



## کنترل دمای بافت در معادله انتقال حرارت زیستی با استفاده از روش گرادیان مزدوج

فهیمه داودی<sup>۱</sup>، حجت احسنی تهرانی<sup>۲\*</sup> و محسن نظری<sup>۳</sup><sup>۱</sup> دانشجوی دکتری، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی شاهرود، ایران<sup>۲</sup> دانشیار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی شاهرود، ایران<sup>۳</sup> دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، ایران

یادداشت تحقیقاتی، تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۱۰/۰۷؛ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۲/۰۱/۱۹؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۳/۳۱

## چکیده

مدل کلاسیک انتقال حرارت هدایتی که در آن سرعت پخش گرما در اجسام را بی‌نهایت فرض می‌کند، مدل فوری‌های نام داشته که معادلات آن به شکل بیضوی بوده و دارای کاربردهای فراوانی هستند. این مدل برای بسیاری از کاربردهای صنعتی و به ویژه پزشکی، مناسب نبوده و باید از مدل هذلولوی (غیرفوری‌های) استفاده شود که سرعت محدود برای انتشار حرارت در نظر می‌گیرد. کنترل دما در نقاطی مشخص از سیستم‌هایی که از این معادلات پیروی می‌کنند، مساله بسیار مهمی است که در این مقاله به آن پرداخته شده است. در این مقاله، ابتدا اعتبارسنجی روش گرادیان مزدوج استفاده شده بوسیله یک شار حرارتی معلوم در یکی از مرزهای جسم، تایید شده و سپس با استفاده از این روش، شار حرارتی که منجر به توزیع دمای مطلوب داخل جسم می‌شود، تخمین زده خواهد شد؛ همچنین مدل‌سازی و حل مساله معکوس برای داده‌های ورودی همراه با اغتشاش نیز بررسی شده و نتایج حاکی از دقت و همگرایی مناسب روش حتی با وجود اغتشاش به نسبت زیاد در داده‌های ورودی دارد.

**کلمات کلیدی:** مدل هذلولوی؛ مدل غیرفوری‌های؛ حل معکوس؛ گرادیان مزدوج.

## Tissue Temperature Control in a Bio-Heat Transfer Equation with the Conjugate Gradient Method

F. Davoodi<sup>1</sup>, H. Ahsani Tehrani<sup>2,\*</sup>, M. Nazari<sup>3</sup><sup>1</sup> Ph.D. Student, Faculty of Mathematical Sciences, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran<sup>2</sup> Assoc. Prof., Faculty of Mathematical Sciences, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran<sup>3</sup> Assoc. Prof., Faculty of Mechanical Engineering, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran

### Abstract

The classical conduction heat transfer model which considers infinite thermal propagation speed, named Fourier model and its equations are in elliptic form and has numerous applications. This model is not appropriate for many industrial applications especially in medical applications and thus hyperbolic or non-Fourier model that considers finite heat propagation speed should be used. Temperature control in certain points of such systems obeying these types of equations is an important problem which has been studied in this paper. In this paper, firstly, the validity of the conjugate gradient method is approved using a known heat flux at a system boundary and then the method is used to estimate the boundary condition which leads to a desired temperature distribution in the geometry. Also, the modeling and inverse problem solution are studied for noise in input data and results showed appropriate accuracy and convergence even for considerable noise in input data.

**Keywords:** Hyperbolic Equation; Non-Fourier Heat Transfer; Inverse Problem; Conjugate Gradient Method

## ۱- مقدمه

با پیشرفت فناوری در حوزه‌های مختلف صنعت و پزشکی و ورود تکنولوژی به حوزه‌های با مقیاس کوچک، چه از نظر زمانی و چه از نظر مکانی، تئوری کلاسیک انتقال حرارت هدایتی فوریه که در آن سرعت انتشار گرما بینهایت است، نتایج غیر قابل قبولی ارائه می‌دهد؛ لذا لازم است از مدل‌های جدید انتقال حرارت که بر اساس سرعت انتشار محدود گرما است، استفاده گردد. در سال ۱۹۵۸ کاتانو [۱] و ورنوته [۲] مدل هدایت حرارت هذلولی را پیشنهاد کردند. در این مدل برخلاف مدل فوریه که در آن موج با سرعت بینهایت بلافاصله در جسم پخش می‌گردد، سرعتی محدود برای حرکت گرما از جبهه موج به داخل جسم در نظر گرفت شده است. با آنکه حل اینگونه معادلات از لحاظ ریاضی با مشکلات فراوانی همراه است، اما در سالهای اخیر پژوهش‌های فراوانی در زمینه روش‌های حل و بهبود مدل‌های پیشنهادی صورت پذیرفته است [۳، ۴].

اگر ماده بصورت غیریکنواخت گرم شود، آنگاه گرادیان حرارتی باعث ایجاد شار حرارتی توسط ماده می‌شود. پیش از این، فرایند انتقال حرارت به‌صورت گسترده با در نظر گرفتن مدل کلاسیک هدایت حرارت، مدل بیضوی فوریه‌ای، مطالعه شده است. این مدل سرعت پخش حرارتی را بینهایت پیش‌بینی کرده که از لحاظ فیزیکی غیرممکن است. مدل هذلولی انتشار گرما با در نظر گرفتن سرعت انتشار محدود برای انتشار گرما فیزیک واقع بینانه‌تری دارد.

از آنجا که حل این معادلات ممکن است با مشکلات عدیده ریاضی (از قبیل ناپیوستگی دمایی) جهت بدست آوردن یک جواب قابل قبول روبرو شود، روش‌های مختلف عددی در منابع [۵، ۶] تحت برنامه‌ها و تنظیمات مختلف برای حل این‌گونه مسائل پیشنهاد شده است. مسائل انتقال حرارت را می‌توان به دو دسته طبقه بندی نمود: مسائل مستقیم و مسائل معکوس. هدف از حل مسائل مستقیم بدست آوردن توزیع دما با داشتن شرایط اولیه، شار حرارتی و خواص ترمودینامیکی معلوم است. در حالیکه هدف از حل مسائل معکوس در اغلب موارد، بدست آوردن شار حرارتی مجهول بر اساس دمای اندازه‌گیری شده یا دمای مطلوب است؛ بنابراین در مسائل مستقیم حرارتی، علت (شار حرارتی در مرز)، معلوم و اثر (میدان دما داخل جسم)، بوسیله حل معادلات حاکم مشخص خواهد شد،

اما در مسائل معکوس حرارتی به تخمین علت مجهول به کمک اثر معلوم یا مطلوب پرداخته می‌شود.

روش انتقال حرارت معکوس دارای کاربردهای فراوانی در حوزه‌های مختلف علوم و مهندسی است [۹-۷]؛ اما استفاده از روش روش گرادیان مزدوج در حل مسائل معکوس تاریخیچه‌ای محدودتر دارد که در ادامه به ذکر آنها پرداخته شده است. هوانگ و چن در مرجع [۱۰] با استفاده از روش المان مرزی و روش گرادیان مزدوج تخمینی از شار حرارتی مرزی برای دامنه نامنظم بدست آوردند. هوانگ و وانگ در مرجع [۱۱] در تخمین شار حرارتی سه بعدی در حالتی که شار به صورت پیوسته روی مرز تغییر می‌کند، از روش گرادیان مزدوج استفاده کردند. لین و چن در مرجع [۱۲] با روشی مشابه شار حرارتی مرزی را در مسایل جابجایی حرارتی تخمین زدند. پارک و چانگ در [۱۳] دو روش مشتق‌گیری مستقیم و استفاده از معادله الحاقی برای محاسبه گرادیان در روش گرادیان مزدوج را با هم مقایسه کرده اند. نتایج آنها نشان داد که هرچند روش مشتق‌گیری معمولی آسان و دقیق است، اما مدت زمان محاسبات را افزایش خواهد داد. استفاده از معادله الحاقی جهت محاسبه گرادیان تابع هدف زمان محاسبات را به میزان قابل توجهی کاهش خواهد داد. جازنی و همکاران در [۱۴] یک مسأله انتقال حرارت هدایتی معکوس چند بعدی را با استفاده از روش گرادیان مزدوج و معادله الحاقی مورد بررسی قرار داده اند. کوثری و همکاران در مراجع [۱۵] و [۱۶] نیز با بهره‌گیری از دو روش گرادیان مزدوج و متریک متغیر به بررسی مسائل معکوس شامل هدایت و تشعشع حرارتی پرداخته‌اند. عباس‌نژاد و همکاران [۱۷] کنترل سطح و شتاب جبهه مذاب در طی فرایند انجماد را بررسی کرده‌اند. محمدیون و مولوی نیز مسائل انتقال حرارت هدایتی معکوس را با استفاده از روش گرادیان مزدوج [۱۸] مورد مطالعه قرار دادند؛ همچنین مهدوی و خلخالیان تخمین شار حرارتی دیواره سیلندر در یک موتور احتراق داخلی [۱۹] و تخمین شار حرارتی عبوری از گلوگاه نازل موتور موشک [۲۰] را بررسی کرده‌اند. لی، چن و دیگران در مقاله [۲۱] از روش گرادیان مزدوج جهت تخمین شار در بافت زنده استفاده کرده‌اند. وو و همکاران به کمک روش گرادیان مزدوج به بررسی انتقال حرارت غیرفوریه ای در یک استوانه بی نهایت پرداختند. نتایج آن‌ها نشان دهنده بهبود شار حرارتی تخمینی در حالت

رسانندگی گرمایی) واکنش نشان می‌دهد. معادله (۱) همچنین نشان دهنده قانون بقای انرژی است. به منظور مطالعه توانایی روش مورد استفاده در تعیین شار حرارتی مجهول در مسایل معکوس هذلولی، مسئله انتقال حرارت هدایتی در یک دیوار با ضخامت  $L$  و خواص فیزیکی ثابت در نظر گرفته می‌شود که نمایی از دامنه فیزیکی مساله در شکل (۱) نمایش داده شده است. دمای اولیه  $T_0$ ، شرط مرزی در  $x=0$  عایق در نظر گرفته شده، در حالی که شار حرارتی مجهول در  $x=l$  اعمال می‌شود. معادلات (۱-۲) تا (۵-۲) نشان دهنده شکل کلی مساله مفروض به شکل زیر هستند:

$$k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \quad (1-2)$$

$$\tau \rho c \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \rho c \frac{\partial T}{\partial t}; 0 < x < l, t > 0$$

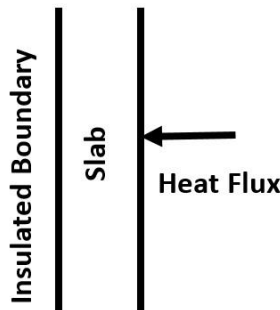
$$T(x,0) = T_0 \quad 0 < x < l, t = 0 \quad (2-2)$$

$$\frac{\partial T(x,0)}{\partial t} = 0; \quad 0 < x < l, t = 0 \quad (3-2)$$

$$\frac{\partial T(0,t)}{\partial x} = 0; \quad x = 0 \quad (4-2)$$

$$k \frac{\partial T(l,t)}{\partial x} = q(l,t) + \tau \frac{\partial q(l,t)}{\partial t}; x = l, t > 0 \quad (5-2)$$

در اینجا  $\rho$ ،  $k$  و  $\tau$  به ترتیب هدایت حرارتی، چگالی، ظرفیت گرمایی و زمان آرامش می‌باشند. در صورتی که همه شرایط مرزی مساله معلوم باشند، مساله یک مساله مستقیم بوده و می‌تواند به کمک روش ضمنی (کرانک - نیکلسون) حل شود که جزئیات این روش به طور کامل در منبع [3] مورد مطالعه قرار گرفته است.



شکل ۱- نمایی از شکل فیزیکی مساله

تابع پله‌ای بود. بوروخوف و زایاتس نیز از روش تفاضلات متناهی و یک روش معکوس برای تخمین چشمه حرارتی در یک معادله هذلولوی غیرخطی استفاده کردند. گودرزی و عظیمی [۲۲] مساله مستقیم انتقال حرارت زیستی به شکل غیرفوری‌های همراه با تاخیر فاز دوگانه را با ارائه یک روش عددی مورد بررسی قرار دادند. شریعتمدار طهرانی و همکاران [۲۳] نیز در مطالعه‌ای به کمک روش انتقال حرارت معکوس توان گرمایی مورد نیاز جهت درمان سرطان را محاسبه کردند. تخمین چشمه حرارتی وابسته به مکان برای معادله انتقال حرارت هذلولوی در انتقال حرارت زیستی به کمک روش گرادیان مزدوج توسط آلسایمی و لسنیک انجام شده و نتایج آنها نشان دهنده دقت خوبی حتی در مسائل دو بعدی است [۲۴]. اثرات تاخیر فاز سه گانه در انتقال حرارت زیستی غیرفوری‌های نیز در مطالعه اخیر کومار و همکاران به روش مستقیم مورد ارزیابی قرار گرفته است. [۲۵]

با در نظر گرفتن توانایی‌های فراوان روش روش گرادیان مزدوج برای حل بسیاری از مسائل معکوس، از این روش برای تخمین شار حرارتی در این مقاله استفاده شده است. هدف مقاله حاضر، بررسی توانایی روش گرادیان مزدوج در حل مسایل معکوس انتقال حرارت به شکل معادلات هذلولوی (غیرفوری‌های) و کنترل دما در این مسائل است. این روش مسئله معکوس را به سه زیر مسئله مستقیم، حساسیت و الحاقی تبدیل می‌کند که در ادامه به بررسی جزئیات آنها پرداخته می‌شود.

## ۲- معادلات حاکم

### ۲-۱- مساله مستقیم

معادله یک بعدی مدل هذلولی با مختصات فضایی  $X$  و زمانی  $t$  به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{cases} \tau q_t + q = -kT_x \\ \rho CT_t = -q_x \end{cases} \quad (1)$$

که در آن  $q$  شار حرارتی،  $T$  دما،  $k$  رسانندگی گرمایی،  $\tau$  زمان آسایش،  $\rho$  چگالی و  $C$  گرمای مخصوص ماده است. معادله (۱)، یک معادله غیرفوری‌های شار حرارتی است که ایجاد شار حرارتی بوسیله گرادیان دما را بیان می‌نماید. اگر زمان آسایش  $T$  برابر صفر در نظر گرفته شود، آنگاه ماده بلافاصله به صورت شار حرارتی متناسب با گرادیان دما (با نسبت تناسب  $k$ ،

۲-۲- مساله معکوس

جهت حل معکوس معادلات اشاره شده، شار حرارتی در یکی از مرزها به عنوان مثال در  $x=l$  مجهول فرض شده، در حالی که سایر معادلات (۲-۱) تا (۲-۵) معلوم اند؛ همچنین این مساله معکوس نیازمند یک شرط معلوم اضافی است که دما در  $x=0$  است. می توان از دمای خوانده شده توسط سنسور در  $x=0$  نیز استفاده کرد که با  $Y(0,t)$  نشان داده می شود. دمای خوانده شده یا مطلوب در موقعیت سنسور می تواند شامل خطای اندازه گیری نیز باشد که به شکل مصنوعی به داده ها اعمال خواهد شد. پس می توان مسئله معکوس را به شکل "تخمین شار حرارتی مرزی مجهول  $q(l,t)$  با استفاده از دمای اندازه گیری شده یا معلوم  $Y(0,t)$  تعریف کرد. حل مسئله معکوس معرفی شده با کمینه شدن تابع هدف زیر بدست می آید:

$$J[q(l,t)] = \int_0^{t_f} [T(0,t) - Y(0,t)]^2 dt \quad (3)$$

که  $T(0,t)$  دمای تخمین زده شده در  $x=0$  و زمان  $t$  بوده که از حل مساله مستقیم به کمک یک شار حرارتی تخمینی بدست آمده بوده و  $t_f$  نشان دهنده زمان نهایی است.

۲-۳- روش گرادیان مزدوج

به منظور حل مساله معکوس معرفی شده و مینیمم سازی تابع هدف، از روش گرادیان مزدوج [۲۶] استفاده می شود که مبتنی بر یک روش تکراری است.

$$q^{(n+1)}(l,t) = q^{(n)}(l,t) - \beta^{(n)} p^{(n)}(l,t) \quad (4)$$

که  $\beta^{(n)}$  گام جستجو در تکرار  $n$  تا  $n+1$  بوده و  $p^{(n)}(l,t)$  جهت کاهش (جهت جستجو) که از رابطه زیر محاسبه می شود:

$$p^{(n)}(l,t) = J'^{(n)}(l,t) + \gamma^{(n)} p^{(n-1)}(l,t) \quad (5)$$

در رابطه بالا،  $J'^{(n)}(l,t)$  جهت گرادیان الحاقی در تکرار  $n$ ام و  $p^{(n-1)}(l,t)$  جهت کاهش در تکرار  $n-1$  هستند. ضرب الحاقی نیز به صورت زیر تعریف می شود:

$$\gamma^{(n)} = \frac{\int_0^{t_f} \frac{\partial q^{(n)}(l,t)}{\partial t} dt}{\int_0^{t_f} \frac{\partial q^{(n-1)}(l,t)}{\partial t} dt}, \quad \gamma^{(0)} = 0 \quad (6)$$

همگرایی پروسه تکرار بالا در مینیمم سازی تابع هدف  $J$  در منبع [۲۷] تضمین شده است. برای شروع تکرار مطابق معادله (۴)، لازم است گام جستجو  $\beta$  و گرادیان تابع هدف  $J^{(n)}(l,t)$  محاسبه شوند که این امر نیازمند تعریف معادلاتی به نام حساسیت و الحاقی است که به ترتیب معرفی می گردند.

۲-۴- مسئله حساسیت و اندازه گام جستجو

مسئله حساسیت براساس مسئله مستقیم اصلی که طبق معادلات (۲-۱) تا (۲-۵) معرفی شد، به روش زیر بدست می آید. با فرض اینکه شار حرارتی در  $x=l$  تغییراتی به اندازه  $Dq$  داشته باشد، این تغییرات منجر به تغییرات دمای  $T$  به صورت  $T+\Delta T$  خواهد شد. با جایگزینی  $Q$  با  $q+Dq$  و  $T$  با  $T+\Delta T$  در معادله اصلی و سپس تفریق عبارت بدست آمده از معادله اصلی و صرف نظر کردن از عبارتهای مرتبه دوم، مسئله حساسیت زیر برای تابع حساسیت  $\Delta T$  بدست می آید.

$$k \frac{\partial^2 \Delta T}{\partial x^2} = \tau \rho c \frac{\partial^2 \Delta T}{\partial t^2} + \rho c \frac{\partial \Delta T}{\partial t}; 0 < x < l, t > 0 \quad (1-7)$$

$$\Delta T(x,0) = 0, 0 < x < l, t = 0 \quad (2-7)$$

$$\frac{\partial \Delta T(x,0)}{\partial t} = 0, 0 < x < l, t = 0 \quad (3-7)$$

$$\frac{\partial \Delta T(0,t)}{\partial x} = 0, x = 0, t > 0 \quad (4-7)$$

$$\frac{k \partial \Delta T(l,t)}{\partial x} = \Delta q(l,t) + \tau \frac{\partial \Delta q(l,t)}{\partial t}, x = l, t > 0 \quad (5-7)$$

به منظور حل عددی این مساله نیز مشابه مساله مستقیم، از تکنیک تقریب ضمنی کرانک - نیکلسون استفاده می شود. تابع هدف  $J(q^{(n+1)})$  برای تکرار  $n+1$  بازنویسی معادله (۳) به شکل زیر بدست می آید:

متغیرها در نهایت مساله الحاقی به شکل زیر بدست خواهد آمد:

$$k \frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} = \tau \rho c \frac{\partial^2 \lambda}{\partial t^2} + \rho c \frac{\partial \lambda}{\partial t}; 0 < x < l, t > 0 \quad (1-11)$$

$$\lambda(x, t_f) = 0 \quad 0 < x < l \quad t = t_f \quad (2-11)$$

$$\frac{\partial \lambda(x, t_f)}{\partial t} = 0 \quad 0 < x < l \quad t = t_f \quad (3-11)$$

$$\frac{\partial \lambda(0, t)}{\partial x} = \frac{-2(T-Y)}{k} \quad x=0 \quad t > 0 \quad (4-11)$$

$$\frac{\partial \lambda(l, t)}{\partial x} = 0 \quad x=l \quad t > 0 \quad (5-11)$$

با توجه به اینکه این مساله یک مساله مقدار نهایی است، می‌توان با تغییر متغیر  $\eta = t_f - t$  مساله را به یک مساله مقدار اولیه استاندارد تبدیل کرد که این معادله می‌تواند با روش کرانک-نیکلسون [۲۲] حل شود. در نهایت ترم انتگرالی زیر باقی خواهد ماند:

$$\Delta J = \int_{t=0}^{t_f} [\lambda(l, t) - \tau \lambda(l, t) \delta(t-0) - \tau \frac{\partial \lambda(l, t)}{\partial t}] \Delta q(l, t) dt \quad (12)$$

با توجه به تعریف آلیفانو [۲۶] رابطه بالا می‌تواند به شکل زیر خلاصه شود:

$$\Delta J = \int_{t=0}^{t_f} J[q(l, t)] \Delta q(l, t) dt \quad (13)$$

با مقایسه معادله (۱۲) و (۱۳)، رابطه زیر برای محاسبه گرادیان تابع هدف بدست خواهد آمد.

$$J'[q(l, t)] = \lambda(l, t) - \tau \lambda(l, t) \delta(l, t) \delta(t-0) - \tau \frac{\partial \lambda(l, t)}{\partial t} \quad (14)$$

#### ۲-۶- شرط توقف

شرط توقف تکرارهای روش گرادیان مزدوج برای مسائلی که شامل خطای اندازه گیری نباشند به صورت زیر است:

$$J[q^{(n+1)}(l, t)] < \varepsilon \quad (15)$$

$$J(q^{(n+1)}) = \int_0^{t_f} [T(0, t; q^{(n)}) - \beta^{(n)} p^{(n)} - Y(0, t)]^2 dt \quad (8)$$

که  $q^{(n+1)}$  با تابع معرفی شده در معادله (۴) جایگزین شده است. اگر دمای  $T(0, t; q^{(n)}) - \beta^{(n)} p^{(n)}$  با بسط تیلور خطی سازی شود معادله (۸) بصورت زیر در خواهد آمد:

$$J(q^{(n+1)}) = \int_{t=0}^{t_f} [T(0, t; q^{(n)}) - \beta^{(n)} \Delta T(0, t; p^{(n)}) - Y(0, t)]^2 dt \quad (9)$$

که در آن  $T(0, t; q^{(n)})$  جواب مساله مستقیم است که با استفاده از  $q(l, t)$  تخمین زده شده در  $x=0$  بدست می‌آید. تابع حساسیت  $\Delta T(0, t; p^{(n)})$  نیز از حل معادله حساسیت (۷) با جایگزینی  $\Delta q = p^{(n)}$  در  $x=0$  محاسبه می‌شود. به منظور محاسبه اندازه گام جستجو  $\beta^{(n)}$  نیز می‌توان از مینیمم سازی تابع هدف داده شده با معادله (۹) نسبت به  $\beta^{(n)}$  استفاده کرد:

$$\beta^{(n)} = \frac{\int_{t=0}^{t_f} [T(0, t) - Y(0, t)] \Delta T(0, t) dt}{\int_{t=0}^{t_f} [\Delta T(0, t)]^2 dt} \quad (10)$$

#### ۲-۵- مسئله الحاقی و معادله گرادیان

برای بدست آوردن معادلات مساله الحاقی، معادلات (۲) را در ضریب لاگرانژ  $\lambda(x, t)$  ضرب کرده و پس از انتگرال گیری روی مکان و زمان مسئله، حاصل به طرف راست معادله (۳) اضافه شده و در نتیجه بسط تابع هدف  $J(q(l, t))$  بدست می‌آید. متغیر  $\Delta J$  را می‌توان با جایگذاری متغیرهای  $\Delta q$  و  $\Delta T$  در بسط فوق الذکر، تفاضل بسط حاصل از معادله اولیه و صرف نظر کردن از ترمهای درجه دوم بدست آورد. به دلیل کوچک بودن عبارتهای مرتبه دوم و بالاتر، حذف آنها تاثیری بر روند حل و همگرایی مساله نخواهد داشت. با احتساب شرایط مرزی معادله حساسیت و حل انتگرال بدست آمده از روش جداسازی

### ۳- ارزیابی روش و مثالهای عددی

هدف از این مقاله استفاده از روش گرادیان مزدوج در کنترل دمای سطح با استفاده از تخمین شار حرارتی مناسب مرزی است. این حالت بخصوص در مواردی که بنا به شرایط مختلف کاری دمای سطح بصورت مستقیم قابل اندازه گیری نمی باشد، حائز اهمیت است. یکی از مزایای استفاده از این روش برای حل معکوس این است که این روش حساسیتی نسبت به انتخاب حدس اولیه نداشته و حدس اولیه را می توان بصورت دلخواه انتخاب کرد؛ بنابراین برای همه مثالهای عنوان شده در این مقاله حدس اولیه شار حرارتی برابر صفر در نظر گرفته شده است.

$$q(l, t)_{\text{initial}} = 0 \quad (18)$$

در ابتدا برای سنجیدن درستی کد، یک تابع دما (به عنوان داده های آزمایشگاهی) در نظر گرفته شده است. برای مشابه سازی مقدار خطای حاصل از اندازه گیری آزمایشگاهی، یک تابع خطای نرمال با میانگین ثابت صفر و انحراف استاندارد به تابع دمای فرض شده اضافه گردیده که درصد بالایی اعتماد ایجاد می کند. مقایسه نتایج حل و تابع فرض شده با نتایج منبع [۲۹] بیانگر دقت مناسب و پایداری بالای کد حتی با وجود نویز نسبتاً زیاد است. مقادیر زیر جهت مسائل در نظر گرفته شده اند:

$$T_0 = 20^{\circ}\text{C}; l = 3.5 \times 10^{-2} \text{ m};$$

$$k = 50 \frac{\text{W}}{\text{m.K}}; \alpha = 1.327 \times 10^{-5} \frac{\text{m}^2}{\text{S}}$$

$\alpha$  ضریب پخش گرمایی ماده است؛ همچنین  $\Delta x = 0.00035$  و  $\Delta t = 2$  در نظر گرفته شد.

$$q(l, t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t \leq 9 \\ 6 \times 10^5 \sin\left(\frac{4\pi(t-t_0)}{580}\right) & 9 \leq t \leq 590 \\ 0 & 590 \leq t \leq 600 \end{cases} \quad (19)$$

آنالیز با  $\tau = 1$  و در نظر گرفتن  $\sigma = 0$  انجام شده و نتایج شار و دمای تخمین زده شده و دقیق در شکل شماره (۲) ارائه شده و از دقت بسیار خوبی برخوردار هستند.

که  $\varepsilon$  یک مقدار مشخص بسیار کوچک است. در حالت واقعی معمولاً دماهای اندازه گیری شده حاوی خطا یا نویز بوده که در این حالت از قانون اختلاف برای محاسبه شرط توقف استفاده می شود. طبق این اصل، تکرارها زمانی متوقف می شوند که اختلاف بین دمای محاسبه شده و مطلوب برابر انحراف معیار خطای داده های ورودی گردد.

$$T(0, t) - Y(0, t) \approx \sigma \quad (16)$$

با جایگذاری معادله (۱۶) در معادله (۳) می توان شرط توقف را به شکل زیر محاسبه کرد [۲۸]:

$$\varepsilon = \sigma^2 t_f \quad (17)$$

سپس با کمک معادله (۱۵) و با جایگزینی  $\varepsilon$  از معادله (۱۷) شرط توقف نهایی بدست می آید.

### ۲-۷- روش محاسباتی

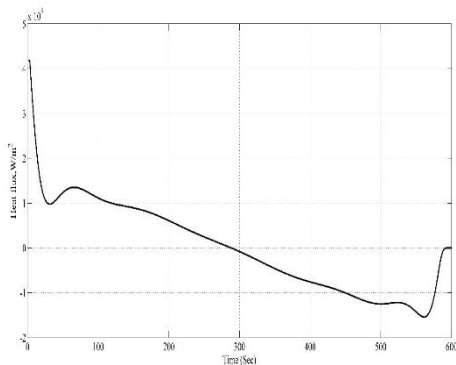
بر اساس آنچه در قسمت های قبلی عنوان شد، گام های روش گرادیان مزدوج در جهت مینیمم سازی تابع هدف و حل مساله معکوس را می توان به شرح زیر بیان کرد:

- ۱- حل معادله مستقیم برای بدست آوردن  $T(x; t)$  از معادلات (۱-۲) تا (۵-۲)
- ۲- بررسی شرط توقف داده شده بر اساس معادله (۱۵) یا (۱۷)، ادامه حل در صورت برقرار نشدن شرط توقف
- ۳- حل معادله الحاقی برای بدست آوردن  $\lambda(x, t)$  از معادلات (۱-۱۱) تا (۵-۱۱)
- ۴- محاسبه گرادیان تابع هدف  $J'$  با استفاده از معادله (۱۴)
- ۵- محاسبه ضریب مزدوج  $\gamma^{(n)}$  و جهت کاهش  $p^{(n)}$  به ترتیب از معادلات (۶) و (۵)
- ۶- حل معادله حساسیت برای  $\Delta T(x, t)$  با قرار دادن  $\Delta q = p^{(n)}$  از معادلات (۱-۷) تا (۵-۷)
- ۷- محاسبه اندازه گام جستجو  $\beta^{(n)}$  از معادله (۱۰)
- ۸- محاسبه مقدار تخمینی جدید برای  $q^{(n+1)}$  از معادله (۴) و بازگشت به گام اول

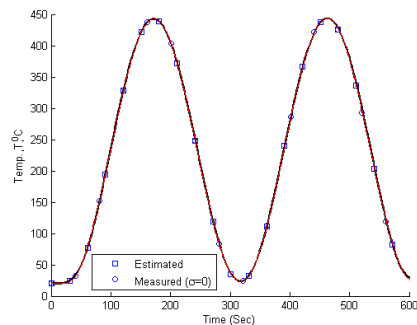
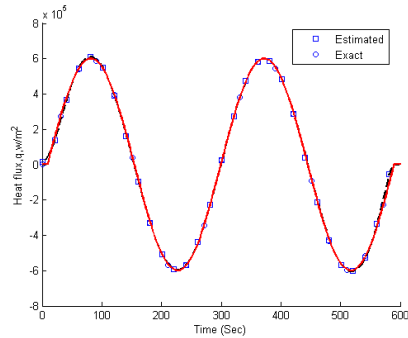
برای این تست ابتدا نتایج را در حالت دقیق و بدون نویز محاسبه کرده، سپس نویز به ترتیب بصورت ۵٪ و سپس ۱۰٪ از میانگین دما در نظر گرفته می‌شود. نتایج شار تخمین زده شده به ترتیب برای  $\sigma=0$ ،  $\sigma=5$  و  $\sigma=10$  پس از ۶۱، ۴۴ و ۱۱ تکرار محاسبه می‌شود که نتایج بدست آمده حاکی از این است که شار حرارتی تخمین زده شده از دقت بسیار بالایی برخوردار است. جهت بررسی دقت نتایج، با در نظر گرفتن این شار تخمین زده شده، دوباره تابع دما به کمک حل مساله معکوس بدست آمده است. خطای نسبی برای تابع دما مطابق معادله (۲۱) به ترتیب برابر  $E=0/49$ ،  $E=1/99$  و  $E=14/5$  بدست می‌آید.

شار گرمایی محاسبه شده برای دستیابی به توزیع دمای دلخواه بر اساس معادله (۲۱) در شکل (۳) و همچنین دمای دلخواه و دمای تخمین زده شده به کمک شار بدیت آمده نیز در شکل (۴) نمایش داده شده اند.

شکل‌های (۵) تا (۸) نیز نشان دهنده همین اطلاعات برای حالت اغتشاش در داده‌های ورودی برای  $\sigma=5$  و  $\sigma=10$  هستند. نتایج بدست آمده حاکی از عدم حساسیت الگوریتم به خطاهای اندازه گیری و قابل اعتماد بودن روش مورد استفاده با وجود خطاهای اندازه گیری است.



شکل ۳- شار تخمینی برای  $\sigma=0\%$  در مثال اول



شکل ۲- شار و دمای تخمینی و دقیق برای  $\sigma=0$

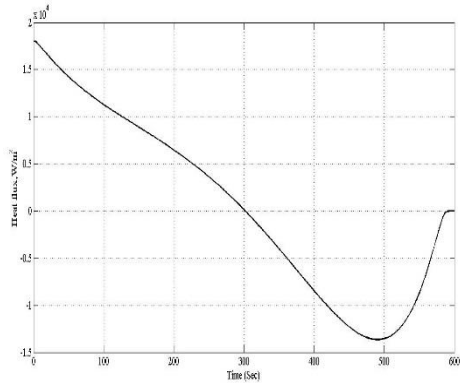
پس از آنکه درستی کد اثبات گردید، در ادامه چندین تابع دمایی مختلف به عنوان دمای سطح در نظر گرفته شده و شار حرارتی معادل بدست آمده، رسم شده است. در ادامه نتایج حاصل از محاسبه ۳ مثال عددی جهت محاسبه شار حرارتی مرزی آورده شده است. فرمول خطای نسبی محاسبه شده بصورت زیر است که  $N$  تعداد نقاط در شبکه زمان است:

$$\% E_{rms} = \left[ \frac{\sqrt{\sum_{j=0}^N (T - Y)^2}}{\sqrt{\sum_{j=0}^N (T)^2}} \right] \times 100 \quad (20)$$

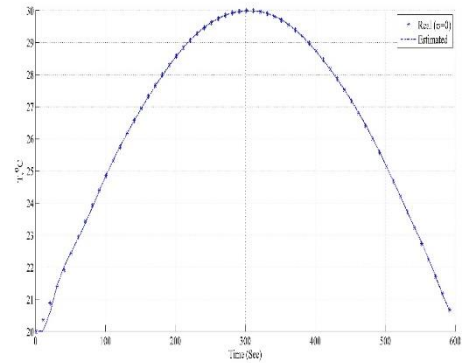
برای بررسی تأثیر خطای اندازه گیری، برای دما ابتدا خطای سنسور را ۵٪ میانگین دمای اندازه‌گیری شده در نظر گرفته سپس با افزایش آن تا ۱۰٪ میانگین دمای اندازه گیری شده اثرات خطا بررسی می‌شود.

### ۳-۱- مثال اول

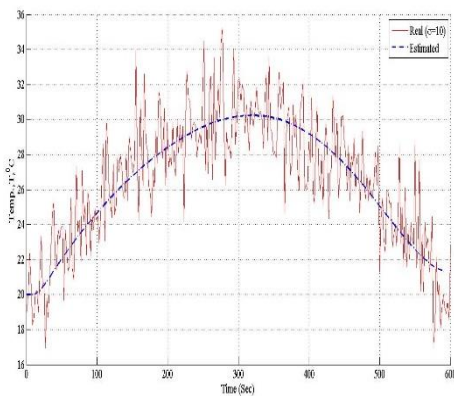
$$Y = 20 + \sin(2\pi(t-5)/600), \quad 0 \leq t \leq 600 \quad (21)$$



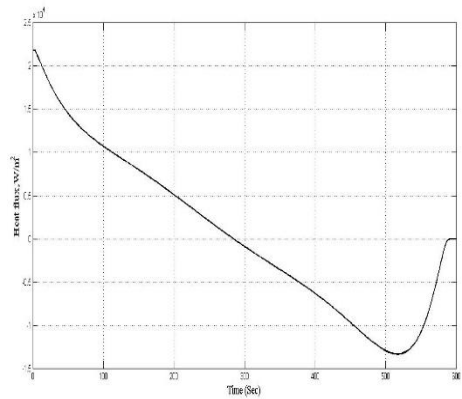
شکل ۷- شار تخمینی برای  $\sigma=10\%$  در مثال اول



شکل ۴- دمای واقعی و تخمینی برای  $\sigma=0\%$  در مثال اول



شکل ۸- دمای واقعی و تخمینی برای  $\sigma=10\%$  در مثال اول

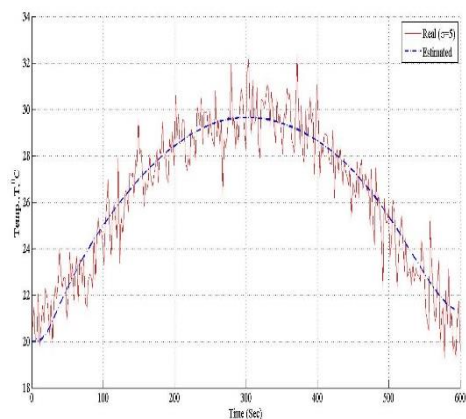


شکل ۵- شار تخمینی برای  $\sigma=5\%$  در مثال اول

### ۳-۲- مثال دوم

$$\begin{cases} Y = 0.2t + 20, & 0 \leq t < 100 \\ Y = -0.2t + 60, & 100 \leq t \leq 250 \\ Y = 10, & t > 250 \end{cases} \quad (22)$$

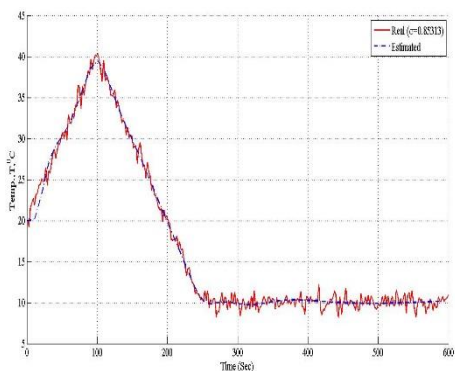
همانند مثال اول، با در نظر گرفتن  $\tau=1$  و  $\sigma=0$  آنالیز را شروع می‌کنیم، پس از ۱۹۰ تکرار  $q(l,t)$  تخمینی بصورت شکل (۹) بدست می‌آید. دمای دقیق و تخمینی در شکل ۱۰ نمایش داده شده است. برای این حالت  $E=0/42$  بدست می‌آید. شکل‌های (۱۱) و (۱۳)، نتایج شار تخمینی با در نظر گرفتن نویز به میزان  $\sigma=5$  و  $\sigma=10$  میانگین دما به ترتیب پس از ۷۹ و ۱۷ تکرار را نمایش می‌دهند، دمای دقیق و تخمینی



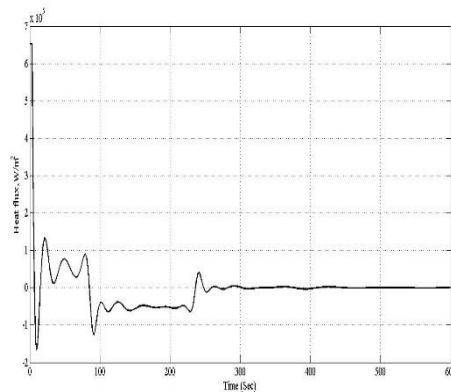
شکل ۶- دمای واقعی و تخمینی برای  $\sigma=5\%$  در مثال اول



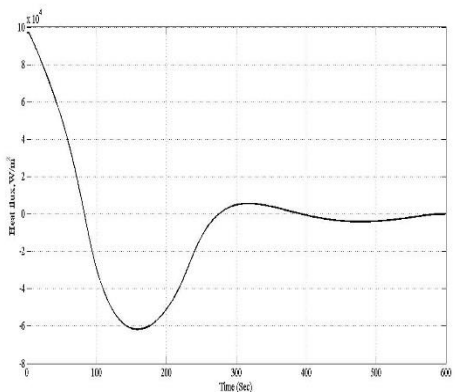
معادل حالات فوق به ترتیب در شکل‌های (۱۲) و (۱۴) ترسیم شده است. خطای نسبی به ترتیب  $E=17$  و  $E=3/39$  است.



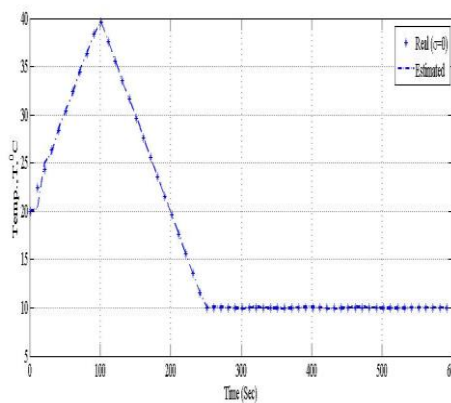
شکل ۱۲- دمای واقعی و تخمینی برای  $\sigma=5\%$  در مثال دوم



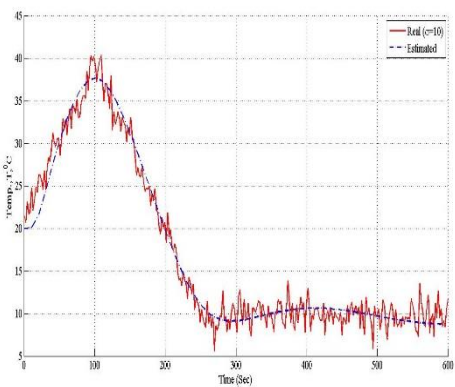
شکل ۹- شار تخمینی برای  $\sigma=0\%$  در مثال دوم



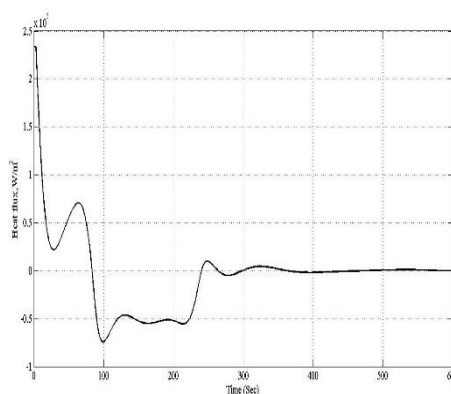
شکل ۱۳- شار تخمینی برای  $\sigma=10\%$  در مثال دوم



شکل ۱۰- دمای واقعی و تخمینی برای  $\sigma=0\%$  در مثال دوم



شکل ۱۴- دمای واقعی و تخمینی برای  $\sigma=10\%$  در مثال دوم

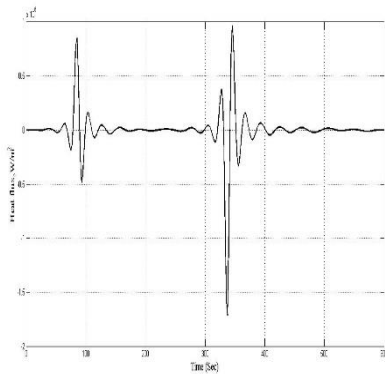


شکل ۱۱- شار تخمینی برای  $\sigma=5\%$  در مثال دوم

۳-۳- مثال سوم

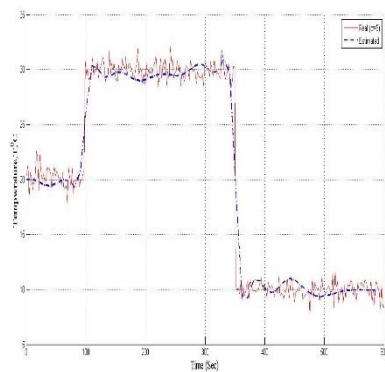
به منظور ارزیابی دقت روش اشاره شده در تغییرات ناگهانی دما، یک تابع به شکل پله با معادله (۲۳) به عنوان دمای مطلوب در نظر گرفته شد.

$$\begin{cases} Y = 20, & 0 \leq t < 100 \\ Y = 30, & 100 \leq t \leq 350 \\ Y = 10, & 350 < t \leq 600 \end{cases} \quad (23)$$

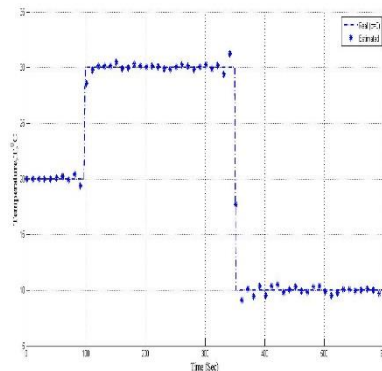


شکل ۱۶- شار تخمینی برای  $\sigma = 0\%$  در مثال سوم

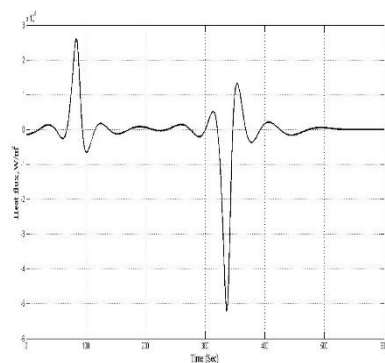
مقادیر دماهای اندازه‌گیری شده و همچنین شارهای تخمینی برای حالت‌های بدون اغتشاش در داده‌های ورودی،  $\sigma = 5\%$  و  $\sigma = 10\%$  به ترتیب در شکل‌های (۱۵) تا (۲۰) نمایش داده شده است. با توجه به شکل‌های ارائه شده مشخص است که روش استفاده شده دقت بسیار خوبی در تخمین شار حرارتی لازم در این مثال نیز داشته است. البته با مقایسه با مثال‌های اول و دوم می‌توان نتیجه گرفت که در مکان‌هایی که تغییرات ناگهانی به شکل یک تابع پله وجود دارد و به‌ویژه در حالت اغتشاش‌های زیاد، مقدار خطا اندکی بیشتر، ولی در محدوده قابل قبول است.



شکل ۱۷- شار تخمینی برای  $\sigma = 5\%$  در مثال سوم



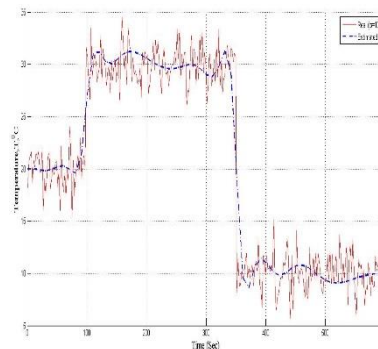
شکل ۱۵- شار تخمینی برای  $\sigma = 0\%$  در مثال سوم



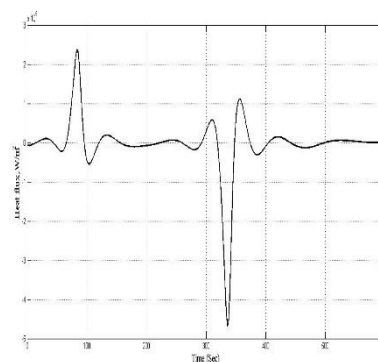
شکل ۱۸- شار تخمینی برای  $\sigma = 5\%$  در مثال سوم

### ۵- مراجع

- [1] Cattaneo C (1958) A form of heat conduction equation which eliminates the paradox of instantaneous propagation. *Comput rendus* 247: 431-433.
- [2] Vernotte P (1958) Les paradoxes de la theorie continue de l'equation de la chaleur. *Comput rendus* 246: 3154-3155.
- [3] Carey GF, Tai M (1982) Hyperbolic heat transfer with reflection. *Num heat trans* 5: 309-327.
- [4] Glass DE, Ozisik MN, Mcrae DS, Vick B (1986) Hyperbolic heat conduction with temperature-dependent thermal conductivity. *J Appl Phys* 59: 1861-1865.
- [5] Barletta A, Zanchini E (1999) A thermal potential formulation of hyperbolic heat conduction. *ASME J Heat Trans* 121: 166-169.
- [6] Honner M (1999) Heat wave simulation. *Comput Math App* 38: 233-243.
- [7] Pao-Tung H, Yuan-Hsiang C (20047) An inverse non-Fourier heat conduction problem approach for estimating the boundary condition in electronic device. *Appl Math Model* 28: 639-652.
- [8] Abbas Nejad A, Maghrebi MJ, Basirat Tabrizi H, Heng Y, Mhamdi A, Marquardt W (2010) Optimal operation of alloy material in solidification processes with inverse heat transfer. *Int Commun Heat Mass Trans* 37: 711-716.
- [9] Davoodi F, Abbas Nejad A, Shahrezaee A, Maghrebi MJ (2011) Control parameter estimation in a semi-linear parabolic inverse problem using a high accurate method. *Appl Math Comput* 218: 1798-1804.
- [10] Huang CCW (2000) A three-dimensional inverse forced convection problem in estimating surface heat flux by conjugate gradient method. *Int J Heat Mass Trans* 43: 3171-3181.
- [11] Huang CH, Wang SP (1999) A three-dimensional inverse heat conduction problem in estimating surface heat flux by conjugate gradient method. *Int J Heat Mass Trans* 42(18): 3387-3403.
- [12] Lin JY, Chen HT (1994) Numerical solution of hyperbolic heat conduction in cylindrical and spherical systems. *Appl Math Model* 18: 384-390.
- [13] Park HM, Chung OY (1999) Comparison of Various Conjugate Gradient Methods for Inverse Heat Transfer Problems. *Chem Eng Commun* 176(1): 201 - 228.
- [14] Jarny Y, Ozisik MN, Bardon JP (1991) A General Optimization Method Using Adjoint Equation for Solving Multidimensional Inverse Heat



شکل ۱۹- شار تخمینی برای  $\sigma = 10\%$  در مثال سوم



شکل ۲۰- شار تخمینی برای  $\sigma = 10\%$  در مثال سوم

### ۴- نتیجه گیری

در مقاله حاضر از روش گرادیان مزدوج جهت تخمین شار حرارتی مرزی گذرا در مسایل هدایت حرارت هذلولی معکوس به منظور کنترل دما در نقاطی از دامنه محاسباتی استفاده شد. جهت ارزیابی صحت و دقت نتایج بدست آمده دو مثال مختلف با دو شکل متفاوت برای دمای مطلوب در نظر گرفته شد. نتایج حاصل نشان دهنده توانمندی روش استفاده شده حتی با وجود اغتشاش در داده‌های ورودی است. در نهایت می‌توان نتیجه گرفت که استفاده از گرادیان مزدوج شامل مزایای زیر است:

- ۱- عدم حساسیت روش به مقدار حدس اولیه برای مقادیر مجهول
- ۲- نرخ همگرایی بسیار مناسب
- ۳- عدم نیاز به فرضیاتی برای شکل تابع مجهول
- ۴- زمان محاسباتی کوتاه با توجه به دقت جواب‌ها

- [22] Goudarzi P, Azimi A (2019) Numerical simulation of fractional non-Fourier heat conduction in skin tissue. *J Therm Bio* 84: 274-284.
- [۲۳] شریعتمدار طهرانی م.، شاهمردان م.، کیهانی م.م.، محمدیون م.، تخمین توان منبع گرمایی مورد نیاز جهت گرمادرمانی تومور سینه با استفاده از روش معکوس. *مجله مهندسی مکانیک دانشگاه تبریز*. د. ۵۰، ش. ۳، ص ۱۲۵-۱۳۴، ۱۳۹۹.
- [24] Alosaimi M, Lesnic D (2023) Determination of a space-dependent source in the thermal-wave model of bio-heat transfer. *Comput Math Appl* 129: 34-49.
- [25] Kumar M, Kaur H, Upadhyay S, Singh S, Rai KN (2023) Mathematical modelling and simulation of three phase lag bio-heat transfer model during cancer treatment. *Int J Therm Sci* 184: 108002.
- [26] Alifanov O (1994) *Inverse heat transfer problems*. Springer, Berlin.
- [27] Lasdon LS, Mitter SK, Warren AD (1967) The conjugate gradient method for optimal control problem. *IEEE Trans Automat Control AC-12*: 132-138.
- [28] Ozisik MN, Orlande HRB (2000) *Inverse heat transfer: fundamentals and applications*. Taylor & Francis, New York.
- [29] Cheng-Hung Huang and Hsin-Hsien Wu, "An inverse hyperbolic heat conduction problem in estimating surface heat flux by the conjugate gradient method," *Phys D: Appl Phys*, vol. 39, pp. 4087, 2006.
- Conduction. *Int J Heat Mass Trans* 34: 3387-3408.
- [15] Kowsary F, Behbahaninia A, Pourshaghaghay A, (2006) Transient heat flux function estimation utilizing the variable metric method. *Int Commun Heat Mass Trans* 33(6): 800-810.
- [16] Kowsary F, Pooladvand K, Pourshaghaghay A (2007) Regularized variable metric method versus the conjugate gradient method in solution of radiative boundary design problem. *J Quant Spectrosc Radiat Trans* 108(2): 277-294.
- [17] Abbasnejad A, Mmaghrebi MJ, Basirat Tabrizi H (2010) Control of interface acceleration during solidification processes using inverse heat transfer method. *Int J Nonlin Dynam Eng Sci* 2(1): 17-25.
- [18] Mohammadiun M, Mohammadiun H, Molavai A (2008) Conjugate gradient method with adjoint problem for solving the inverse heat conduction. 7th Conference of Iranian Aerospace Society, Tehran.
- [19] Mahdavi A, Khalkhalian S (2009) Conjugate gradient method with adjoint problem for estimates of the cylinder wall heat flux in an internal combustion engine. (In persian) Sixth Conference on Internal Combustion Engines, Tehran.
- [20] Mahdavi A, Khalkhalian S (2009) Estimate the heat flux through the rocket engine nozzle with conjugate gradient method and adjoint problem (In persian). Sixth Annual Conference on Mechanical Engineering Students, Tehran.
- [21] Haw-Long L, Tien-Hsing L, Wen-Lih C, Yu-Ching Y (2013) An inverse hyperbolic heat conduction problem in estimating surface heat flux of a living skin tissue. *Appl Math Model* 37(5): 2630-264.