مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها/ سال ۱۴۰۱/ دوره ۱۲/ شماره ۵/ صفحه ۱۳۳-۱۴۶

مجله علمی پژوهشی مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها

دانشگاه صنعتی شاهرود

DOI: 10.22044/JSFM.2022.11601.3538

تحلیل ارتعاشات نانوصفحه‌های دایره‌ای تحت تحریک الکترواستاتیک غیرخطی با لحاظ اثرات سطح و اندازه

مهرداد شیخلو[۱،*]، سید علی دلبری[۲]، عباس صباحی نمینی[۱]، آرش عبدالملکی[۳]

[۱] استادیار، گروه علوم مهندسی، دانشکده فن آوری‌های نوین، دانشگاه محقق اردبیلی،اردبیل، ایران.

[۲] مربی، گروه علوم مهندسی، دانشکده فن آوری‌های نوین، دانشگاه محقق اردبیلی،اردبیل، ایران.

[۳] استادیار، گروه بیوانفورماتیک، دانشکده فن آوری‌های نوین، دانشگاه محقق اردبیلی،اردبیل، ایران.

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۱۱/۱۰؛ تاریخ بازنگری:۱۴۰۱/۰۶/۲۵؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۰۹/۲۲

چکیده

در این مقاله رفتار رزونانس اصلی و ناپایداری پولین استاتیکی نانوصفحه دایره‌ای با تحریک الکترواستاتیکی غیرخطی بررسی شده است. معادله حاکم بر رفتار نانو صفحه کر شهف با در نظر گرفتن نیروی میرایی سیال و نیروی کزمیر و استفاده از تئوری تنش‌کوپل سازگار و تئوری سطح گورتین- مورداک و اصل همیلتون استخراج شده است. معادله حاکم برای ارتعاشات با دامنه کوچک حل شده است. برای این منظور، فرض شده که ابتدا صفحه توسط یک ولتاژ پایه DC خم می‌شود و سپس، به وسیله یک ولتاژ هارمونیک AC تحریک می‌شود تا حول حالت تعادل استاتیکی نوسان کند. برای به دست آوردن مدل کاهش مرتبه یافته از روش مانده های وزنی گالرکین استفاده شده است. با استفاده از روش مقیاس‌های چند گانه برای معادله غیرخطی حل نیمه تحلیلی ارائه شده و معادله پاسخ فرکانسی سیستم برای حالت رزونانس اصلی استخراج شده است. تاثیر لحاظ کردن اثرات اندازه و سطح بر روی ولتاژ پولین استاتیکی و پاسخ فرکانسی رزونانس اصلی سیسستم بررسی شده است. نتایج عددی به‌دست‌آمده با نتایج تحقیقات قبلی مقایسه و مطابقت خوبی بین آنها مشاهده شد. نشان داده شد که تحریک الکترواستاتیک و نیروی کزمیر اثر نرم‌شوندگی دارند، در حالی که اثرات سطحی بسته به خواص مکانیکی سطح، ابعاد و شرایط مرزی نانوصفحه می تواند اثر سخت‌شوندگی یا نرم شوندگی داشته باشد.

کلمات کلیدی: نانوصفحه دایره ای؛ پارامتر مقیاس طول؛ رزونانس اصلی؛ اثرات انرژی سطحی.

Vibration Analysis of Circular Nanoplates under Nonlinear Electrostatic Excitation Considering the Surface Energy and Size Effects

M. Sheikhlou[1,*], S.A. Delbari[2], A. Sabahi namini[1], A. Abdolmaleki[3]

[1] Assis. Prof. , Faculty of Advanced Technologies, University of Mohaghegh Ardabili, Ardabil, Iran.

[2] M.Sc. Faculty of Advanced Technologies, University of Mohaghegh Ardabili, Ardabil, Iran.

[3] Assis. Prof. , Faculty of Advanced Technologies, University of Mohaghegh Ardabili, Ardabil, Iran.

Abstract

This article investigates the primary resonant behavior and static pull-in instability of a circular nanoplate under nonlinear electrostatic actuation. The consistent couple stress theory, Gurtin-Murdoch surface elasticity theory and Hamilton principle were utilized to derive the governing differential equation of transverse vibration Kirchhoff nanoplate by considering the fluid damping and Casimir forces. The governing equation were solved for small amplitude vibrations. To this end, it is assumed that the elastic nanoplate is deflected using a DC bias voltage and then driven to vibrate around its deflected position by a harmonic AC load. The weighted residual method of Galerkin was used to obtain a reduced order model. The method of multiple scales is used to solve the nonlinear equation of motion and, the primary resonance mode frequency response equation is derived. The obtained numerical results were compared to those of previous research works, and a good agreement observed between them. The numerical results revealed that electrostatic actuation and Casmier force have softening effects; but the surface energy can has hardening or softening effect depending on the surface mechanical properties, dimensions and boundary condtions of the nanoplate.

Keywords: Circular nanoplate; Material length scale parameter; Primary resonance; Surface energy effects.

* نویسنده مسئول * نویسنده مسئول؛ تلفن: ۰۹۱۴۳۲۱۸۷۲۴؛ فکس: ۳۲۳۲۲۹۵۳-۰۴۵

آدرس پست الکترونیک: sheikhlou@uma.ac.ir

۱- مقدمه

نتایج آزمایشگاهی نشان می‌دهند که در مقیاس میکرو و نانو رفتار ساختارها وابسته به اندازه است [۱]؛ بنابراین، برای آنالیز نانو ساختارها باید اندازه در نظر گرفته بشوند [۲]. با توجه به این که انجام آزمایش‌های کنترل شده در مقیاس نانو سخت است و شبیه سازی‌های دینامیک مولکولی نیز از لحاظ محاسباتی بسیار پر هزینه هستند، مدلسازی نانو ساختارها با استفاده از تئوری مکانیک محیط‌های پیوسته مورد توجه پژوهشگران زیادی قرار گرفته است [۳]. در مکانیک محیط های پیوسته‌ی کلاسیک اثرات اندازه لحاظ نشده است؛ بنابراین تئوری‌های اصلاح شده مختلفی توسعه پیدا کرده‌اند تا بر این کاستی غلبه کنند. تئوری نرخ کرنش، تئوری تنش کوپل، تئوری میکروپلار و تئوری الاستیسیته‌ی غیر موضعی تئوری‌های محیط پیوسته اصلاح شده‌ای هستند که اثرات اندازه را لحاظ می‌کنند [۴]. تئوری تنش کوپل کلاسیک توسط توپین[۵]، میندلین و تیرستن [۶] و کوتیر [۷] توسعه پیدا کرد. تئوری تنش‌کوپل کلاسیک شامل چهار ثابت مربوط به ماده‌ی سازنده‌ی ریز ساختار است (دو ثابت کلاسیک و دو ثابت اضافه). محاسبه‌ی ثابت‌های افزون بر ثابت‌های لامه در تئورهای الاستیسیته‌ی غیرکلاسیک کار پیچیده‌ای است. حاج اسفندیاری و درگوش [۸] مدلی از تئوری تنش کوپل ارائه کردند که در آن به دلیل صرف نظر کردن از مولفه‌های نرمال تانسور تنش کوپلی در یک المان حجم از محیط پیوسته، تانسور تنش کوپل پادمتقارن است و به این دلیل از بخش متقارن تنش کوپل صرفنظر می‌شود. معادلات ساختاری توسعه یافته توسط این مدل تنها شامل یک پارامتر مقیاس طول می‌باشند. این مدل به عنوان تئوری تنش کوپل سازگار شناخته می‌شود. آقابابایی بنی و همکاران [۹] با استفاده از تئوری تنش کوپل سازگار پاسخ دینامیکی وابسته به اندازه یک میکروصفحه مستطیلی در مجاورت فیلم سیال مطالعه کردند. اکبری الشتی و ابوالقاسمی [۱۰] برای مطالعه ارتعاشات آزاد میکرو تیرهای اویلر-برنولی از تئوری کوپل تنش سازگار استفاده کردند.

یانگ و همکارانش [۱۱] با اصلاح تئوری تنش‌کوپل کلاسیک با وارد کردن یک رابطه‌ی تعادل اضافی حاکم بر رفتار کوپل‌ها، تئوری تنش کوپل اصلاح شده را ارائه نمودند. در این تئوری، تانسور تنش‌کوپل به یک تانسور متقارن تبدیل شده و پارامترهای مقیاس اندازه‌ی ماده‌ی سازنده‌ی ریزساختار تنها به یک پارامتر مقیاس طول کاهش می یابد. این ویژگی استفاده از تئوری تنش‌کوپل اصلاح شده را آسانتر می‌کند. از تئوری تنش کوپل اصلاح شده برای محاسبه اثرات اندازه درمدل میکرو تیر اویلر-برنولی[۱۲]، مدل میکرو تیر تیموشنکو [۱۳]، مدل میکرو صفحه کرشهف [۱۴]، مدل میکرو صفحه میندلین [۱۵] و مدل میکرو صفحه ردی [۱۶] مورد استفاده قرار گرفته است.

انرژی سطحی مربوط به چند لایه از اتم‌های نزدیک به سطح است و در مقیاس ماکرو نسبت حجم اتم‌های نزدیک سطح به حجم کل ماده خیلی کوچک است. لذا، نسبت انرژی سطحی به انرژه کل ماده خیلی ناچیز است و بنابر این در تئوری الاستیسیته کلاسیک اثرات سطح در نظر گرفته نمی شود. کاهش اندازه ساختارها به میکرو و نانو باعث می شود که نسبت انرژی سطح به کل انرژی ماده افزایش قابل ملاحظه ای پیدا کند [۱۷]، بنابراین باید برای مطالعه ریزساختار ها اثرات سطح نیز لحاظ شود. گورتین و مورداک[۱۸, ۱۹] برای لحاظ کردن اثرات سطح تئوری جدیدی بر مبنای تئوری محیط پیوسته کلاسیک توسعه دادند. در مدل آنها سطح به عنوان یک غشای دو بعدی با ضخامت صفر و خواصی متفاوت از ماده لایه‌های پایین تر در نظر گرفته می‌شود. انصاری و سهمانی[۲۰] اثر تنش‌های سطحی را بر پاسخ ارتعاشات آزاد نانو صفحات مطالعه کردند. وانگ و وانگ [۲۱] اثرات تنش های پسماند سطحی و الاستیسیته سطحی بر روی پاسخ ارتعاشات آزاد غیرخطی صفحه‌های کرشهف و میندلین را با استفاده از کرنش‌های ون کارمن مطالعه کردند. انصاری و همکاران [۲۲] اثر تنش های سطحی را بر روی پاسخ ارتعاش آزاد نانو صفحه‌های دایره‌ای با استفاده از الاستیسیته سطح گورتین مورداک و تئوری تغییر شکل‌های برشی مرتبه اول صفحات مطالعه کردند. وانگ و وانگ [۲۳] اثرات انرژی سطح بر روی ناپایداری پولین یک نانوسوئیچ غیرخطی هندسی را بر مبنای تئوری تیر اویلر برنولی مطالعه کردند. وانگ و همکاران [۲۴] اثر انرژی سطح و تنش‌های حرارتی بر روی ناپایداری پولین یک صفحه دایره‌ای تحت تحریک الکترواستاتیک را با استفاده از تئوری الاستیسیته سطحی و تئوری تنش کوپل اصلاح شده مطالعه کردند. حمیدی و همکاران [۲۵] میرایی ترموالاستیک یک نانو تیر تشدید کننده را با استفاده از تئوری

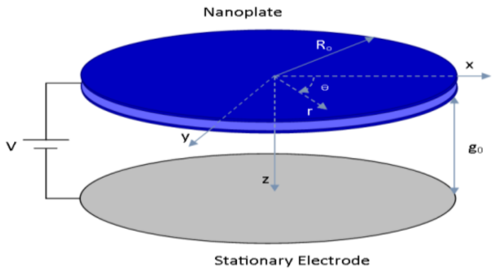
های الاستیسیته سطحی، الاستیسیته ی غیر موضعی و ترموالا ستیسته گرین-نقدی برر سی کردند. حامد و همکاران [۲۶] اثر تنش پسماند سطحی را بر روی رفتار چند شاخگی نانولوله کربنی دو جداره حامل سیال تحریک پارامتریک برر سی کردند. عبدالرحمن و همکاران [۲۷] خمش استاتیکی نانوتیرهای پرفوره شده را با استفاده از تئوری الاستیسیته سطحی و تئوری تنش کوپل اصلاح شده مطالعه کردند.

میکرو و نانو صفحات با تحریک الکترو ستاتیکی به صورت گسترده در ساختارهای میکرو و نانوالکترومکانیکی مانند سوئیچها و سنسورها مورد استفاده قرار می‌گیرند. در این ساختار ها بین نیروی جاذ به الکترواستاتیکی و نیروی بازگرداننده مکانیکی (الاستیک) تعادل برقرار می‌شود، با افزایش ولتاژ DC هر دو نیروی الکترواستاتیک و بازگرداننده الاستیک افزایش می‌یابند. هنگامی که ولتاژ به مقدار بحرانی می‌رسد، نیروی الکترواستاتیک بر نیروی بازگرداننده الاستیک غالب می شود و باعث به هم چ سبیدن الکترودها و فروپا شی ساختار می‌شود. این نوع ناپایداری پولین نامیده می‌شود و ولتاژ متناظر آن ولتاژ پولین نامیده می‌شود. در طراحی نوسانگرها [۲۸] برای رسیدن به حرکات با ثبات از این ناپایداری‌ها جلوگیری می‌کنند، در حالی که در کاربردهای سوئیچینگ [۲۹] این اثر را برای بهینه سازی عملکرد دستگاه بکار می‌گیرند. برای واداشتن وسایل میکرو و نانوالکترومکانیکی به رزونانس، روش‌های مختلفی وجود دارد. متداول‌ترین روش، تحریک رزونانس اصلی است که در آن فرکانس تحریک نزدیک فرکانس طبیعی سازه است. مثال‌هایی از این نوع رزونانس در کاربردهای مختلفی مانند سنسورهای رزونانسی و فیلترهای رادیو فرکانسی مشاهده می‌شود. سرافراز و همکاران [۳۰] رزونانس زیرهارمونیک و فوق هارمونیک ارتعاشات غیرخطی نانوتیرها را با استفاده از تئوری تیر اویلر برنولی و الاستیسیته سطح مطالعه کردند. مامندی و میرزایی قلعه [۳۱] ارتعاشات غیرخطی وابسته به اندازه یک میکروتیر بر روی بستر وینکلر و بار فشاری در دو انتهای آن را با استفاده از تئوری تنش کوپل اصلاح شده مطالعه کردند. سرافراز و همکاران [۳۲] اثر انرژی سطحی را بر روی رزونانس اصلی غیرخطی نانوپوسته سیلیکونی تحت تحریک هارمونیک خارجی با استفاده از تئوری الاستیسیته سطح گورتین-مورداک و تئوری کلاسیک پوسته‌ها مطالعه کردند. سهمانی و همکاران [۳۳] اثرات تنش سطحی را بر روی رزونانس اصلی غیرخطی نانوپوسته های متخلخل مدرج تابعی تحت تحریک هارمونیک نرم خارجی با استفاده از تئوری الاستیسیته سطح گورتین-مورداک و تئوری کلاسیک پوسته‌ها مطالعه کردند. زی و همکاران [۳۴] تاثیر انرژی آزاد سطح را بر روی رزونانس ثانویه غیرخطی نانوتیرهای سیلیکونی متخلخل مدرج تابعی تحت تحریک سخت خارجی مطالعه کردند. آنها برای مدلسازی اثرات سطح برروی رفتار دینامیکی نانوتیر اویلر برنولی از تئوری الاستیسیته ی سطح استفاده کردند و برای حل معادله از روش گلرکین و روش مقیاس های چند گانه استفاده کردند.

در این مقاله اثرات انرژی سطحی و اندازه بر روی رفتار رزونانس اصلی و ناپایداری پولین استاتیکی نانوصفحه دایره‌ای تحت تحریک غیرخطی الکترو ستاتیکی برر سی شده است. معادلات حاکم با استفاده از روش همیلتون بدست آمد، سپس معادله استاتیکی با استفاده از روش خطی سازی گام به گام حل شده و در نهایت برای بدست آوردن پاسخ رزونانس اصلی نانوصفحه دایره‌ای معادله دینامیکی با استفاده از روش مقیاس های چندگانه حل شده است.

۲- استخراج معادله ارتعاشات عرضی نانوصفحه

یک سیستم نانو الکترومکانیکی شامل نانوصفحه دایره ای تحت تحریک الکترواستاتیک با شعاع R_0 و ضخامت h به همراه محورهای استوانه‌ای مناسب برای مدلسازی آن در شکل ۱ نشان داده شده است. صفحه بالایی به عنوان الکترود تغییر شکل پذیر عمل می‌کند و صفحه پایینی یک الکترود صلب است و فاصله اولیه بین دو الکترود g_0 است. سطوح بالایی و پایینی نانوصفحه دایره‌ای تغییر شکل پذیر در $z=\pm h/2$ به ترتیب با S^+ و S^- نشان داده شده است.



شکل ۱- تصویر شماتیک نانوصفحه دایره‌ای تحت تحریک الکترواستاتیک.

مولفه‌های جابه‌جایی برای نانوصفحه دایره‌ای کرشهف با تغییر شکل متقارن محوری به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$u_r(r,\theta,z,t)=-z\frac{\partial w(r,t)}{\partial r},\quad u_\theta(r,\theta,z,t)=0,\ u_z(r,\theta,z,t)=w(r,t). \tag{۱}$$

که u_r، u_θ و u_z به ترتیب مولفه‌های جابه‌جایی در را ستاهای شعاعی، محیطی و محوری در د ستگاه مخت صات ا ستوانه‌ای هستند و w جابجایی نقطه‌ای بر روی سطح میانی صفحه است. با استفاده از معادله (۱) مولفه‌های غیر صفر تانسور کرنش به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$\varepsilon_{rr}=-z\frac{\partial^2 w}{\partial r^2},\varepsilon_{\theta\theta}=-z\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right). \tag{۲}$$

در حالت تنش صفحه‌ای، مولفه‌های تانسور تنش عبارتند از:

$$\sigma_{rr}=\frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_{rr}+\nu\varepsilon_{\theta\theta}\right)=-\frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}-\frac{\nu}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right),\quad \sigma_{\theta\theta}=\frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_{\theta\theta}+\nu\varepsilon_{rr}\right)=-\frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right). \tag{۳}$$

همچنین، مولفه‌های غیر صفر تانسور انحنای پادمتقارن عبارتند از [۸]:

$$\mu_{r\theta}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2},\ \mu_{\theta r}=-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}. \tag{۴}$$

مولفه‌های غیر صفر تانسور تنش‌کوپل عبارتند از [۸]:

$$m_{r\theta}=-4Gl^2\frac{\partial^2 w}{\partial r^2},\ m_{\theta r}=4Gl^2\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}. \tag{۵}$$

که در آن G مدول بر شی ماده و l پارامتر مقیاس طول ا ست که اثرات تنش‌کو پل را ا ندازه‌گیری می‌کند. با استفاده از تئوری سطح گورتین-مورداک [۱۸, ۱۹] معادلات م شخ صه لایه‌های سطحی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\sigma^{s\pm}_{\alpha\beta}=\tau^{s\pm}\delta_{\alpha\beta}+\lambda^{s\pm}\varepsilon^{s\pm}_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}+2\mu^{s\pm}\varepsilon^{s\pm}_{\alpha\beta},\quad \sigma^{s\pm}_{\gamma z}=\tau^{s\pm}\frac{\partial w}{\partial\gamma} \tag{۶}$$

که در آن $\varepsilon^{s\pm}_{\alpha\beta}$ و $\sigma^{s\pm}_{\alpha\beta}$ به ترتیب نشان دهنده ی کرنش و تنش در لایه های سطحی هستند. $\lambda^{s\pm}$ و $\mu^{s\pm}$ ضرایب لامه و $\delta_{\alpha\beta}$ تابع دلتای کرانکر هستند. $E^{s\pm}$ و $\tau^{s\pm}$ به ترتیب مدول الاستیک سطحی و تنش کششی پسماند سطحی هستند. در معادله ی بالا اندیس‌های α و β متناظر با مقادیر r و θ می باشند. با جایگذاری معادله ی (۲) در معادله ی (۶) و فرض این که مدول الاستیک سطحی و تنش کششی پسماند سطوح بالایی و پایینی با هم برابر باشند، تنش‌های سطحی به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$\sigma^{s\pm}_{rr}=\tau^s\mp\frac{E^s h}{2(1-\nu^2)}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{\nu}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right),\quad \sigma^{s\pm}_{\theta\theta}=\tau^s\mp\frac{E^s h}{2(1-\nu^2)}\left(\nu\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right),\quad \sigma^{s\pm}_{rz}=\tau^s\frac{\partial w}{\partial r} \tag{۷}$$

گشتاورهای خمشی با استفاده‌ی هم‌زمان از معادلات (۳)، (۵) و (۷) به ترتیب به شکل زیر به‌دست می‌آیند:

$$\begin{aligned}M_{rr}&=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{rr}z\,dz+\frac{h}{2}\left(\sigma^{s+}_{rr}-\sigma^{s-}_{rr}\right)=-\left(D+D^s\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{\nu}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right),\\ M_{\theta\theta}&=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{\theta\theta}z\,dz+\frac{h}{2}\left(\sigma^{s+}_{\theta\theta}-\sigma^{s-}_{\theta\theta}\right)=-\left(D+D^s\right)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right),\\ M_{r\theta}&=\int_{-h/2}^{h/2}m_{r\theta}\,dz=-D^l\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right),\\ M_{\theta r}&=\int_{-h/2}^{h/2}m_{\theta r}\,dz=D^l\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right).\end{aligned} \tag{۸}$$

که $D=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ صلبیت خمشی، $D^l=4Gl^2h$ سهم گرادیان چرخش در صلبیت خمشی و $D^s=\frac{E^s h^2}{2(1-\nu^2)}$ سهم انرژی سطح در صلبیت خمشی است. نیروهای داخل صفحه‌ای به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$N_{rr}=\int_{-h/2}^{h/2}\sigma_{rr}\,dz+\left(\sigma^{s+}_{rr}+\sigma^{s-}_{rr}\right)=2\tau^s. \tag{۹}$$

تغییرات اول انرژی کرنشی کل صفحه دایره‌ای در بازه‌ی زمانی 0 تا T به صورت زیر است:

$$\delta\int_0^T U dt = \int_0^T\int_\Omega \begin{pmatrix}\sigma_{rr}\delta\varepsilon_{rr}+\sigma_{\theta\theta}\delta\varepsilon_{\theta\theta}\\ +m_{r\theta}\delta\mu_{r\theta}+m_{\theta r}\delta\mu_{\theta r}\end{pmatrix} d\Omega dt + \int_0^T\int_{S^+}(\sigma_{rr}^{s+}\delta\varepsilon_{rr}^{s+}+\sigma_{\theta\theta}^{s+}\delta\varepsilon_{\theta\theta}^{s+})dAdt + \int_0^T\int_{S^-}(\sigma_{rr}^{s-}\delta\varepsilon_{rr}^{s-}+\sigma_{\theta\theta}^{s-}\delta\varepsilon_{\theta\theta}^{s-})dAdt \qquad (۱۰)$$

با جایگذاری معادلات (۲)- (۷) در معادله (۱۰) تغییرات اول انرژی کرنشی صفحه به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\delta\int_0^T \mathrm{U}dt = \int_0^T\int_\Omega \mathrm{N_{rr}}\delta\left(\frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial \mathrm{r}}\right)^2 \mathrm{dAdt} - \int_0^T\int_\Omega \mathrm{M_{rr}}\delta\left(\frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial \mathrm{r}^2}\right)\mathrm{dAdt} - \int_0^T\int_\Omega \mathrm{M_{\theta\theta}}\delta\left(\frac{1}{\mathrm{r}}\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial \mathrm{r}}\right)\mathrm{dAdt} - \int_0^T\int_\Omega \mathrm{M_{r\theta}}\delta\left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial \mathrm{r}^2}\right)\mathrm{dAdt} - \int_0^T\int_\Omega \mathrm{M_{\theta r}}\delta\left(-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial \mathrm{r}^2}\right)\mathrm{dAdt} \qquad (۱۱)$$

با صـــرفنظر کردن از اثر اینرســـی دورانی و چگالی ســـطح، تغییرات اول انرژی جنبشی به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\delta\int_0^T K dt = -\int_0^T\int_\Omega (\rho h + 2\rho^s)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\delta w d\Omega \mathrm{dt} \qquad (۱۲)$$

که در آن ρ و ρ^s به ترتیب چگالی نانوصـفحه وچگالی سـطح می‌باشند. تغییرات اول کار که به وسیله‌ی بار گسترده‌ی q(r) در بازه‌ی زمانی0 تا T اعمال می‌گردد برابر است با:

$$\delta\int_0^T W\, dt = \int_0^T\int_\Omega q\delta w d\Omega\, dt. \qquad (۱۳)$$

بـا جـایگـذاری روابط (۱۱)- (۱۳) در معـادلـه همیلتون $\left(\delta\int_0^T(\mathrm{K}-\mathrm{U}+\mathrm{W})\mathrm{dt}=0\right)$ و اســـتفاده از معادلات (۸) و (۹) معادله ی دیفرانســـیلی حاکم بر حرکت عرضـــی صـــفحه دایره‌ای و شرایط مرزی آن به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$\frac{\partial^2 M_{rr}}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial M_{rr}}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial M_{\theta\theta}}{\partial r}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 M_{r\theta}}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial M_{r\theta}}{\partial r}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 M_{\theta r}}{\partial r^2}-\frac{1}{r}\frac{\partial M_{\theta r}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rN_{rr}\frac{\partial w}{\partial r}\right)+q(r)=(\rho h+2\rho^s)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \qquad (۱۴)$$

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial r}(rM_{rr})-M_{\theta\theta}-rN_{rr}\frac{\partial w}{\partial r}\\ +\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}(rM_{r\theta})-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial r}(rM_{\theta r})\end{pmatrix}\delta w|_{r=0,R_o}=0 \qquad (۱۵)$$

$$\left(M_{rr}+\frac{M_{r\theta}}{2}-\frac{M_{\theta r}}{2}\right)\delta\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)|_{r=0,R_o}=0$$

با جایگذاری معادلات (۸) و (۹) در معادله‌ی(۸)، معادله ارتعاشات صفحه به صورت زیر بدست می‌آید:

$$(D+D^s)\nabla^4 w + D^l\left(\frac{\partial^4 w}{\partial r^4}+\frac{2}{r}\frac{\partial^3 w}{\partial r^3}\right) - 2\tau^s\nabla^2 w + (\rho h+2\rho^s)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=q \qquad (۱۶)$$

کـه در آن $\nabla^2=\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)$ عملگر لاپلاس و $\nabla^4=\left(\frac{\partial^4}{\partial r^4}+\frac{2}{r}\frac{\partial^3}{\partial r^3}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial r}\right)$ عملگر بـای هـارمونیـک در دستگاه مختصات قطبی هستند. نیروی خارجی اعمال شده بر صفحه را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$q=F_e+F_c-F_v \qquad (۱۷)$$

که در آن F_c، F_v و F_e به ترتیب نیروی کزمیر ناشـــی از برهم کنش مولکولی بین دوصفحه، نیروی میرایی ایجاد شده توسط ســـیال و نیروی الکترواســـتاتیکی هســـتند. وقتی که اخلاف پتانسیل الکتریکی V بین دو صفحه ی دایره ای موازی اعمال بشود، مقدار نیروی الکترواستاتیک ایجاد شده بین دو صفحه را می‌توان به صورت زیر بیان کرد [۳۵]:

$$F_e=\frac{\varepsilon_0 V^2}{2(g_0-w)^2} \qquad (۱۸)$$

که در آن ε_0 ضریب دی الکتریک خلاء هست. نیروی کزمیر ناشی از اندرکنش مولکولی بین دو صفحه به صورت معادله ی زیر بیان می‌شود [۳۶]:

$$F_c=\frac{\bar{h}c\pi^2}{240(g_0-w)^4} \qquad (۱۹)$$

که در آن c سرعت نور در خلاء و $\bar{h}$ ثابت پلانک هست. نیروی میرایی معادل به صورت تقریبی با استفاده از معادله رینولدز به صورت زیر نوشته می‌شود [۳۷]:

$$F_v = \frac{3\mu A^2}{2\pi g_0^3}\frac{\partial w}{\partial t} \quad (۲۰)$$

که در آن μ ویسکوزیته سیال و A مساحت صفحه است. با جایگذاری معادلات (۱۸)- (۲۰) در معادله (۱۷) و سپس جایگذاری معادله حاصل در معادله (۱۶)، معادله غیرخطی حاکم بر ارتعاشات عرضی نانو صفحه دایره‌ای به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}(D+D^s)\nabla^4 w + D^l\left(\frac{\partial^4 w}{\partial r^4}+\frac{2}{r}\frac{\partial^3 w}{\partial r^3}\right)\\ -2\tau^s\nabla^2 w + (\rho h + 2\rho^s)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\\ =\frac{\varepsilon_0 V^2}{2(g_0-w)^2}+\frac{\bar{h}c\pi^2}{240(g_0-w)^4}\\ -\frac{3\mu A^2}{2\pi g_0^3}\frac{\partial w}{\partial t}\end{aligned} \quad (۲۱)$$

برای راحتی تحلیل داده‌ها متغییرهای بدون بعد به صورت زیر معرفی می‌شوند:

$$\hat{w}=\frac{w}{g_0},\ \hat{r}=\frac{r}{R_o},\ \hat{z}=\frac{z}{g_0},\ \hat{t}=\frac{t}{t^*},\ \hat{\Omega}=\Omega t^* \quad (۲۲)$$

با استفاده از متغیرهای بالا معادله (۲۱) به صورت معادله بی بعد زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned}D^*\hat{\nabla}^4\hat{w}+D^c\left(\frac{\partial^4\hat{w}}{\partial\hat{r}^4}+\frac{2}{\hat{r}}\frac{\partial^3\hat{w}}{\partial\hat{r}^3}\right)-\alpha_s\hat{\nabla}^2\hat{w}+\frac{\partial^2\hat{w}}{\partial\hat{t}^2}+\hat{c}\frac{\partial\hat{w}}{\partial\hat{t}}\\ =\frac{\alpha_e V^2}{(1-\hat{w})^2}+\frac{\alpha_c}{(1-\hat{w})^4}\end{aligned} \quad (۲۳)$$

که در آن

$$\begin{aligned}&D^*=\frac{D+D^s}{D},\ D^c=\frac{D^l}{D},\ \alpha_s=\frac{2\tau^s R_o^2}{D},\ \alpha_e=\frac{\varepsilon_0 R_o^4}{2g_0^3 D},\\ &\alpha_c=\frac{\bar{h}c\pi^2 R_o^4}{240 g_0^5 D},\ \hat{\nabla}^4=\left(\frac{\partial^4}{\partial\hat{r}^4}+\frac{2}{\hat{r}}\frac{\partial^3}{\partial\hat{r}^3}-\frac{1}{\hat{r}^2}\frac{\partial^2}{\partial\hat{r}^2}+\frac{1}{\hat{r}^3}\frac{\partial}{\partial\hat{r}}\right),\\ &\hat{\nabla}^2=\left(\frac{\partial^2}{\partial\hat{r}^2}+\frac{1}{\hat{r}}\frac{\partial}{\partial\hat{r}}\right),\ t^*=R_o^2\sqrt{\frac{12(\rho h+2\rho^s)(1-\nu^2)}{Eh^3}},\\ &\hat{c}=\frac{3\mu A^2 R_o^4}{2\pi g_0^3 t^* D}.\end{aligned} \quad (۲۴)$$

۳- حل معادلات

نانوصفحه دایره‌ای توسط ولتاژ $V=V_{dc}+V_{ac}\cos(\Omega t)$ تحریک می شود. بدین ترتیب که ابتدا نانو صفحه توسط ولتاژ پایه خم می‌شود، سپس توسط ولتاژ هارمونیک V_{ac} برانگیخته می شود تا حول حالت تعادل استاتیکی ارتعاش کند؛ بنابراین خمیدگی کل می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$\hat{w}(\hat{r},\hat{t})=\hat{w}_s(\hat{r})+\hat{w}_d(\hat{r},\hat{t}) \quad (۲۵)$$

که $\hat{w}_s(\hat{r})$ نشان دهنده خیز استاتیکی ایجاد شده در اثر ولتاژ پایه و $\hat{w}_d(\hat{r},\hat{t})$ خیز دینامیکی یا ارتعاش نانو صفحه حول $\hat{w}_s(\hat{r})$ است. با جایگذاری معادله (۲۵) در معادله (۲۳) و بسط دادن نیروی الکترواستاتیک حول حالت تعادل استاتیکی آن، معادله غیرخطی خیز استاتیکی و دینامیکی نانوصفحه دایره‌ای به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{aligned}&D^*\hat{\nabla}^4\hat{w}_s+D^c\left(\frac{\partial^4\hat{w}_s}{\partial\hat{r}^4}+\frac{2}{\hat{r}}\frac{\partial^3\hat{w}_s}{\partial\hat{r}^3}\right)-\alpha_s\hat{\nabla}^2\hat{w}_s\\ &=\frac{\alpha_e V_{dc}^2}{(1-\hat{w}_s)^2}+\frac{\alpha_c}{(1-\hat{w}_s)^4}\end{aligned} \quad (۲۶)$$

$$\begin{aligned}&D^*\hat{\nabla}^4\hat{w}_d+D^c\left(\frac{\partial^4\hat{w}_d}{\partial\hat{r}^4}+\frac{2}{\hat{r}}\frac{\partial^3\hat{w}_d}{\partial\hat{r}^3}\right)-\alpha_s\hat{\nabla}^2\hat{w}_d+\frac{\partial^2\hat{w}_d}{\partial\hat{t}^2}\\ &+\hat{c}\frac{\partial\hat{w}_d}{\partial\hat{t}}-\left(\frac{2\alpha_e V_{dc}^2}{(1-\hat{w}_s)^3}+\frac{4\alpha_c}{(1-\hat{w}_s)^5}+\frac{4\alpha_e V_{dc}V_{ac}\cos(\hat{\Omega}\hat{t})}{(1-\hat{w}_s)^3}\right)\hat{w}_d\\ &-\left(\frac{3\alpha_e V_{dc}^2}{(1-\hat{w}_s)^4}+\frac{10\alpha_c}{(1-\hat{w}_s)^6}\right)\hat{w}_d^2-\left(\frac{4\alpha_e V_{dc}^2}{(1-\hat{w}_s)^5}+\frac{20\alpha_c}{(1-\hat{w}_s)^7}\right)\hat{w}_d^3\\ &=\left(\frac{2\alpha_e V_{dc}V_{ac}\cos(\hat{\Omega}\hat{t})}{(1-\hat{w}_s)^2}\right)\end{aligned}$$

۳-۱- حل استاتیکی

در این بخش برای حل معادله استاتیکی از روش خطی سازی گام به گام استفاده شده است [۳۸]. بر این اساس، $\hat{w}^k$ تغییر شکل بی‌بعد نانوصفحه، تحت تاثیر ولتاژ DC اعمالی V^k تعریف می‌گردد. با افزایش ولتاژ اعمالی ($V^{k+1}=V^k+\delta V$)، خیز استاتیکی بی‌بعد به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\hat{w}^{k+1}\rightarrow\hat{w}^k+\delta w=\hat{w}^k+\chi. \quad (۲۷)$$

با در نظرگرفتن مقادیر کوچک برای δV انتظار می‌رود که χ به اندازه‌ی کافی کوچک باشد؛ بنابراین برای مقدار مناسب δV می‌توان با استفاده از بسط سری تیلور مرتبه‌ی اول به دقت

کافی دست یافت. می‌توان χ را با سری متناهی از توابع پایه $\varphi_i(\hat{r})$ به صورت زیر بسط داد:

$$\chi(\hat{r})=\sum_{i=1}^{N} a_i\varphi_i(\hat{r}). \qquad (۲۸)$$

به طوری که a_i ضرایب مجهول هستند که باید محاسبه شوند. اگر توابع پایه شرایط مرزی هندسی مسئله را ار ضا کنند χ نیز شرایط مرزی را ارضا می‌کند؛ بنابراین با تفریق کردن معادله گام k از گام $k+1$ و استفاده از بسط سری تیلور، شکل خطی‌سازی‌شده‌ی معادله استاتیکی به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned} &D^{*}\hat{\nabla}^4\chi+D^{c}\left(\frac{d^4\chi}{d\hat{r}^4}+\frac{2}{\hat{r}}\frac{d^3\chi}{d\hat{r}^3}\right)-\alpha_s\hat{\nabla}^2\chi \\ &-\frac{2\alpha_e\left(V^i\right)^2}{\left(1-\hat{w}^i\right)^3}\chi-\frac{4\alpha_c}{\left(1-\hat{w}^i\right)^5}\chi=\frac{2\alpha_e V^i\delta V}{\left(1-\hat{w}^i\right)^2}. \end{aligned} \qquad (۲۹)$$

با جایگذاری معادله (۲۸) در معادله بالا و ضرب کردن مانده آن در توابع وزن و انتگرال‌گیری در دامنه‌ی نانوصفحه، مجموعه‌ای از معادلات جبری به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\sum_{i=1}^{N}\left(K_{ji}-K'_{ji}-K^{e}_{ji}\right)a_i=F^{e}_{j}, \qquad j=1,2,...,N \qquad (۳۰)$$

که در آن داریم

$$\begin{aligned} K_{ji}&=(D^{*}+D^{c})\left(\int_0^1\varphi_j\frac{d^4\varphi_i}{d\hat{r}^4}d\hat{r}+2\int_0^1\frac{\varphi_j}{\hat{r}}\frac{d^3\varphi_i}{d\hat{r}^3}d\hat{r}\right) \\ &+D^{*}\left(-\int_0^1\frac{\varphi_j}{\hat{r}^2}\frac{d^2\varphi_i}{d\hat{r}^2}d\hat{r}+\int_0^1\frac{\varphi_j}{\hat{r}^3}\frac{d\varphi_i}{d\hat{r}}d\hat{r}\right), \\ K'_{ji}&=\alpha_s\left(\int_0^1\varphi_j\frac{d^2\varphi_i}{d\hat{r}^2}d\hat{r}+\int_0^1\frac{\varphi_j}{\hat{r}}\frac{d\varphi_i}{d\hat{r}}d\hat{r}\right)+4\alpha_c\int_0^1\frac{\varphi_j\varphi_i}{\left(1-\hat{w}^i\right)^5}d\hat{r}, \\ K^{e}_{ji}&=2\alpha_e V^{i^2}\int_0^1\frac{\varphi_j\varphi_i}{\left(1-\hat{w}^i\right)^3}d\hat{r},\ F^{e}_{j}=2\alpha_e V^i\delta V\int_0^1\frac{\varphi_j}{\left(1-\hat{w}^i\right)^2}d\hat{r}. \end{aligned} \qquad (۳۱)$$

با حل N معادله‌ی جبری، ضرایب مجهول a_i و تغییر شکل نانوصفحه در هر گام تعیین می‌شود.

۳-۲- حل معادله دینامیکی

در این بخش با استفاده از روش مانده‌های وزنی گلرکین معادله دیفرانسیل حاکم به یک معادله کاهش مرتبه یافته تبدیل شده است و نمودارهای پاسخ فرکانسی رزونانس غیرخطی نانوصفحه دایره‌ای با استفاده از روش مقیاس‌ها چندگانه [۳۹] استخراج شده است. خیز دینامیکی نانو صفحه می‌تواند به صورت مجموع تعداد محدودی از تابع شکل‌های مناسب با ضرایب وابسته به زمان نوشته شود:

$$\hat{w}_d\left(\hat{r},\hat{t}\right)=\sum_{n=1}^{N}u_n\left(\hat{t}\right)\psi_n\left(\hat{r}\right), \quad n=1,2,3\ldots \qquad (۳۲)$$

که u_n مختصات تعمیم یافته نانوصفحه و $\psi_n(\hat{r})$ شکل مدهای طبیعی نانوصفحه است. با جایگذاری کردن معادله (۳۲) در معادله (۲۶)، سپس ضرب کردن معادله حاصل در $\psi_k(\hat{r})$ و انتگرالگیری بر روی دامنه و قراردادن $N=1$، $\psi_1(\hat{r})=\psi(\hat{r})$ و $u_1(\hat{t})=u(\hat{t})$ در معادله حاصل تقریب تک مد منجر به معادله غیرخطی زیر می‌شود:

$$\begin{aligned} &I_0\ddot{u}+I_1\dot{u}+\left(I_2-I_3\cos\left(\hat{\Omega}\hat{t}\right)\right)u-I_4u^2-I_5u^3 \\ &=I_6\cos\left(\hat{\Omega}\hat{t}\right) \end{aligned} \qquad (۳۳)$$

که در آن

$$\begin{aligned} I_0&=\int_0^1\psi^2d\hat{r},\ I_1=\hat{c}\int_0^1\psi^2d\hat{r},\ I_3=\int_0^1\frac{4\alpha_eV_{dc}V_{ac}\psi^2}{\left(1-\hat{w}_s\right)^3}d\hat{r}, \\ I_2&=D^{*}\int_0^1\psi\,\hat{\nabla}^4\psi\,d\hat{r}+D^{c}\int_0^1\psi\left(\frac{d^4\psi}{d\hat{r}^4}+\frac{2}{\hat{r}}\frac{d^3\psi}{d\hat{r}^3}\right)d\hat{r} \\ &-\alpha_s\int_0^1\psi\,\hat{\nabla}^2\psi\,d\hat{r}-\int_0^1\left(\frac{2\alpha_eV_{dc}^2\psi^2}{\left(1-\hat{w}_s\right)^3}+\frac{4\alpha_c\psi^2}{\left(1-\hat{w}_s\right)^5}\right)d\hat{r}, \\ I_4&=\int_0^1\left(\frac{3\alpha_eV_{dc}^2\psi^3}{\left(1-\hat{w}_s\right)^4}+\frac{10\alpha_c\psi^3}{\left(1-\hat{w}_s\right)^6}\right)d\hat{r}, \\ I_5&=\int_0^1\left(\frac{4\alpha_eV_{dc}^2\psi^4}{\left(1-\hat{w}_s\right)^5}+\frac{20\alpha_c\psi^4}{\left(1-\hat{w}_s\right)^7}\right)d\hat{r},\ I_6=\int_0^1\frac{2\alpha_eV_{dc}V_{ac}\psi}{\left(1-\hat{w}_s\right)^2}d\hat{r}, \end{aligned} \qquad (۳۴)$$

معادله (۳۳) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned} &\ddot{u}+\xi\dot{u}+\left(\omega^2-\kappa_1\cos\left(\hat{\Omega}\hat{t}\right)\right)u-\kappa_2u^2 \\ &-\kappa_3u^3=\eta\cos\left(\hat{\Omega}\hat{t}\right), \\ &\xi=\frac{I_1}{I_0},\ \omega^2=\frac{I_2}{I_0},\ \kappa_1=\frac{I_3}{I_0},\kappa_2=\frac{I_4}{I_0},\ \kappa_3=\frac{I_5}{I_0},\ \eta=\frac{I_7}{I_0}. \end{aligned} \qquad (۳۵)$$

برای حل نیمه تحلیلی معادله بالا با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه، متغیرهای مقیاس بندی شده به صورت زیر معرفی می‌شوند:

$$\xi = \varepsilon^2 \xi,\ \kappa_1 = \kappa_1 \varepsilon^2,\ \kappa_2 = \kappa_2 \varepsilon, \kappa_3 = \kappa_3 \varepsilon^2,\ \eta = \eta \varepsilon^2 \tag{۳۶}$$

معادله (۳۵) را می‌توان به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{aligned} &\ddot{u} + \varepsilon^2 \xi \dot{u} + \left(\omega^2 - \kappa_1 \varepsilon^2 \cos\left(\Omega \mathrm{t}\right)\right) u - \kappa_2 \varepsilon u^2 \\ &- \kappa_3 \varepsilon^2 u^3 = \eta \varepsilon^2 \cos\left(\Omega \mathrm{t}\right) \end{aligned} \tag{۳۷}$$

.

مطابق روش مقیاس های چندگانه زمان های مقیاس بندی شده T_n، مشتقات زمانی به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$T_n = \varepsilon^n t \qquad n = 0,1,2,\ldots \tag{۳۸}$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{dT_0}{dt}\frac{\partial}{\partial T_0} + \frac{dT_1}{dt}\frac{\partial}{\partial T_1} + \ldots = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \ldots \tag{۳۹}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 \left(D_1^2 + 2 D_0 D_2\right) + \ldots \tag{۴۰}$$

می توان حل معادله (۳۵) را بر حسب ε بسط داد:

$$u(t) = u_0\left(T_0, T_1, T_2, \ldots\right) + \varepsilon u_1\left(T_0, T_1, T_2, \ldots\right) + \ldots \tag{۴۱}$$

با جایگذاری معادلات (۳۸) -(۴۱) در معادله (۳۷) معادلات زیر حاصل می‌شوند:

$$D_0^2 u_0 + \omega^2 u_0 = 0 \tag{۴۲}$$

$$D_0^2 u_1 + \omega^2 u_1 = \kappa_2 u_0^2 - 2 D_0 D_1 u_0 \tag{۴۳}$$

$$\begin{aligned} &D_0^2 u_2 + \omega^2 u_2 = 2\kappa_2 u_0 u_1 - \xi D_0 u_0 + \kappa_3 u_0^3 - 2 D_0 D_2 u_0 \\ &- D_1^2 u_0 - 2 D_0 D_1 u_1 + \kappa_1 u_0 \cos\left(\Omega T_0\right) + \eta \cos\left(\Omega T_0\right) \end{aligned} \tag{۴۴}$$

حل کلی معادله (۴۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$u_0\left(T_0, T_1, T_2\right) = A\left(T_1, T_2\right) e^{i\omega T_0} + \bar{A}\left(T_1, T_2\right) e^{-i\omega T_0} \tag{۴۵}$$

که در آن $i^2 = -1$، A یک تابع مختلط است که دامنه پاسخ آهسته را نشان می‌دهد و علامت بار نشان دهنده مزدوج مختلط کمیت است. جایگذاری u_0 در معادله (۴۳) نتیجه می‌دهد:

$$\begin{aligned} &D_0^2 u_1 + \omega^2 u_1 = -2 i \omega D_1 A e^{i\omega T_0} \\ &\qquad + \kappa_2 A^2 e^{2 i \omega T_0} + \kappa_2 A \bar{A} + cc. \end{aligned} \tag{۴۶}$$

که cc مزدوج مختلط ترم‌های قبلی را نشان می‌دهد. شرایط حذف ترم های تکین در معادله (۴۶) منجر به معادله زیر می‌شود:

$$D_1 A = 0 \tag{۴۷}$$

حل خصوصی معادله (۴۶) بصورت زیر بدست می‌آید:

$$u_1 = -\frac{\kappa_2 A^2}{3\omega^2} e^{2 i \omega T_0} + \frac{\kappa_2}{\omega^2} A \bar{A} + cc. \tag{۴۸}$$

رزونانس اصلی وقتی اتفاق می‌افتد که فرکانس تحریک Ω نزدیک فرکانس خطی سیستم ω باشد. با معرفی کردن یک پارامتر تنظیم کننده σ به همراه پارامتر کوچک ε، Ω را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\Omega = \omega + \varepsilon^2 \sigma . \tag{۴۹}$$

با جایگذاری معادلات (۴۵)، (۴۸) و (۴۹) در معادله (۴۴) داریم:

$$\begin{aligned} &D_0^2 u_2 + \omega^2 u_2 = \left(\kappa_3 A^3 - \frac{2\kappa_2^2 A^3}{3\omega^2}\right) e^{3 i \omega T_0} \\ &+ \left(3\kappa_3 A^2 \bar{A} - i\omega\xi A - 2 i \omega D_2 A + \frac{10\kappa_2^2 A^2 \bar{A}}{3\omega^2} + \frac{1}{2}\eta e^{i\sigma T_2}\right) e^{i\omega T_0} \\ &+ \frac{\kappa_1 A}{2} e^{i(\Omega+\omega)T_0} + \frac{\kappa_1 \bar{A}}{2} e^{i(\Omega-\omega)T_0} + cc. \end{aligned} \tag{۵۰}$$

ترم‌های تکین از مقایسه ترم‌های همگن با ناهمگن شناسایی می‌شود؛ بنابراین با حذف ترم‌های تکین در معادله بالا داریم:

$$\begin{aligned} &-2 i \omega D_2 A - i \omega \xi A + 3\kappa_3 A^2 \bar{A} \\ &\qquad + \frac{10\kappa_2^2 A^2 \bar{A}}{3\omega^2} + \frac{1}{2}\eta e^{i\sigma T_2} = 0 \end{aligned} \tag{۵۱}$$

برای پیدا کردن پاسخ حالت ماندگار ارتعاشات نانوصفحه تابع مختلط A به صورت قطبی $A = \frac{1}{2}\bar{a} e^{i\beta}$ نوشته می شود که $\bar{a}$ دامنه ارتعاش عرضی و β زاویه فاز آن است. با جایگذاری A در معادله (۵۱) و جدا کردن قسمت حقیقی و موهومی معادله حاصل داریم:

$$\begin{aligned} &\frac{d\bar{a}}{dT_2} = -\frac{\xi \bar{a}}{2} + \frac{\eta}{2\omega}\sin\left(\gamma\right) \\ &\frac{d\gamma}{dT_2} = \sigma + \left(\frac{5\kappa_2^2}{12\omega^3} + \frac{3\kappa_3}{8\omega}\right)\bar{a}^2 + \frac{\eta}{2\omega\bar{a}}\cos\left(\gamma\right) \end{aligned} \tag{۵۲}$$

که در آن زاویه فاز با $\gamma = \sigma T_2 - \beta$ جایگزین شده است. با فرض شرایط پایا $(d\bar{a}/dT_1 = d\gamma/dT_1 = 0)$ وحذف γ در معادله (۵۲)، معادله پاسخ فرکانسی زیر بدست می‌آید:

$$\left[\left(9\kappa_3\omega^2\bar{a}^2+10\kappa_2\bar{a}^2+24\omega^3\sigma\right)^2+144\xi^2\omega^6\right]\bar{a}^2 =144\eta^2\omega^4 \qquad (۵۳)$$

برای مطالعه پایداری پاسخ ماندگار سیستم رفتار آن در همسایگی نقطه تکین($\bar{a}_0,\gamma_0$) بررسی شده است. با جایگذاری تغییرات جزئی $\bar{a} = \bar{a}_0 + \delta\bar{a}$ و $\gamma = \gamma_0 + \delta\gamma$ در معادله(۵۲) و حذف ترم‌های غیرخطی از $\delta\bar{a}$ و $\delta\gamma$ داریم:

$$\frac{d\delta\bar{a}}{dT_1}=-\frac{\xi}{2}\delta\bar{a}+\frac{\eta}{2\omega}\cos\left(\gamma_0\right)\delta\gamma \qquad (۵۴)$$
$$\frac{d\delta\gamma}{dT_1}=\left(2\bar{a}_0\left(\frac{5\kappa_2^2}{12\omega^3}+\frac{3\kappa_3}{8\omega}\right)-\frac{\eta}{2\omega\bar{a}_0^2}\cos\left(\gamma_0\right)\right)\delta\bar{a} -\frac{\eta}{2\omega\bar{a}_0}\sin\left(\gamma_0\right)\delta\gamma$$

که پایداری معادله حالت(۵۴) به مقادیر ویژه ماتریس ژاکوبین بستگی دارند. ماتریس ژاکوبین را می‌توان با حذف γ_0 در معادله (۵۴) بدست می‌آید.

$$J=\begin{bmatrix} -\frac{\xi}{2} & -\sigma\bar{a}_0-\left(\frac{5\kappa_2^2}{12\omega^3}+\frac{3\kappa_3}{8\omega}\right)\bar{a}_0^3 \\ \frac{\sigma}{\bar{a}_0}+3\left(\frac{5\kappa_2^2}{12\omega^3}+\frac{3\kappa_3}{8\omega}\right)\bar{a}_0 & -\frac{\xi}{2}\end{bmatrix} \qquad (۵۵)$$

که معادله مشخصه آن به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\lambda^2+\xi\lambda+\left(\begin{array}{l}\frac{\xi^2}{4}+\sigma^2+4\sigma\left(\frac{5\kappa_2^2}{12\omega^3}+\frac{3\kappa_3}{8\omega}\right)\bar{a}_0^2 \\ +3\left(\frac{5\kappa_2^2}{12\omega^3}+\frac{3\kappa_3}{8\omega}\right)^2\bar{a}_0^4\end{array}\right)=0 \qquad (۵۶)$$

که برای $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ حل پایدار خواهد بود.

۴- تاثیر لحاظ کردن اثرات سطح بر روی پارامتر های ارتعاشی نانوصفحه دایره ای :

برای بررسی بهتر تاثیر لحاظ کردن اثرات سطح بر روی رفتار نانو صفحه دایره‌ای باید تاثیر لحاظ کردن اثرات سطح بر روی پارامترهای ارتعاشی آن بررسی شود. با توجه به معادلات بدست آمده در بخش‌های قبلی می‌توان نتیجه گرفت که لحاظ کردن اثرات سطح بر روی دو پارامتر جرم و ضریب سفتی خطی معادل سیستم تاثیرگذار است. با توجه به معادلات می توان متوجه شد که لحاظ کردن اثرات سطح باعث افزایش جرم معادل سیستم می‌شود؛ ضریب سفتی خطی معادل سیستم هم تغییر می‌کند، ولی بسته به مقادیر E^s و τ^s ممکن هست، مقدار آن افزایش یا کاهش یابد. با استفاده از روابط (۳۳) و (۳۴) می‌توان تغییرات ضریب سفتی خطی در اثر لحاظ کردن اثرات سطح را به صورت رابطه زیر بدست آورد:

$$\Delta I_2=\frac{E^s h^2}{2D\left(1-\nu^2\right)}\int_0^1\psi\,\hat{\nabla}^4\psi\,d\hat{r}-\frac{2\tau^s R_o^{\,2}}{D}\int_0^1\psi\,\hat{\nabla}^2\psi\,d\hat{r} \qquad (۵۷)$$

برای خواص مکانیکی، شرایط مرزی و ابعاد مساله مورد مطالعه اگر علامت ΔI_2 مثبت باشد، می‌توان نتیجه گرفت که لحاظ کردن اثرات سطح باعث سفت تر شدن سیستم شده است و اگر علامت ΔI_2 منفی باشد، می‌توان گفت که اثرات سطح باعث نرم تر شدن آن شده است.

۵- نتایج عددی:

برای نمونه محاسبات عددی برای یک نانوصفحه دایره‌ای از جنس آلومینیوم و هوا به عنوان سیال انجام شده است، مشخصات هندسی و خواص [۴۰, ۴۱] در جدول ۱ لیست شده اند. برای همه نمودارها دامنه ارتعاش نقطه مرکزی نانو صفحه محاسبه شده است و علامت بالای متغیرهای بی بعد در شکل‌ها نشان داده نشده است. در این مقاله برای استخراج معادله حرکت نانو صفحه دایره‌ای از فرضیات تئوری صفحات نازک کرشهف و رابطه خطی بین کرنش و تغییر مکان استفاده شد. باید توجه کنیم که در صورت کوچک بودن دامنه ارتعاشات، نتایج بدست آمده از حل این معادله می تواند درست باشد. اگر دامنه ارتعاشات بزرگ باشد، اثرات غیرخطی هندسی اهمیت پیدا می‌کنند و و نتایج حل این معادله معتبر نخواهد بود. اثرات غیرخطی هندسی ممکن است از کشیدگی و یا انحناهای بزرگ ناشی شود. کشیدگی صفحه میانی نانوصفحه منجر به ارتباطی غیرخطی بین کرنش و تغییر مکان می‌شود.

۵-۱- پاسخ حل استاتیکی:

برای پیدا کردن بهترین اندازه‌ی گام در روش خطی سازی گام به گام و نشان دادن همگرایی در تعداد مودها (N)، در جدول ۲ ولتاژ پولین استاتیکی صفحه برای $R_o = 250\ \mu m$، $E = 169\ GPa$ ، $\nu = 0.3$ ، $g_0 = 1\mu m$ و $h = 20\mu m$

محاسبه شده است. برای اعتباردهی نتایج عددی ولتاژ پولین استاتیکی محاسبه شده را با نتایج راباک و پور سولا [۴۲] و نتایج اوستربرگ[۴۳] مقایسه شده است. جدول ۳ تطابق مناسب نتایج عددی به‌دست‌آمده را با نتایج عددی و آزمایشگاهی نشان می‌دهد.

جدول۱- داده‌های استفاده شده در محاسبات[۴۰, ۴۱].

پارامتر	مقدار
شعاع نانوصفحه دایره‌ای، $R_o(nm)$	**150**
فاصله اولیه بین نانوصفحه و الکترود صلب، $g_0(nm)$	**15**
ضخامت نانوصفحه، h (nm)	**5**
مدول یانگ نانوصفحه، E (GPa)	**68/5**
چگالی نانوصفحه، $\rho_p\ (Kg/m^3)$	**2700**
ضریب پواسون، ν	**0/3**
مدول الاستیک سطحی، $E^s(N/m)$	**$-6/090$**
تنش کششی پسماند سطحی، $\tau^s(N/m)$	**0/910**
چگالی سطحی، $\rho^s(kg/m^2)$	**$0/546 \times 10^{-6}$**
ویسکوزیته دینامیکی سیال، $\mu(kg/m.s)$	**$1/849 \times 10^{5}$**
چگالی سیال، $\rho_f\ (Kg/m^3)$	**1/184**

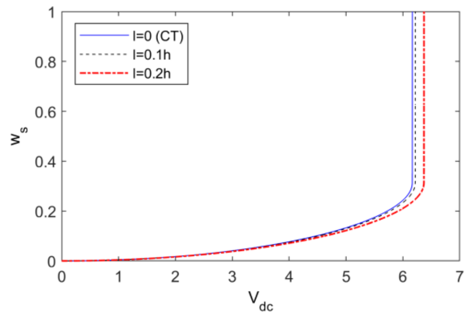
جدول۲- اعتبار دهی حل عددی.

مقدار گام ولتاژ اعمالی (V)	0/05	0/01	0/005	0/001
ولتاژ Pull-in استاتیکی (V) نتایج برای **N = 1**	306/55	306/40	306/38	306/37
نتایج برای **N = 2**	319/15	318/96	318/94	318/93
نتایج برای **N = 3**	316/9	316/73	316/71	316/70

جدول۳- مقایسه‌ی نتایج عددی و آزمایشگاهی.

مقدار گام ولتاژ اعمالی (V)	0/05	0/01	0/005	0/001
درصد خطا (٪) در مقایسه با نتایج راباک و پورسولا[۴۲] (311.6 V)	1/70	1/64	1/64	1/64
اوستربرگ[۴۳] (314 V)	0/92	0/86	0/86	0/86

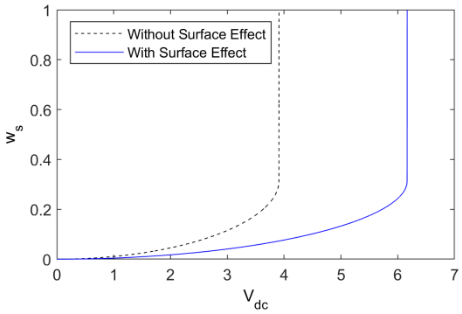
برای مقایسه‌ی نتایج بد ست آمده برای ولتاژ پولین استاتیکی نانوصفحه با استفاده از تئوری تنش‌کوپل سازگار(CCST) و تئوری کلاسیک(CT)، تغییر شکل استاتیکی مرکز صفحه بر حسب ولتاژ در شکل۲ رسم شده است. شکل۲ نشان می‌دهد، که استفاده از تئوری تنش‌کوپل سازگار منجر به مدل سفت تری از نانو صفحه می شود و بنابراین مقدار ولتاژ پولین استاتیکی محاسبه شده را به مقدار بزرگ‌تر انتقال می‌دهد و با افزایش مقدار پارامتر مقیاس طول اختلاف نتایج دو تئوری بیشتر می‌شود.



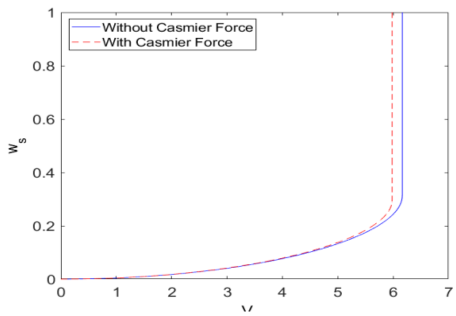
شکل۲- اثر پارامتر مقیاس طول روی مقدار ولتاژ پولین استاتیکی نانوصفحه دایره‌ای.

شکل ۳ تاثیر لحاظ کردن اثرات سطح بر ولتاژ ناپایداری استاتیکی را نشان می‌دهد. با توجه به شکل می‌توان متوجه شد که لحاظ کردن اثرات سطح باعث افزایش مقدار ولتاژ پولین استاتیکی می‌شود و همچنین خیز استاتیکی مرکز صفحه را کمی کاهش می‌دهد. به خاطر این که لحاظ کردن اثرات سطحی باعث افزایش سفتی خمشی نانوصفحه می شود. باید دقت کنیم که افزایش یا کاهش ولتاژ پولین به علامت τ^s بستگی دارد، چون در اینجا تنش پسماند سطحی کششی و علامت τ^s مثبت بود، لحاظ کردن اثرات سطح باعث افزایش مقدار ولتاژ پولین استاتیکی شد. اگر تنش پسماند سطحی فشاری و علامت τ^s منفی بود، اثرات سطح باعث کاهش مقدار ولتاژ پولین استاتیکی شد. شکل۴ تاثیر لحاظ کردن نیروی کزمیر بر ولتاژ پولین استاتیکی نانو صفحه را نشان می‌دهد. با توجه به شکل می‌توان مشاهده کرد که لحاظ کردن اثر نیروی کزمیر باعث کاهش ولتاژ پولین نانوصفحه می‌شود. باید توجه کنیم که نیروی کزمیر از اندرکنش بین مولکولی نانو صفحه و الکترود صلب نا شی می

شـــود و با فزایش فاصـــله اولیه بین آنها تاثیر نیروی کزمیر کاهش پیدا می‌کند.



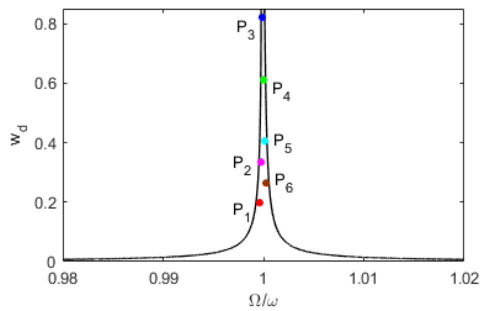
شکل۳- تاثیر لحاظ کردن اثرات سطح بر روی مقدار ولتاژ پولین استاتیکی نانوصفحه دایره‌ای.



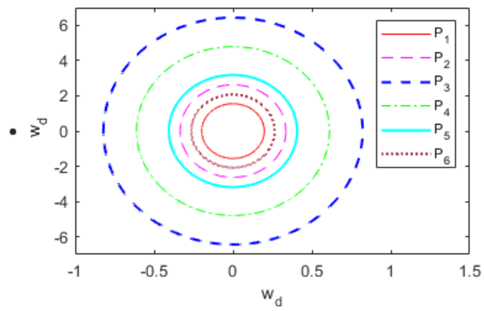
شکل۴- تاثیر لحاظ کردن اثرات نیروی کزمیر بر ولتاژ پولین استاتیکی نانوصفحه دایره‌ای.

۵-۲- پاسخ رزونانس اصلی سیستم

نتایج روش اغتشاشات برای ضرایب دمپینگ کوچک، دامنه کوچک ولتاژ هارمونیک و دامنه ارتعاش کوچک حول حالت تعادل اســتاتیکی صــادق هســتند. روش مقیاس‌های چندگانه برای استخراج دامنه پاسخ ماندگار سیستم (برای ارتعاشات با دامنه کوتاه) ا ستفاده شده ا ست؛ بنابراین نتایج بد ست آمده برای خیزهـای کوچکتر معتبر خواهنـد بود [۴۴]. در همـه شـکل‌های این بخش خط‌های ممتد نشـان دهنده پاسـخ‌های پایدار و خط چین‌ها ن شان دهنده پا سخ‌های ناپایدار ه ستند. در مرحله مدلســـازی به خاطر تقارن محوری وصـــفحه و بارگذاری الکترواستاتیک فرض شد که مد اول مد غالب باشد. در این قســـمت اثر پارامترهای مختلفی مانند ولتاژ پایه V_{dc}، دامنه ولتاژ V_{ac} و ابعاد هندســی بر روی رفتار رزونانس اصـلی نانوصفحه از طریق شبیه سازی عددی بررسی شده است. به منظور مطالعه پاسخ رزونانس اصلی سیستم فرکانس تحریک Ω در اطراف فرکانس ا صلی ω سیستم خطی تغییر می‌کند. برای اعتباردهی نتایج حل دینامیکی، نتایج بدســـت آمده از روش مقیاس‌های زمانی چند گانه با نتایج روش شـــوتینگ مقایسه شده است. در شکل ۵ دامنه پاسخ فرکانسی سیستم برای ($R_o = 100\ nm$، $\alpha_c = \alpha_s = l = 0$، $V_{ac} = 0.02$ V، $V_{dc} = 0.5$ V) با استفاده از روش مقیاس های چند گانه رسم شده ا ست و برای شش نقطه مختلف دامنه پا سخ نشان داده شده با ا ستفاده از روش شوتینگ هم محا سبه شده و بر روی نمودار ن شان داده شده ا ست. دیاگرام فازی پا سخ‌های روش شوتینگ در نقطه‌های P_1 تا P_6 در شکل ۶ رسم شده است. با توجه به شـکل ۵ مطابقت خوبی بین نتایج روش مقیاس های چند گانه و روش شوتینگ مشاهده می‌شود.



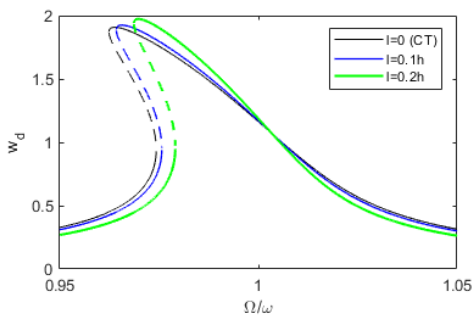
شکل ۵- مقایسه نتایج روش مقیاس‌های چندگانه و روش شوتینگ.



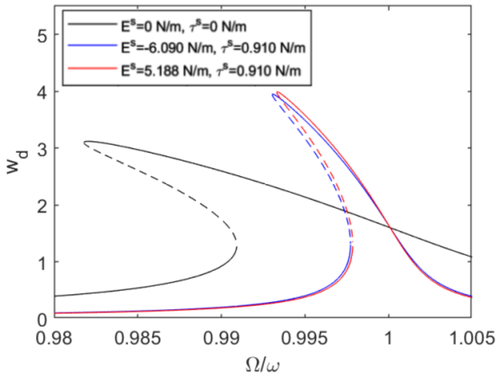
شکل ۶- دیاگرام فازی پاسخ سیستم در نقاط مشخص شده.

در شکل ۷ اثر پارامتر مقیاس طول روی رفتار رزوناس ا صلی نانو صفحه برر سی شده ا ست ($\alpha_c = \alpha_s = \square D^s = \rho^s = 0$، $V_{ac} = 0.1$V، $V_{dc} = 2$V) و ن تایج بدســـتآ مده از تئوری تنش‌کوپل ســازگار با نتایج تئوری کلاســیک($l = 0$) مقایســه شده است. با توجه به شکل می‌توان متوجه شد که افزایش مقدار پارامتر مقیاس طول، دامنه حداکثر پا سخ سی ستم را کاهش می‌دهد و فرکانس رزونانس غیرخطی آن را افزایش می‌دهد.

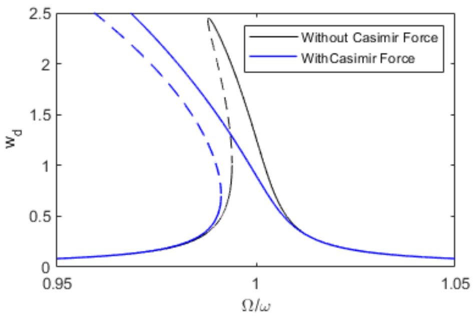
لحاظ کردن اثرات اندازه باعث سخت تر شدن سیستم و افزایش شیب شاخه ناپایدار می‌شود. برای مدول الاستیک سطحی آلومینیوم مقادیر متفاوتی توسط گروه‌های تحقیقاتی مختلف گزارش شده است ($E^s = -6.090\ \mathrm{N/m}$ [۴۰، ۴۱] و $E^s = 5.1882\ \mathrm{N/m}$ [۴۵]). در شکل ۸ تاثیر لحاظ کردن اثرات سطحی بر روی رفتار رزونانس اصلی نانو صفحه برر سی شده و پاسخ رزونانس اصلی سیستم برای مقادیر مختلف مدول الاستیک سطحی رسم شده است($V_{ac} = 0.1\mathrm{V}$، $V_{dc} = 1\mathrm{V}$ و $l = 0$). با توجه به شکل می‌توان متوجه شد که لحاظ کردن اثرات سطح باعث سخت تر شدن سیستم و افزایش فرکانس خطی آن می‌شود، اما باید توجه داشت که این نتیجه کلی نیست برای خواص مکانیکی و شرایط مرزی استفاده شده در این مقاله درست است. در شکل۹ تاثیر لحاظ کردن نیروی کزمیر بر روی نمودار پاسخ فرکانس رزونانس اصلی نانوصفحه بررسی شده است. ($V_{dc} = 2\ \mathrm{V}$، $V_{ac} = 0/1\ \mathrm{V}$ و $l = 0/1\mathrm{h}$). می‌توان مشاهده کرد که با لحاظ کردن نیروی کزمیر باعث افزایش رفتار نرم شوندگی سیستم و همچنین کاهش فرکانس رزونانس غیرخطی آن می شود. در واقع افزایش رفتار نرم‌شوندگی فرکانس رزونانس غیرخطی را به سمت فرکانس‌های تحریک پایین تر انتقال می‌دهد. لازم به ذکر است که رفتار نیروی کزمیر مانند نیروی الکترواستاتیکی هست، چون هردو نیرو بین نانوصفحه و الکترود صلب به وجود می‌آید و نانوصفحه را به سمت الکترود صلب می‌کشد، اثر این نیروها بر روی سیستم این هست که باعث کاهش سفتی معادل سیستم می شوند، هردو نیرو اثر نرم شوندگی دارند و مقدار این نیروها با فاصله اولیه بین نانوصفحه و الکترود نسبت عکس دارد.



شکل ۷- مقایسه نتایج تئوری کلاسیک و تئوری تنش کوپل سازگار.



شکل ۸- تاثیر لحاظ کردن اثرات سطح بر روی پاسخ رزونانس اصلی نانوصفحه دایره‌ای.



شکل۹- تاثیر لحاظ کردن نیروی کزمیر بر روی پاسخ فرکانسی رزونانس اصلی برای Vdc=3.5V و Vac=0.1V.

۶- نتیجه گیری

در این مقاله پاسخ رزونانس اصلی یک نانوصفحه دایره ای تحت تحریک غیرخطی الکترو ستاتیکی برر سی شده ا ست. برای در نظر گرفتن اثرات اندازه و سطح به ترتیب از تئوری تنش کوپل سازگار و تئوری سطح گورتین- مورداک ا ستفاده شده است. معادلات حاکم بر مساله با استفاده از روش همیلتون ا ستخراج شده ا ست. برای ا ستخراج پا سخ فرکانس رزونانسی سیستم از روش مقیاس‌های چندگانه ا ستفاده شد. نانو صفحه تو سط ولتاژ پایه خم می شود و سپس تو سط ولتاژ متناوب تحریک می شود تا حول حالت خم شده نو سان کند. نتایج بدست آمده نشان داد که لحاظ کردن اثرات اندازه باعث سخت‌تر شدن نانوصفحه و افزایش فرکانس رزونانس غیرخطی آن می‌شود و تحریک الکترواستاتیک و نیروی کزمیر اثر نرم‌شوندگی دارند، در حالی که اثرات سطحی بسته به خواص

مکانیکی سـطح و ابعاد و شـرایط مرزی مسـاله می تواند اثر سخت یا نرم شوندگی داشته باشد.

۷- مراجع:

[1] Lam D, Yang F, Chong A, Wang J, and Tong P, (2003) Experiments and theory in strain gradient elasticity. J Mech Phys Solids 51(8): 1477-1508.

[2] Miller R E and Shenoy V B, (2000) Size-dependent elastic properties of nanosized structural elements. Nanotechnology 11(3): 139.

[3] Arash B and Wang Q, (2012) A review on the application of nonlocal elastic models in modeling of carbon nanotubes and graphenes. Comp Mater Sci 51(1): 303-313.

[4] Wang K, Wang B, and Kitamura T, (2016) A review on the application of modified continuum models in modeling and simulation of nanostructures. Acta Mech Sinica 32(1): 83-100.

[5] Toupin R A, (1962) Elastic materials with couple-stresses. Arch Ration Mech An 11(1): 385-414.

[6] Mindlin R and Tiersten H, (1962) Effects of couple-stresses in linear elasticity. Arch Ration Mech An 11(1): 415-448.

[7] Koiter W, (1964) Couple-stresses in the theory of elasticity, I and II, Prec. Roy. Netherlands Acad. Sci. B 67.

[8] Hadjesfandiari A R and Dargush G F, (2011) Couple stress theory for solids. Int J Solids Struct 48(18): 2496-2510.

[9] Aghababaie Beni M, Ghazavi M-R, and Rezazadeh G, (2017) A study of fluid media and size effect on dynamic response of microplate. Modares Mech Eng 17(9): 153-164.

[10] Akbari Alashti R and Abolghasemi A H, (2014) A size-dependent Bernoulli-Euler beam formulation based on a new model of couple stress theory. Int J Eng 27(6): 951-960.

[11] Yang F, Chong A C M, Lam D C C, and Tong P, (2002) Couple stress based strain gradient theory for elasticity. Int J of Solids Struct 39(10): 2731-2743.

[12] Park S and Gao X, (2006) Bernoulli–Euler beam model based on a modified couple stress theory. J Micromech Microeng 16(11): 2355.

[13] Asghari M, Rahaeifard M, Kahrobaiyan M, and Ahmadian M, (2011) The modified couple stress functionally graded Timoshenko beam formulation. Mater Design 32(3): 1435-1443.

[14] Jomehzadeh E, Noori H, and Saidi A, (2011) The size-dependent vibration analysis of micro-plates based on a modified couple stress theory. Physica E Low Dimens Syst Nanostruct 43(4): 877-883.

[15] Ke L-L, Wang Y-S, Yang J, and Kitipornchai S, (2012) Free vibration of size-dependent Mindlin microplates based on the modified couple stress theory. J Sound Vib 331(1): 94-106.

[16] Reddy J and Kim J, (2012) A nonlinear modified couple stress-based third-order theory of functionally graded plates. Compos Struct 94(3): 1128-1143.

[17] Dingreville R, Qu J, and Cherkaoui M, (2005) Surface free energy and its effect on the elastic behavior of nano-sized particles, wires and films. J Mech Phys Solids 53(8): 1827-1854.

[18] Gurtin M E and Murdoch A I, (1975) A continuum theory of elastic material surfaces. Arch Ration Mech An 57(4): 291-323.

[19] Gurtin M E, ME G, and AI M, (1978) Surface stress in solids.

[20] Ansari R and Sahmani S, (2011) Surface stress effects on the free vibration behavior of nanoplates. Int J Eng Sci 49(11): 1204-1215.

[21] Wang K and Wang B, (2012) Effects of residual surface stress and surface elasticity on the nonlinear free vibration of nanoscale plates. J Appl Phys 112(1): 013520.

[22] Ansari R, Gholami R, Faghih Shojaei M, Mohammadi V, and Sahmani S, (2013) Surface stress effect on the vibrational response of circular nanoplates with various edge supports. J Appl Mech 80(2).

[23] Wang K and Wang B L, (2014) Influence of surface energy on the non-linear pull-in instability of nano-switches. Int J Nonlin Mech 59: 69-75.

[24] Wang K, Wang B, and Zhang C, (2017) Surface energy and thermal stress effect on nonlinear vibration of electrostatically actuated circular micro-/nanoplates based on modified couple stress theory. Acta Mech 228(1): 129-140.

[25] Hamidi B A, Hosseini S A, Hassannejad R, and

Khosravi F, (2020) Theoretical analysis of thermoelastic damping of silver nanobeam resonators based on Green–Naghdi via nonlocal elasticity with surface energy effects. Eur Phys J Plus 135(1): 1-20.

[26] Hosseini S H S and Ghadiri M, (2021) Nonlinear dynamics of fluid conveying double-walled nanotubes incorporating surface effect: A bifurcation analysis. Appl Math Model 92: 594-611.

[27] Abdelrahman A A, Mohamed N A, and Eltaher M A, (2020) Static bending of perforated nanobeams including surface energy and microstructure effects. Eng Comput: 1-21.

[28] Puers R and Lapadatu D, (1996) Electrostatic forces and their effects on capacitive mechanical sensors. Sens Actuator A Phys 56(3): 203-210.

[29] Nguyen C-C, Katehi L P, and Rebeiz G M, (1998) Micromachined devices for wireless communications. Proc IEEE 86(8): 1756-1768.

[30] Sarafraz A, Sahmani S, and Aghdam M M, (2019) Nonlinear secondary resonance of nanobeams under subharmonic and superharmonic excitations including surface free energy effects. Appl Math Model 66: 195-226.

[31] Mamandi A and Mirzaei ghaleh M, (2020) Nonlinear Vibration of a Microbeam on a Winkler Foundation and Subjected to an Axial Load using Modified Couple StressTheory. J Solid Fluid Mech 10(4): 181-194.

[32] Sarafraz A, Sahmani S, and Aghdam M, (2020) Nonlinear primary resonance analysis of nanoshells including vibrational mode interactions based on the surface elasticity theory. Appl Math Mech 41(2): 233-260.

[33] Sahmani S, Fattahi A, and Ahmed N, (2020) Surface elastic shell model for nonlinear primary resonant dynamics of FG porous nanoshells incorporating modal interactions. Int J Mech Sci 165: 105203.

[34] Xie B, Sahmani S, Safaei B, and Xu B, (2021) Nonlinear secondary resonance of FG porous silicon nanobeams under periodic hard excitations based on surface elasticity theory. Eng Comput 37(2): 1611-1634.

[35] Talebian S, Rezazadeh G, Fathalilou M, and Toosi B, (2010) Effect of temperature on pull-in voltage and natural frequency of an electrostatically actuated microplate. Mechatronics 20(6): 666-673.

[36] Gies H and Klingmüller K, (2006) Casimir effect for curved geometries: Proximity-Force-Approximation validity limits. Phys rev lett 96(22): 220401.

[37] Bao M and Yang H, (2007) Squeeze film air damping in MEMS. Sens. Actuator A Phys 136(1): 3-27.

[38] Rezazadeh G, Tahmasebi A, and Zubstov M, (2006) Application of piezoelectric layers in electrostatic MEM actuators: controlling of pull-in voltage. Microsyst technol 12(12): 1163-1170.

[39] Nayfeh A H and Mook D T,(1979) Nonlinear oscillations. Willey ,. New York.

[40] Kroeger F and Swenson C, (1977) Absolute linear thermal expansion measurements on copper and aluminum from 5 to 320 K. J Appl Phys 48(3): 853-864.

[41] Al-Damook A, Summers J, Kapur N, and Thompson H,(2016) Effect of temperature-dependent air properties on the accuracy of numerical simulations of thermal airflows over pinned heat sinks. Int Commun Heat Mass Transfer 78:163-167.

[42] Raback P and Pursula A,(2004) Finite Element Simulation of the Electro-Mechanical Pull-In Phenomenon, in European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, ECCOMAS: Jyväskylä, Finland.

[43] Osterberg P,(1995) Electrostatically Actuated Microelectromechanical Test Structures for Material Property Measurement, in Department of Electrical Engineering and Computer Science. MIT.

[44] Caruntu D I, Martinez I, and Taylor K N, (2013) Voltage–amplitude response of alternating current near half natural frequency electrostatically actuated MEMS resonators. Mech Res Commun 52: 25-31.

[45] Gheshlaghi B and Hasheminejad S M, (2011) Surface effects on nonlinear free vibration of nanobeams. Compos B Eng 42(4): 934-937.