



تحلیل سینماتیک مستقیم و معکوس ربات دلتا دارای مچ کروی با استفاده از سیستم استنتاج فازی عصبی تطبیقی

آیدین زردست^۱، حبیب احمدی^{۲*} و مهناز شریفنیا^۳

^۱ کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران

^۲ دانشیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران

^۳ دانشجوی دکتری، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۰۶/۰۴؛ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۰/۰۸/۰۹؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۰۸/۲۴

چکیده

در این تحقیق تحلیل سینماتیک مستقیم و سینماتیک معکوس برای یک ربات هیبرید شش درجه آزادی که از اتصال یک ربات موازی کروی با سه درجه آزادی دورانی به ربات موازی دلتا حاصل شده انجام شده است. مزیت این ترکیب، مستقل بودن معادلات مکان از معادلات جهت‌گیری فضایی است؛ به گونه‌ای که می‌توان بدون هیچ محدودیتی مجری نهایی ربات را با هر جهت‌گیری که توسط ربات موازی کروی در دسترس باشد، به هر مکانی از فضای کاری ربات دلتا منتقل کرد. از این‌رو مدل سینماتیکی این دو ربات موازی به‌صورت مستقل از هم استخراج شده و در نهایت برای کار به‌صورت یک پلتفرم یکپارچه با یکدیگر ترکیب شده‌اند. یک مدل مکانیکی از ربات در محیط Simscape نرم‌افزار MATLAB پیاده‌سازی شده است. سپس دقت و صحت این دو مدل بررسی و نشان داده شده است که کاملاً بر هم منطبق هستند؛ همچنین فضای کاری انتقالی و فضای کاری دورانی برای مجری نهایی ربات موازی هیبرید نیز به کمک روش‌های عددی از روابط سینماتیک ربات محاسبه شده است. علاوه بر این از سینماتیک معکوس ربات برای پیاده‌سازی یک سیستم استنتاج فازی عصبی تطبیقی (ANFIS) جهت پیش‌بینی پاسخ‌های سینماتیک مستقیم با دقت بالا استفاده شده است.

کلمات کلیدی: ربات هیبرید؛ ربات دلتا؛ ربات موازی کروی؛ سینماتیک ربات موازی؛ سیستم استنتاج فازی عصبی تطبیقی.

Kinematic and inverse kinematic analysis of hybrid Delta parallel robot with spherical wrist using Adaptive Neuro Fuzzy Inference System

Aidin Zardast¹, Habib Ahmadi^{2*}, Mahnaz Sharifnia³

¹ M.sc, Mech. Eng., Shahrood Univ., Shahrood, Iran

² Assoc. Prof., Mech. Eng., Shahrood Univ., Shahrood, Iran

³ Ph.D. Student, Mech. Eng., Shahrood Univ., Shahrood, Iran

Abstract

In this research, direct kinematic and inverse kinematic analysis of a 6 DOF hybrid robot has been performed by connecting a spherical parallel robot with three degrees of rotational freedom to a delta parallel robot. The advantage of this combination is that the location equations are independent of the spatial orientation equations so that the robot can be moved to any location from the Delta robot workspace without any limitations, with any orientation that is available through a spherical parallel robot. Therefore, the kinematic models of these two parallel robots are extracted independently and ultimately combined to work as an integrated platform. A mechanical model of the robot is implemented in Simscape environment of MATLAB software. Then, the accuracy of these two models is checked and shown to be perfectly consistent. The transitional and rotational workspace for the end-effector of the hybrid parallel robot have also been calculated using robot kinematic relations and by the help of numerical methods. Additionally, the robot inverse kinematics has been used to implement an adaptive neuro fuzzy inference system (ANFIS) to predict kinematic responses with high accuracy.

Keywords: Hybrid manipulator; Delta robot; Spherical parallel robot; Parallel robot kinematic; Adaptive Neuro Fuzzy Inference System (ANFIS).

۱- مقدمه

به منظور مدل سازی دینامیکی و سینماتیکی ربات دلتا، پیروت و همکاران [۱] تلاش کردند تا با در نظر گرفتن پارامترهای سینماتیکی مطلوب و طرح چند فرضیه ساده سازی برای مدل استاتیکی و دینامیکی آن، سینماتیک و دینامیک کامل ربات را ارائه دهند. استایکو و همکاران [۲] با کمک روابط ماتریس-های تکرارشونده، تجزیه و تحلیل هندسی، سینماتیک و دینامیک ربات دلتا را انجام دادند. آنها با کمک روش توان های مجازی، اقدام به حل دینامیک معکوس ربات نمودند و در نهایت برخی از روابط را بر پایه ماتریس های بازگشتی بیان کردند. مصطفی و همکاران در مرجع [۳] با محاسبه سینماتیک مستقیم ربات دلتا از راه محاسبه محل تلاقی سه کره در فضا، نتایج خود را با نمونه واقعی ربات دلتا تطبیق دادند. پس از آن، استایکو [۴] سینماتیک و دینامیک ربات دلتا را به فرم ماتریس های بازگشتی بیان کرد. وی برای محاسبه دینامیک ربات از روش کار مجازی استفاده کرد.

اولین نمونه ربات موازی کروی در سال ۱۹۲۸ توسط گوینت [۵] معرفی شد. گاسلین و لووآ در [۶] تأثیر چیدمان-های مختلف موتور را در سینماتیک یک ربات موازی کروی سه درجه آزادی مورد بررسی قرار دادند؛ همچنین گاسلین و همکاران [۷] برای حل سینماتیک مستقیم ربات موازی کروی یک روش جبری پیشنهاد کردند. آنها ساختار خاصی را برای ربات قائل نشدند؛ به گونه ای که حل آنها قابل استفاده برای هر ربات موازی کروی با سه درجه آزادی باشد. علاوه بر این گاسلین با همراهی پیر [۸] یک ربات موازی کروی با سرعت و دقت بالا را به عنوان پایه نگه دارنده دوربین طراحی و پیاده سازی کرده و به صورت عملی مورد بررسی قرار دادند.

جی و وو در مرجع [۹] برای یک ساختار خاص از ربات موازی کروی روشی را ارائه کردند که منجر به محاسبه معادلات سینماتیک مستقیم ربات به صورت چند جمله ای های درجه دوم تک متغیره می شد که حل جبری داشتند. بونو و همکاران [۱۰] مدهای کاری مختلف یک ربات موازی کروی سه درجه آزادی را بررسی کردند. بای و همکاران [۱۱] روشی را بر پایه معادلات ورودی-خروجی یک زنجیره ۴ لینکی از ربات موازی

کروی ارائه کردند. آنها در این روش هر زنجیره سینماتیکی بسته را به یک زنجیره باز ۴ لینکی، شکسته و سپس معادلات ورودی-خروجی زنجیره جدید را استخراج کردند. کونگ و گاسلین [۱۲] برای یک ساختار خاص از ربات موازی کروی اقدام به ارائه روشی برای تحلیل سینماتیک مستقیم ربات کردند که به موجب آن پاسخ حل معادلات سینماتیک سیستم منحصر به فرد می شود.

تعدادی از پژوهش ها نیز به طراحی ربات های هیبرید بر پایه ربات دلتا یا ربات موازی کروی با هدف افزایش تعداد درجات آزادی و کاربردهای سیستم اختصاص دارد. لاله مند و همکاران در [۱۳] با طراحی دو ربات دلتا به صورت تودرتو، این امکان را فراهم کردند که در حالتی که دو صفحه متحرک به-صورت خارج مرکز نسبت به هم قرار می گیرند، ابزار متصل به سر ربات جهت گیری فضایی پیدا کند و سیستم نهایی یک ربات با شش درجه آزادی باشد؛ همچنین برینگر و همکاران [۱۴] با اضافه کردن زنجیره های سینماتیکی باز اضافی به ربات دلتا، سه درجه به درجات آزادی آن افزودند؛ علاوه بر این چابلوت و ونگر [۱۵] با ترکیب دو ربات موازی ارتوگلاید^۱ با سه درجه آزادی انتقالی و ربات موازی کروی موسوم به چشم چابک^۲ با سه درجه آزادی دورانی، یک ربات هیبرید را برای مقاصد کنترل از راه دور و هاپتیک^۳ طراحی کردند.

به دلیل کاربرد زیاد ربات دلتا در صنعت و همینطور کاربرد-های بسیاری که برای آن می توان در نظر گرفت و به تعدادی از آنها در بالا اشاره شده است؛ این پژوهش تحلیل سینماتیک مستقیم و سینماتیک معکوس یک ربات هیبرید شش درجه آزادی را مورد توجه قرار داده است؛ لذا در کار حاضر، مکانیزم ربات دلتا با تغییری که به موجب آن سه درجه آزادی دورانی به سیستم افزوده می شود، مورد بررسی قرار خواهد گرفت. این تغییر شامل مجهز کردن سگوی متحرک ربات با یک مکانیزم موازی با سه درجه آزادی دورانی است. با این کار سعی شده است تا علاوه بر ایجاد یک مکانیزم یکپارچه و هیبریدی، این ربات دامنه کاربرد گسترده تری پیدا کند.

همچنین به دلیل پیچیده بودن روابط حاکم بر مسأله به-خصوص روابط سینماتیک سیستم و از آنجایی که در ربات های موازی حل سینماتیک مستقیم نسبت به سینماتیک معکوس

¹ Orthoglide

² Agile eyes

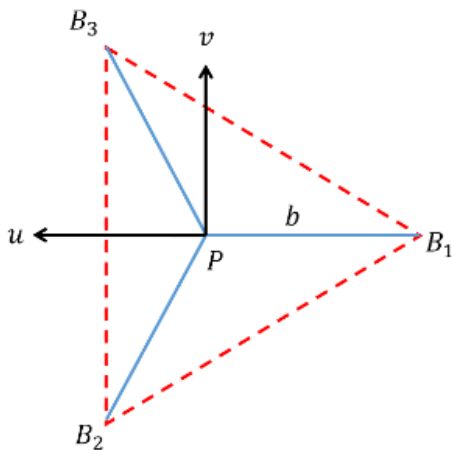
³ Haptic

▪ سکو یا صفحه متحرک که مجری نهایی ربات روی آن قرار دارد.

همچنین در هر بازو لینک دوم خود شامل دو میله موازی است که میان لینک اول و سکوی ربات از طریق مفاصل کروی ارتباط برقرار می‌کند. استفاده از این مفاصل کروی موجب کاهش اصطکاک و سایش شده است [۱۶]؛ اما آزادی حرکت لینک‌ها را محدود کرده و فضای کاری را کاهش می‌دهد.

برای این ربات مسأله سینماتیک معکوس و مستقیم به صورت تحلیلی حل شده و نشان داده می‌شود که در حل سینماتیک معکوس ربات هشت حالت مختلف رخ خواهد داد که فقط یکی از آنها قابل قبول خواهد بود؛ همچنین مسأله سینماتیک مستقیم ربات نیز دو جواب منحصر به فرد دارد که یکی از آنها پاسخ قابل قبول است.

برای ربات دلتا دستگاه مختصات مرجع بر روی پایه ثابت قرار دارد و سمت مثبت محور Z رو به پایین در نظر گرفته شده است؛ همچنین دستگاه‌های مختصات محلی برای بازو-های ربات و نیز زنجیره سینماتیکی برای یک بازوی ربات در حالت کلی نیز در شکل ۱ نمایش داده شده است.



دشوارتر است، در این پژوهش سعی شده است پس از حل سینماتیک معکوس مکانیزم جدید، از روابط حاکم بر آن برای ایجاد یک سیستم استنتاج فازی عصبی تطبیقی^۱ به‌عنوان جای‌گزینی برای حل سینماتیک مستقیم سیستم استفاده شود. سیستم‌های استنتاج فازی به دلیل ساده بودن در پیاده‌سازی و عدم استفاده از عملگرهای ریاضی، به قدرت پردازشی کم‌تری نیاز دارند که این مسأله خود می‌تواند موجب کاهش هزینه محاسبات در پژوهش‌های عملی باشد.

مکانیزم مورد بحث در این تحقیق، برای اولین بار مطرح می‌گردد و تاکنون هیچ ربات موازی هیبریدی که حاصل از ادغام ربات دلتا با یک ربات موازی با درجات آزادی دورانی، ارائه نشده است؛ همچنین برای ربات دلتا و ربات موازی کروی که در این پژوهش با هم ترکیب شده‌اند نیز تاکنون از سیستم استنتاج فازی عصبی تطبیقی به‌منظور حل سینماتیک مستقیم سیستم استفاده نشده است؛ لذا در ادامه، در ابتدا مراحل لازم برای حل معادلات سیستم که به‌صورت مجزا برای ربات دلتا و ربات موازی کروی انجام‌شده بیان گردیده، سپس صحت‌سنجی محاسبات با استفاده از کامپیوتر و نرم‌افزارهای مهندسی MATLAB انجام گرفته است. در انتها نتایج مربوط به خطای جهت‌گیری ربات آورده شده است.

۲- سینماتیک معکوس ربات دلتا

ربات دلتا یک ربات موازی است که می‌تواند با سرعت و دقت بالا ابزار یا اجسام را از یک نقطه به نقطه دیگر در فضای کارترین منتقل کند از این جهت این ربات تنها قابلیت حرکت انتقالی در مختصات کارترین را دارد. ترکیب حرکت مقید سه بازوی ربات که سکو را به پایه ثابت متصل کرده‌اند، سه درجه آزادی انتقالی را برای آن به‌وجود می‌آورد. در این پژوهش ربات دلتا شامل قسمت‌های زیر است:

- پایه ثابت ربات که سایر اجزا بر روی آن سوار می‌شوند.
- سه موتور که به‌صورت متقارن با زاویه ۱۲۰ درجه نسبت به هم به پایه متصل هستند.
- سه بازوی دو لینکی که در هر بازو لینک اول به‌صورت مستقیم توسط یک مفصل دورانی به موتور متناظرش متصل بوده و پایداری بالا را تضمین می‌کند.

^۱ Adaptive Neuro-Fuzzy Inference System (ANFIS)

$$l_2 \widehat{u}_{2i} = \vec{P}_i + \vec{b}_i - \vec{a}_i - l_1 \widehat{u}_{1i} \quad i = 1, 2, 3 \quad (2)$$

در این رابطه:

$$\widehat{u}_{2i} = \begin{bmatrix} s\theta_{3i}c(\theta_i + \theta_{2i}) \\ c\theta_{3i} \\ s\theta_{3i}s(\theta_i + \theta_{2i}) \end{bmatrix}, \quad \vec{P}_i = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}, \quad \vec{b}_i = \begin{bmatrix} b \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \widehat{u}_{1i} = \begin{bmatrix} c\theta_i \\ 0 \\ s\theta_i \end{bmatrix},$$

$${}^0R_i = \begin{bmatrix} c\phi_i & -s\phi_i & 0 \\ s\phi_i & c\phi_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{a}_i = \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{P}_i = {}^0R_i^T \vec{P}$$

0R_i ماتریس دوران دستگاه مختصات محلی \widehat{u}_{1i} نسبت به دستگاه مختصات مرجع O, \vec{P} بردار مکان سکوی ربات در دستگاه مختصات مرجع، \widehat{u}_{2i} و بردارهای یکه و نیز $\phi_1 = \pi/3$ و $\phi_2 = -\pi/3$ است؛ همچنین در این رابطه S و C به ترتیب نماد توابع مثلثاتی \sin و \cos می‌باشند. با ضرب دو سمت معادله (۲) در ترانزپوزیشن، معادله (۳) به دست می‌آید:

$$l_2^2 = (p_1c\phi_i + p_2s\phi_i - l_1c\theta_i - a + b)^2 + (p_2c\phi_i - p_1s\phi_i)^2 + (p_3 - l_1s\theta_i)^2 \quad (3)$$

حل رابطه (۳) برای بردار مکان معلوم منجر به حل سینماتیک معکوس ربات دلتا و محاسبه زوایای فعال متصل به موتورها θ_i می‌شود. برای حل این معادله آن را بسط داده تا به فرم زیر برسد:

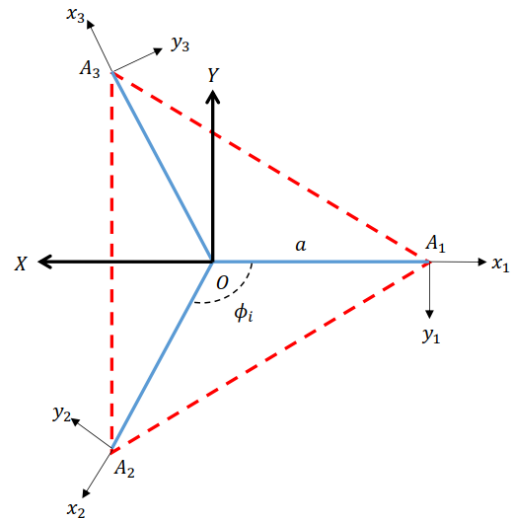
$$G_1c\theta_i + G_2s\theta_i + G_3 = 0 \quad (4)$$

که در این رابطه:

$$\begin{aligned} G_1 &= -2l_1(-p_1c\phi_i - p_2s\phi_i + a - b) \\ G_2 &= 2l_1p_3 \\ G_3 &= 2p_1(a - b)c\phi_i + 2p_2(a - b)s\phi_i \\ &\quad - a^2 + 2ab - b^2 - l_1^2 \\ &\quad + l_2^2 - p_1^2 - p_2^2 - p_3^2 \end{aligned} \quad (5)$$

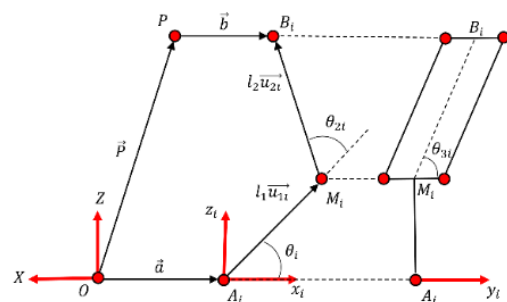
با استفاده از تبدیلات (۶) و جای گذاری آن در رابطه (۵)، رابطه (۷) به دست می‌آید که یک معادله جبری مرتبه دو است.

$$\frac{\sin\theta_i}{1 + T^2} = \frac{2T}{1 + T^2}, \quad \frac{\cos\theta_i}{1 + T^2} = \frac{1 - T^2}{1 + T^2}, \quad T = \tan \frac{\theta_i}{2} \quad (6)$$



شکل ۱- دستگاه‌های مختصات محلی در پایه ثابت (بالا) و سکو (پایین)

هدف از حل مسأله سینماتیک معکوس ربات ایجاد یک رابطه میان مکان سکو در فضای کارترین و زاویه قرارگیری مفاصل است. برای انجام این تحلیل مکان سکو به‌عنوان بردار معلوم در دستگاه مختصات مرجع در نظر گرفته شده و مجهولات زوایای فعال و غیر فعال متناسب با مفاصل هر بازو هستند؛ در نتیجه پاسخ تحلیل سینماتیک معکوس مطابق شکل ۲ برای هر بازو ربات سه زاویه θ_i, θ_{2i} و θ_{3i} است که فرم قرارگیری هر بازو را متناسب با موقعیت سکو مشخص می‌کند. در شکل ۲ زنجیره سینماتیکی برای ربات دلتا مورد بررسی آورده شده‌است. بر اساس شکل ۲ رابطه (۱) برقرار است.



شکل ۲- زنجیره سینماتیکی یک بازوی ربات دلتا

$$\overline{M_iB_i} = \overline{OP} + \overline{PB_i} - \overline{OA_i} - \overline{A_iM_i} \quad (1)$$

در نتیجه زنجیره برداری در دستگاه مختصات محلی \widehat{u}_{1i} برای هر بازو به‌صورت رابطه (۲) محاسبه خواهد شد.

$$l_2 s \theta_i c(\theta_i + \theta_{2i}) + l_1 c \theta_i = p_1 c \phi_i + p_2 s \phi_i + b - a$$

$$l_2 c \theta_{3i} = -p_1 s \phi_i + p_2 c \phi_i \quad (10)$$

$$l_2 s \theta_{3i} s(\theta_i + \theta_{2i}) + l_1 s \theta_i = p_3$$

برای بردار \vec{P} معلوم در معادله (۱۰) رابطه (۱۱) برقرار است:

$$\theta_{3i} = c^{-1} \left(\frac{-p_1 s \phi_i + p_2 c \phi_i}{l_2} \right) \quad (11)$$

با یافتن زاویه غیر فعال θ_{3i} چنانچه در معادله (۹) و (۱۱) عبارت $s \theta_{3i}$ به عنوان مقدار معلوم در نظر گرفته و هر دو معادله به توان ۲ رسانده و با هم جمع شوند، رابطه (۱۲) به دست خواهد آمد:

$$2l_1 l_2 s \theta_{3i} c \theta_{2i} + l_2^2 (s \theta_{3i})^2 + l_1^2 = (p_1 c \phi_i - p_2 s \phi_i + b - a)^2 + p_3^2 \quad (12)$$

با حل این رابطه مقدار θ_{2i} نیز مطابق زیر به دست خواهد آمد:

$$\theta_{2i} = c^{-1} \times \frac{(p_1 c \phi_i + p_2 s \phi_i + b - a)^2}{2l_1 l_2 s \theta_{3i}} + \frac{(-p_1 s \phi_i + p_2 c \phi_i)^2}{2l_1 l_2 s \theta_{3i}} + \frac{p_3^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2 s \theta_{3i}} \quad (13)$$

با محاسبه این دو زاویه این امکان فراهم می شود که پیش-بینی فرم قرارگیری هر بازو بر اساس مکان سکو به طور دقیق صورت پذیرد؛ با این حال در روابط مربوط به تحلیل سرعت و شتاب که در ادامه بیان شده، سعی خواهد شد، نرخ تغییر پارامترهای غیر فعال به هر نحوی از معادلات حذف شوند تا روابط ساده تر شده و پاسخ سیستم سریع تر محاسبه گردد. هدف از تحلیل سرعت و شتاب یافتن ارتباط میان سرعت و شتاب دورانی فضای مفاصل مربوط به بازوهای محرک با سرعت و شتاب خطی فضای کارترین مربوط به سکوی ربات است.

۲-۲- تحلیل سرعت

سرعت خطی صفحه متحرک ربات دلتا را می توان با گرفتن مشتق از رابطه (۲) نسبت به زمان محاسبه کرد. برای این منظور ابتدا این رابطه به صورت زیر بازنویسی می شود:

$$\vec{P}_i = \vec{a}_i - \vec{b}_i + l_1 \vec{u}_{1i} + l_2 \vec{u}_{2i} \quad i = 1, 2, 3 \quad (14)$$

مشتق رابطه (۱۴) نسبت به زمان برابر است با:

$${}^0 R_i^T \dot{\vec{P}} = (\vec{\omega}_{1i} \times l_1 \vec{u}_{1i}) + (\vec{\omega}_{2i} \times l_2 \vec{u}_{2i}) \quad (15)$$

$$(-G_1 + G_3)T^2 + 2G_2T + G_1 + G_3 = 0 \quad (7)$$

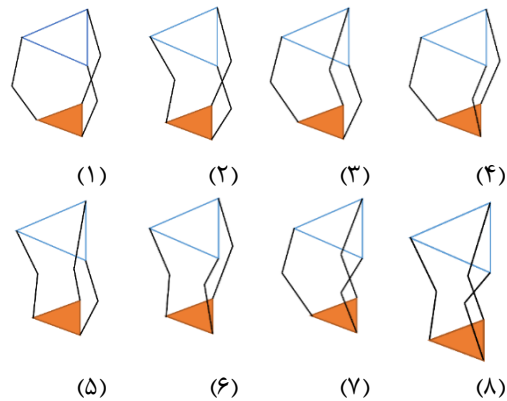
پاسخ معادله (۷) برابر است با:

$$T_i = \frac{G_2 \pm \sqrt{G_1^2 + G_2^2 - G_3^2}}{G_1 - G_3} \quad (8)$$

در نتیجه رابطه زیر برقرار است:

$$\theta_i = 2 \tan^{-1} T_i \quad (9)$$

از آنجایی که برای θ_i دو جواب منحصر به فرد به دست می آید هر بازو برای یک موقعیت خاص سکو می تواند دو حالت قرارگیری مختلف داشته باشد؛ بنابراین بر اساس فرم بازوها برای قرارگیری سکو در یک مکان مشخص ۲^۳ حالت می تواند رخ دهد. این هشت وضعیت در شکل ۳ نمایش داده شده اند.



شکل ۳- هشت پاسخ حل سینماتیک معکوس ربات دلتا

از میان این هشت پاسخ، تنها پاسخی قابل قبول خواهد بود که با کمترین حرکت هر سه بازو سکو را به موقعیت مطلوب برساند؛ بنابراین با توجه به اینکه زاویه هر بازو نسبت به راستای افق سنجیده می شود، حالت ۱ مطابق با شکل (۳) پاسخ مورد نظر است.

۲-۱- محاسبه زوایای غیرفعال

برای محاسبه زوایای غیر فعال θ_{2i} و θ_{3i} برای هر بازو کافی است رابطه (۲) بسط داده شود، بسط این رابطه یک دستگاه معادلات معمولی غیرخطی است که در زیر نمایش داده شده است.

$$J_X \dot{P} + J_X \ddot{P} = J_q \dot{\theta} + J_q \ddot{\theta} \quad (22)$$

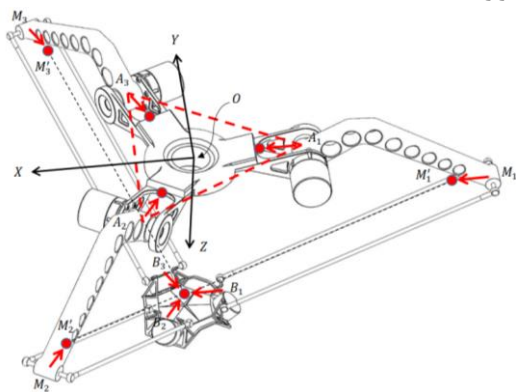
$$\Rightarrow \ddot{\theta} = J_q^{-1} (J_X \ddot{P} + J_X \dot{P} - J_q \dot{\theta})$$

۲-۳- حل تحلیلی سینماتیک مستقیم ربات دلتا

در حل سینماتیک مستقیم زاویه بازوهای محرک به عنوان مقدار معلوم در نظر گرفته شده و هدف یافتن موقعیت سکو در فضای کارترین است. چنانچه سکوی ربات یک نقطه فرض شود و تمام مفاصل به اندازه شعاع صفحه متحرک ربات دلتا که برابر با b است به سمت داخل منتقل شود، حل سینماتیک مستقیم ربات دلتا معادل یافتن نقطه مشترک میان سه کره به شعاع l_2 است که مرکز آنها در مفصل میانی M_i هر بازو واقع شده است؛ در نتیجه یک دستگاه معادلات معمولی مرتبه دوم متشکل از سه معادله و سه مجهول به دست خواهد آمد. برای این دستگاه در [۱۷] یک فرآیند حل تحلیلی ارائه شده که از آن استفاده شده است. مطابق شکل (۴) بردار M_i برای یک بازو در دستگاه مختصات محلی برابر است با:

$${}^{A_i}M_i = \begin{bmatrix} l_1 c \theta_i \\ 0 \\ l_1 s \theta_i \end{bmatrix} \quad (23)$$

اگر نقاط M_i ، A_i و B_i برای هر بازو به اندازه b به سمت داخل منتقل شوند، برای بردار جدید M_i در بازوی اول رابطه (۲۴) برقرار است:



شکل ۴- انتقال نقاط اصلی به مرکز صفحه متحرک ربات دلتا

$${}^{A_i}M'_i = \begin{bmatrix} -b + l_1 c \theta_i \\ 0 \\ l_1 s \theta_i \end{bmatrix} \quad i = 1 \quad (24)$$

به منظور حذف $\vec{\omega}_{2i}$ از رابطه (۱۵) که همان نرخ تغییر زوایای غیر فعال است، دو سمت این رابطه در $l_2 \vec{u}_{2i}$ ضرب نقطه‌ای می‌شود و از آن جا که داریم:

$$\dot{P} = \begin{bmatrix} \dot{p}_1 \\ \dot{p}_2 \\ \dot{p}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \quad \vec{\omega}_{1i} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\dot{\theta}_i \\ 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

روابط (۳) و (۱۶) در رابطه (۱۵) جای‌گذاری می‌شوند و رابطه (۱۷) بدست می‌آید:

$$j_{ix} v_x + j_{iy} v_y + j_{iz} v_z = l_1 \dot{\theta}_i s \theta_{3i} s \theta_{2i} \quad (17)$$

$$i = 1, 2, 3$$

که ضرایب مؤلفه‌های سرعت در رابطه (۱۸) بیان شده‌اند.

$$\begin{aligned} j_{ix} &= s \theta_{3i} c \phi_i c(\theta_i + \theta_{2i}) - c \theta_{3i} s \phi_i \\ j_{iy} &= s \theta_{3i} s \phi_i c(\theta_i + \theta_{2i}) + c \theta_{3i} c \phi_i \\ j_{iz} &= s \theta_{3i} s(\theta_i + \theta_{2i}) \end{aligned} \quad (18)$$

چنانچه رابطه (۱۸) برای مقادیر i بسط داده شود، سه معادله اسکالر به وجود خواهد آمد که اگر به فرم ماتریسی بازنویسی شوند، رابطه (۱۹) حاصل خواهد شد:

$$J_X \dot{P} = J_q \dot{\theta} \quad (19)$$

می‌توان رابطه (۱۹) را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\dot{\theta} = \dot{P} \quad (20)$$

که در آن:

$$J = J_q^{-1} J_X \quad (21)$$

ماتریس J را ماتریس ژاکوبین ربات دلتا می‌نامند. ماتریس ژاکوبین نه تنها ارتباط بین سرعت حرکت مفاصل با سرعت حرکت سکو را برقرار می‌کند، بلکه این ماتریس بیانگر ارتباط بین گشتاور حاصل از موتورها با نیروها و گشتاورهای وارد بر صفحه متحرک ربات است.

ارتباط میان شتاب فضای مفاصل با شتاب فضای کارترین در ربات دلتا را می‌توان به راحتی با مشتق‌گیری از رابطه (۱۷) نسبت به زمان محاسبه کرد؛ بنابراین رابطه (۲۲) برقرار است:

$$K_5 p_1 + K_6 p_2 + K_7 p_3 + K_8 = 0 \quad (29)$$

در این دو رابطه:

$$\begin{aligned} K_1 &= -2M_{2x} + 2M_{1x} \\ K_2 &= -2M_{2y} + 2M_{1y} \\ K_3 &= -2M_{2z} + 2M_{1z} \\ K_4 &= M_{2x}^2 - M_{1x}^2 + M_{2y}^2 - M_{1y}^2 + M_{2z}^2 \\ &\quad - M_{1z}^2 \\ K_5 &= -2M_{3x} + 2M_{1x} \\ K_6 &= -2M_{3y} + 2M_{1y} \\ K_7 &= -2M_{3z} + 2M_{1z} \\ K_8 &= M_{3x}^2 - M_{1x}^2 + M_{3y}^2 - M_{1y}^2 + M_{3z}^2 \\ &\quad - M_{1z}^2 \end{aligned} \quad (30)$$

معادلات (۲۹) برای یافتن p_1 و p_2 بر حسب p_3 حل می‌شوند که پاسخ را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$p_1 = U_1 p_3 + U_2 \quad p_2 = U_3 p_3 + U_4 \quad (31)$$

که در اینجا:

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{K_2 K_7 - K_3 K_6}{K_1 K_6 - K_2 K_5} & U_2 &= \frac{K_2 K_8 - K_4 K_6}{K_1 K_6 - K_2 K_5} \\ U_3 &= -\frac{K_1 K_7 - K_3 K_6}{K_1 K_6 - K_2 K_5} & U_4 &= -\frac{K_1 K_8 - K_4 K_5}{K_1 K_6 - K_2 K_5} \end{aligned} \quad (32)$$

در انتها، به ازای i برابر با ۳ رابطه (۳۴) حاصل می‌شود:

$$Q_1 p_3^2 + Q_2 p_3 + Q_3 = 0 \quad (34)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} Q_1 &= U_1^2 + U_3^2 + 1 \\ Q_2 &= -2U_1 M_{3x} - 2U_3 M_{3y} + 2U_4 U_3 \\ &\quad - 2M_{3z} \\ Q_3 &= M_{3x}^2 - 2U_2 M_{3x} + M_{3y}^2 \\ &\quad - 2U_4 M_{3y} + M_{3z}^2 \\ &\quad + U_2^2 + U_4^2 - l_2^2 \end{aligned} \quad (35)$$

در نتیجه پاسخ معادله مرتبه دوم (۳۴) به فرم (۳۶) است:

به منظور محاسبه این بردار در دستگاه مختصات مرجع برای هر سه بازوی ربات، از ماتریس دوران حول محور Z مطابق آنچه که در رابطه (۳) بیان شد و رابطه انتقال محورهای مختصات استفاده می‌شود.

$${}^0 M_i' = {}^0 R_i \left(\begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + A_i M_1' \right) \quad (25)$$

به این ترتیب:

$$\begin{aligned} {}^0 M_i' &= \begin{bmatrix} c\phi_i(a-b+l_1 c\theta_i) \\ s\phi_i(a-b+l_1 c\theta_i) \\ l_1 s\theta_i \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} M_{ix} \\ M_{iy} \\ M_{iz} \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (26)$$

معادله سه کره در فضا به مرکز M_i' و به شعاع l_2 به فرم زیر است:

$$\begin{aligned} (p_1 - M_{ix})^2 + (p_2 - M_{iy})^2 \\ + (p_3 - M_{iz})^2 \\ = l_2^2 \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (27)$$

معادله (۲۷) را برای مقادیر i بسط داده تا یک دستگاه سه معادله و سه مجهول مطابق زیر تشکیل شود:

$$\begin{aligned} p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 \\ - 2(p_1 M_{1x} + p_2 M_{1y} + p_3 M_{1z}) = \\ l_2^2 - (M_{1x}^2 + M_{1y}^2 + M_{1z}^2) \\ p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 \\ - 2(p_1 M_{2x} + p_2 M_{2y} + p_3 M_{2z}) = \\ l_2^2 - (M_{2x}^2 + M_{2y}^2 + M_{2z}^2) \\ p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 \\ - 2(p_1 M_{3x} + p_2 M_{3y} + p_3 M_{3z}) = \\ l_2^2 - (M_{3x}^2 + M_{3y}^2 + M_{3z}^2) \end{aligned} \quad (28)$$

پس از روند ساده‌سازی، مجهولات مرتبه دوم حذف شده و یک دستگاه دو معادله و سه مجهول با مجهولات مرتبه یک باقی می‌ماند:

$$K_1 p_1 + K_2 p_2 + K_3 p_3 + K_4 = 0$$

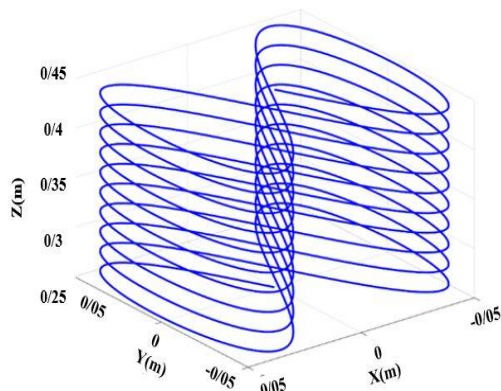
جدول ۱- ابعاد ربات دلتای مورد بررسی

پارامتر	نماد	اندازه	یکا
شعاع پایه ثابت	a	۱۵۰	mm
شعاع سکو	b	۵۰	
طول بازوی محرک	l_1	۲۵۰	
طول بازوی متحرک	l_2	۳۹۶	
زاویه بازوی اول نسبت به دستگاه مرجع	ϕ_1	$-\pi$	rad
زاویه بازوی دوم نسبت به دستگاه مرجع	ϕ_2	$-\frac{\pi}{3}$	
زاویه بازوی سوم نسبت به دستگاه مرجع	ϕ_3	$\frac{\pi}{3}$	

بررسی درستی پاسخ‌های حاصل از حل سینماتیک معکوس و مستقیم سیستم در دو مرحله صورت گرفته است؛ در مرحله نخست، خطای حل سینماتیک معکوس و مستقیم با مقایسه ورودی سینماتیک معکوس و خروجی سینماتیک مستقیم محاسبه شده است و پس از صحت‌سنجی حل تحلیل سینماتیک ربات دلتا، در مرحله دوم حل تحلیلی سینماتیک ربات با پاسخ‌های ربات شبیه‌سازی شده در Simscape نرم‌افزار MATLAB تطبیق داده می‌شود.

در این مرحله برای ربات یک مسیر مطابق رابطه (۳۶) در فضا تعریف می‌شود و پاسخ‌های سینماتیک معکوس و مستقیم ربات دلتا باهم مقایسه شده و این مسیر در شکل (۶) نمایش داده شده است.

$$\begin{aligned} x_d &= -0.05 \sin(\pi t) \\ y_d &= 0.05 \sin(2\pi t) \\ z_d &= 0.25 + 0.01t \end{aligned} \quad (37)$$



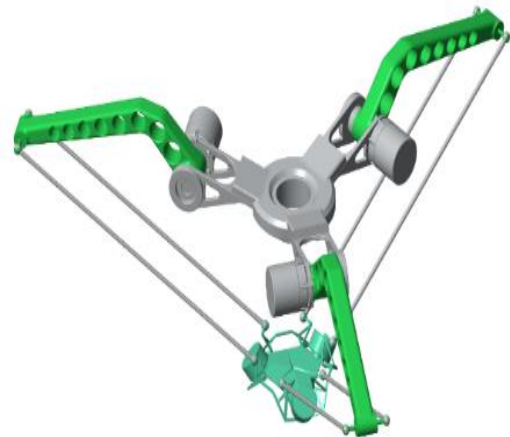
شکل ۶- مسیر داده شده به ربات برای ارزیابی صحت و دقت روابط سینماتیک

$$p_3 = \frac{-Q_2 \pm \sqrt{-4Q_1Q_3 + Q_2^2}}{2Q_1} \quad (36)$$

از دو پاسخی که برای حل سینماتیک مستقیم ربات به دست می‌آیند با توجه به جهت قرارگیری دستگاه مختصات مرجع که جهت مثبت محور Z به سمت پایین قرار دارد تنها پاسخی قابل قبول است که مؤلفه p_3 در آن مقداری مثبت داشته باشد.

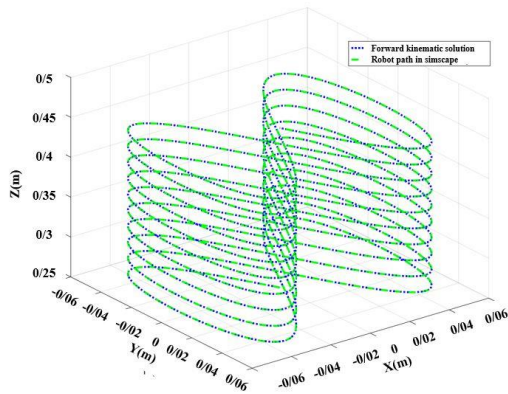
۲-۴- شبیه‌سازی ربات دلتا در Simscape به منظور صحت‌سنجی

به منظور ایجاد امکان بررسی ربات در شرایط محیطی حقیقی مدل فیزیکی ربات را به صورت نرم‌افزاری با کمک ابزار Simscape Multibody نرم‌افزار MATLAB شبیه‌سازی شده است. نتیجه اجرای این سیستم تصویری سه‌بعدی از ربات دلتای طراحی شده است که در پنجره Mechanics explorer نشان نرم‌افزار نمایش داده می‌شود؛ این تصویر در شکل (۵) نشان داده شده است. با کمک این شبیه‌سازی می‌توان حرکات ربات را به صورت برخط در حین تعقیب یک مسیر دلخواه، مشاهده کرده و مورد بررسی قرار داد. از نتایج این شبیه‌سازی برای صحت‌سنجی معادلات دینامیک و سینماتیک ربات دلتا استفاده شده است.



شکل ۵- اجرای شبیه‌سازی سه‌بعدی ربات دلتا در نرم‌افزار MATLAB

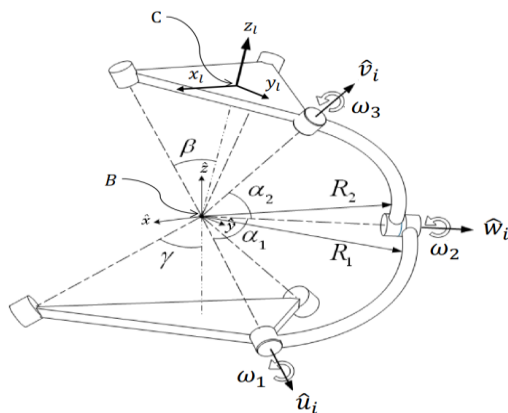
در این قسمت صحت و درستی روابط استخراج شده برای ربات دلتا مورد بررسی قرار گرفته است. پارامترهای هندسی این ربات در جدول ۱ بیان شده است.



شکل ۸- مقایسه مسیر طی شده توسط ربات در شبیه‌سازی و مسیر محاسبه‌شده با سینماتیک مستقیم

۳- سینماتیک معکوس ربات موازی کروی

ربات موازی کروی یک ربات با مکانیزم موازی و ۳ درجه آزادی دورانی است. تمام مفاصل در این ربات از نوع دورانی هستند و محور دوران تمام آنها از یک نقطه می‌گذرد که به آن مرکز هندسی یا مرکز دوران ربات می‌گویند. مجری نهایی ربات که روی سکو قرار دارد، فقط می‌تواند جهت‌گیری‌های مختلفی را نسبت به دستگاه مختصات مرجع که مرکز آن روی مرکز دوران مکانیزم است بیابد و فاقد توانایی انجام حرکت انتقالی است. در ربات موازی کروی پایه و صفحه متحرک، به صورت دو هرم که در رأس با هم مشترک هستند، در نظر گرفته شده‌اند. رأس این دو هرم همان مرکز هندسی ربات است. مثلث پایه هر هرم نیز با هدف ایجاد تقارن یک مثلث متساوی الاضلاع است. پارامترهای هندسی این ربات به صورت شماتیک در شکل ۹ نمایش داده شده‌است.

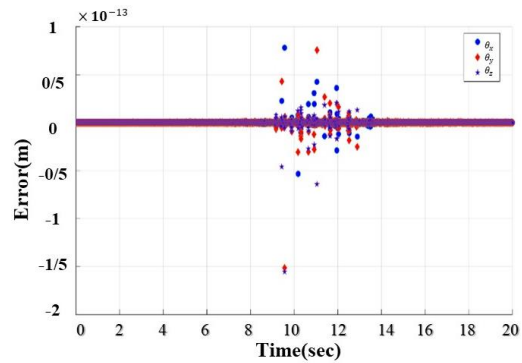


شکل ۹- پارامترهای هندسی ربات موازی کروی [۵۰]

خطای مسیر محاسبه‌شده توسط سینماتیک مستقیم سیستم نسبت به مسیر مطلوب از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$e_c = X_d - X_c \quad (38)$$

که در آن X_c و X_d به ترتیب مؤلفه‌های مسیر مطلوب و مسیر محاسبه‌شده توسط روابط سینماتیک مستقیم ربات است. نمودار تغییرات این خطا در طی مسیر مورد نظر در نمودار شکل (۷) نشان داده است.



شکل ۷- دقت و صحت حل سینماتیک ربات دلتا برای مسیر مورد نظر

با توجه به شکل ۷ نزدیک به صفر بودن این خطا نشان‌دهنده صحت پاسخ‌های سینماتیک معکوس و مستقیم سیستم برای مسیر مورد نظر است؛ همچنین میزان کوچک بودن خطا بیانگر دقت بالای پاسخ‌های روابط سینماتیکی است که برای ربات دلتا استخراج گردیده است. در مرحله دوم زوایای موتورها که توسط بلوک سینماتیک معکوس مطابق شکل ۸، برای پیمودن مسیر مطلوب محاسبه شده‌اند، به عنوان ورودی به ربات شبیه‌سازی شده در Simscape وارد شده‌اند. مقایسه مسیری که توسط ربات طی شده است و نیز مسیر محاسبه‌شده توسط بلوک سینماتیک مستقیم در شکل ۸ نشان داده شده است. تطبیق این دو مسیر با یکدیگر نشان‌دهنده دقت و صحت ربات دلتای شبیه‌سازی شده و نیز تطابق معادلات حرکت با مکانیزم ربات دلتای مورد بررسی است.

$$\hat{v}_{iL} = \begin{bmatrix} c\eta_i & -s\eta_i & 0 \\ s\eta_i & c\eta_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ s\beta \\ c\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s\eta_i s\beta \\ c\eta_i s\beta \\ c\beta \end{bmatrix} \quad (41)$$

$i = 1, 2, 3$

برای محاسبه این بردار در دستگاه مختصات مرجع B ابتدا باید جهت گیری سکو نسبت به مختصات مرجع مشخص شود. چنانچه در حالت کلی سه دوران با زوایای ϕ نسبت به محور X، θ نسبت به محور Y و ψ نسبت به محور Z مطابق با رابطه (41) برای سکو در نظر گرفته شود، جهت گیری کلی سکو برابر خواهد بود با:

$$\begin{aligned} {}^B_X R^\phi &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\phi & -s\phi \\ 0 & s\phi & c\phi \end{bmatrix} & {}^B_Y R^\theta &= \begin{bmatrix} c\theta & 0 & s\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\theta & 0 & c\theta \end{bmatrix} \\ {}^B_Z R^\psi &= \begin{bmatrix} c\psi & -s\psi & 0 \\ s\psi & c\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & & \\ {}^B R_{total} &= {}^B_Z R^\psi {}^B_Y R^\theta {}^B_X R^\phi & & \end{aligned} \quad (42)$$

در نتیجه بردار \hat{v}_i در دستگاه مختصات مرجع از رابطه (43) محاسبه می‌شود.

$$\hat{v}_i = {}^B R_{total} \cdot \hat{v}_{iL} \quad i = 1, 2, 3 \quad (43)$$

در ربات موازی کروی، برای هر بازو یک قید هندسی مطابق رابطه (44) برقرار است.

$$\hat{w}_i \cdot \hat{v}_i = c\alpha_2 \Rightarrow \hat{w}_i^T \cdot \hat{v}_i - c\alpha_2 = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad (44)$$

با جای گذاری روابط فوق در رابطه (44) و استفاده از رابطه تانژانت نصف کمان معادله مرتبه دوم (45) حاصل می‌شود.

$$A_i T^2 + 2B_i T + C_i = 0 \quad i = 1, 2, 3 \quad (45)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} T &= \tan \frac{\theta_i}{2} \\ A_i &= (-s\eta_i s\gamma c\alpha_1 + s\eta_i c\gamma s\alpha_1)v_{ix} \\ &\quad + (c\eta_i s\gamma c\alpha_1 - c\eta_i c\gamma s\alpha_1)v_{iy} \\ &\quad + (c\gamma c\alpha_1 - s\gamma s\alpha_1)v_{iz} \end{aligned} \quad (46)$$

مطابق شکل (9)، α_1 و α_2 اندازه زاویه بین دو محور دوران لینک‌های هر بازو هستند. بردارهای \hat{u}_i ، 3 بردار یکه محور دوران موتورها هستند و بردارهای \hat{v}_i سه بردار یکه در راستای محورهای مفاصل دورانی سکوی ربات هستند و مرکز دستگاه مختصات مرجع روی مرکز هندسی ربات به گونه‌ای قرار گرفته است که محور Y با محور \hat{u}_i بازوی اول در یک صفحه قرار گرفته است؛ همچنین بردارهای \hat{w}_i نیز بردارهای یکه مفاصل دورانی است که لینک دوم هر بازوی ربات را به لینک اول متصل می‌کند. برای این ربات حل سینماتیک معکوس منجر به محاسبه زوایای لینک‌های متصل به موتورها (لینک‌های محرک) بر اساس جهت گیری معلوم سکو می‌شود.

بردار u_i برای ربات موازی کروی مطابق با رابطه (39) محاسبه می‌شود.

$$\begin{aligned} \hat{u}_i &= \begin{bmatrix} c\eta_i & -s\eta_i & 0 \\ s\eta_i & c\eta_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c(\gamma - \frac{\pi}{2}) & -s(\gamma - \frac{\pi}{2}) \\ 0 & s(\gamma - \frac{\pi}{2}) & c(\gamma - \frac{\pi}{2}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -s\eta_i s\gamma \\ c\eta_i s\gamma \\ -c\gamma \end{bmatrix} \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (39)$$

در رابطه فوق، $\eta_1 = 0$ و $\eta_2 = \frac{2\pi}{3}$ و $\eta_3 = -\frac{2\pi}{3}$ است. به صورت مشابه بردارهای \hat{w}_i نیز از رابطه (40) به دست می‌آیند.

$$\begin{aligned} \hat{w}_i &= \begin{bmatrix} c\eta_i & -s\eta_i & 0 \\ s\eta_i & c\eta_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & s\gamma & c\gamma \\ 0 & -c\gamma & s\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -s\theta_i & 0 & c\theta_i \\ 0 & 1 & 0 \\ -c\theta_i & 0 & -s\theta_i \end{bmatrix} \\ &\Rightarrow \hat{w}_i = \begin{bmatrix} (c\eta_i s\theta_i - s\eta_i c\gamma c\theta_i)s\alpha_1 - s\eta_i s\gamma c\alpha_1 \\ (s\eta_i s\theta_i + c\eta_i c\gamma c\theta_i)s\alpha_1 + c\eta_i s\gamma c\alpha_1 \\ s\gamma c\theta_i s\alpha_1 - c\gamma c\alpha_1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (40)$$

بردار \hat{v}_i در دستگاه مختصات محلی سکوی ربات به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\vec{\Omega} = E(\phi, \theta, \psi) \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (50)$$

در رابطه (۵۰) ماتریس E نرخ تغییر زوایای اولر است که ارتباط میان سرعت‌های دورانی اولر و سرعت دوران موتورها را برقرار می‌کند. برای ربات موازی کرووی E مطابق رابطه (۵۱) به‌دست می‌آید.

$$E = \begin{bmatrix} c\psi \ c\theta & -s\psi & 0 \\ s\psi \ c\theta & c\psi & 0 \\ -s\theta & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (51)$$

ارتباط میان سرعت‌های زاویه‌ای سکو $\vec{\Omega} = [\dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2, \dot{\theta}_3]^T$ و سرعت زاویه‌ای موتورها $[\omega_x, \omega_y, \omega_z]^T$ به‌صورت رابطه (۵۲) است.

$$A\vec{\Omega} = B\dot{\theta} \quad (52)$$

که داریم:

$$A = [\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3]^T \\ \vec{a}_i = \vec{w}_i \times \vec{v}_i \quad i = 1,2,3 \\ B = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{bmatrix} \quad (53) \\ b_i = (\vec{u}_i \times \vec{w}_i) \cdot \vec{v}_i \quad i = 1,2,3$$

ماتریس ژاکوبین به‌صورت (۵۴) قابل محاسبه است.

$$J = B^{-1}A \quad (54)$$

در نتیجه نرخ تغییرات زاویه موتورها بر حسب سرعت‌های زاویه ای از رابطه (۵۵) محاسبه خواهد شد.

$$\dot{\theta} = J\vec{\Omega} \quad (55)$$

با مشتق‌گیری از رابطه (۵۵) شتاب‌های زاویه‌ای مطابق با رابطه (۵۶) استخراج می‌شوند.

$$\ddot{\theta} = \dot{J}\vec{\Omega} + J\dot{\vec{\Omega}} \quad (56)$$

$$B_i = c\eta_i s\alpha_1 v_{ix} + s\eta_i s\alpha_1 v_{iy} \\ C_i = (-s\eta_i s\gamma c\alpha_1 - s\eta_i c\gamma s\alpha_1)v_{ix} \\ + (c\eta_i s\gamma c\alpha_1 + c\eta_i c\gamma s\alpha_1)v_{iy} \\ + (-c\gamma c\alpha_1 + s\gamma s\alpha_1)v_{iz}$$

در رابطه فوق، v_{ix}, v_{iy}, v_{iz} مؤلفه‌های بردار \hat{v}_i هستند. با حل آن، دو جواب برای θ_i به‌دست می‌آید. بدیهی است که پاسخی به‌عنوان حل سینماتیک معکوس ربات در نظر گرفته می‌شود که برای جهت‌گیری مورد نظر، بازوی ربات کمترین دوران را داشته باشد.

$$\theta_i = 2 \tan^{-1} \left(\frac{-2B_i \pm \sqrt{4B_i^2 - 4A_i C_i}}{2A_i} \right) \quad (47)$$

۳-۱- تحلیل سرعت

در تحلیل سرعت ارتباط میان سرعت زاویه‌ای دوران‌های اولر و سرعت دوران موتورها برقرار می‌شود. باید توجه داشت که برای هر نوع از زوایای اولر $[\phi, \theta, \psi]^T$ سرعت زاویه‌ای با نرخ تغییر زوایای اولر برابر نیست. با کمک رابطه (۴۸) مطابق با [۱۸] ارتباط میان سرعت‌های زاویه‌ای و زوایای اولر برقرار می‌شود.

$$\Omega^\times = {}^B R_c {}^B R_c^{-1} \\ = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_z & \Omega_y \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (48)$$

که در آن، Ω^\times یک ماتریس پادمتقارن است که بر حسب مؤلفه‌هایش در (۴۹) نمایش داده شده‌است؛ همچنین، ${}^B R_c$ هر ماتریس دورانی می‌تواند باشد.

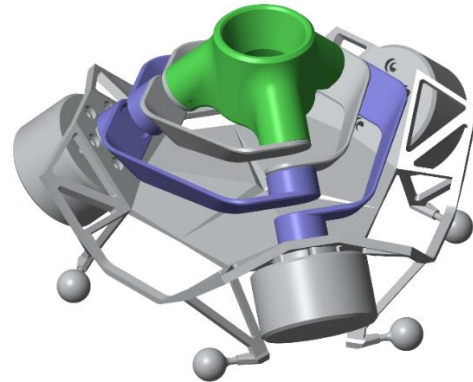
$$\Omega_x = \dot{r}_{31}\dot{r}_{21} + \dot{r}_{32}\dot{r}_{22} + \dot{r}_{33}\dot{r}_{23} \\ \Omega_y = \dot{r}_{11}\dot{r}_{31} + \dot{r}_{12}\dot{r}_{32} + \dot{r}_{13}\dot{r}_{33} \\ \Omega_z = \dot{r}_{21}\dot{r}_{11} + \dot{r}_{22}\dot{r}_{12} + \dot{r}_{23}\dot{r}_{13} \quad (49)$$

چنانچه ماتریس دوران ${}^B R_c$ برابر با ماتریس دوران اولر در نظر گرفته شود رابطه زیر حاصل خواهد شد.

۲-۳- شبیه‌سازی ربات موازی کروی در Simscape به-

منظور صحت‌سنجی

مشابه ربات دلتا، مدل مکانیکی ربات موازی کروی نیز در Simscape نرم‌افزار MATLAB، مطابق شکل ۱۰ شبیه‌سازی شده است.



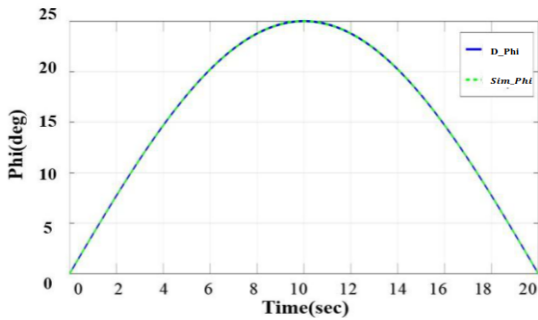
شکل ۱۰- نمایش سه‌بعدی ربات موازی کروی در شبیه‌سازی به کمک Simscape

به منظور صحت‌سنجی روابط سینماتیک استخراج شده برای ربات موازی کروی، برای یک جهت گیری مطلوب، پاسخ های حل سینماتیک معکوس مدل ریاضی ربات به مدل مکانیکی سیستم وارد می‌شود. از آن جایی که در مدل مکانیکی Simscape جهت گیری سکو به فرم بیان محور پیچش^۱ ارائه می‌شود، به منظور بررسی صحت و درستی روابط سینماتیک ربات موازی کروی برای سه مرحله و در هر مرحله دوران فقط حول یکی از محورهای مختصات صورت می‌گیرد تا امکان بررسی صحت نتایج فراهم باشد. تطبیق جهت گیری خروجی مدل مکانیکی و جهت گیری مطلوب ورودی به مدل ریاضی بیانگر صحت روابط سینماتیک سیستم خواهد بود. پارامترهای هندسی ربات موازی کروی در جدول ۲ بیان شده است.

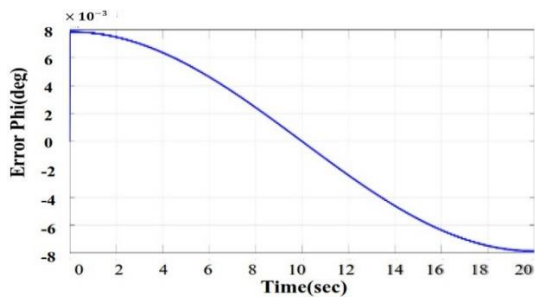
جدول ۲- پارامترهای هندسی ربات موازی کروی

پارامتر	اندازه	واحد
γ	۴۵	deg
β	۴۵	deg
α_1	۷۵/۵۲۲۵	deg
α_2	۷۵/۵۲۲۵	deg

جهت گیری مطلوب برای دوران حول محور X به اندازه زاویه Φ و جهت گیری سکوی ربات موازی کروی در شکل ۱۱ نمایش داده شده است. خطای جهت‌گیری نیز در شکل ۱۲ نشان داده شده است.

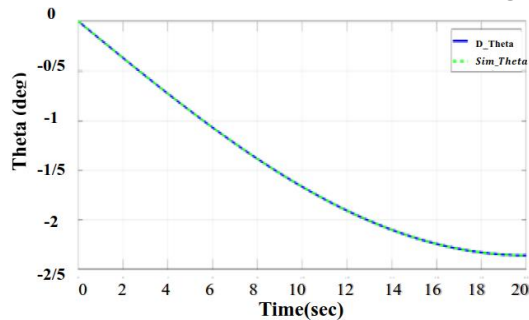


شکل ۱۱- جهت گیری مطلوب برای دوران حول محور X و جهت گیری مدل Simscape



شکل ۱۲- خطای پاسخ مدل Simscape با جهت گیری مطلوب حول X

جهت گیری مطلوب حول محور Y به اندازه θ و خطای تطابق پاسخ مدل Simscape در شکل های ۱۳ و ۱۴ بیان شده‌اند.



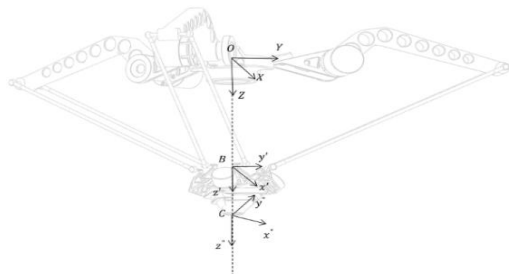
شکل ۱۳- جهت گیری مطلوب برای دوران حول محور Y و جهت گیری مدل Simscape

^۱ Screw axis representation

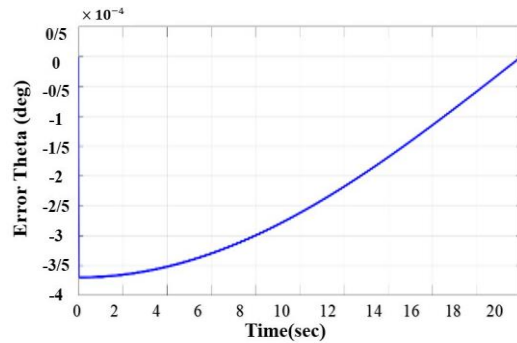
بوده و فقط به روش‌های عددی قابل حل است. اگرچه برای هندسه‌ای خاصی از ربات موازی کروی که به نام چشم چابک معروف است در [۱۲]، [۹] و سایر مقالات مرتبط با آن، روش‌های جبری برای حل سینماتیک مستقیم ربات حاصل شده است؛ اما برای فرم کلی ربات موازی کروی تنها در [۷] یک فرآیند برای حل سینماتیک مستقیم برپایه انتخاب‌های خاص دستگاه‌های مختصات ارائه شده که در نهایت تنها منجر به یافتن هشت پاسخ مختلف برای بردارهای \hat{V}_i می‌گردد؛ بنابراین همچنان ۹ مؤلفه ماتریس دوران کلی مجهول بوده و جهت‌گیری سکوی ربات بر حسب زوایای اولر نسبت به دستگاه مختصات مرجع برای فرم کلی ربات موازی کروی نامشخص است. از این رو در این تحقیق، حل سینماتیک مستقیم ربات موازی کروی با کمک سیستم استنتاج فازی عصبی تطبیقی حاصل شده است.

۴- ترکیب ربات موازی کروی و ربات دلتا

با اتصال ربات موازی کروی به سکوی ربات دلتا، محاسبه مکان و جهت‌گیری نهایی سکوی ربات هیبرید حاصل باید نسبت به یک دستگاه مختصات مرجع واحد سنجیده شوند. برای این منظور دستگاه مختصات مرجع جدیدی برای مرجع سنجش مکان و جهت‌گیری مجری نهایی ربات هیبرید در نظر گرفته شده است. از آنجا که تغییر مکان در ربات هیبرید تنها از طریق بخش دلتای ربات صورت می‌گیرد، برای محاسبه مکان مجری نهایی نیاز است که موقعیت مرکز دستگاه مختصات بخش کروی نسبت به دستگاه مختصات محلی سکوی بخش دلتا تعیین شود. مطابق شکل ۱۷ مرکز دستگاه مختصات مجری نهایی در بخش کروی ربات هیبرید نسبت به دستگاه مختصات محلی سکوی بخش دلتا فقط دارای مؤلفه مکان در راستای محور Z است.

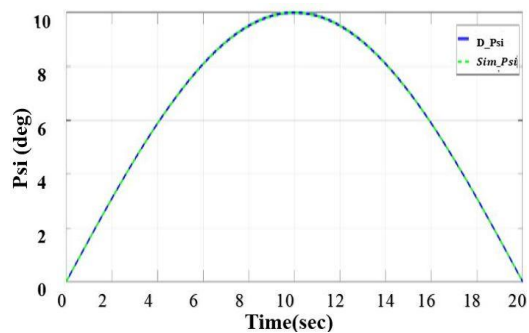


شکل ۱۷- ارتباط دستگاه مختصات مجری نهایی (C) با دستگاه مختصات مرجع (O) ربات هیبرید

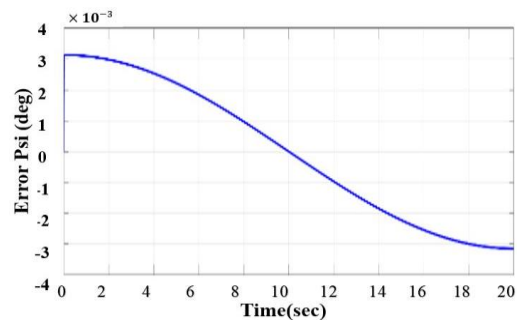


شکل ۱۴- خطای پاسخ مدل Simscape با جهت‌گیری مطلوب حول Y

در نهایت نیز جهت‌گیری مطلوب حول محور Z به اندازه ψ و خطای تطابق پاسخ مدل Simscape در شکل‌های ۱۵ و ۱۶ نمایش داده شده اند.



شکل ۱۵- جهت‌گیری مطلوب برای دوران حول محور Z و جهت‌گیری مدل Simscape



شکل ۱۶- خطای پاسخ مدل Simscape با جهت‌گیری مطلوب حول Z

۳-۳- سینماتیک مستقیم ربات موازی کروی

برای حل سینماتیک مستقیم ربات موازی، دستگاه معادلات غیر خطی برای فرم کلی ربات موازی کروی فاقد حل تحلیلی

سازگاری با محیط دارد [۱۹]. در ادامه توضیحات مختصری درباره معماری انفیس سیستم استنتاج فازی ارائه می‌شود.

۵-۱- ساختار سیستم استنتاج فازی

یک سیستم استنتاج فازی بر ۳ مؤلفه استوار است [۱۹]:

(۱) قواعد پایه که مجموعه‌ای از قواعد منطق فازی

"اگر-آنگاه" است.

(۲) توابع عضویت

(۳) یک روش استنتاج فازی برای محاسبه خروجی.

به این صورت که، یک ورودی غیرفازی وارد فازی‌ساز شده و تبدیل به یک مقدار فازی در بازه [۰،۱] می‌شود. قواعد فازی و توابع عضویت به عنوان پایگاه دانش یک سیستم استنتاج فازی هستند و هر دو المان‌های کلیدی برای موتور استنتاج به حساب می‌آیند. پایگاه قواعد فازی خود شامل عملگرهای منطق فازی و قواعد شرطی است. این پایگاه را می‌توان به صورت خودکار با کمک ابزارهایی مانند ANFIS و هم با استفاده از دانش بشری ایجاد کرد.

۵-۲- معماری ANFIS

سیستم استنتاج فازی عصبی تطبیقی یک شبکه تطبیقی است که از الگوریتم‌های یادگیری سطح بالا استفاده می‌کند و عملکرد آن مشابه با سیستم استنتاج فازی تاکاگی-سوگنو است. دو قانون بر پایه قواعد "اگر-آنگاه" فازی در این مدل به صورت رابطه (۵۹) است:

Rule 1

= if x is A_1 and y is B_1 Then y_i

$$= P_1^i x_1 + P_2^i x_2 + P_0^i \quad (59)$$

Rule 2

= if x is A_2 and y is B_2 Then y_{ii}

$$= P_1^{ii} x_1 + P_2^{ii} x_2 + P_0^{ii}$$

در این رابطه A_1 ، A_2 ، B_1 و B_2 توابع عضویت برای هر ورودی هستند. معماری یک سیستم استنتاج فازی عصبی تطبیقی شامل پنج لایه است. لایه اول و چهارم شامل گره‌های تطبیقی هستند در حالی که سایر لایه‌ها گره‌های غیر تطبیقی و ثابت دارند. در لایه اول هر گره متعلق به یک پارامتر تابعی است. در این لایه خروجی هر گره درجه‌ای از عضویت است که توسط

بنابراین یک دستگاه مختصات مرجع H به گونه‌ای تعریف می‌شود که مرکز آن روی مرکز دستگاه مختصات O قرار گرفته و بردارهای X و Y آن موازی با بردارهای x و y دستگاه مختصات مجری نهایی باشد. به این ترتیب مکان مجری نهایی از رابطه (۵۷) محاسبه می‌شود.

$$\vec{P} = {}^H R_C (\vec{P}_{delta} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B_{ZC} \end{bmatrix}) \quad (57)$$

در رابطه فوق، B_{ZC} موقیت مرکز دستگاه مختصات C نسبت به دستگاه مختصات محلی B بوده که برابر با $۸۰,۴۵۶$ میلی متر است و ${}^H R_C$ ماتریس دوران دستگاه C نسبت به دستگاه مختصات مرجع H برای ربات هیبرید است که از رابطه (۵۸) به دست می‌آید.

$${}^H R_C = \begin{bmatrix} c\sigma & -s\sigma & 0 \\ s\sigma & c\sigma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (58)$$

در رابطه (۵۸)، اختلاف زاویه محور y دستگاه مختصات مرجع جدید و قدیم برابر با $\frac{\pi}{6}$ است. از آنجایی که محورهای دستگاه مختصات مرجع جدید H برای ربات هیبرید، موازی با محورهای دستگاه مختصات محلی C مربوط به بخش کروی است؛ بنابراین جهت‌گیری‌های بخش کروی حول دستگاه مختصات خودش، در دستگاه مختصات مرجع H نیز بدون نیاز به استفاده از روابط انتقال و دوران صدق می‌کند.

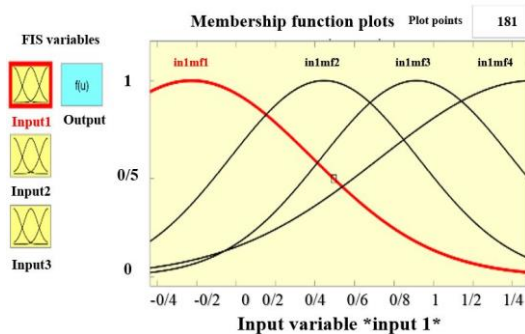
۵- سیستم استنتاج فازی عصبی تطبیقی

یک سیستم استنتاج فازی عصبی تطبیقی ترکیبی از دو روش محاسباتی نرم‌افزاری شبکه عصبی و منطق فازی است. منطقه فازی قادر است، جنبه‌های کیفی دانش بشری را در تجزیه و تحلیل دقیق کمی مسائل مختلف تغییر دهد؛ با این حال این روش فاقد یک فرآیند متداول و مسیر مشخص برای تبدیل پارامترهای کمی به قوانین استنتاج فازی^۱ است و به‌طور معمول آماده کردن توابع عضویت برای یک سیستم استنتاج فازی^۲ عملی بسیار زمان‌بر است. برخلاف شبکه‌های عصبی تطبیقی، منطق فازی توانایی بالاتری در فرآیند یادگیری برای

² Fuzzy inference system

¹ Fuzzy inference rules

هر ورودی چهار تابع عضویت مشابه شکل (۱۸) خواهد داشت. آموزش یک سیستم استنتاج فازی عصبی تطبیقی فرآیندی زمان‌بر است. این فرآیند تنها در صورتی که به حد خطای مورد نظر برسد و یا تعداد تکرار مورد نظر را انجام داده باشد متوقف خواهد شد. برای این شش سیستم استنتاج خطای نهایی و مدت زمان فرآیند یادگیری در جدول ۴ نمایش داده شده‌است. هر سیستم دارای ۲۷ قاعده فازی است.



شکل ۱۸- توابع عضویت فازی برای یکی از سیستم‌های فازی عصبی تطبیقی

جدول ۴- خطای نهایی و مدت زمان انجام فرآیند یادگیری برای سیستم استنتاج فازی عصبی تطبیقی

خروجی	تعداد داده‌های آموزش سیستم	زمان فرآیند	خطا
x		۲۳ ساعت و ۲۵ دقیقه	۰/۰۰۱۲۵
y	۶۹۸۱۶	۲۰ ساعت و ۵۴ دقیقه	۰/۰۰۰۸۶
z		۲۴ ساعت و ۳۲ دقیقه	۰/۰۰۱۷۳
ϕ		۲۶ ساعت و ۳۷ دقیقه	۰/۰۰۱۸۹
θ	۷۲۱۳۶	۲۳ ساعت و ۵۸ دقیقه	۰/۰۰۱۱۶
ψ		۲۴ ساعت و ۱۳ دقیقه	۰/۰۰۲۳۶

۴-۵- صحت‌سنجی سیستم‌های استنتاج برای ربات هیبرید

در این قسمت عملکرد سیستم‌های استنتاج فازی عصبی تطبیقی به‌عنوان یک بلوک استنتاج فازی در Simulink برای

توابع عضویت به ورودی تعلق می‌گیرد. در لایه دوم خروجی هر گره حاصل ضرب سیگنال ورودی به گره و سیگنالی است که به گره نظیر آن وارد می‌شود. هر گره در این لایه بیانگر وزن یک قاعده فازی است؛ همچنین هر گره در لایه سوم حاصل نسبت وزن یک قاعده به مجموع وزن تمام قواعد فازی است. در لایه چهارم هر گره، تطبیقی برای یک خروجی است که شامل تابعی مطابق با رابطه (۶۰) است.

$$O_{4i} = \bar{W}_i (P_1^i x_1 + P_2^i x_2 + P_0^i) \quad (60)$$

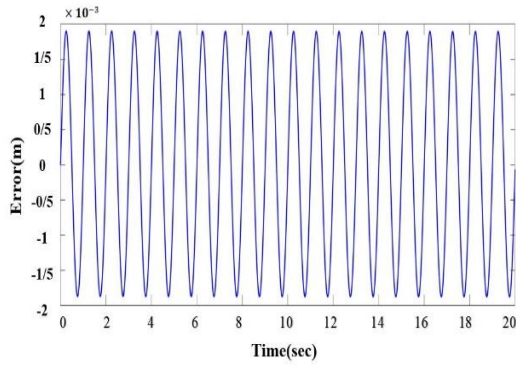
در رابطه (۶۰)، \bar{W}_i نرم وزن قاعده فازی از لایه قبل است. در نهایت تک‌گره موجود در لایه پنجم، خروجی نهایی را با جمع کردن تمام سیگنال‌های ورودی از گره‌های لایه قبل محاسبه می‌کند.

۳-۵- پیاده‌سازی ANFIS برای ربات هیبرید

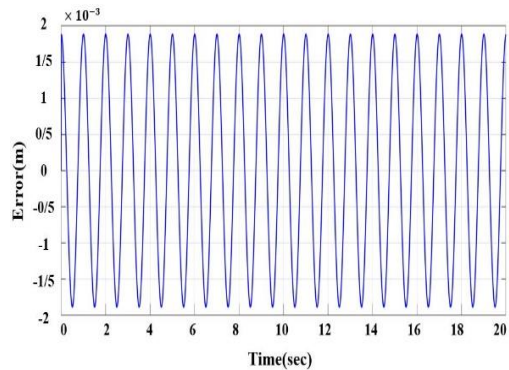
در این بخش، پیاده‌سازی سیستم استنتاج فازی عصبی تطبیقی با هدف حل مسأله سینماتیک مستقیم ربات هیبرید و با کمک جعبه ابزار طراحی عصبی-فازی MATLAB (Neuro-Fuzzy Designer) و داده‌های حاصل از محاسبه عددی سینماتیک مستقیم ربات هیبرید صورت گرفته است. به این ترتیب، شش سیستم استنتاج فازی برای تخمین سه پارامتر مکان و سه پارامتر جهت‌گیری ایجاد شدند. اطلاعات مربوط به نحوه پیاده‌سازی ANFIS برای شش پارامتر ربات هیبرید در جدول ۳ بیان شده است.

جدول ۳- تنظیمات ابزار طراحی عصبی-فازی MATLAB برای پارامترهای مکان و جهت‌گیری

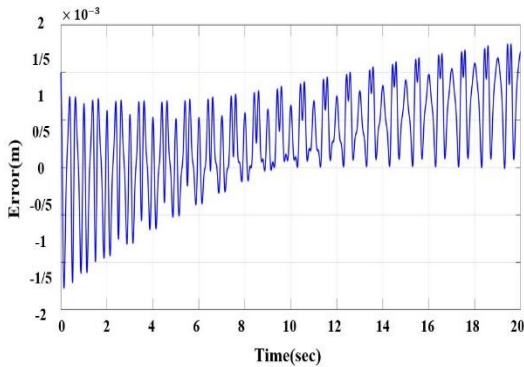
تعداد تکرار	حد خطا	نوع توابع عضویت	تعداد توابع عضویت	خروجی	ورودی
۱۰۰۰	10^{-6}	گوسی	۴	x	θ_{1d} θ_{2d} θ_{3d}
۱۰۰۰	10^{-6}	گوسی	۴	y	θ_{1d} θ_{2d} θ_{3d}
۱۰۰۰	10^{-6}	گوسی	۴	z	θ_{1d} θ_{2d} θ_{3d}
۱۰۰۰	10^{-6}	گوسی	۴	ϕ	θ_{1s} θ_{2s} θ_{3s}
۱۰۰۰	10^{-6}	گوسی	۴	θ	θ_{1s} θ_{2s} θ_{3s}
۱۰۰۰	10^{-6}	گوسی	۴	ψ	θ_{1s} θ_{2s} θ_{3s}



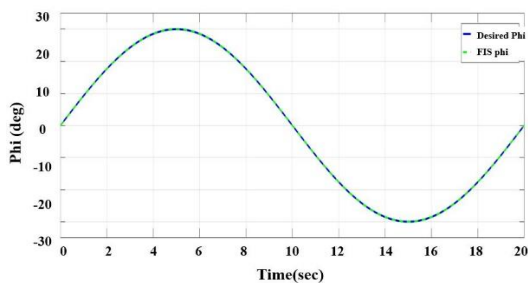
شکل ۲۰- الف) خطای تخمین مؤلفه X



شکل ۲۰- ب) خطای تخمین مؤلفه Y



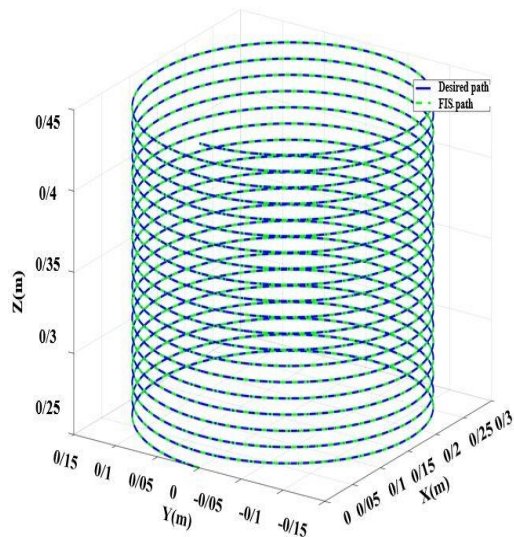
شکل ۲۰- پ) خطای تخمین مؤلفه Z



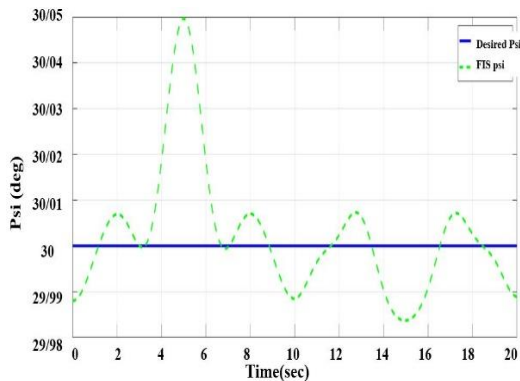
شکل ۲۱- الف) جهت‌گیری مطلوب و تخمین زده‌شده

توسط سیستم استنتاج فازی برای Φ

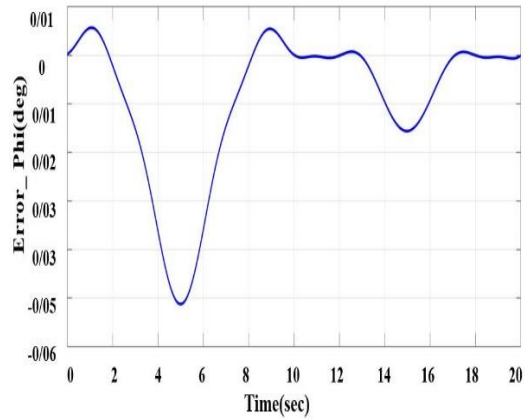
ربات هیبرید در محاسبه مسیر و جهت‌گیری مشخص به‌عنوان حل سینماتیک مستقیم سنجدیده می‌شود. برای انجام صحت-سنجی، ابتدا مقادیر مطلوب برای مسیر و جهت‌گیری را به سینماتیک معکوس سیستم وارد کرده و سپس پاسخ‌های آن مطابق شکل ۱۹ وارد سیستم استنتاج فازی می‌شود. خطای تخمین مؤلفه‌ها در شکل ۲۰ آورده شده‌است. همانطور که قابل مشاهده است خطای تخمین مؤلفه‌ها در هر سه جهت در محدوده‌ی $0/01$ است. در ادامه نیز، مسیر تخمین زده‌شده توسط سیستم استنتاج فازی با مسیر مطلوب مقایسه می‌گردد. این مقایسه در نمودار شکل‌های ۲۱، ۲۲ و ۲۳ نمایش داده شده است. بدین صورت که در قسمت اول رفتار سیستم در مقایسه با مقدار مطلوب آن آورده شده، سپس در قسمت دوم خطای تخمین مسیر بیان شده‌است. در شکل ۲۱ قسمت ب، خطای تخمین برای ϕ در محدوده $0/01$ تا $0/05$ - دیده شده- است. این در حالی است که خطای تخمین برای θ با استفاده از همان روش در شکل ۲۲ قسمت ب، در بازه‌ی $0/05$ تا $0/02$ - بدست آمده‌است. در انتها نیز مشابه خطای تخمین برای ϕ در شکل ۲۱ ب، خطای تخمین برای ψ در محدوده‌ی $0/01$ تا $0/05$ - بدست آمده‌است.



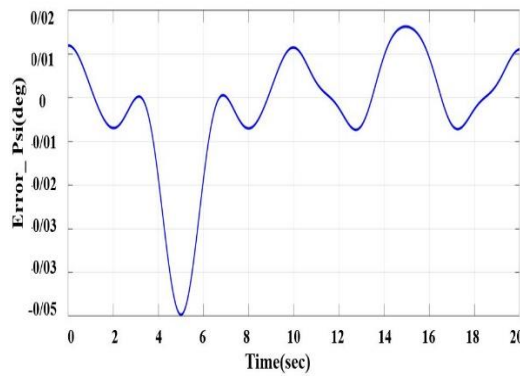
شکل ۱۹- مسیر مطلوب و مسیر تخمین زده‌شده توسط سیستم استنتاج فازی



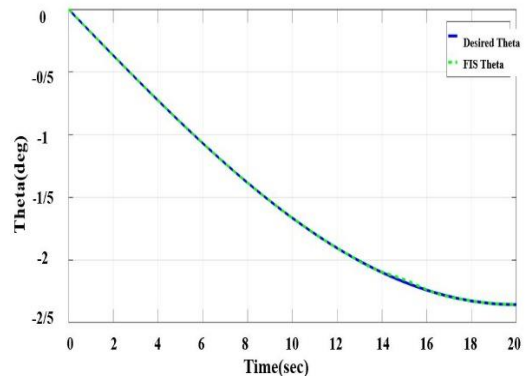
شکل ۲۳-الف-جهت گیری مطلوب و تخمین زده شده توسط سیستم استنتاج فازی برای Ψ



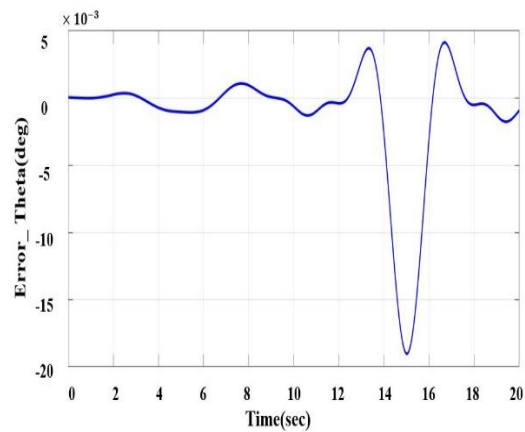
شکل ۲۱-ب- خطای تخمین برای Φ



شکل ۲۳-ب- خطای تخمین برای Ψ



شکل ۲۲-الف-جهت گیری مطلوب و تخمین زده شده توسط سیستم استنتاج فازی برای θ



شکل ۲۲-ب- خطای تخمین برای θ

۶- جمع بندی و نتیجه گیری

در این پژوهش، یک ربات موازی هیبرید با ادغام ربات موازی دلتا با سه درجه آزادی انتقالی و ربات موازی کروی با سه درجه آزادی دورانی معرفی گردیده و معادلات سینماتیک آن به صورت غیر کوپل استخراج شد. سپس با ترکیب کردن این روابط با یکدیگر امکان سنجش موقعیت و جهت گیری مجری نهایی به صورت همزمان فراهم آمد. صحت سنجی روابط سینماتیکی، صحت و دقت محاسبات سینماتیک سیستم را به خوبی نشان می‌دهند. علاوه بر این با کمک سیستم استنتاج فازی عصبی تطبیقی ۶ بلوک منطق فازی برای تخمین پارامترهای مکان و جهت گیری ربات ایجاد شده است که با خطایی در حدود ۱ میلی‌متر برای مکان و ۰/۰۱ درجه برای زاویه همراه بوده است. این مقدار، برای بسیاری از کارهایی که به دقت‌های بسیار بالا نیاز ندارند، خطای قابل قبولی است.

- [9] Ji P. and Wu H. (2001), "Algebraic solution to forward kinematics of a 3-DOF spherical parallel manipulator", *J Robot Syst*, 18, 5, pp 251-257.
- [10] Bonev I. A., Chablat D. and Wenger P. (2006), "Working and assembly modes of the Agile Eye", In *Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation*, Orlando, USA, pp 2317-2322.
- [11] Bai S., Hansen M. R. and Angeles J. (2009), "A robust forward-displacement analysis of spherical parallel robots", *Mech Mach Theory*, 44, 12, pp 2204-2216.
- [12] Kong X. and Gosselin C. M. (2010), "A formula that produces a unique solution to the forward displacement analysis of a quadratic spherical parallel manipulator: The Agile Eye", *J Mech Robot*, 2, 4, 044501.
- [13] Lallemand J. P., Goudali A. and Zeghloul S. (1997), "The 6-DOF 2-Delta parallel robot", *J. Rob*, 15, 4, pp 407-416.
- [14] Brinker J., Funk N., Ingenlath P., Takeda Y. and Corves B. (2017), "Comparative study of serial-parallel Delta robots with full orientation capabilities", *IEEE Robot Autom Lett*, 2, 2, pp 920-926.
- [15] Chablat D. and Wenger P. (2006), "A six degree-of-freedom haptic device based on the orthoglide and a hybrid agile eye", in *ASME International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, 2, pp 795-802.
- [16] Olsson A. (2009), MSc Theses "Modeling and control of a Delta-3 robot", Department of Automatic Control.
- [17] Alashqar E. H. A. (2013), McS. thesis, "Modeling and high precision motion control of 3 DOF parallel Delta robot manipulator", Palestine, The Islamic University of Gaza.
- [18] Taghirad H. D. (2017), "Parallel robots: mechanics and control", CRC press, 1st ed.
- [19] Jang J. S. (1993), "ANFIS: adaptive-network-based fuzzy inference system", *IEEE Trans Syst Man Cybern*, 23, 3, pp 665-685.

استفاده از بلوک‌های منطق فازی بجای حل سینماتیک معکوس ربات با وجود افزایش میزان خطا، به دلیل ویژگی‌های پردازشی منطق فازی می‌تواند هزینه محاسبات و نیاز به سخت افزارهای قدرتمند را به شدت کاهش دهد؛ بطوریکه هزینه، زمان و قدرت پردازشی صرف محاسبه جبری یا عددی روابط سینماتیک مستقیم یک ربات موازی که از پیچیدگی بالایی برخوردار است نخواهد شد.

۷-مراجع

- [1] Pierrot F., Reynaud C. and Fournier A. (1990), "Delta: A simple and efficient parallel robot", *Cambridge University*, 8, 2, pp 105-109.
- [2] Staicu S., Carp-Ciocardina D. C. (2003), "Dynamic analysis of Clavel's Delta parallel robot", *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, pp 4116-4121.
- [3] Mustafa M., Misuari R. and Daniyal H. (2007), "Forward kinematics of 3 degree of freedom delta robot", In: *5th Student Conference on Research and Development Malaysia*, pp 1-4.
- [4] Staicu S. (2009), "Recursive modelling in dynamics of Delta parallel robot", *J. Rob*, 27, 2, pp 199-207.
- [5] Gwinnett J. E. (1928), "Amusement arrangements creating illusions of travel", *USA Patent US1789680A*.
- [6] Gosselin C. M. and Lavoie E. (1993), "On the kinematic design of spherical three-degree-of-freedom parallel manipulators", *Int J Rob Res*, 12, 4, pp 394-402.
- [7] Gosselin C., Sefrioui J. and Richard M. J. (1994), "On the direct kinematics of spherical three-degree-of-freedom parallel manipulators of general architecture", *J Mech Des N Y*, 116, 2, pp 594-598.
- [8] Gosselin C. M. and St-Pierre E. (1997), "Development and experimentation of a fast 3-DOF camera-orienting device", *Int J Rob Res*, 16, 5, pp 619-630.