بتنی تقویت شده با میله‌های فولادی استوانه‌ای [۲۹] را نیز در بر گیرد.

علاوه بر تحقیقات انجام شده در گسترش این روش، عامل دیگری که مورد توجه قرار گرفته است و نیازمند بررسی بیشتر است، استفاده از توابع شکل مختلف در روش نیمه تحلیلی المان محدود است. روش‌های متفاوتی که برای شبکه بندی سطح مقطع سازه استفاده می‌شود را می‌توان به روش نیمه تحلیلی یک بعدی (1D SAFE) و دو بعدی (2D SAFE) تقسیم بندی نمود. همانطور که از نام هر یک از این روش‌ها می‌توان برداشت نمود از المان‌های یک بعدی در روش یک بعدی و از المان‌های دو بعدی در روش دو بعدی برای شبکه بندی سطح مقطع سازه استفاده می‌شود. در سازه‌هایی با هندسه ساده مانند صفحات و پوسته‌های استوانه‌ای می‌توان به منظور کاهش محاسبات، از روش نیمه تحلیلی یک بعدی استفاده نمود. در این روش المان‌های یک بعدی سه گره ای با توابع شکل مرتبه دوم و سه درجه آزادی جابجایی در هر گره بیشتر مورد توجه قرار گرفته‌اند [۳۷-۴۲]، این در حالی است که المان‌های دو گره ای [۴۳] و سه گره‌ای با دو درجه آزادی در هر گره [۱۹] نیز توسط محققین به کار گرفته شده‌اند. در روش نیمه تحلیلی المان محدود دو بعدی المان‌هایی که بیشتر مورد استفاده قرار می‌گیرند المان‌های مثلثی سه گره‌ای و المان‌های چهارضلعی چهار گره‌ای هستند [۴۴-۴۹]. همچنین در برخی موارد المان‌های مثلثی شش گره، و المان‌های چهار ضلعی هشت گره‌ای [۵۰-۵۴] و به ندرت المان‌های چهار ضلعی نه گره‌ای [۵۲] توسط محققین پیشنهاد شده است. علیرغم تحقیقات بسیار انجام شده بر روی روش نیمه تحلیلی المان محدود با استفاده از تابع شکل مرتبه پایین، تحقیقات کمی در مورد استفاده از توابع شکل مرتبه بالا انجام شده است. علاوه بر موارد مذکور جهت افزایش دامنه کاربرد و بهبود عملکرد روش نیمه تحلیلی المان محدود، پیشنهادات دیگری توسط محققین ارائه شده است. کالکوفسکی و همکارانش [۵۵]

<sup>6</sup> leakage<sup>7</sup> nonuniform rational B-splines<sup>8</sup> Hierarchical shape functions<sup>9</sup> cut-off frequency<sup>1</sup> hysteretic model<sup>2</sup> Perfectly matched layer<sup>3</sup> Gauss-Lobatto-Legendre<sup>4</sup> Chebyshev spectral element method<sup>5</sup> Gauss-Lobatto-Chebyshev



شکل ۲- دستگاه مختصات و تعداد درجات آزادی گره ها در روش نیمه تحلیلی المان محدود یک بعدی

به منظور استفاده از روش نیمه تحلیلی یک بعدی برای مدل سازی انتشار موج در صفحه ای با عرض بی نهایت یا یک لوله، در یک المان یک بعدی به جای یک درجه آزادی در هر گره در مقایسه با روش المان محدود، همانطور که در شکل ۲ نشان داده شده است، سه درجه آزادی در هر گره و همچنین یک عبارت تحلیلی  $e^{-i(\omega t - kx)}$  در رابطه در نظر گرفته می شود. در فرمول بندی در نظر گرفته شده  $k$  نشان دهنده عدد موج است،  $x$  نشان دهنده جهت انتشار موج،  $\omega$  فرکانس زاویه ای و  $t$  نشان دهنده زمان است. با استفاده از این روش، روابط جابه جایی در المان به شرح ذیل ارائه می گردد [۱۹]:

$$\mathbf{u}^{(e)}(x, z, t) = \begin{bmatrix} u_x^{(e)} \\ u_y^{(e)} \\ u_z^{(e)} \end{bmatrix} = \mathbf{N}(z) \mathbf{q}^{(e)} e^{-i(\omega t - kx)} \quad (1)$$

در رابطه فوق ماتریس توابع شکل به صورت

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \dots & N_\beta & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \dots & 0 & N_\beta & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \dots & 0 & 0 & N_\beta \end{bmatrix} \quad (2)$$

می باشند. توابع شکل در نظر گرفته شده در ماتریس فوق تنها تابعی از متغیر  $z$  می باشند:

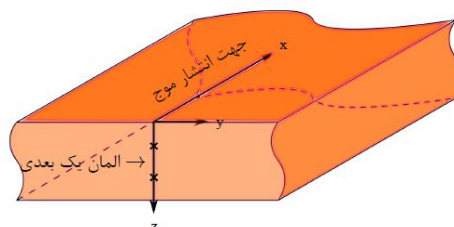
$$N_l = N_l(z), l = 1, 2, \dots, \beta \quad (3)$$

همچنین بردار جابه جایی گره ها در هر المان عبارت است از:

انگشت شماری از محققین از توابع شکل مرتبه بالا در روش نیمه تحلیلی المان محدود استفاده نموده اند و همچنین در موارد محدود موجود نیز مطالعه و یا مقایسه در خور توجهی در زمینه تاثیر استفاده از توابع شکل مرتبه بالا در هزینه محاسباتی آنها صورت نگرفته است، بررسی و مطالعه این امر کمک شایانی در بهبود هزینه محاسباتی این روش در مسائل مدل سازی خواهد داشت. در ادامه، مقاله حاضر به ترتیب ذیل تنظیم شده است. در بخش ۲ روابط ریاضی روش نیمه تحلیلی المان محدود ارائه شده است. سپس در بخش ۳ توابع شکل سلسله مراتبی مورد بررسی قرار خواهند گرفت. مدلسازی عددی و تحلیل نتایج یک صفحه از جنس مواد همسانگرد و ناهمسانگرد در بخش ۴ ارائه شده است و در نهایت نتیجه گیری صورت گرفته در بخش ۵ لحاظ شده است.

## ۲- روش نیمه تحلیلی المان محدود

همانطور که قبلاً به اختصار اشاره شد، روش نیمه تحلیلی المان محدود، ترکیبی از شبکه بندی سطح مقطع سازه و بهره گیری از روش تحلیلی در جهت انتشار موج در سازه است.



شکل ۱- جهت انتشار موج، و دستگاه مختصات در نظر گرفته شده برای یک صفحه

همانطور که در شکل ۱ مشاهده می شود، جهت انتشار موج، در این روش، معمولاً عمود بر سطح مقطع سازه و در امتداد طول آن در نظر گرفته می شود.

پس از جایگذاری روابط جابه جایی و کرنش در روش نیمه تحلیلی المان محدود و پس از انجام محاسبات مربوطه معادله حرکت المان به صورت [۱۹]:

$$\left( \mathbf{k}_1^{(e)} + i\kappa \mathbf{k}_2^{(e)} + \kappa^2 \mathbf{k}_3^{(e)} - \omega^2 \mathbf{m}^{(e)} \right) \mathbf{Q}^{(e)} = 0 \quad (10)$$

و روابط ماتریس‌های سفتی و جرم به صورت زیر به دست می‌آیند [۱۹]:

$$\mathbf{k}_1^{(e)} = \int_{\Omega_e} [\beta_1^T \mathbf{C}^{(e)} \beta_1] d\Omega_e \quad (11)$$

و

$$\mathbf{k}_2^{(e)} = \int_{\Omega_e} [\beta_1^T \mathbf{C}^{(e)} \beta_2 - \beta_2^T \mathbf{C}^{(e)} \beta_1] d\Omega_e \quad (12)$$

و

$$\mathbf{k}_3^{(e)} = \int_{\Omega_e} [\beta_2^T \mathbf{C}^{(e)} \beta_2] d\Omega_e \quad (13)$$

و

$$\mathbf{m}^{(e)} = \int_{\Omega_e} [\mathbf{N}^T \rho^{(e)} \mathbf{N}] d\Omega_e \quad (14)$$

در روابط فوق  $\mathbf{C}^{(e)}$  ماتریس سفتی المان است. شایان ذکر است ماتریس سفتی ماده ناهمسانگرد در دستگاه مختصات در نظر گرفته شده برای کل صفحه مطابق شکل ۱ باید محاسبه شود و ماتریس  $\mathbf{C}^{(e)}$  در این روابط می‌بایست با ماتریس  $\bar{\mathbf{C}}^{(e)}$  جایگزین گردد که جزئیات آن در قسمت ضمیمه ارائه گردیده است. در این روابط ماتریس  $\mathbf{k}_1^{(e)}$  مربوط به تغییر شکل‌های سطح مقطع در صفحه yz است. ماتریس  $\mathbf{k}_3^{(e)}$  نشان دهنده تغییر شکل‌های خارج از صفحه yz است و ماتریس  $\mathbf{k}_2^{(e)}$  تغییر شکل‌های درون صفحه yz را با تغییر شکل‌های خارج از صفحه در راستای محور x ارتباط می‌دهد. ماتریس‌های سفتی و جرم هر المان را می‌توان به منظور استخراج ماتریس‌های کلی سفتی و جرم با یکدیگر سرهم کرد.

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1 &= \bigcup_{e=1}^{nel} \mathbf{k}_1^{(e)}, \\ \mathbf{K}_2 &= \bigcup_{e=1}^{nel} \mathbf{k}_2^{(e)}, \\ \mathbf{K}_3 &= \bigcup_{e=1}^{nel} \mathbf{k}_3^{(e)}, \\ \mathbf{M} &= \bigcup_{e=1}^{nel} \mathbf{m}^{(e)} \end{aligned} \quad (15)$$

$$\mathbf{q}^{(e)} = [u_{1x} \ u_{1y} \ u_{1z} \ \dots \ u_{\beta x} \ u_{\beta y} \ u_{\beta z}] \quad (4)$$

که در رابطه فوق  $u_{ij}$  نشان دهنده جابه جایی گره  $i$  ام در راستای محور  $z$  است. همانطور که مشاهده می‌شود، در روش نیمه تحلیلی المان محدود، توابع شکل مختلف ارائه شده در روش‌های دیگر مانند المان محدود و المان محدود طیفی را می‌توان به طور مستقیم در روش نیمه تحلیلی المان محدود استفاده نمود. در ادامه بردار کرنش را می‌توان از روابط زیر محاسبه نمود [۱۹]:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} = \left[ L_x \frac{\partial}{\partial x} + L_y \frac{\partial}{\partial y} + L_z \frac{\partial}{\partial z} \right] \mathbf{u}^{(e)} \quad (5)$$

که در رابطه فوق  $L_x$ ،  $L_y$  و  $L_z$  به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} L_x &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, L_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ L_z &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6)$$

با جایگذاری رابطه جابه‌جایی در رابطه (۵) برداری کرنش به صورت زیر در خواهد آمد:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} = (\beta_1 + i\kappa \beta_2) \mathbf{q}^{(e)} e^{-i(\omega t - kx)} \quad (7)$$

در رابطه فوق با در نظر گرفتن المان‌های یک بعدی و تابع شکل به فرم  $N(z)$  داریم:

$$\beta_1 = L_z \frac{\partial N}{\partial z}, \beta_2 = L_x N \quad (8)$$

با محاسبه انرژی‌های جنبشی،  $\phi$  و انرژی پتانسیل،  $K$  و جایگذاری آن‌ها در رابطه همیلتون رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \bigcup_{e=1}^n \left[ \int_{\Omega_e} \delta(\boldsymbol{\varepsilon}^{(e)T}) \mathbf{C}^{(e)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} d\Omega_e + \int_{\Omega_e} \delta(\mathbf{u}^{(e)T}) \rho^{(e)} \ddot{\mathbf{u}}^{(e)} d\Omega_e \right] \right\} dt = 0 \quad (9)$$

### ۳- توابع شکل سلسله مراتبی بر اساس انتگرال نرمال شده چند جمله ای های لژاندر:

تفاوت اصلی بین توابع شکل سلسله مراتبی و سایر توابع شکل در این امر نهفته است که در توابع شکل سلسله مراتبی، نقاط جدید بدون جابجایی نقاط موجود اضافه می شوند و با افزایش مرتبه، تمام توابع شکل مرتبه پایین تر بدون تغییر در تابع شکل مرتبه بالاتر حضور دارند.

برای اینکه محاسبه ماتریس های سفتی و جرم برای پیاده سازی در یک برنامه کامپیوتری مناسب باشد، محاسبات در سطح المان با معرفی دستگاه مختصات طبیعی  $\xi$  انجام می گیرد که در بازه  $[-1, +1]$  تعریف می شود. در یک بعد با در نظر گرفتن دستگاه مختصات معرفی شده در شکل ۲، المان  $n$  ام با گره  $z_n$  و  $z_{n+1}$  مشخص می شود؛ بنابراین المان استاندارد را می توان با استفاده از رابطه زیر بر روی المان  $n$  ام تصویر نمود

$$z = \frac{1}{2}(1 - \xi)z_n + \frac{1}{2}(1 + \xi)z_{n+1} \quad (19)$$

به عبارت دیگر رابطه فوق ارتباط دستگاه مختصات طبیعی المان استاندارد را با مختصات اصلی نشان می دهد. با در نظر گرفتن دستگاه مختصات طبیعی برای المان استاندارد توابع شکل سلسله مراتبی پایه یک بعدی از دو تابع شکل

$$N_1(\xi) = \frac{1}{2}(1 - \xi) \quad (20)$$

و

$$N_2(\xi) = \frac{1}{2}(1 + \xi) \quad (21)$$

و توابع شکل داخلی که انتگرال های نرمال شده چند جمله ای لژاندر هستند

$$N_n^{FEM,p}(\xi) = \frac{1}{\|le_{n-2}\|} \int_{x_1=-1}^{\xi} le_{n-2}(x_1) dx_1 \quad (22)$$

$, n = 3, 4, 5, \dots, p$

تشکیل شده اند. در روابط فوق  $le_{n-2}$  یک چند جمله ای لژاندر از مرتبه  $n-2$  است. شایان ذکر است، مانند هر روش دیگری، نسخه بی المان محدود نیز از معیابی رنج می برد. در این روش

و در نهایت معادله حرکت کلی بر حسب ماتریس های جرم و سفتی کلی به صورت زیر بازنویسی می گردد:

$$(K_1 + i\kappa K_2 + \kappa^2 K_3 - \omega^2 M)Q = 0 \quad (16)$$

در ادامه مسئله مقدار ویژه مرتبه دوم را می توان به صورت مسئله مقدار ویژه مرتبه اول تبدیل نمود. جزئیات این فرآیند در قسمت ضمایم ارائه شده است.

اگرچه مقدار ویژه حاصل شبیه به مسائل ارتعاش به نظر می رسد، اما باید توجه داشت که در مورد انتشار موج، مسئله مقدار ویژه دارای دو پارامتر نامعلوم عدد موج،  $(\kappa)$  و فرکانس زاویه ای،  $(\omega)$  است. با توجه به وجود دو پارامتر مجهول در رابطه (۱۶) دو رویکرد برای حل این مسئله وجود دارد. رویکرد متداول این است که مقادیر حقیقی به ترتیب صعودی به فرکانس زاویه ای، اختصاص داده می شود و در هر گام مقادیر ویژه، محاسبه می گردد و به این ترتیب منحنی های عدد موج بر حسب فرکانس حاصل می گردد. علاوه بر این، به منظور ترسیم منحنی های پراکنش<sup>۱</sup> شامل سرعت فاز<sup>۲</sup> و سرعت گروه<sup>۳</sup> بر حسب فرکانس می بایست مقادیر سرعت فاز و سرعت گروه را محاسبه نمود. سرعت انتشار هر مد هارمونیک یا هر موج را سرعت فاز،  $c_p$  می گویند و به صورت زیر تعریف می شود:

$$c_p = \frac{\omega}{\kappa_{real}} \quad (17)$$

در رابطه فوق  $\kappa_{real}$  قسمت حقیقی عدد موج است. سرعت گروه،  $c_g$ ، به عنوان سرعت گروهی همه امواج در حال حرکت در نظر گرفته می شود و به صورت زیر ارائه می شود:

$$c_g = \frac{\partial \omega}{\partial \kappa_{real}} = \frac{Q_L^T (\hat{K}_2 + 2\kappa K_3) Q_R}{2\omega Q_L^T M Q_R} \quad (18)$$

در رابطه فوق  $Q_L$  و  $Q_R$  به ترتیب بردار ویژه چپ و بردار ویژه راست می باشند که از مسئله مقدار ویژه که در رابطه (۱۶) آورده شده است، استخراج می گردد.

<sup>3</sup> Group velocity

<sup>1</sup> Dispersion curves

<sup>2</sup> Phase velocity

چیبیشف و توابع شکل سلسله مراتبی بر اساس انتگرال نرمال شده چندجمله‌ای‌های لژاندر. علاوه بر این، برای محاسبه خطا، نتایج حاصل از روش نیمه تحلیلی المان محدود با نتایج تحلیلی ارائه شده توسط نرم‌افزار "محاسب منحنی پراکنش"<sup>۳</sup> که در صفحه اصلی مرکز هوافضای آلمان<sup>۴</sup> در دسترس عمومی قرار دارد، مقایسه شده است. این نرم‌افزار از روش تحلیلی ماتریس سفتی به منظور ارائه منحنی‌های پراکنش استفاده می‌کند [۶۱].

#### ۴-۱- فرآیند مدل‌سازی و انجام محاسبات

جهت انجام مدل‌سازی همانطور که در شکل ۳ مشاهده می‌گردد، ابتدا پارامترهای در نظر گرفته شده برای انجام مدل‌سازی شامل ضخامت صفحه، خواص مکانیکی صفحه و در خصوص مواد ناهمسانگرد زاویه و چیدمان لایه‌ها به عنوان مشخصه صفحه تحت بررسی تعیین می‌گردند. در مرحله بعد شبکه بندی سطح مقطع صفحه شامل تعداد المان‌ها در راستای ضخامت صفحه و مرتبه و نوع توابع شکل انتخاب می‌شوند. پس از تکمیل داده‌های ورودی، در مرحله انجام محاسبات در ابتدا ماتریس‌های سفتی، جرم و المان با استفاده از روابط (۱۱) تا (۱۴) محاسبه می‌گردند. در ادامه ماتریس‌های سفتی و جرم کلی مطابق رابطه (۱۵) محاسبه می‌گردند. به منظور تعیین عدد موج در رابطه (۱۶) به فرکانس زاویه‌ای مقدار مشخصی اختصاص داده می‌شود و مسئله مقدار ویژه حل می‌گردد. مقادیر ویژه حاصل نشان دهنده عدد موج در فرکانس تعیین شده می‌باشند. با استفاده از عدد موج به دست آمده و استفاده از روابط (۱۷) و (۱۸) به ترتیب سرعت فاز و سرعت گروه مربوط به مدهای مختلف موج محاسبه می‌گردند. برای تعیین منحنی‌های پراکنش لازم است، حل مسئله مقدار ویژه با تعیین فرکانس‌های مختلف تکرار گردد. پس از تعیین نتایج مدل‌سازی صورت گرفته، درصد اختلاف موجود بین این مقادیر و مقادیر حاصل از روش تحلیلی محاسبه می‌گردد.

درجات آزادی نشان دهنده جابجایی گره‌های واقعی نیستند [۵۶]. آنها یا مقادیر برخی از مشتقات مرتبه بالاتر (یا ترکیبی خطی از این مشتقات) پاسخ در نقطه خاصی از المان هستند، یا صرفاً ضرایب وزنی توابع شکل دیگر هستند [۵۷]. در ادامه به مدل‌سازی بر اساس توابع ارائه شده در این بخش خواهیم پرداخت.

#### ۴- مدل‌سازی عددی و تحلیل نتایج

به منظور بررسی تأثیر استفاده از توابع شکل سلسله مراتبی بر دقت و هزینه محاسباتی روش نیمه تحلیلی المان محدود، رویکردهای پالایش اچ<sup>۱</sup> و پالایش پی<sup>۲</sup> با استفاده از توابع شکل مرتبه بالا برای یک صفحه همسانگرد و یک صفحه ناهمسانگرد در نظر گرفته شده است. در رویکرد پالایش اچ، توابع شکل مرتبه دوم که در اکثر قریب به اتفاق پژوهش‌های پیشین به کار گرفته شده است، مرتبه توابع شکل در هر المان ثابت در نظر گرفته شده و در هر مرحله تعداد المان‌ها افزایش می‌یابد. از سوی دیگر، برای رویکرد پالایش پی تعداد ثابتی المان در ضخامت صفحه برای مواد همسانگرد و در هر لایه برای صفحات ناهمسانگرد در نظر گرفته می‌شود و مرتبه تابع شکل در هر مرحله افزایش می‌یابد. برای فراهم نمودن امکان مقایسه ساده تر نتایج، نتایج حاصل از هر یک از رویکردهای پالایش اچ و پی در درجات آزادی یکسان با یکدیگر مقایسه شده است. روش‌های مختلف در نظر گرفته شده در بررسی حاضر بدین شرح است:

الف- رویکرد پالایش اچ با استفاده از توابع شکل استاندارد مرتبه دوم بر اساس چند جمله‌ای لاگرانژ با توزیع گره‌ای مساوی

ب- رویکرد پالایش پی با استفاده از توابع شکل مرتبه بالا (  $p > 2$  )

در رویکرد پالایش پی توابع شکلی که مورد بررسی قرار گرفته اند عبارتند از: توابع شکل استاندارد بر اساس چند جمله‌ای‌های لاگرانژ با توزیع گره‌ای مساوی، توابع شکل طیفی بر اساس چند جمله‌ای لاگرانژ با توزیع گره‌ای گاوس-لاباتو-لژاندر، توابع شکل طیفی بر اساس چند جمله‌ای‌های لاگرانژ با توزیع گره‌ای گاوس-لاباتو-لژاندر و همچنین توزیع گره‌ای گاوس-لوباتو-

<sup>3</sup> Dispersion Calculator

<sup>4</sup> Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt (DLR)

<sup>1</sup> h-refinement approach

<sup>2</sup> p-refinement approach

نیمه تحلیلی المان محدود، که از المان‌های یک بعدی، با سه درجه آزادی در هر گره استفاده می‌کند، را می‌توان برای مدل‌سازی انتشار موج در صفحه استفاده نمود. در مورد مواد همسانگرد، به دلیل امکان جداسازی امواج برشی که شامل جابجایی در امتداد عرض صفحه (جهت  $y$ ) است، از امواج لمب می‌توان هر یک از این امواج را جداگانه مطالعه نمود. بنابراین، اگر بخواهیم فقط امواج لمب را در نظر بگیریم، می‌توان از جابجایی‌ها در جهت  $y$  در هر گره صرف‌نظر نمود.

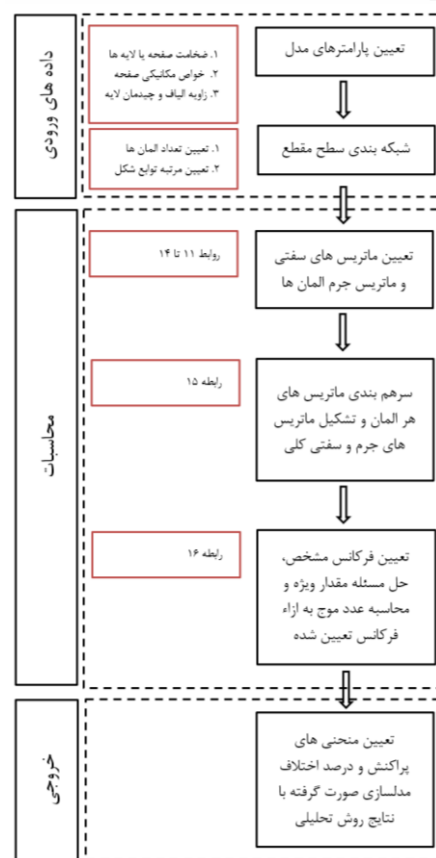
بررسی همگرایی با استفاده از رویکردهای مختلف اشاره شده و توابع شکل متفاوت در شکل ۴ ارائه شده است. برای رویکرد پالایش پی، یک المان در امتداد ضخامت صفحه در نظر گرفته شده و مرتبه تابع شکل در هر مرحله افزایش می‌یابد. این در حالی است که برای رویکرد پالایش اچ، توابع شکل مرتبه دوم در هر المان در نظر گرفته شده و تعداد المان‌ها در هر مرحله افزایش می‌یابد. تعداد گره‌ها یا نقاط در نظر گرفته شده در طول ضخامت را می‌توان از رابطه زیر محاسبه نمود:

$$(23) \quad \text{تعداد گره} = (1 - \text{تعداد المان} \times \text{درجه تابع شکل})$$

همچنین به منظور بررسی دقیق‌تر تاثیر انواع مختلف توابع شکل بر روی دقت و کارآمدی روش نیمه تحلیلی المان محدود، رابطه اختلاف زیر در نظر گرفته شده است:

$$(24) \quad \text{درصد اختلاف} = \left| \frac{K_{DC} - K_{SAFE}}{K_{DC}} \right| \times 100$$

که در آن  $K_{DC}$  عدد موجی است که با استفاده از نرم افزار "محاسب منحنی‌های پراکنش" به دست می‌آید و  $K_{SAFE}$  عدد موجی است که با استفاده از روش نیمه تحلیلی المان محدود به دست می‌آید. از آنجا که دو مدل اول  $S_0$ ،  $A_0$  عمدتاً در مطالعات در نظر گرفته می‌شوند و همچنین خطا در مدهایی که در فرکانس‌های بالاتر ظاهر می‌شوند، علاوه بر خطای معمول تحت تأثیر دقت فرکانس‌های قطع است، تنها دو مدل



شکل ۳- الگوریتم روند انجام مدل‌سازی و حصول نتایج

#### ۴-۲- مورد اول: ماده همسانگرد

به عنوان اولین مورد، یک صفحه فولادی با ضخامت یک میلی‌متر در نظر گرفته شده است. خواص مکانیکی صفحه در نظر گرفته شده در فرآیند مدل‌سازی را می‌توان در جدول ۱ مشاهده نمود.

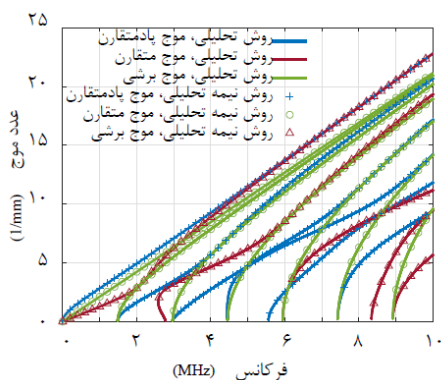
جدول ۱- خواص مکانیکی صفحه فولادی

چگالی	ضریب پواسون	مدول یانگ (GPa)
۷۸۵۰	۰٫۳	۱۸۰

در مدل‌سازی صورت گرفته فرض بر این است که موج در طول صفحه در راستای محور  $x$  منتشر می‌شود، محور  $z$  در امتداد ضخامت صفحه و محور  $y$  در راستای عرض صفحه در نظر گرفته شده است. همچنین فرض بر آن است که عرض صفحه نامحدود است. با توجه به مسئله تحت بررسی، روش یک بعدی



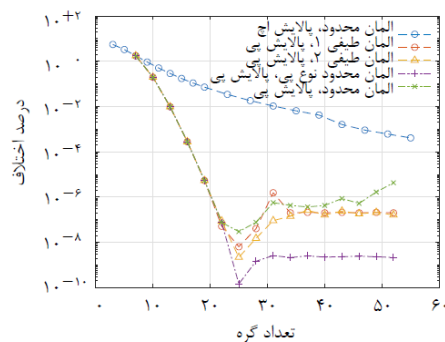
منحنی‌های پراکنش<sup>۱</sup> به صورت خطوط پیوسته ترسیم شده اند، در حالی که نتایج به دست آمده با استفاده از روش نیمه تحلیلی ارائه شده با علائم متمایز شده‌اند. در این شکل، امواج پاد متقارن لَمب<sup>۱</sup> با «+»، امواج متقارن لَمب<sup>۲</sup> با «Δ» و امواج برشی<sup>۳</sup> با «o» از یکدیگر تمیز داده شده‌اند. علاوه بر آن همانطور که در شکل ۵ مشاهده می‌گردد، موج‌های متقارن، پادمقارن و همچنین برشی دارای مدهای مختلفی هستند که در فرکانس‌های مختلفی ظاهر می‌گردند؛ از این رو بر روی نمودار چندین منحنی مختلف مشاهده می‌گردد که با یک رنگ نشان داده شده‌اند. از نتایج ارائه شده می‌توان به خوبی مشاهده کرد که نتایج مدلسازی صورت گرفته توسط روش نیمه تحلیلی المان محدود و نتایج ارائه شده توسط نرم افزار به کار گرفته شده به خوبی با یکدیگر مطابقت دارند.



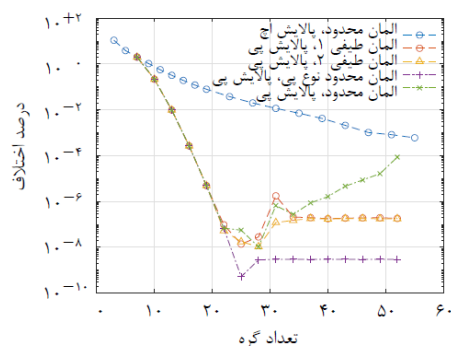
شکل ۵- منحنی عدد موج بر حسب فرکانس

اولین نکته‌ای که می‌توان به وضوح در شکل ۴ مشاهده کرد، این است که رویکرد پالایش پی با استفاده از توابع شکل مرتبه بالا عملکرد بسیار بهتری نسبت به رویکرد پالایش اچ نشان می‌دهد که در روش المان محدود به کار می‌رود.

نکته مهم بعدی که می‌توان از مطالعه همگرایی به آن اشاره کرد این است که توابع شکل سلسله مراتبی بر اساس انتگرال نرمال شده چندجمله‌ای‌های لژاندر عملکرد بهتری نسبت به توابع شکل طیفی بر اساس چند جمله‌ای‌های لاگرانژ با گره گاوس-لوباتو-چبیشف و گاوس-لاباتو-لژاندر نشان می‌دهند که به ترتیب با المان طیفی ۱ و المان طیفی ۲ بر روی شکل نشان



الف) مد اول



ب) مد دوم

شکل ۴- منحنی‌های همگرایی مد اول و دوم به دست آمده با استفاده از توابع شکل ذکر شده همراه با تکنیک پالایش مشخص شده در صفحه فولادی

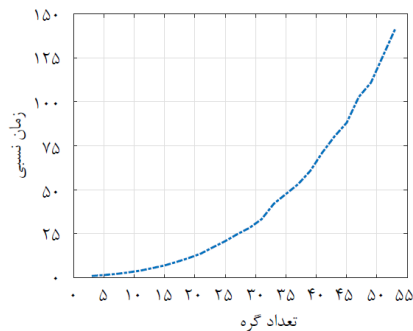
دو مد اول در اینجا برای مقایسه در نظر گرفته شده است. خطای موجود در فرکانس قطع مدهای بالاتر و جابه جایی این منحنی به سمت راست دستگاه مختصات متعاقباً مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

همانطور که در شکل ۵ مشاهده می‌شود، به منظور بررسی صحت مدلسازی صورت گرفته و با توجه به تعداد گره‌های لازم به منظور حصول همگرایی در مدلسازی با روش نیمه تحلیلی المان محدود با استفاده از توابع شکل مرتبه بالا، منحنی‌های پراکنندگی در ورق فولادی فوق با استفاده از روش نیمه تحلیلی المان محدود، با منحنی‌های حاصل از نرم افزار<sup>۱</sup> محاسب منحنی‌های پراکنش<sup>۲</sup> تا فرکانس ده مگا هرتز مقایسه شده است. نتایج به دست آمده با استفاده از نرم افزار<sup>۱</sup> محاسب

<sup>3</sup> shear waves

<sup>1</sup> anti-symmetric Lamb waves

<sup>2</sup> symmetric Lamb waves



شکل ۶- زمان صرف شده نسبی مدل‌سازی بر اساس تعداد گره‌های در نظر گرفته شده در مدل‌سازی

علاوه بر آن، در شکل ۴ می‌توان مشاهده نمود، پس از همگرایی پاسخ به یک خطای مشخص، به ویژه در مورد توابع شکل سلسله مراتبی، مدل‌سازی پایداری خوبی را نشان می‌دهد و با افزایش مرتبه تابع شکل، هیچ نوسانی در خطا مشاهده نمی‌شود و خطا به سمت ناپایداری پیش نمی‌رود. این در حالی است در مدل‌سازی با استفاده از توابع شکل استاندارد

داده شده است. عملکرد بهتر این روش از دو جهت قابل بررسی است. در نگاه اول می‌توان مشاهده نمود این استفاده از توابع شکل مرتبه بالا سلسله مراتبی دقت بالاتری را در مقایسه با سایر توابع شکل در نظر گرفته شده با همان تعداد درجات آزادی نشان می‌دهد. این بدین معناست که در صورت در نظر گرفتن میزان دقت مشخص در مدل‌سازی با استفاده از توابع شکل مرتبه بالا با تعداد درجات آزادی کمتر می‌توان به نتیجه مطلوب رسید. به منظور روشن شدن اهمیت این موضوع، نسبت زمان محاسبات لازم برای به دست آوردن نتایج با در نظر گرفتن تعداد درجات آزادی مشخص نسبت به زمان لازم برای حصول نتایج با در نظر گرفتن تنها یک المان با تابع شکل مرتبه ۲ به عنوان زمان مرجع محاسبه شده است و در شکل ۶ ارائه شده است. به روشنی مشاهده می‌گردد که زمان نسبی مدل‌سازی با افزایش تعداد درجات آزادی و همچنین تعداد گره‌ها به شدت افزایش می‌یابد.

جدول ۲- خواص مکانیکی تک لایه الاستیک AS4/3502

$E_1$ (GPa)	$E_2$ (GPa)	$E_3$ (GPa)	$G_{12}$ (GPa)	$G_{13}$ (GPa)	$G_{23}$ (GPa)	$\nu_{13}$	$\nu_{23}$	$\rho$ (Kg/m <sup>3</sup> )
۱۲۷/۶	۱۱/۳	۱۱/۳	۵/۹۷	۳/۷۵	۳/۷۵	۰/۳	۰/۳	۱۵۷۸

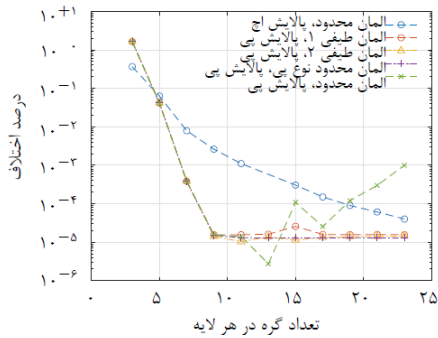
در خطای فرکانس‌های برش نتایج حاصل از مدل‌سازی به روش نیمه تحلیلی المان محدود این مقادیر با مقادیر دقیق حاصل از حل تحلیلی مقایسه شده‌اند. مقادیر دقیق فرکانس‌های قطع را می‌توان با میل عدد موج به سمت صفر در روابط معادله ریلی-لمب محاسبه نمود. روابط فرکانس‌های قطع برای شکل مدهای متقارن به صورت ذیل ارائه می‌گردند [۵۹]:

$$f_{cut-off} \cdot d = nc_T, n = 1, 2, \dots \quad (25)$$

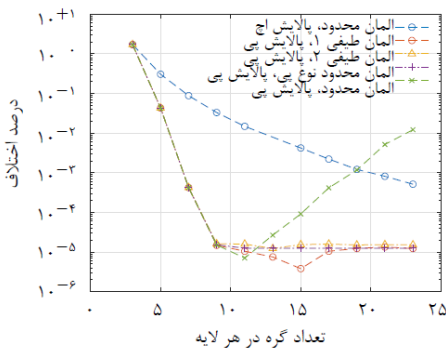
$$f_{cut-off} \cdot d = \frac{nc_L}{2}, n = 1, 2, \dots \quad (26)$$

که در روابط فوق  $c_T$  سرعت عرضی موج و  $c_L$  سرعت موج طولی،  $d$  ضخامت صفحه و  $f_{cut-off}$  فرکانس قطع است؛ همچنین روابط مربوط به شکل مدهای پادمقارن عبارتند از:

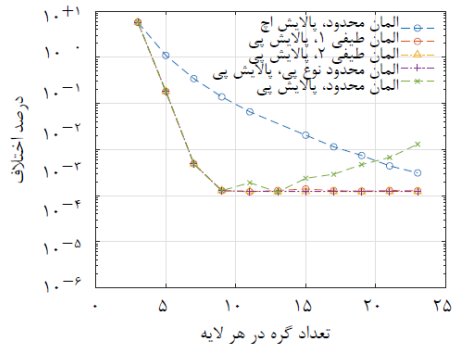
بر اساس چند جمله‌ای‌های لاگرانژ با توزیع گره‌ای مساوی با افزایش مرتبه تابع شکل مدل‌سازی به سمت واگرایی پیش می‌رود. نکته دیگری که قابل ذکر است این است که سایر توابع شکل مرتبه بالا در نظر گرفته شده تقریباً عملکرد مشابهی را در روش نیمه تحلیلی المان محدود یک بعدی نشان می‌دهند. همانطور که پیش از این به آن اشاره شد، مورد دیگری که بر درصد خطا به خصوص در مدهای بالاتر تاثیر دارد و تا کنون در مطالعات صورت گرفته به آن پرداخته نشده است، بررسی خطا در محاسبه فرکانس‌های قطع است. استفاده از تعداد ناکافی گره باعث ایجاد خطا در مقادیر فرکانس برش و در نتیجه تغییر در منحنی‌های پراکنش مدهای مربوطه می‌شود. به منظور بررسی دقیق تر این موضوع، فرکانس قطع مدهایی که در محدوده فرکانس تا ده مگا هرتز ظاهر می‌شوند، در شکل ۷ ارائه شده است. به منظور بررسی تاثیر درجات آزادی مسئله



الف) مد اول



ب) مد دوم

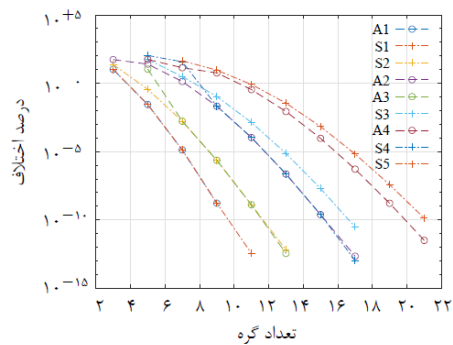


ب) مد سوم

$$f_{cut-off} \cdot d = \frac{nc_T}{2}, n = 1, 2, \dots \quad (27)$$

$$f_{cut-off} \cdot d = nc_L, n = 1, 2, \dots \quad (28)$$

درصد خطا در تخمین فرکانس‌های قطع برای حالت‌های مختلف در شکل ۵ ارائه شده است. به منظور استخراج این منحنی‌ها یک المان با توابع شکل سلسله مراتبی استفاده شده است. همانطور که مشاهده می‌گردد، عموماً درصد خطا در تخمین فرکانس‌های قطع در مدهای بالاتر نسبت به مدهای پایین‌تر بیشتر است؛ همچنین مشاهده می‌شود که درصد خطا در مدهایی که در فرکانس‌های پایین‌تر ظاهر می‌شوند با افزایش تعداد گره‌ها با سرعت بیشتری کاهش می‌یابد. منحنی‌های ارائه شده نشان می‌دهد که درجات آزادی در نظر گرفته شده در مدل‌سازی به ویژه بر دقت مدهای بالاتر تأثیر دارد. این عدم دقت به ویژه در اطراف فرکانس قطع هر مد بیشتر است و باعث می‌شود، منحنی‌های پراکندگی به سمت راست جابجا شوند و فرکانس‌های قطع همیشه بالاتر از مقادیر واقعی تخمین زده می‌شوند.



شکل ۷- درصد خطا فرکانس قطع برای مد های مختلف با افزایش تعداد گره ها

#### ۳-۴- مورد دوم: ماده ناهمسانگرد

در این مورد یک صفحه مرکب ۶ لایه که به صورت  $[0/\pm 60]$  بر روی یکدیگر قرار دارند، در نظر گرفته شده است. خواص مواد تک لایه در نظر گرفته شده در جدول ۲ ارائه شده است.

شکل ۸- منحنی‌های درصد خطا بر حسب تعداد گره در لایه با استفاده از روش‌های ذکر شده در صفحه مرکب با ۶ لایه ناهمسانگرد با ترتیب لایه به صورت  $[0/\pm 60]$ .

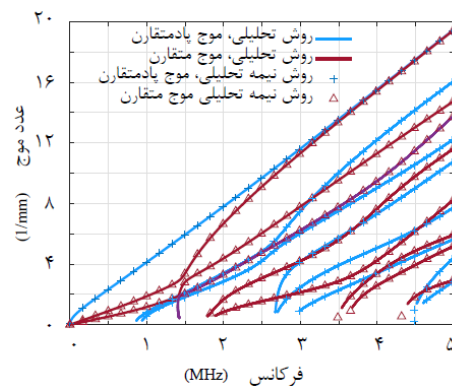
برای محاسبه ماتریس‌های سفتی برای هر لایه، ماتریس سفتی در دستگاه مختصات در نظر گرفته شده برای کل صفحه مطابق شکل ۱ باید محاسبه شود. نحوه محاسبه این ماتریس در قسمت دوم ضمائم ارائه شده است.

برده شده اکنون تقریباً یکسان به نظر می‌رسد. این عمدتاً به دلیل افزایش درجات آزادی است که توسط تعداد لایه‌ها دیکته می‌شود و به طور کلی تعداد المان‌های زیاد باعث می‌گردد تا عملکرد هر یک از این توابع شکل به روشنی قابل تفکیک از مابقی روش‌ها نباشد. با این وجود، همانطور که مشاهده می‌شود، توابع شکل سلسله مراتبی پس از همگرا شدن، با افزایش مرتبه تابع شکل، مقدار خطای ثابتی را نشان می‌دهند و پایدارتر از مابقی روش‌ها است.

### ۵- نتیجه گیری

در مقاله حاضر تأثیر استفاده از توابع شکل سلسله مراتبی در روش نیمه تحلیلی المان محدود و مقایسه عملکرد و تأثیر آن بر این روش مورد بررسی قرار گرفت. نتایج شبیه‌سازی ارائه شده در اینجا نشان می‌دهد که توابع شکل مرتبه بالا که در روش المان محدود طیفی و المان محدود نسخه پی استفاده می‌شوند، عملکرد بسیار خوبی در بهبود کارایی و کاهش هزینه محاسباتی این روش از خود نشان می‌دهند. مقایسه تأثیر استفاده از این روش‌ها با توابع شکل مرتبه پایین که در روش المان محدود به کار گرفته می‌شوند به خوبی موید این امر می‌باشد. علاوه بر این با توجه به بررسی‌های صورت گرفته و مقایسه میان توابع شکل مرتبه بالا می‌توان بیان نمود که از بین روش‌های در نظر گرفته شده توابع شکل سلسله مراتبی با در نظر گرفتن تعداد درجات آزادی یکسان دقت بالاتری در مدل‌سازی دارد و همچنین، با افزایش مرتبه تابع شکل، میزان خطا پایدار باقی می‌ماند؛ بنابراین می‌توان عنوان نمود با بهره‌گیری از توابع شکل مرتبه بالا در روش نیمه تحلیلی المان محدود، کارایی این روش در مدل‌سازی انتشار موج افزایش می‌یابد؛ در نتیجه، این روش تبدیل به گزینه بهتری برای به ویژه در مسائل عیب‌یابی و شناسایی خواص مواد تبدیل می‌گردد، چرا که در این روش‌ها نیاز به تکرار مدل‌سازی عددی وجود دارد. مورد دیگری که در پژوهش حاضر به آن پرداخته شده است بررسی خطای موجود در تخمین فرکانس‌های قطع است. همانطور که انتظار می‌رود با افزایش فرکانس دقت منحنی مدل‌سازی و پراکندگی کاهش می‌یابد، بنابراین در فرکانس‌های بالاتر تعداد گره‌ها باید افزایش یابد؛ بنابراین تعداد نامناسب گره‌ها منجر به تغییر فرکانس‌های قطع تخمینی می‌شود و برای بهبود دقت در روش معمول نیمه تحلیلی المان محدود

در این مورد همان رویکرد صفحه همسانگرد در نظر گرفته شده است. برای مدل‌سازی در رویکرد پالایش پی، یک المان در هر لایه در نظر گرفته شده و مرتبه تابع شکل در هر مرحله افزایش می‌یابد. علاوه بر این، برای رویکرد پالایش اچ مانند قبل، توابع شکل مرتبه دوم برای هر المان در نظر گرفته شده است. منحنی‌های درصد خطا بر حسب تعداد گره در لایه به دست آمده با استفاده از روش‌های ذکر شده در شکل ۸ ارائه شده است. از منحنی‌های موجود می‌توان مشاهده نمود که با در نظر گرفتن ۸ گره در هر لایه در روش‌هایی که از توابع شکل مرتبه بالا در آنها استفاده می‌شود، همگرایی حاصل می‌گردد. با در نظر گرفتن تعداد گره‌ها جهت حصول همگرایی و بررسی صحت مدل‌سازی صورت گرفته، همانطور که در شکل ۹ مشاهده می‌شود، منحنی‌های پراکندگی با استفاده از روش نیمه تحلیلی المان محدود و نرم افزار "محاسب منحنی پراکندگی" ارائه شده است. در این مورد، امواج لمب از امواج برشی جدا ناپذیرند، بنابراین حالت‌های موج را می‌توان به حالت‌های متقارن و پادمقارن تقسیم کرد که به ترتیب بر روی شکل با « $\Delta$ » و «+» نشان داده شده‌اند. منحنی‌های پراکندگی مشتق شده به خوبی با منحنی‌های به دست آمده با استفاده از روش تحلیلی مطابقت دارند.



شکل ۹- منحنی عدد موج بر حسب فرکانس برای صفحه مرکب ۶ لایه با ترتیب لایه به صورت  $S[\pm 60/0]$

همانطور که در شکل ۸ نشان داده شده است، خطای حاصل با استفاده از توابع شکل مختلف عمدتاً به همان نتیجه گیری در مورد مواد همسانگرد مطابقت دارد. با این حال مشاهده می‌شود که عملکرد توابع شکل مختلف مربوط به روش‌های به کار

$$\hat{K}_2 = iT^T K_2 T \quad (33)$$

و همچنین ماتریس T برای مواد ناهمسانگرد به صورت

$$T = \begin{bmatrix} i & & & & & \\ & 1 & & & & 0 \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & i & \\ 0 & & & & & 1 \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (34)$$

و برای مواد همسانگرد و با صرفنظر از جهت y به صورت

$$T = \begin{bmatrix} i & & & & & \\ & 1 & & & & 0 \\ & & \ddots & & & \\ & & & i & & \\ 0 & & & & & 1 \end{bmatrix} \quad (35)$$

است.

۶-۲- ماتریس سفتی ماده ناهمسانگرد و ماتریس انتقال ماتریس سفتی در دستگاه مختصات در نظر گرفته شده برای کل صفحه مطابق شکل ۱ باید محاسبه شود. این ماتریس به صورت زیر حاصل می‌شود [۶۳]:

$$[\bar{C}] = [R][C][R]^T \quad (36)$$

که در آن [C] و [R] به ترتیب ماتریس سفتی در دستگاه مختصات ماده ناهمسانگرد و ماتریس انتقال هستند. مولفه های ماتریس سفتی برای ماده ناهمسانگرد در نظر گرفته شده را می‌توان بر حسب پنج ثابت مستقل مطابق ماتریس ارائه شده در رابطه (۳۷) بیان کرد؛ همچنین ماتریس انتقال و ترانهاده آن در رابطه (۳۸) و (۳۹) ارائه شده است [۶۴]:

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(C_{22} - C_{23})}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 0 & 0 & 0 & -2\sin 2\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & 0 & 0 & 0 & 2\sin 2\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ \sin\theta\cos\theta & -\sin\theta\cos\theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix} \quad (38)$$

که از توابع شکل مرتبه پایین استفاده می‌گردد می‌بایستی تعداد درجات آزادی افزایش یابد که این امر همانطور که اشاره شد، باعث افزایش هزینه محاسباتی می‌گردد؛ بنابراین به منظور مدلسازی در فرکانس‌های بالا نیز استفاده از توابع شکل مرتبه بالا توجیه منطقی دارد و می‌توان از آنها برای کاهش هزینه های محاسباتی و افزایش دقت استفاده نمود.

## ۶- ضمایم

۶-۱- تبدیل مسئله مقدار ویژه مرتبه ۲ به مسئله مقدار ویژه مرتبه ۱

با ضرب مسئله مقدار ویژه مرتبه دوم در ماتریس T و سپس در نظر گرفتن یک متغیر جدید  $U = \kappa Q$ ، می‌توان مسئله مقدار ویژه مرتبه دوم را به صورت زیر ارائه نمود [۱۹]:

$$A\hat{Q} - \kappa B\hat{Q} = 0 \quad (29)$$

که در این رابطه

$$\hat{Q} = \begin{Bmatrix} Q \\ \kappa Q \end{Bmatrix} \quad (30)$$

و

$$A = \begin{bmatrix} 0 & K_1 - \omega^2 M \\ K_1 - \omega^2 M & \hat{K}_2 \end{bmatrix} \quad (31)$$

و

$$B = \begin{bmatrix} K_1 - \omega^2 M & 0 \\ 0 & K_2 \end{bmatrix} \quad (32)$$

و

$$[\mathbf{R}]^T = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 0 & 0 & 0 & \sin\theta\cos\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & 0 & 0 & 0 & -\sin\theta\cos\theta \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ -\sin 2\theta & \sin 2\theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix} \quad (39)$$

[13] Gopalakrishnan S (2008) Spectral finite element method, wave propagation, diagnostics and control in anisotropic and inhomogeneous structures. 1st edn. Springer, London.

[14] Zienkiewicz OC (1971) The finite element method in engineering science. McGraw-Hill, London, New York.

[15] Gavric L (1995) Computation of propagative waves in free rail using a finite element technique. *J Sound Vib* 185(3):531–543.

[16] Hayashi T, Song WJ, Rose JL (2003) Guided wave dispersion curves for a bar with an arbitrary cross-section, a rod and rail example. *Ultrasonics* 41(3):175–183.

[17] Damjanovic V, Weaver RL (2004) Forced response of a cylindrical waveguide with simulation of the wavenumber extraction problem. *J Acoust Soc Am* 115(4):1582-91.

[18] Gravenkamp H, Birk C, Song C (2015) Simulation of elastic guided waves interacting with defects in arbitrarily long structures using the scaled boundary finite element method. *J Comput Phys* 295:438–455.

[19] Bartoli I, Marzani A, di Scalea FL, Viola E (2006) Modeling wave propagation in damped waveguides of arbitrary cross-section. *J Sound Vib* 295(3):685–707.

[20] Hayashi T, Tamayama C, Murase M (2006) Wave structure analysis of guided waves in a bar with an arbitrary cross-section. *Ultrasonics* 44(1):17–24.

[21] Loveday PW (2007) Analysis of piezoelectric ultrasonic transducers attached to waveguides using waveguide finite elements. *IEEE Trans Ultrason Ferroelectr Freq Control* 54(10):2045–51

[22] Loveday PW (2008) Simulation of piezoelectric excitation of guided waves using waveguide finite elements. *IEEE Trans Ultrason Ferroelectr Freq Control* 55(9):2038–45

[23] Coccia S, Bartoli I, Marzani A, di Scalea FL, Salamone S, Fateh M (2011) Numerical and experimental study of guided waves for detection of defects in the rail head. *NDT E Int* 44(1):93–100

[24] Volovoi VV, Hodges DH, Berdichevsky VL, Sutyrin VG (1998) Dynamic dispersion curves for non-homogeneous, anisotropic beams with cross-sections of arbitrary geometry. *J Sound Vib* 215(5):1101–1120

## مراجع

[1] Kazys RJ, Sestoke J, Zukauskas E (2022) Numerical Investigation of Excitation of Various Lamb Waves Modes in Thin Plastic Films. *Appl Sci* 12(2):849.

[۲] صمیمیان تهرانی ش، صفریور پ، بابایی م، کیارسی ف. (۱۴۰۰)، "شناسایی ترک‌های یک و چندگانه در پوسته استوانه‌ای با استفاده از آنالیز مودال و تبدیل موجک" مجله مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها، ۱۲(۲)، صفحه ۱۳–۲۸

[3] Willberg C, Duczek S, Vivar-Perez JM, Ahmad ZAB (2015) Simulation methods for guided wave-based structural health monitoring: a review. *Appl Mech Rev* 67(1): 010803.

[4] Astaneh AV, Guddati MN (2017) Dispersion analysis of composite acousto-elastic waveguides. *Compos B Eng* 130: 200–216.

[5] Joseph R, Li L, Haider MF, Giurgiutiu V (2019) Hybrid SAFE-GMM approach for predictive modeling of guided wave propagation in layered media. *Eng Struct* 193:194–206.

[6] Su Z, Ye L, Lu Y. (2006) Guided Lamb waves for identification of damage in composite structures: a review. *J Sound Vib* 295(3):753–780.

[7] Mitra M, Gopalakrishnan S (2016) Guided wave based structural health monitoring: a review. *Smart Mater Struct* 25(5):05300.

[8] Bathe KJ (2006) Finite element procedures. 1st edn. Prentice Hall, United States of America.

[9] Gopalakrishnan S (2008) Spectral finite element method, wave propagation, diagnostics and control in anisotropic and inhomogeneous structures. 1st edn. Springer, London.

[10] Gravenkamp H, Birk C, Song C (2015) Simulation of elastic guided waves interacting with defects in arbitrarily long structures using the scaled boundary finite element method. *J Comput Phys* 295:438–455.

[11] Chang Y, Cao W, Li N, Liu Z, Li F, Zeng L, Wei Q, Liu X (2023) Study on Propagation Characteristics of Guided Waves in Plate Structure Via Semi-Analytical Wavelet Finite Element Method. *IEEE Trans Instrum Meas*.

[12] Aalami B (1973) Waves in prismatic guides of arbitrary cross section. *J Appl Mech* 40(4):1067-1072

- [39] Cui R, di Scalea FL (2019) On the identification of the elastic properties of composites by ultrasonic guided waves and optimization algorithm. *Compos Struct* 223:110969.
- [40] Treysse F, Nguyen KL, Bonnet-BenDhia AS, Hazard C (2014) Finite element computation of trapped and leaky elastic waves in open stratified waveguides. *Wave Motion* 51(7):1093–1107
- [41] Inoue D, Hayashi T (2015) Transient analysis of leaky Lamb waves with a semianalytical finite element method. *Ultrasonics* 62:80–88
- [42] Duan W, Kirby R, Mudge P, Gan TH (2016) A one dimensional numerical approach for computing the eigen modes of elastic waves in buried pipelines. *J Sound Vib* 384:177–193
- [43] Hayashi T, Inoue D (2014) Calculation of leaky Lamb waves with a semi-analytical finite element method. *Ultrasonics* 54(6):1460–1469
- [44] Loveday PW (2009) Semi-analytical finite element analysis of elastic waveguides subjected to axial loads. *Ultrasonics* 49(3):298–300.
- [45] Mazzotti M, Marzani A, Bartoli I, Viola E (2012) Guided waves dispersion analysis for prestressed viscoelastic waveguides by means of the SAFE method. *Int J Solids Struct* 49(18):2359–2372.
- [46] Setshedi II, Loveday PW, Long CS, Wilke DN (2019) Estimation of rail properties using semi-analytical finite element models and guided wave ultrasound measurements. *Ultrasonics* 96:240–252.
- [47] Loveday PW, Long CS, Ramatlo DA (2018) Mode repulsion of ultrasonic guided waves in rails. *Ultrasonics* 84:341–349.
- [48] Zuo P, Yu X, Fan Z (2017) Numerical modeling of embedded solid waveguides using SAFE-PML approach using a commercially available finite element package. *NDT E Int* 90:11–23.
- [49] Zuo P, Fan Z (2017) SAFE-PML approach for modal study of waveguides with arbitrary cross sections immersed in inviscid fluid. *J Sound Vib* 406:181–196.
- [50] Onipede O, Dong SB, Kosmatka JB (1994) Natural vibrations and waves in pretwisted rods. *Compos Eng* 4(5):487–502.
- [51] Treysse F, Laguerre L (2010) Investigation of elastic modes propagating in multi-wire helical waveguides. *J Sound Vib* 329(10):1702–1716.
- [52] Mazzotti M, Marzani A, Bartoli I (2014) Dispersion analysis of leaky guided waves in fluid loaded waveguides of generic shape. *Ultrasonics* 54(1):408–418.
- [53] Mazzotti M, Bartoli I, Marzani A, Viola E (2013) A coupled SAFE-2.5D BEM approach for the dispersion analysis of damped leaky guided waves in embedded waveguides of arbitrary cross-section. *Ultrasonics* 53(7):1227–1241.
- [25] Han X, Liu GR, Xi ZC, Lam KY (2002) Characteristics of waves in a functionally graded cylinder. *Int J Numer Methods Eng* 53(3):653–76.
- [26] Marzani A (2008) Time-transient response for ultrasonic guided waves propagating in damped cylinders. *Int J Solids Struct* 45(25):6347–6368.
- [27] Mazzotti M, Bartoli I, Miniaci M, Marzani A (2016) Wave dispersion in thin-walled orthotropic waveguides using the first order shear deformation theory. *Thin-Walled Struct* 103:128–140.
- [28] Hladky-Hennion AC (1996) Finite element analysis of the propagation of acoustic waves in waveguides. *J Sound Vib* 194(2):119–136
- [29] Predoi MV, Castaings M, Hosten B, Bacon C (2007) Wave propagation along transversely periodic structures. *J Acoust Soc Am* 121(4):1935–44.
- [30] Treysse F. (2008) Elastic waves in helical waveguides. *Wave Motion* 45(4):457–470
- [31] Cong M, Wu X, Liu R. (2017) Dispersion analysis of guided waves in the finned tube using the semianalytical finite element method. *J Sound Vib* 401:114–126
- [32] Mazuch T (1996) Wave dispersion modelling in anisotropic shells and rods by the finite element method. *J Sound Vib* 198(4):429–438.
- [33] Duan W, Gan TH (2019) Investigation of guided wave properties of anisotropic composite laminates using a semi-analytical finite element method. *Compos B Eng* 173:106898.
- [34] Tian Deng Q, chun Yang Z (2011) Propagation of guided waves in bonded composite structures with tapered adhesive layer. *Appl Math Model* 35(11):5369–5381.
- [35] Kalgutkar AP, Banerjee S (2022) Semi-Analytical Finite Element Method for the Analysis of Guided Wave Dispersion in the Pre-stressed Composite Plates. *Proceedings of the 12th Structural Engineering Convention, SEC 2022* 1(5)
- [36] Xiao D, Han Q, Liu Y, Li C (2016) Guided wave propagation in an infinite functionally graded magneto-electro-elastic plate by the Chebyshev spectral element method. *Compos Struct* 153:704–711
- [37] Marzani A, Viola E, Bartoli I, di Scalea FL, Rizzo P (2008) A semi-analytical finite element formulation for modeling stress wave propagation in axisymmetric damped waveguides. *J Sound Vib* 318(3):488–505.
- [38] Mei H, Giurgiutiu V (2018) Predictive 1D and 2D guided-wave propagation in composite plates using the SAFE approach. *Health Monitoring of Structural and Biological Systems XII., International Society for Optics and Photonics, SPIE 10600:215–225*

- [59] Duczek S, Gravenkamp H (2019) Mass lumping techniques in the spectral element method: On the equivalence of the row-sum, nodal quadrature, and diagonal scaling methods. *Comput Methods Appl Mech Eng* 353:516–69
- [60] Vu TH, Deeks AJ (2006) Use of higher-order shape functions in the scaled boundary finite element method. *Int J Numer Methods Eng* 65(10):1714–33.
- [61] Huber AMA, Sause MGR (2018) Classification of solutions for guided waves in anisotropic composites with large numbers of layers. *J Acoust Soc Am* 144(6):3236–51.
- [62] Rose JL (2014) *Ultrasonic Guided Waves in Solid Media*. Cambridge University Press.
- [63] Reddy JN (2003) *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis*. 2nd edn. CRC Press, Boca Raton.
- [64] Dvorak G (2014) *Micromechanics of Composite Materials*. Springer, Dordrecht.
- [54] Nguyen KL, Treysse F, Hazard C (2015) Numerical modeling of three-dimensional open elastic waveguides combining semi-analytical finite element and perfectly matched layer methods. *J Sound Vib* 344:158–178
- [55] Kalkowski MK, Muggleton JM, Rustighi E (2018) Axisymmetric semi-analytical finite elements for modelling waves in buried/submerged fluid-filled waveguides. *Comput Struct* 196:327–340
- [56] Xiao D, Han Q, Liu Y, Li C (2016) Guided wave propagation in an infinite functionally graded magneto-electro-elastic plate by the Chebyshev spectral element method. *Comput Struct* 153:704–711.
- [57] Treysse F (2016) Spectral element computation of high-frequency leaky modes in three-dimensional solid waveguides. *J Comput Phys* 314:341–354.
- [58] Seyfaddini F, Nguyen VH (2019) NURBS-enriched semi-analytical finite element method (SAFE) for calculation of wave dispersion in heterogeneous waveguides, 24e Congrès Français de Mécanique, Brest, France.