



## حل مساله معکوس شناسایی مرزها و تخمین خواص مکانیکی ماده با استفاده از روش‌های بهینه-سازی در مواد با مدول الاستیسیته متغیر

محمدحسین مظفری<sup>۱\*</sup>، رضا ناصری<sup>۲</sup> و مهدی زارع مهرجردی<sup>۳</sup>

<sup>۱</sup> استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه فنی و حرفه ای، تهران، ایران

<sup>۲</sup> استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه فنی و حرفه ای، تهران، ایران

<sup>۳</sup> دانشیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه اردکان، اردکان، ایران

تاریخ دریافت: ۱۴۰۱/۱۱/۰۹؛ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۲/۰۲/۱۸؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۲/۰۳/۰۳

### چکیده

یکی از کاربردهای روش‌های بهینه‌سازی، حل مسائل معکوس شناسایی مرزهای داخلی، تخمین خواص مکانیکی مواد و غیره می‌باشد. در بیشتر مقالاتی که تاکنون انجام شده به علت سادگی روابط، حالت‌هایی که ماده موردنظر یک جسم همگن است، در نظر گرفته شده است، ولی در صنعت هنگامی که دو یا چند ماده مذاب در یک قالب روی هم ریخته می‌شوند، با توجه به نوع ماده‌ها امکان ترکیب و نفوذ ماده‌ها در هم وجود دارد که باعث به وجود آمدن یک ماده جدید ناهمگن می‌شود. در این مقاله شناسایی هندسه مرزهای داخلی نامنظم بین سه ماده و تخمین خواص مکانیکی ماده و تعیین ساختار درونی ماده میانی در حالتی که ماده میانی دارای مدول الاستیسیته متغیر می‌باشد، با تلفیق سه روش الگوریتم رقابت استعماری، سیمپلکس و روش گردایان مزدوج به همراه روش عددی المان‌های مرزی مورد بررسی قرار گرفته است؛ همچنین تاثیر نوع و سختی مواد تشکیل دهنده جسم ناهمگن و تاثیر هندسه و موقعیت مرزهای داخلی در همگرایی بررسی شده است. نتایج بدست آمده حاکی از قدرت و توانایی روش ارائه شده و تخمین نسبتاً خوب پارامترهای مجهول است.

**کلمات کلیدی:** روش المان‌های مرزی؛ الگوریتم رقابت استعماری؛ شناسایی؛ بهینه‌سازی؛ جسم ناهمگن؛ مدول الاستیسیته متغیر.

### Solving the inverse problem of identifying internal boundaries and estimating the mechanical properties of materials using optimization methods in materials with variable modulus of elasticity

M.H. Mozaffari<sup>1\*</sup>, R. Naseri<sup>2</sup>, M.zare Mehrjardi

<sup>1</sup> Assis. Prof., Mech. Eng., Tech. and Voc. Univ. (TVU), Tehran, Iran.

<sup>2</sup> Assis. Prof., Mech. Eng., Tech. and Voc. Univ. (TVU), Tehran, Iran.

<sup>3</sup> Assoc. Prof., Mech. Eng., Ardakan Univ., Ardakan, Iran

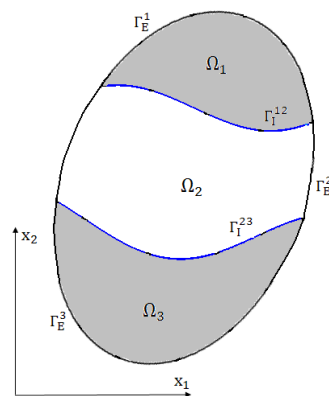
### Abstract

One of the applications of optimization methods is solving the inverse problems of identifying internal boundaries, estimating the mechanical properties of materials and etc. In most of the articles, due to the simplicity of the relationships, the cases where the material is a homogeneous body have been considered, But in industry, when two molten material are combined together, there is a possibility that the resulting material is non-homogeneous material. In this article, identifying the geometry of the irregular internal boundaries between three materials and estimating the mechanical properties is presented. The intermediate material has a variable modulus of elasticity. This problem has been studied by combining three methods of colonial competition algorithm, simplex and conjugated gradient method along with the numerical method of Boundary Elements Method. The effect of the type and hardness of the constituent materials of the non-homogeneous body and the effect of the geometry and position of the internal boundaries on the convergence have been investigated. The obtained results indicate the power and ability of the presented method to estimate unknown parameters.

**Keywords:** Boundary Elements Method (BEM); Imperialist Competitive Algorithm (ICA); Optimization; Identification; Non-homogeneous body; variable modulus of elasticity.

### ۱- مقدمه

در صنعت هنگامی که دو یا چند ماده مذاب در یک قالب روی هم ریخته می‌شوند، با توجه به نوع مواد امکان ترکیب و نفوذ مواد در هم وجود دارد که این امر باعث به وجود آمدن یک ماده جدید ایزوتروپیک یا غیرایزوتروپیک می‌شود. برای مثال مطابق شکل ۱ هنگامی که ماده (۱) در حالت مذاب به ماده (۳) اضافه می‌شود با توجه به نوع مواد، ماده بوجود آمده (ماده (۲)) می‌تواند ایزوتروپیک یا غیرایزوتروپیک بوده و کل جسم در مجموع ناهمگن خواهد بود.



شکل ۱- جسم ناهمگن

در مساله مستقیم، با معلوم بودن هندسه مرزها، خواص مکانیکی مواد و شرایط مرزی، مقادیر مجهول جابجایی و تنش در نقاط داخلی و مرزی جسم بدست می‌آید. در مساله معکوس، خواص مکانیکی سه ماده تشکیل دهنده جسم ناهمگن به همراه هندسه مرزهای داخلی، مجهول می‌باشد، اما جابجایی‌ها بر روی سطح خارجی جسم قابل اندازه‌گیری هستند. در این مقاله ابتدا فرمولاسیون مورد نیاز برای حل مساله مستقیم محاسبه تنش‌ها و جابجایی‌ها، روی مرزهای خارجی یک جسم ناهمگن ارایه شده است، به همین منظور به تاریخچه‌ای از حل مسائل الاستیسیته انجام شده مربوط به مواد ناهمگن یا غیرایزوتروپیک اشاره می‌شود. در ادامه نیز به تاریخچه‌ای از کارهای انجام شده با استفاده از روش المان‌های مرزی و روش‌های بهینه‌سازی در حل مسایل معکوس شناسایی اشاره خواهد شد. کلمنتس و اسکار [۱] یک روش انتگرال مرزی برای حل دسته‌ای از مسائل الاستیسیته در محیط غیرایزوتروپیک بیان کرده‌اند. در این تحقیق با استفاده از یک تابع گرین، معادلات انتگرال مرزی برای حل تعدادی از مسائل الاستیسیته مورد

بررسی قرار گرفته است. در مرجع [۲] یک فرمول‌بندی جدید برای حل مسائل الاستیسیته در محیط غیرایزوتروپیک ارائه شده است. در این فرمول‌بندی معادلات تعادل به فرم معادلات پتانسیل تبدیل شده به گونه‌ای که حل اساسی (تابع گرین) برای آن وجود دارد. پن و آمادی [۳] یک فرمول‌بندی جدید المان مرزی برای حل مسائل الاستیسیته سه‌بعدی در مواد با خواص غیرایزوتروپیک تحت نیروهای حجمی ارائه کرده‌اند. تابع گرین برای این‌گونه محیط‌های غیرایزوتروپیک به فرم تحلیلی بدست آمده است. ایوان و کلمنتس [۴] مسئله مقدار مرزی برای تغییر شکل استاتیکی مواد ناهمگن الاستیک را مورد بررسی قرار داده‌اند. در این مقاله مدول الاستیسیته به طور پیوسته در دو جهت مختصات دکارتی تغییر می‌کند و معادلات انتگرال مرزی برای حل عددی معادلات دیفرانسیل حاکم بر تغییر شکل استاتیکی مواد ناهمگن غیر ایزوتروپیک استخراج شده است. گاوا و همکاران [۵] مسائل الاستیک در مواد با خواص مکانیکی متغیر مانند مواد FGM با روش المان مرزی مورد بررسی قرار داده‌اند. در این تحقیق مسائل دو بعدی و سه بعدی الاستیسیته در محیط ناهمگن که مدول برشی به صورت تابعی دلخواه در نظر گرفته شده است، انجام شده است. در مرجع [۶] روشی برای محاسبه مولفه‌های ماتریس‌های مورد نیاز برای مسائل الاستیسیته در محیط غیرایزوتروپیک در حالت سه بعدی با استفاده از روش المان مرزی ارائه کرده‌اند. در مرجع [۷] حالت کرنش صفحه‌ای برای گروه خاصی از مواد ناهمگن غیر ایزوتروپیک بررسی شده است. در این مقاله مدول الاستیسیته به صورت پیوسته و به صورت تابعی از مختصات تغییر می‌کند و معادلات انتگرالی برای محاسبه تنش و جابجایی استخراج شده‌اند. زانگ و همکاران [۸] فرمول‌بندی معادلات انتگرال مرزی برای حل مسائل الاستیسیته صفحه‌ای در محیط اورتوتروپیک و مواد ناهمگن را ارائه کرده‌اند. در مرجع [۹-۱۱] فرمولاسیون المان مرزی مربوط به مواد ناهمگن خاص ارائه شده است. از کارهای انجام شده در زمینه مسائل شناسایی می‌توان به موارد زیر اشاره کرد. در مرجع [۱۲] محل، اندازه و خواص مکانیکی یک ناخالصی در داخل یک جسم جامد با استفاده از روش المان‌های مرزی و روش بهینه‌یابی محلی تخمین پارامترها شناسایی گردیده است. در مرجع [۱۳] شناسایی مرز نامنظم مشترک بین دو جسم جامد ایزوتروپیک با استفاده از انتقال حرارت، با روش گرادیان مزدوج انجام شده

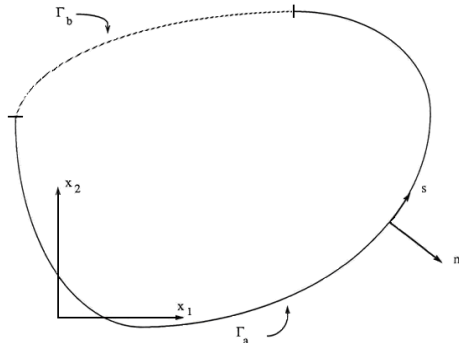
## ۲- فرمولاسیون روش المان‌های مرزی برای مواد ناهمگن

در این قسمت، ابتدا به طور خلاصه، فرمولاسیون مورد نیاز برای حل مساله مستقیم محاسبه تنش‌ها و جابجایی‌ها روی مرزهای خارجی یک جسم ناهمگن با استفاده از روش المانهای مرزی ارائه شده است. معادلات تعادل برای مسایل الاستیک خطی دو بعدی در غیاب نیروهای حجمی به صورت زیر می‌باشد:

$$\sigma_{ij,j} = 0 \rightarrow \begin{cases} \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} = 0 \end{cases} \quad (1)$$

در رابطه بالا  $i, j = 1, 2$  در امتداد محورهای  $x_1, x_2$  و  $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}$  مولفه‌های تنش صفحه‌ای هستند. شرایط مرزی برای معادلات (۱) مطابق شکل (۲) به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{aligned} u_i &= \bar{u}_i & \text{on } \Gamma_a \\ t_i &= \bar{t}_i & \text{on } \Gamma_b \end{aligned} \quad (2)$$



شکل ۲- دامنه جسم ناهمگن دو بعدی

با استفاده از قانون هوک می‌توان هر مولفه تنش را براساس مولفه‌های تغییر شکل نسبی به صورت زیر بیان کرد.

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{hk} = C_{ijkl} u_{h,k} \quad (3)$$

در این رابطه  $C_{ijkl}$  تانسور سختی،  $\varepsilon_{hk}$  مولفه‌های تغییر شکل نسبی و  $u_{h,k}$  بردار جابجایی می‌باشند. برای مواد ناهمگن ایزوتروپ، ماتریس سختی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

است. در مرجع [۱۴] شناسایی شکل هندسی و خواص مکانیکی یک ناخالصی در داخل یک ماده انجام شده است. در مرجع [۱۵] تاثیر شرایط مرزی مختلف در شناسایی هندسه حفره درون یک جسم الاستیک دو بعدی با استفاده از معادلات الاستیسیته خطی و با استفاده از تلفیق روش Pso و CGM انجام شده است. دشتی و خداداد [۱۶] تخمین موقعیت و اندازه حفره داخل یک جسم الاستیک دو بعدی را مورد بررسی قرار داده‌اند. در این تحقیق ابتدا با استفاده از روش الگوریتم ژنتیک شکل حفره به صورت دایره‌ای شکل تخمین زده شده و سپس با روش گرادیان مزدوج هندسه و موقعیت حفره شناسایی می‌شود. در مرجع [۱۷] شناسایی هندسه حفره درون یک جسم الاستیک دو بعدی با استفاده از معادلات الاستیسیته خطی انجام شده است؛ همچنین در مرجع [۱۸-۲۰] حل مساله معکوس تخمین خواص حرارتی و ضریب هدایت حرارتی اجسام مورد بررسی قرار گرفته است.

در این مقاله شناسایی هندسه مرزهای داخلی نامنظم بین سه ماده و تخمین خواص مکانیکی ماده و تعیین ساختار درونی ماده میانی در حالتی که ماده میانی دارای مدول الاستیسیته متغیر است، با تلفیق سه روش الگوریتم رقابت استعماری، سیمپلکس و روش گرادیان مزدوج به همراه روش عددی المان‌های مرزی مورد بررسی قرار گرفته است. حل مساله معکوس براساس کمینه کردن تابع هدف انجام می‌شود. در همه مثال‌ها و حالت‌های حل شده در این مقاله، تابع هدف به صورت مجموع مربعات تفاضل بین جابجایی اندازه‌گیری شده و جابجایی محاسبه شده، از حل مستقیم مساله با استفاده از روش المان مرزی تعریف می‌شود. ابتدا از روش الگوریتم رقابت استعماری برای تعیین پارامترهای مجهول استفاده می‌شود. در ادامه از جواب به دست آمده از روش رقابت استعماری به عنوان حدس اولیه برای روش گرادیان مزدوج استفاده می‌شود و در نهایت برای دقیق‌تر شدن مقادیر مجهول، از جواب‌های به دست آمده از روش گرادیان مزدوج، به عنوان حدس اولیه برای روش سیمپلکس استفاده می‌شود؛ همچنین تاثیر نوع و سختی مواد تشکیل دهنده جسم ناهمگن و تاثیر هندسه و موقعیت مرزهای داخلی در همگرایی مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج بدست آمده حاکی از قدرت و توانایی روش ارائه شده و تخمین نسبتاً خوب پارامترهای مجهول است.

$$\begin{aligned} & \mu(y)u_i(y) \\ &= \int_{\Gamma} U_{ij}(x,y)t_j(x)d\Gamma \\ & - \int_{\Gamma} \mu(x)T_{ij}(x,y)u_j(x)d\Gamma \\ & + \int_{\Omega} \Sigma_{ijl}(x,y)\mu_{,l}(x)u_j(x)d\Omega \end{aligned} \quad (10)$$

معادلات (۱۰) معادلات میدانی هستند. برای استخراج معادلات انتگرالی مرزی میدانی باید معادلات (۱۰) را روی مرزها اعمال کرد. این کار با اعمال  $\Gamma \rightarrow y$  روی رابطه (۱۰) انجام می‌شود.

برای استخراج معادلات لازم برای محاسبه تنش‌ها می‌بایست  $\frac{\partial u_i}{\partial y_h}$  محاسبه شود. با مشتق گرفتن از رابطه (۱۰) نسبت به  $y_h$  و با استفاده از قضیه گوس و با در نظر گرفتن این نکته که روی مرز  $\Gamma_\varepsilon$ ،  $n_l = r_l$  و  $r = \varepsilon$  هستند، در نهایت رابطه زیر به دست می‌آید.

$$u_j(y)\mu_{,l}(y) \int_{\Gamma_\varepsilon} \Sigma_{ijl}(x,y)n_h(x)d\Gamma = J_{ijhk}^\varepsilon \mu_{,l}(y)u_j(y) \quad (11)$$

ترم  $J_{ijhk}^\varepsilon$  به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$J_{ihjk}^\varepsilon = \frac{[(6-8\nu)\delta_{ij} - \delta_{ih}\delta_{jk}]}{16\pi(1-\nu)} \quad (12)$$

چنانچه رابطه (۱۰) روی مرزها در نظر گرفته شود، در نهایت می‌توان به رابطه زیر رسید [۴].

$$[U_\Gamma][u_\Gamma] - [T_\Gamma \quad \Sigma_\Gamma][t_\Gamma] = 0 \quad (13)$$

در رابطه بالا  $t_\Gamma$ ،  $u_\Gamma$  تراکشن‌ها و جابجایی‌های روی مرزها و نقاط داخلی می‌باشند.

### ۳- مساله مستقیم محاسبه تنش‌ها و جابجایی‌ها

#### روی مرزهای خارجی جسم مرکب

در این قسمت نحوه محاسبه تنش‌ها و جابجایی‌ها روی مرزهای خارجی یک جسم مرکب، تشکیل شده از دو جسم همگن و

$$C_{ijhk} = C_{ijhk}(x) \quad (4)$$

یعنی فرض می‌شود که خواص ماده وابسته به موقعیت  $x$  بوده و در جهت این محور تغییر می‌کند. با تلفیق رابطه‌های (۱)، (۳) و (۴) می‌توان نوشت:

$$[C_{ijhk}(x)u_{h,k}(x)]_{,j} = 0 \quad (5)$$

ماتریس سختی  $C_{ijhk}(x)$  که تنها وابسته به موقعیت  $x$  می‌باشد، به صورت حاصلضرب یک تابع پیوسته در تانسور ثابت الاستیک  $\bar{C}_{ijhk}$  در نظر گرفته می‌شود [۴].

$$\begin{aligned} c_{ijhk}(x) &= \mu(x)\bar{c}_{ijhk} \\ &= \mu(x) \left[ \frac{2\nu}{1-2\nu} \delta_{ij}\delta_{hk} \right. \\ & \quad \left. + \delta_{ih}\delta_{jk} + \delta_{ik}\delta_{jh} \right] \end{aligned} \quad (6)$$

که در رابطه بالا  $\delta_{ij}$  دلتای کرونکر و  $\mu(x)$  مدول برشی است.

$$\mu(x) = \frac{E(x)}{2(1+\nu)} \quad (7)$$

در رابطه بالا  $\nu$  ضریب پواسون است. با انتخاب تابع وزن  $U_{ii}(x,y)$  و ضرب آن در رابطه (۵) انتگرال باقی مانده وزنی به دست می‌آید، جاییکه تابع وزن  $U_{ii}(x,y)$  از حل تکین اساسی معادلات (۱) برای حالت مواد همگن، ایزوتروپ و الاستیک در نظر گرفته می‌شود که معادلات دیفرانسیل پاره‌ای (۳) را ارضا می‌کند.

$$c_{ijhk}U_{ii,jk}(x,y) + \delta_{ih}\delta(x-y) = 0 \quad (8)$$

در رابطه بالا  $\delta(x-y)$  تابع دلتای دیراک در نقطه  $y$  است. حل معادله بالا به صورت زیر است.

$$U_{ij} = - \frac{[3-4\nu]\delta_{ij} \ln(r) - r_i r_j}{8\pi\mu(1-\nu)} \quad (9)$$

که در این رابطه  $r = |x-y|$  است. با اعمال قضیه دیورژانس گوس روی رابطه (۸) می‌توان نوشت و در نظر گرفتن خواص تابع دلتای دیراک می‌توان نوشت:

$t_E^2, u_E^2$ : مقادير جابجايي ها و تراكشن ها در گره هاي مرز خارجي  $\Gamma_E^2$  در امتدادهاي  $x_2, x_1$   
 $t_I^{21}, u_I^{21}$ : مقادير جابجايي ها و تراكشن ها در گره هاي مرز مشترك  $\Gamma_I^{21}$  در امتدادهاي  $x_2, x_1$   
 $t_I^{23}, u_I^{23}$ : مقادير جابجايي ها و تراكشن ها در گره هاي مرز مشترك  $\Gamma_I^{23}$  در امتدادهاي  $x_2, x_1$   
 $t_E^3, u_E^3$ : مقادير جابجايي ها و تراكشن ها در گره هاي مرز خارجي  $\Gamma_E^3$  در امتدادهاي  $x_2, x_1$   
 $t_I^{32}, u_I^{32}$ : مقادير جابجايي ها و تراكشن ها در گره هاي مرز مشترك  $\Gamma_I^{32}$  در امتدادهاي  $x_2, x_1$

همانطور كه گفته شد، فرمولاسيون استفاده شده در اين قسمت براي محاسبه ماتريس هاي  $H$  و  $G$  براي ماده ناهمگن مياني ۲ و مواد همگن ۱ و ۲ متفاوت است. براي مولفه هاي جابجايي هر گره  $i$  بر روي مرزهاي هموار و مشترك مي توان نوشت:

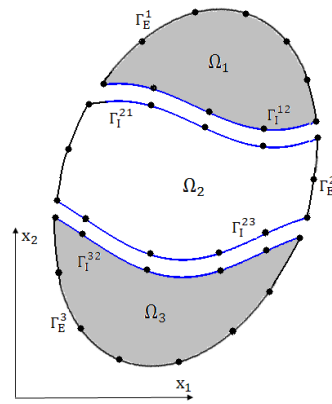
$$u_I^{12} = u_I^{21} \Rightarrow \begin{cases} u_{x_1}^i |_{\Gamma_I^{12}} = u_{x_1}^i |_{\Gamma_I^{21}} \\ u_{x_2}^i |_{\Gamma_I^{12}} = u_{x_2}^i |_{\Gamma_I^{21}} \end{cases} \quad (17)$$

$$u_I^{32} = u_I^{23} \Rightarrow \begin{cases} u_{x_1}^i |_{\Gamma_I^{32}} = u_{x_1}^i |_{\Gamma_I^{23}} \\ u_{x_2}^i |_{\Gamma_I^{32}} = u_{x_2}^i |_{\Gamma_I^{23}} \end{cases}$$

$$t_I^{12} = -t_I^{21} \Rightarrow \begin{cases} t_{x_1}^{(i-1)} |_{\Gamma_I^{12}} = t_{x_1}^{(i)} |_{\Gamma_I^{21}} \\ -t_{x_1}^{(i-1)} |_{\Gamma_I^{21}} = -t_{x_1}^{(i)} |_{\Gamma_I^{12}} \\ t_{x_2}^{(i-1)} |_{\Gamma_I^{12}} = t_{x_2}^{(i)} |_{\Gamma_I^{21}} \\ -t_{x_2}^{(i-1)} |_{\Gamma_I^{21}} = -t_{x_2}^{(i)} |_{\Gamma_I^{12}} \end{cases}$$

$$t_I^{32} = -t_I^{23} \Rightarrow \begin{cases} t_{x_1}^{(i-1)} |_{\Gamma_I^{32}} = t_{x_1}^{(i)} |_{\Gamma_I^{23}} \\ -t_{x_1}^{(i-1)} |_{\Gamma_I^{23}} = -t_{x_1}^{(i)} |_{\Gamma_I^{32}} \\ t_{x_2}^{(i-1)} |_{\Gamma_I^{32}} = t_{x_2}^{(i)} |_{\Gamma_I^{23}} \\ -t_{x_2}^{(i-1)} |_{\Gamma_I^{23}} = -t_{x_2}^{(i)} |_{\Gamma_I^{32}} \end{cases} \quad (18)$$

يك جسم ناهمگن مورد بررسي قرار مي گيرد. با توجه به مطالب گفته شده در قسمت قبل حال اگر دامنه مساله غير يكنواخت باشد، به طوري كه مطابق شكل ۳ جسم از سه ماده مختلف تشكيل شده باشد، به صورتی كه ماده ۱ و ماده ۳ همگن و ماده مياني يك ماده ناهمگن و به صورت تركيبي از ماده ۱ و ۳ باشد. در اين صورت دامنه  $\Omega$  به سه زير دامنه  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  تقسيم مي شود كه هر يك داراي نسبت پواسون و مدول الاستيسيته خاص خود هستند و با دو مرز مشترك  $\Gamma_I^{21}(\Gamma_I^{12})$  و  $\Gamma_I^{23}(\Gamma_I^{32})$  از هم جدا شده اند.



شكل ۳- جسم الاستيك ناهمگن با سه زير ناحیه در تماس

براي ماده مياني ناهمگن از معادلات (۱۳) و براي مواد همگن ۱ و ۲ از فرمول هاي مربوط به مواد همگن استفاده مي - شود. با اعمال معادلات براي هر زير دامنه  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  به صورت جداگانه، مي توان نوشت:

$$\begin{bmatrix} H_E^1 & H_I^{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_E^1 \\ u_I^{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_E^1 & G_I^1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_E^1 \\ t_I^{12} \end{Bmatrix} \quad (14)$$

$$\begin{bmatrix} H_E^2 & H_I^{21} & H_I^{23} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_E^2 \\ u_I^{21} \\ u_I^{23} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_E^2 & G_I^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_E^2 \\ t_I^{21} \\ t_I^{23} \end{Bmatrix} \quad (15)$$

$$\begin{bmatrix} H_E^3 & H_I^{32} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_E^3 \\ u_I^{32} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_E^3 & G_I^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_E^3 \\ t_I^{32} \end{Bmatrix} \quad (16)$$

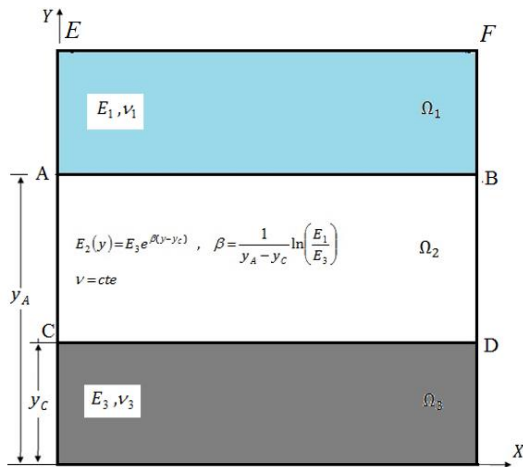
$t_E^1, u_E^1$ : مقادير جابجايي ها و تراكشن ها در گره هاي مرز خارجي  $\Gamma_E^1$  در امتدادهاي  $x_2, x_1$   
 $t_I^{12}, u_I^{12}$ : مقادير جابجايي ها و تراكشن ها در گره هاي مرز مشترك  $\Gamma_I^{12}$  در امتدادهاي  $x_2, x_1$

روی مرز مشترک میانی است. حل دستگاه معادلات فوق با یکی از روش‌های استاندارد قابل انجام خواهد بود. برای مثال یک جسم ناهمگن مرکب از سه ماده در شکل (۴) نشان داده شده است. در حالت ساده مرزهای داخلی منظم و موازی هم در نظر گرفته می‌شود. ماده ۱ ( $\Omega_1$ ) و ماده ۳ ( $\Omega_3$ ) هر دو همگن و ایزوتروپ می‌باشند، ولی ماده میانی ۲ ( $\Omega_2$ ) یک ماده ناهمگن و ایزوتروپ بوده که ضریب پواسون آن ثابت ( $\nu = cte$ ) و مقدار مدول یانگ آن به صورت نمایی از  $E_3$  شروع شده و به  $E_1$  می‌رسد و به شکل رابطه زیر است.

$$E_2(y) = E_3 e^{\beta(y-y_c)} \quad (21)$$

$$\beta = \frac{1}{y_A - y_C} \ln\left(\frac{E_1}{E_3}\right)$$

برای حل مساله مستقیم و معکوس، تعداد گره‌ها روی هر کدام از مرزهای داخلی ۱۰ گره، روی مرزهای خارجی ۳۲ گره، که در مجموع ۵۲ گره در نظر گرفته می‌شود. جهت بررسی صحت و دقت کد نوشته شده، جواب به دست آمده از حل مستقیم با نرم افزار ANSYS مقایسه شده است. نتایج به دست آمده نشان دهنده دقت خوب جواب‌های بدست آمده از حل عددی با استفاده از روش المان‌های مرزی است. همانطور که قبلاً گفته شد، در این مقاله، حل مساله معکوس براساس کمینه کردن تابع هدف و با تلفیق سه روش الگوریتم رقابت استعماری، روش سیمپلکس و روش گردایان مزدوج انجام می‌شود. در ادامه توضیح مختصری در مورد سه روش بهینه سازی ارائه خواهد شد.



شکل ۴- ماده ناهمگن مرکب از سه ماده

در مورد تنش، برای هر گره بایستی تنش‌ها در امتدادهای  $x_1, x_2$  قبل و بعد از آن گره در نظر گرفته شود که برای گره‌های روی مرز داخلی به جز گره‌هایی که در گوشه قرار دارند، تنش قبل از گره  $i$  را با تنش در گره  $i-1$  مساوی در نظر گرفته و شرط مرزی تنش را می‌توان به صورت پیوسته به صورت رابطه ۱۸ در نظر گرفت [۲۱ و ۱۲] و برای گره‌هایی که در گوشه قرار دارند، با توجه به نوع بارگذاری روی جسم مشخص می‌شوند. با اعمال شرایط حاکم و با توجه به اینکه مرزهای مشترک برای هر زیر دامنه به طور جداگانه منظور می‌شود، می‌توان معادلات (۱۶) و (۱۷) و (۱۸) را با هم تلفیق و ساده کرد [۱۲].

در نهایت به طور خلاصه می‌توان نوشت:

$$[H^*] \begin{Bmatrix} u_E^1 \\ u_I^{12} \\ u_E^2 \\ u_I^{23} \\ u_E^3 \end{Bmatrix} = [G^*] \begin{Bmatrix} t_E^1 \\ t_I^{12} \\ t_E^2 \\ t_I^{23} \\ t_E^3 \end{Bmatrix} \quad (19)$$

ماتریس  $[H^*]$  یک ماتریس  $2(N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5) \times 2(N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5)$  و ماتریس  $[G^*]$  یک ماتریس  $4(N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5) \times 2(N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5)$  است که  $N_1$  تعداد گره‌ها بر روی مرز خارجی زیر ناحیه  $\Omega_1$ ،  $N_2$  تعداد گره‌ها بر روی مرز خارجی زیر ناحیه  $\Omega_2$ ،  $N_3$  تعداد گره‌ها روی مرز خارجی زیر ناحیه  $\Omega_3$ ،  $N_4$  تعداد گره‌های بر روی مرز مشترک  $\Gamma_I^{12}$  ( $\Gamma_I^{21}$ ) و  $N_5$  تعداد گره‌های بر روی مرز مشترک  $\Gamma_I^{23}$  ( $\Gamma_I^{32}$ ) است. در این معادله همه مقادیر مجهول جابجایی و تراکشن به سمت راست و همه مقادیر معلوم جابجایی و تراکشن بر روی مرزها، به سمت چپ آورده می‌شود. با انجام این کار معادله بر حسب مجهولات مرتب شده و به صورت زیر در می‌آید:

$$[A]\{x\} = [B] \quad (20)$$

ماتریس مجهولات  $\{x\}$  شامل مقادیر مجهول جابجایی‌ها و تراکشن‌ها روی مرزهای خارجی و کلیه جابجایی‌ها و تراکشن‌ها

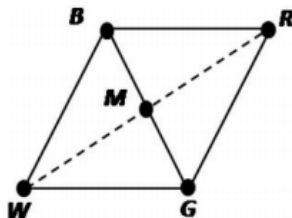
#### ۴- بهینه سازی

##### ۴-۱- الگوریتم رقابت استعماری

الگوریتم رقابت استعماری توسط آتش‌پز گرگری و لوکس در سال ۲۰۰۷ میلادی ارائه شد [۲۲]. الگوریتم رقابت استعماری یک الگوریتم قدرتمند برای بهینه‌سازی با مدل‌سازی ریاضی پدیده سیاسی-اجتماعی ارائه می‌کند. این الگوریتم نظیر سایر روش‌های بهینه‌سازی فراابتکاری با یک جمعیت اولیه آغاز می‌شود. در این الگوریتم چندین کشور به عنوان جمعیت اولیه در نظر گرفته می‌شوند و کشورهای موجود به دو دسته استعمارگر و مستعمره تقسیم می‌شوند. هرکشورامپریالیست، بسته به قدرت خود، تعدادی از کشورهای مستعمره را به سلطه‌ی خود در می‌آورد و در مجموع یک امپراطوری را تشکیل می‌دهند. در مرحله بعد سعی می‌شود، کشورهای استعمارگر با هدف تحلیل فرهنگ و ساختار اجتماعی مستعمره‌ها، کشورهای مستعمره در راستاهای مختلف سیاسی و اجتماعی به آن‌ها نزدیک شوند. سپس مستعمره‌ها به سمت کشور استعمارگر حرکت داده می‌شوند. در حین اجرای الگوریتم ممکن است، بعضی از مستعمره‌ها به نقاطی در تابع هزینه برسند که هزینه کم‌تری نسبت به مقدار تابع هزینه در موقعیت استعمارگر داشته باشند. در این حالت جای مستعمره و استعمارگر عوض می‌شود و الگوریتم با کشور استعمارگر در موقعیت جدید ادامه می‌یابد. پس از محاسبه هزینه هر امپراطوری، مستعمره‌های امپراطوری‌های ضعیف حذف می‌شوند و به امپراطوری‌های قوی‌تر ملحق می‌شوند. فرآیند جذب یا رقابت بین استعمارگرها تکرار می‌شود. در هر مرحله از تکرار الگوریتم، استعمارگری که قدرت کم‌تری دارد، یکی از مستعمره‌های خود را از دست می‌دهد. مستعمره جدا شده از استعمارگر ضعیف‌تر، دارای کم‌ترین قدرت در بین تمام مستعمره‌های مربوط به آن استعمارگر است. برای تصاحب مستعمره‌ها یک رقابتی میان کلیه امپراطوری‌ها ایجاد می‌شود [۲۳]. این روند تا رسیدن به یک استعمارگر دارای بیش‌ترین قدرت ادامه می‌یابد. برای اتمام اجرای الگوریتم شرایطی به عنوان شرایط خاتمه در نظر گرفته می‌شود. از جمله این شرایط تعداد تکرار معینی از الگوریتم یا زمان اجرای مشخص را می‌توان نام برد. الگوریتم با رسیدن به شرایط خاتمه یا رسیدن به یک استعمارگر نهایی پایان می‌یابد. مراحل پیاده‌سازی این الگوریتم به طور کامل در مرجع [۲۲ و ۲۳] آورده شده‌است.

#### ۴-۲- روش سیمپلکس

این روش که توسط اسپندلی ابداع گردیده است، از یک شکل هندسی با قاعده برای انتخاب نقاط رئوس سیمپلکس جهت محاسبه تابع هدف استفاده می‌شود. در حالتی که مساله دو بعدی در نظر گرفته شود، یک مثلث متساوی‌الاضلاع شکل هندسی مزبور را تشکیل می‌دهد و در حالتی که مسئله سه بعدی باشد، این شکل به یک چهاروجهی با قاعده تبدیل می‌شود [۲۴]. با افزایش تعداد متغیرها تعداد رئوس افزایش پیدا می‌کند. برای یک مساله در حالت دو بعدی برای تعیین هر امتداد جستجو ابتدا  $f(x)$  در سه رأس مثلث محاسبه می‌شوند، سپس امتداد جستجو از مرکز مثلث عبور کرده و از رأس مربوط به بزرگترین مقدار  $f(x)$  محاسبه شده، دور می‌شود. شکل ۵ این فرآیند را نشان می‌دهد. در این شکل  $W$  راسی است که در آن تابع  $f(x)$  بیشترین مقدار را دارد. پس از آن مطابق شکل یک مثلث متساوی‌الاضلاع دیگر ساخته شده و رأس به دست‌آمده به عنوان نقطه جدید انتخاب و  $f(x)$  در آن نقطه محاسبه شده که به این فرآیند انعکاس گفته می‌شود. به این ترتیب یک امتداد جستجوی جدید به دست می‌آید، این عمل مطابق شکل ۵ آنقدر ادامه می‌یابد تا سیمپلکس نقطه بهینه را در میان گیرد.



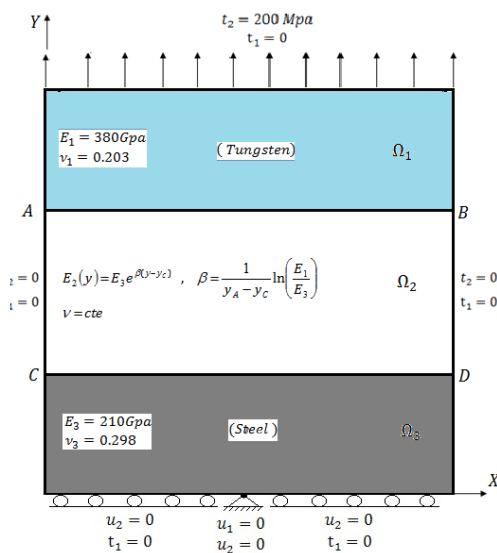
شکل ۵- مرحله انعکاس در روش بهینه‌سازی سیمپلکس

در این هنگام ادامه روند فوق نمی‌تواند منجر به نزدیکی بیشتر به نقطه بهینه گردد؛ بنابراین اندازه سیمپلکس باید کاهش یابد. در این حالت اضلاع آخرین سیمپلکس به دو نیم تقسیم شده تا مجدداً نقطه بهینه خارج از سیمپلکس قرار گیرد و روند فوق ادامه پیدا می‌کند.

#### ۴-۳- روش گرادیان مزدوج

معرفی این روش ابتدا نیازمند تعریف بردار گرادیان است. بردار گرادیان عبارت است از بردار یک نقطه  $X$  که امتداد بزرگترین افزایش در  $f(x)$  را مشخص می‌کند. بردار گرادیان در نقطه  $X$

در این تحقیق، حل مسایل معکوس تنها با اندازه‌گیری‌های سطحی مولفه‌های جابجایی گره‌های رو مرز خارجی بدست آمده از آزمایش کشش است. در این تحقیق از نتایج آزمایشگاهی استفاده نمی‌شود و برای حل مسائل معکوس از اطلاعات به دست آمده از حل مستقیم مسئله استفاده خواهد شد. در واقع با شبیه سازی یک مسئله کشش ساده، از نتایج به دست آمده از حل مستقیم مسئله، به عنوان اطلاعات در دسترس استفاده خواهد شد. برای تعیین ساختار درونی ماده میانی مطابق رابطه (۲۱) می‌بایست مقادیر  $y_A$  و  $y_C$  محاسبه شوند. برای حل این مساله معکوس و محاسبه پارامترهای مجهول، از روش بهینه‌سازی رقابت استعماری و روش سیمپلکس استفاده شده است. همانطور که قبلاً گفته شد، حل مساله معکوس براساس کمینه کردن تابع هدف انجام می‌شود.



شکل ۶- ماده ناهمگن مرکب از سه ماده

تابع هدف به صورت مجموع مربعات تفاضل بین جابجایی اندازه‌گیری شده ( $u_e^m$ ) و جابجایی محاسبه شده از حل مستقیم مساله با استفاده از روش المان‌های مرزی ( $u_c^m$ ) در گره  $m$ ام بوده و به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$j[\hat{\Gamma}] = \sum_{m=1}^M [u_c^m - u_e^m]^2 \quad (23)$$

بر کانتور  $f(x)$  عمود است. امتداد جستجو در بهینه‌سازی برابر است با بردار گرادیان که اصطلاحاً آن را تیزترین صعود نیز می‌نامند. امتداد جستجو در کمینه‌سازی برابر منفی گرادیان می‌باشد که اصطلاحاً آن را تیزترین فرود می‌نامند. در روش گرادیان مزدوج با انتخاب بردارهای متوالی جهت به صورت نمونه‌ای مزدوج از گرادیان‌های متوالی به دست می‌آیند. به این ترتیب جهت‌های مربوطه از قبل مشخص نمی‌شوند، بلکه در هر تکرار به صورت متوالی تعیین می‌شوند. در این روش، از ترکیب بردار گرادیان در تکرار فعلی با بردار گرادیان در تکرار قبلی برای به دست آوردن امتداد جستجوی جدید استفاده می‌شود [۲۴]. این روش دارای سه مزیت است: اول اینکه به استثنای مواردی که جواب در کمتر از  $n$  مرحله بدست می‌آید گرادیان همواره ناصفر و نسبت به بردارهای جهت قبلی مستقل خطی است. مزیت دوم اینکه، روش گرادیان مزدوج دارای فرمول ساده‌ای است که برای تعیین بردار جهت بکار گرفته می‌شود و سوم، به دلیل آنکه جهت‌ها بستگی به گرادیان‌ها دارند، فرایند مربوطه در هر مرحله پیشرفت خوب و یکنواختی به سوی جواب دارد.

## ۵- شبیه سازی مساله معکوس شناسایی مرزهای

### منظم و تعیین ساختار درونی ماده میانی

در مساله معکوس مورد نظر، مرزهای داخلی بین سه ماده و خواص مکانیکی (مدول الاستیسیته و ضریب پواسون) مواد تشکیل دهنده جسم ناهمگن مجهول است، ولی جابجایی‌ها بر روی مرزهای خارجی جسم قابل اندازه‌گیری هستند. برای شبیه سازی این مساله معکوس، ماتریس‌های زیر تعریف می‌شوند:

$[u_e]$ : بردار ستونی ستونی شامل  $M$  جابجایی اندازه‌گیری شده مرزی

$[u_c]$ : بردار ستونی شامل همان  $M$  جابجایی مرزی که به وسیله روش المان مرزی محاسبه می‌شوند.

$[\Gamma]$ : بردار ستونی شامل هفت پارامتر مجهول ( $E_1, \nu_1, \nu_2, E_3, \nu_3, y_A, y_C$ ) که باید در مساله معکوس تخمین زده شوند؛ بنابراین ماتریس مجهول  $\Gamma$  به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$[\Gamma] = [E_1, \nu_1, \nu_2, E_3, \nu_3, y_A, y_C] \quad (22)$$



جدول ۲- میزان خطا ناشی از موقعیت مرزهای داخلی

Case number	$y_A$	$y_C$	درصد خطا	مقدار تابع هدف
۱	۰/۷	۰/۳	۰/۲۱۶	$۱/۳ \times ۱۰^{-۶}$
۲	۰/۵	۰/۴	۱/۲۵۹	$۹/۵ \times ۱۰^{-۵}$
۳	۰/۹	۰/۱	۱/۹۴۵۹	$۴/۶ \times ۱۰^{-۴}$
۴	۰/۹	۰/۸	۳/۹۹۴	$۴/۳ \times ۱۰^{-۲}$
۵	۰/۲	۰/۱	۲/۲۹۴	$۸/۳ \times ۱۰^{-۴}$

نتایج به دست آمده در جدول ۲ آورده شده است. از نتایج به دست آمده می‌توان نتیجه گرفت، هر چه مرزهای داخلی نزدیک به مرز بالایی یا پایینی جسم باشد، خطا نیز افزایش می‌یابد.

#### ۲-۵- تاثیر نوع و سختی مواد تشکیل دهنده جسم ناهمگن در همگرایی

در این قسمت تاثیر سختی مواد تشکیل دهنده جسم ناهمگن در شناسایی مرزهای داخلی و تخمین خواص مکانیکی مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای بررسی اثر سختی مواد تشکیل دهنده جسم ناهمگن در روند همگرایی، چند مساله برای جسم ناهمگن تشکیل شده از مواد مختلف حل شده که خطای حاصل از نتایج به دست آمده در جدول ۳ آورده شده است. ملاحظه می‌شود که با کاهش اختلاف سختی مواد تشکیل دهنده جسم ناهمگن، میزان خطای پارامترهای تخمینی نیز بیشتر می‌شود. نتایج بدست آمده حاکی از قدرت و توانایی روش ارایه شده و تخمین نسبتاً خوب پارامترهای مجهول می‌باشد.

جدول ۳- تاثیر نوع و سختی مواد تشکیل دهنده جسم ناهمگن در میزان خطا

مواد	مدول یانگ (MPa)	نسبت پواسون	درصد خطا
۱	تنگستن $\Omega_1$	۳۸۰	۰/۲۰۳
	فسفر برنز $\Omega_3$	۱۱۱	۰/۳۴۹
۲	مونل $\Omega_1$	۱۷۹	۰/۳۲۰
	مولیبیدن $\Omega_3$	۳۳۱	۰/۳۰۷
۳	استیل $\Omega_1$	۲۱۰	۰/۲۹۸
	نیکل $\Omega_3$	۱۲۷	۰/۳۲۲
۴	چدن $\Omega_1$	۱۰۰	۰/۲۱۱
	خاکستری $\Omega_3$	۱۰۶	۰/۳۲۴

برای حل یک نمونه مساله یک ماده ناهمگن مطابق شکل ۶ در نظر گرفته می‌شود. این ماده از ترکیب تنگستن فولاد  $\Omega_1 (E_{Ti} = 380 GPa, \nu = 0.203)$  و ماده میانی ناهمگن  $\Omega_3 (E_{St} = 210 GPa, \nu = 0.298)$  که فرض می‌شود، مدول یانگ آن به صورت نمایی تغییر می‌کند و دارای ضریب پواسون ثابت ( $\nu_2 = 0.245$ ) است، تشکیل شده است؛ همچنین مقدار  $y_C = 0.3$  و  $y_A = 0.7$  است. ابتدا از روش الگوریتم رقابت استعماری با جمعیت اولیه ۴۵۰ و تعداد امپراطوری ۴۰ برای تعیین پارامترهای مجهول استفاده می‌شود. سپس از جواب‌های به دست آمده از این روش به عنوان حدس اولیه برای روش سیمپلکس استفاده می‌شود تا جواب‌های دقیق‌تری بدست آید. جواب به دست آمده از این دو روش در جدول ۱ آمده است.

جدول ۱- نتایج حاصل از روش ICA و سیمپلکس

پارامترها	مقدار واقعی	جواب بدست آمده از روش ICA	جواب بدست آمده از روش SM
$E_1 (MPa)$	۳۸۰	۳۵۰	۳۷۹
$\nu_1$	۰/۲۰۳	۰/۱۷۵	۰/۲۰۳
$\nu_2$	۰/۲۴۵	۰/۲	۰/۲۴۴
$E_3 (MPa)$	۲۱۰	۲۲۶	۲۱۱/۵
$\nu_3$	۰/۲۹۸	۰/۳۴	۰/۲۹۹
$y_A$	۰/۷	۰/۵	۰/۷۱
$y_C$	۰/۳	۰/۲۲	۰/۲۹۸
خطای میانگین %		۱۶/۳۷۷	۰/۵۴۵
مقدار تابع هدف		$۷/۶ \times ۱۰^{-۲}$	$۴/۳ \times ۱۰^{-۵}$

#### ۱-۵- تاثیر هندسه و موقعیت مرزهای داخلی در همگرایی

برای بررسی تاثیر موقعیت مرزهای داخلی در روند همگرایی، حالت‌های متنوعی از موقعیت مرزها حل شده است. در تمامی این بررسی‌ها جسم ناهمگن مورد نظر مطابق شکل ۶ از کادر مربعی تنگستن- فولاد است. مثال‌های حل شده برای موقعیت مرزها در حالت‌های مختلف، شامل مرزهای داخلی نزدیک به هم، مرزهای داخلی دور از هم، مرزهای داخلی نزدیک به مرز بالایی و پایینی جسم است.

$$[\Gamma] = [\Gamma^1 \quad \Gamma^2 \quad \Gamma^3] = [y_1^1, y_2^1, \dots, y_{10}^1, y_1^2, y_2^2, \dots, y_{10}^2, y_2^3] \quad (25)$$

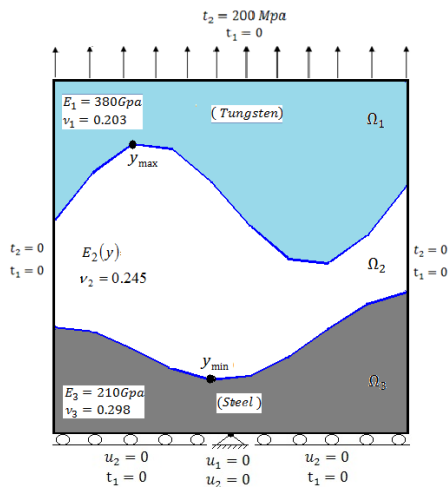
با شناسایی مرزهای داخلی مقدار  $y_{\min}$  و  $y_{\max}$  نیز محاسبه شده و با جایگذاری در رابطه (۲۴) ساختار درونی ماده میانی نیز تخمین زده می‌شود. برای این نمونه مساله مقدار واقعی  $y_{\min} = 0.15$  و  $y_{\max} = 0.8236$  بنا بر این ساختار درونی ماده میانی به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$E_2(y) = 210e^{\beta(y-0.15)} \quad (26)$$

$$\beta = \frac{1}{0.8236 - 0.15} \ln\left(\frac{380}{210}\right)$$

$$\nu_2 = 0.245$$

برای حل مساله معکوس به منظور شناسایی مرزهای داخلی و تخمین ساختار درونی ماده میانی، ابتدا از روش همگانی رقابت استعماری استفاده می‌شود.



شکل ۸- مشخصات هندسی و شرایط مرزی جسم ناهمگن با مرزهای نامنظم داخلی

برنج زرد	$\Omega_3$			
فسفر برنز	$\Omega_1$	۱۱۱	۰/۳۴۹	۱/۲۹۴
برنج زرد	$\Omega_3$	۱۰۶	۰/۳۲۴	

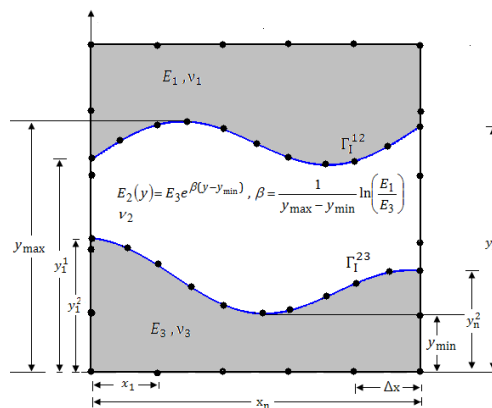
### ۶- شبیه سازی مساله معکوس شناسایی مرزها و تخمین خواص درونی ماده میانی در حالت مرزهای نامنظم داخلی

در قسمت قبل مسئله بررسی شده مربوط به حالتی بود که مرزهای داخلی به صورت منظم و موازی بودند. در این قسمت حالتی که مرزهای داخلی به صورت نامنظم باشند، مورد بررسی قرار می‌گیرد. در حالتی که مرزهای داخلی نامنظم هستند مدول یانگ ماده میانی را مطابق شکل ۷ به شکل نمایی فرض کرده و به صورت رابطه زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$E_2(y) = E_3 e^{\beta(y-y_{\min})} \quad (24)$$

$$\beta = \frac{1}{y_{\max} - y_{\min}} \ln\left(\frac{E_1}{E_3}\right)$$

برای حل یک مساله به منظور تخمین مرزهای داخلی و تعیین ساختار درونی ماده میانی، یک ماده ناهمگن با مرزهای داخلی نامنظم و مطابق شکل ۸ در نظر گرفته می‌شود. روند شبیه‌سازی این مساله معکوس نیز مانند حالت قبل بوده، با این تفاوت که پارامترهای مجهول که باید تخمین زده شوند، ۲۱ پارامتر بوده و به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

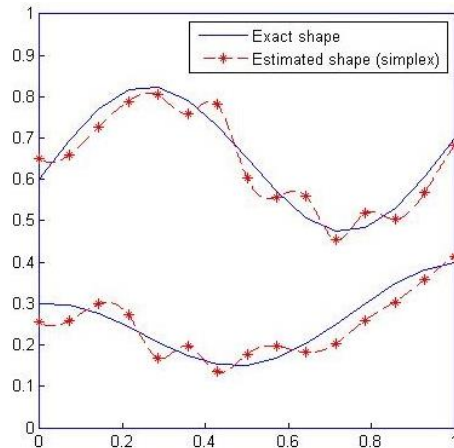


شکل ۷- مشخصات و پارامترهای هندسی جسم ناهمگن با مرزهای نامنظم داخلی

$$E_2(y) = 210e^{\beta(y-0.1348)}$$

$$\beta = \frac{1}{0.8065 - 0.1348} \ln\left(\frac{380}{210}\right) \quad (27)$$

$$v_2 = 0.2395$$

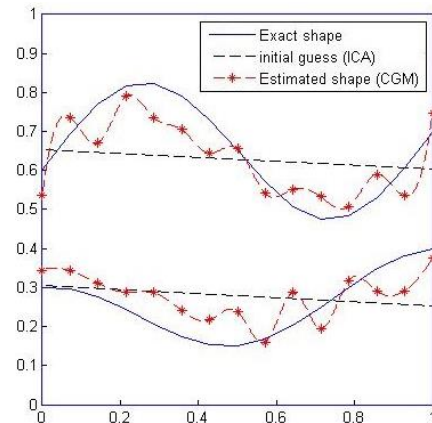


شکل ۱۰- شناسایی مرزهای جسم ناهمگن همراه ه تخمین ساختار درونی ماده میانی با الگوریتم SM

در مقالاتی که در زمینه حل مسایل معکوس شناسایی ساختار داخلی ماده، تعیین مرزهای داخلی، شناسایی حفره‌ها و تخمین خواص مکانیکی مواد انجام شده است، درصد خطای محاسبه شده با توجه به نوع مساله و روش مورد استفاده، در بازه ۰/۱ درصد تا ۱۲ درصد گزارش شده است. البته در مواردی که اثر خطاهای غیرقابل اجتناب در اندازه‌گیری داده‌های ورودی هم بررسی شده، میزان خطای بیش از ۱۲ درصد هم گزارش شده است. با توجه به نتایج به‌دست آمده در این مقاله می‌توان به توانایی روش ارائه شده برای حل مساله معکوس و شناسایی مرزهای داخلی و تخمین خواص مکانیکی جسم اشاره کرد.

## ۶-نتایج

در این تحقیق شناسایی هندسه مرزهای داخلی منظم و نامنظم بین سه ماده، تخمین خواص مکانیکی مواد و تعیین ساختار درونی ماده میانی با تلفیق سه روش الگوریتم رقابت استعماری، به عنوان روش بهینه‌سازی همگانی، برای به دست آوردن بهترین حدس اولیه، روش گرادیان مزدوج و روش سیمپلکس به عنوان روش بهینه‌سازی محلی در حالتی که ماده میانی یک ماده با مدول الاستیسیته متغیر است، مورد تحلیل و بررسی قرار گرفت. براساس نتایج به‌دست آمده می‌توان گفت



شکل ۹- شناسایی مرزهای جسم ناهمگن همراه ه تخمین ساختار درونی ماده میانی با ICA و CGM

الگوریتم رقابت استعماری مطابق شکل ۹ با تخمین دو گره اول و آخر روی هر یک از مرزهای مشترک داخلی (در مجموع چهار پارامتر مجهول)، این دو مرز را به صورت یک خط راست تخمین می‌زند. با تخمین حدس اولیه توسط ICA ادامه کار به روش گرادیان مزدوج واگذار می‌شود. الگوریتم CGM با شرط  $\varepsilon = 0.001$  پس از ۷۰ دوره تکرار ( $iter_{CGM} = 70$ ) متوقف می‌شود. مرز تخمین زده شده توسط CGM در شکل ۹ نشان داده شده است. میزان خطای محاسبه شده از رابطه برای مرزهای تخمین زده شده توسط الگوریتم CGM برابر ۱۸/۱۰٪ است. ضریب پواسون تخمین زده برای ماده میانی توسط این روش نیز برابر  $v_2 = 0.221$  است. برای دقیق‌تر شدن مرزهای شناسایی شده، در ادامه از جواب به دست آمده از روش CGM به عنوان حدس اولیه برای روش سیمپلکس استفاده می‌شود و در نهایت مرزهای تخمینی به صورت نشان داده شده در شکل ۱۰ به دست می‌آیند. الگوریتم SM با شرط  $\varepsilon = 0.001$  پس از ۱۵۰۰ دوره تکرار متوقف می‌شود. میزان دقت مرزهای شناسایی شده برابر ۹۰/۸۵٪ است که نشان دهنده آن است که استفاده از الگوریتم SM دقت مرزهای تخمینی را حدود ۹/ نسبت به روش قبل بهبود بخشیده است.

همچنین ضریب پواسون تخمینی برای ماده میانی توسط SM نیز برابر  $v_2 = 0.2395$  و مقدار  $y_{max} = 0.8065$  و  $y_{min} = 0.1348$  تخمین زده شده است؛ در نتیجه معادله نمایی ضریب یانگ برای ماده میانی به صورت معادله زیر به دست می‌آید.

- orthotropic elastic media. Appl Math Model 36(10): 4862-4875
- [9] Ruocco E, Minutolo V (2012) Two-Dimensional Stress Analysis of Multi region Functionally Graded Materials Using A Field Boundary Element Model. Comps B Eng 43(2):663-672.
- [10] Wang H, Qin Q.H (2012) Boundary integral based graded element for elastic analysis of 2D functionally graded plates. Eur J Mech A Solids 33:12-23.
- [11] Kim H. K, Paulino G. H (2002) Isoperimetric graded finite elements for nonhomogeneous isotropic and orthotropic materials. J Appl Mech 69(4): 502-514.
- [12] Khodadad-Saryazdi M (1990) Application of the Characterization of the Interior of an inhomogeneous Body Using Surface Measurements [Doctoral dissertation, Michigan State University]. Michigan State University, East Lansing, USA
- [13] Huang C.H, Bor H.C (1997) An inverse geometry problem in identifying irregular boundary configurations. Int J Heat Mass Transf 40(9): 2045-2053.
- [14] Lee H.S, Park C.J & Park H.W (2000) Identification of geometric shapes and material properties of inclusions in two-dimensional finite bodies by boundary parameterization. Comput Methods Appl Mech Eng 1(3): 1-20.
- [15] Dashti-Ardakani M, Khodadad M (2011) Investigating the Effect of Different Boundary Conditions on the Identification of a Cavity Inside Solid Bodies. Int J Advanced Design and Manufacturing Tech 4(4).
- [16] Dashti-Ardakani M, Khodadad M (2013) A shape identification problem in estimating the location and the geometry of a cavity inside two-dimensional finite bodies. Int J Comput Methods 10(6); 1350042 .
- [17] Benmeghnia N (2020) Cavities identification in linear elasticity: energy-gap versus L2-gap cost functional, Inverse Probl Sci Eng 29 (7).
- [18] Shafiee H, Hosseini Sarvari S.M (2021) Inverse estimation of temperature-dependent refractive index profile in conductive-radioactive media. Inverse Probl Sci Eng, 10(5): 580-588.
- [19] Somasundharam S, Reddy K.S (2017) Inverse estimation of thermal properties using Bayesian inference and three different sampling techniques. Inverse Probl Sci Eng 25(10): 73-88
- [20] Sohail R, Reddy G & Dulikravich S (2019) Simultaneous determination of spatially varying thermal conductivity and specific heat using boundary temperature measurements. Inverse Probl Sci Eng 27(11).
- که الگوریتم ICA در تخمین یک حدس اولیه بهینه مناسب برای شروع کار الگوریتم‌های محلی می‌تواند موثر واقع شود. استفاده از روش سیمپلکس به عنوان روشی که نیاز به مشتق-گیری و گرادیان‌گیری ندارد، برای حل معکوس شناسایی مرزها به کار گرفته شده است. تأثیر این روش به ویژه در دقت تشخیص مرزهای داخلی و خواص مکانیکی ماده میانی بسیار قابل ملاحظه است، همچنین برای مرزهایی که در کرانه‌های خارجی جسم قرار دارند و برای حالتی که مواد، ضریب سختی نزدیک به هم دارند، تخمین به خوبی صورت می‌گیرد. از جمله کاربردهای اساسی روش پیشنهادی در این پژوهش می‌توان به کاربردهای آن در صنایع ریخته‌گری اشاره کرد. از جمله مزایای روش پیشنهادی این است که اجرای آزمایشی همچون آزمایش کشش ساده در مقایسه با سایر روش‌های مرسوم تشخیص و شناسایی مثل استفاده از پرتوهای لیزر یا التراسونیک بسیار ارزان بوده و از این رو در بسیاری از موارد توجیه اقتصادی پیدا می‌کند.

#### مراجع

- [1] Clements L, Oscar A. C (1981) The boundary integral equation for the solution of a class of problems in element method for anisotropic elasticity. J. Austral. Math. Soc 121(2):462-465.
- [2] Qingbo A.O (1995) A new boundary element method for plane anisotropic elasticity. Comput Struct, 55(1): 119-126.
- [3] Pan E, Amadie B (1996) A 3-D new boundary element method formulation of anisotropic elasticity with gravity. Appl Math Model 20(2):114-120.
- [4] Ivan M, Clements L (2001) A boundary element method for anisotropic inhomogeneous elasticity. Int J Solids Struct 38(32): 5747-5763.
- [5] Gao X.W, Zhangb Ch, Guoa L (2007) Boundary-only element solutions of 2D and 3D nonlinear and nonhomogeneous elastic problems. Eng Anal Bound Elem 31:974-982.
- [6] Wang C.D, Denda M (2007) 3D BEM for general anisotropic elasticity. Int J Solids Struct 44(22): 7073-7091.
- [7] Wang C.Y, Hou J.Y, Wang W.J (2010) Fundamental Solutions For An In homogeneous Cross-An Isotropic Material Deu To Horizontal And Vertical Plane Strain Line Loads. J of Mech Of Materials & Structures 5(2): 241-262
- [8] Zhang Y, Sladek V, Zhaoyan L (2012) A new boundary integral equation formulation for plane

- [23] Sheikhi M, Ghoddosian A (2013) A Hybrid Imperialist Competitive Ant Colony Algorithm for Optimum Geometry Design of Frame Structures. *Struct Eng & Mech* 46(3): 403-416.
- [24] Majzoobi GH (2006) *Advanced numerical methods*. 3rd edn. Bu-Ali Sina University, Iran. (In Persian)
- [21] Khodadad M, Dashti-Ardakani M (2008) Inclusion Identification by Inverse Application of Boundary Element Method, Genetic Algorithm and Conjugate Gradient Method. *Am J Appl Sci* 5 (9): 1158-1166.
- [22] Atashpaz-Gargari E, Lucas C (2007) Imperialist competitive algorithm: an algorithm for optimization inspired by imperialistic competition. *IEEE congress on evolutionary computation*, Singapore.