



توابع گرین حاصل از انتشار امواج در تک لایه فوم متخلخل ایزوتروپیک با ضخامت محدود

هادی تیموری^۱، حسن بیگلری^{۲*}^۱ دانش آموخته کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران^۲ دانشیار، مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران

تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۱۰/۳۰؛ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۰/۰۳/۱۷؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۰۹/۰۵

چکیده

در این مقاله، توابع گرین حاصل از انتشار امواج در تک لایه فوم متخلخل ایزوتروپیک با شرایط مرزی انتهای فوم به صورت اتصال صلب مورد بررسی واقع شده است. هدف از این مقاله به دست آوردن تنش‌ها و جابجایی‌های حاصل از نشر موج نیروهای هارمونیک واقع بر روی سطح فوم است. فوم‌ها به دلیل داشتن منفذهای توخالی که درون آنها سیال جابجا می‌شود، از نوع مواد متخلخل اشباع می‌باشند. معادلات حاکم بر انتشار امواج برای مواد متخلخل اشباع از نوع دستگاه معادلات دیفرانسیل پیچیده با مشتقات جزئی است که با استفاده از دو تابع پتانسیل مجهول به دو معادله مجزا تبدیل می‌گردند. معادلات به دست آمده با استفاده از تبدیلات انتگرال هنکل و سری فوریه به معادلات ساده‌تری تبدیل می‌شوند. به کمک شرایط مرزی حاکم بر مساله، دو تابع پتانسیل مجهول در فضای تبدیل یافته به دست می‌آیند و با استفاده از عکس انتگرال هنکل، جواب‌های حاصل در فضای فرکانسی به دست می‌آیند. از مهم‌ترین نتایج حاصل از این تحقیق، این است که در بخش حقیقی توابع گرین، بارگذاری نقطه‌ای باعث ایجاد بیشینه تنش و تغییر مکان در راستای عمودی می‌گردد و هم‌چنین بارگذاری حلقوی و تخلخل کم، بیشترین زاویه فرکانس حاصل از نشر موج را در توابع گرین دارند.

کلمات کلیدی: انتشار امواج؛ توابع گرین؛ فوم متخلخل ایزوتروپیک؛ توابع پتانسیل؛ ضخامت محدود.

Green's functions resulting from wave propagation in a single-layer porous isotropic foam with finite thickness

Hadi Teymouri¹, Hasan Biglari^{2,*}¹ MSc. Graduated, Mech. Eng., Tabriz Univ., Tabriz, Iran² Assoc. Prof., Mech. Eng., Tabriz Univ., Tabriz, Iran

Abstract

In this paper, the green's functions resulting from wave propagation in a porous isotropic foam monolayer with the boundary condition of the foam end as a rigid-bonded are investigated. This article aims to obtain the stresses and displacements resulting from wave propagation of harmonic forces located on isotropic foam. Foams are of the saturated porous material type due to the hollow pores in which fluid moves. The governing equations of wave propagation for saturated porous material are complex partial differential equations converted into two separate equations using two unknown potential functions. The obtained equations are transformed into simpler equations using Henkel integral and Fourier series transformations. By utilizing the governing boundary condition of the problem, two unknown potential functions are obtained in the transformed space, and with Henkel's integral inverse operations, the resulting solution is obtained in the frequency space. One of the most important results of this study is that in the real part of Green's functions, point loading causes maximum stress and displacement in the vertical direction. Ring load and low porosity have the maximum frequency angle from the wave propagation in Green's functions.

Keywords: Wave propagation; Green's function; Porous isotropic foam; Potential function; Finite thickness.

۱- مقدمه

در مهندسی مکانیک کاربردی، فوم‌ها نقش عمده‌ای در سازه‌های مکانیکی از جمله در پنل‌های ساندویچی به عنوان هسته ایفا می‌کنند. فوم‌های مورد استفاده دارای منفذهای کوچک حاوی سیال گاز یا مایع هستند.

تحلیل‌های پیچیده ریاضی که به ارائه فرمولاسیون دقیق مسأله انتشار امواج منجر می‌گردند، امکان فهم درست فیزیک انتشار امواج را فراهم می‌نمایند. در این زمینه اسکندری قادی [۱] دو تابع پتانسیل کامل برای جداسازی معادلات حرکت در مسائل الاستودینامیکی ایزوتروپیک عرضی ارائه کرده است.

تئوری انتشار امواج الاستیک در محیط‌های متخلخل اشباع ایزوتروپ اولین بار توسط بیو [۲ و ۳] مورد بررسی قرار گرفته شد. سپس بیو با توسعه تئوری اولیه خود توانست تئوری انتشار امواج در محیط‌های غیر ایزوتروپیک را پایه‌ریزی کند [۴ و ۵].

در زمینه مطالعه محیط‌های متخلخل اشباع، فرنکل [۶] نیز به طور جداگانه انتشار امواج الاستیک در چنین محیط‌هایی را مورد مطالعه و بررسی قرار داد. هر چند کار ارائه شده توسط وی همچون تئوری بیو مورد توجه واقع نگردید. در این میان به عنوان نمونه‌ای بارز می‌توان به کار کازی و همکاران [۷]

اشاره نمود که حل محیطی نامتناهی با ویژگی‌های مکانیکی و هیدرولیکی غیر ایزوتروپیک را نخستین بار و در فضای فرکانسی در قالب فرمول‌بندی U_i-P ارائه نمودند. صاحبکار و اسکندری قادی [۸]، یک محیط بی‌نهایت متخلخل اشباع را که شامل دو محیط نیمه بی‌نهایت و یک محیطی با ضخامت محدود که بین این دو محیط نیمه بینهایت بود را مورد بررسی

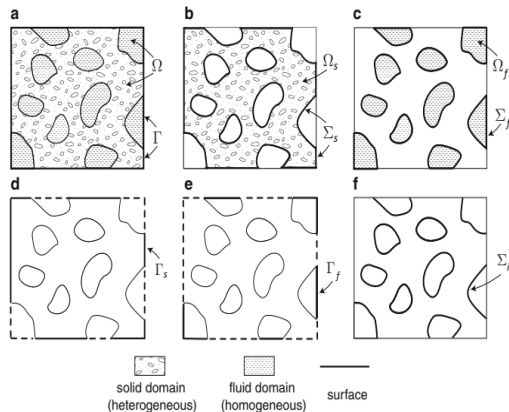
قرار دادند، در واقع آن‌ها یک محیط بی‌نهایت سه‌گانه را تحلیل کردند. آن‌ها به کمک توابع پتانسیل ارائه شده توسط اسکندری، توانستند تنش‌ها و تغییر مکان‌های ناشی از تحریک هارمونیک را در فضای متخلخل اشباع به‌دست آورند. مانولیس و بسکوس [۹] ضمن ارائه حل اساسی و کامل مسأله در فضای تبدیل یافته لاپلاس، معادلات انتگرال مرزی حاکم بر مسائل

دینامیک محیط‌های متخلخل اشباع را بر اساس تئوری بیو و براساس شش متغیر مربوط به جابجایی ساختار جامد و سیال میان حفره‌ای فرمول‌بندی نمودند. توابع گرین یک محیط متخلخل اشباع با رفتار ایزوتروپیک عرضی که تحت نیروهای مدفون یکنواخت دایروی قرار گرفته بود، توسط لیانگ و همکاران [۱۰] مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته شد؛ معادلات

حرکت، بر پایه‌ی فرمول‌های U_i-P بیان شدند و با کمک انتگرال هنکل و بسط سری فوریه، به فضای فوریه-هنکل انتقال داده شدند. او و همکارانش از ماتریس انتقال که شامل توابع بسط بود و همچنین از توابعی که برای جابجایی‌ها و تنش‌ها در یک سیستم مختصات کارترزین و در فضای فرکانسی، توسط با و لیانگ [۱۱] به‌دست آمده بودند، استفاده کرده و توابع گرین را در مختصات استوانه‌ای بدست آوردند. مسائل پرولاستودینامیک مربوط به محیط‌های نیمه بی‌نهایت ایزوتروپیک عرضی تحت اثر بارگذاری سطحی، توسط پولادی و همکاران [۱۲] مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته شدند. تیموری و همکاران [۱۳] انتشار امواج یک بستر اقیانوس نیمه بینهایت سه لایه که هر لایه رفتار متفاوتی داشت و تحت نیروهای تحریک هارمونیک با زمان بود را مورد بررسی قرار دادند. موج‌های ریلی، لاو و استونلی در یک محیط متخلخل اشباع با رفتار ایزوتروپیک عرضی توسط محمودیان و همکاران [۱۴] مورد بررسی قرار گرفت. چن و همکاران توانستند، انتشار موج ریلی را در نزدیکی سطح محیط متخلخل اشباع شده از سیال را مورد بررسی قرار دهند [۱۵].

اخیرا بررسی انتشار امواج در محیط‌های نیمه بی‌نهایت متخلخل اشباع چندلایه، مورد توجه محققان مختلفی قرار گرفته است. در این زمینه ارتعاشات دیسک صلب در یک محیط نیمه بی‌نهایت متخلخل و اشباع چند لایه توسط تیموری و همکاران مورد بررسی واقع شده است [۱۶]. تجزیه و تحلیل دینامیکی محیط‌های متخلخل غیراشباع چند لایه، تحت یک بارگذاری هارمونیک عمودی توسط پی و ای مورد مطالعه قرار گرفته شده است [۱۷].

در اکثر مقالاتی که تا به امروز ارائه شده‌اند، مطالعات گسترده‌ای در زمینه انتشار امواج در محیط‌های نیمه بی‌نهایت با رفتار متخلخل اشباع انجام گرفته است؛ ولی برای فوم‌های متخلخل اشباع با ضخامت محدود که کاربردهای فراوانی در مهندسی مکانیک دارند، تحقیقات خاصی انجام نگرفته است؛ به همین دلیل در این مقاله، انتشار موج ناشی از نیروهای هارمونیک داخل تک لایه فوم متخلخل ایزوتروپیک با ضخامت محدود مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته است. در ابتدا معادلات حاکم الاستودینامیک بدست آورده شده است و سپس با استفاده از توابع پتانسیل، معادلات دیفرانسیل حاکم بر مساله به دو معادله تبدیل می‌گردند. حل این معادلات در فضای



شکل ۱- سطح و حجم محیط سیال و اسکلت جامد در جزء حجمی [۱۸]

در محیط متخلخل اشباع، تخلخل حجمی به صورت زیر تعریف می‌شود [۱۲]:

$$\phi_v = \frac{\Omega_f}{\Omega} \quad (1)$$

و تخلخل سطحی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\phi_a = \frac{\Gamma_f}{\Gamma} \quad (2)$$

در این تحقیق، تمامی روابط برپایه تئوری دلس [۱۳] می‌باشند که به بیان زیر است.

برای یک محیط متخلخل با منفذهای تصادفی در بین ذرات جامد، تخلخل سطحی و حجمی باهم برابر می‌باشند، یعنی:

$$\phi_v = \phi_a = \phi \quad (3)$$

۳- بیان مساله

مطابق شکل ۲، تک لایه فوم ایزوتروپیک در دستگاه مختصات استوانه‌ای (r, θ, z) چنان در نظر گرفته می‌شود که محور z عمود بر صفحه‌ی ایزوتروپیک باشد؛ همچنین فرض می‌شود که نیروی‌های هارمونیک دلخواه روی سطح فوم اعمال می‌گردند و سطح انتهایی این فوم کاملاً بسته شده است.

زمانی کار دشواری است. پس در گام بعدی با استفاده از سری فوریه در راستای مولفه مماسی و اعمال تبدیل انتگرال هنکل در راستای مولفه شعاعی، پاسخهای توابع پتانسیل یاد شده در فضای تبدیل یافته به‌دست می‌آیند. سپس به کمک معکوس انتگرال هنکل، توابع گرین یا به عبارت دیگر تنش‌ها و تغییر مکان‌های حاصل از نشر موج به‌دست می‌آیند و مورد بررسی قرار می‌گیرند.

۲- مواد متخلخل اشباع

فوم‌ها با توجه به اینکه حجم زیادی از آنها را منفذهای خالی در برمی‌گیرند، ماده متخلخل محسوب می‌شوند و از طرفی با توجه به اینکه سیال می‌تواند به راحتی به این منفذها نفوذ پیدا کرده و حتی جریان یابند، ماده متخلخل اشباع نامیده می‌شوند. برای مطالعه رفتار مواد متخلخل اشباع، تئوری بیو به عنوان اصلی ترین تئوری، جای گرفته است و تقریباً تمامی تحقیقات بر اساس مطالعات وی انجام یافته‌اند.

صلبیت یک ماده متخلخل اشباع از سه عامل تاثیر می‌پذیرد. در مرحله اول سختی اسکلت جامد آن که در سختی کلی ماده تاثیرگذار است؛ همچنین سیال موجود در فضاهای خالی نیز تاثیر زیادی در رفتار ماده متخلخل خواهد داشت و علاوه بر این دو مورد، وجود حفره‌های ماده متخلخل است. در یک ماده متخلخل اشباع، اندازه، شکل، جهت‌گیری و توزیع فضاهای خالی، به طور مستقیم در صلبیت محیط تاثیرگذار است. وجود منفذهایی در اسکلت جامد، طبیعتاً باعث کاهش صلبیت خواهد شد؛ اما شکل و توزیع این منفذها در رفتار بسیار مهم است. به لحاظ تئوریک، منفذهای کروی شکل باعث کمترین تاثیر در صلبیت است. در شکل ۱ مفهوم تخلخل در یک جزء حجمی آورده شده است که فضای خالی مابین ذرات با سیال همگن اشباع شده است.

در شکل ۱، Ω بیانگر حجم بوده و Ω_f و Ω_s به ترتیب حجم ذرات جامد و حجم سیال منفذی می‌باشند؛ همچنین Σ_f و Σ_s به ترتیب نمایانگر سطح قسمت جامد و سیال هستند. مساحت خارجی المان برابر با Γ است که از مجموع مساحت سیال (Γ_f) و جامد (Γ_s) حاصل می‌گردد.

¹ Delesse Theory

معادلات فوق بر اساس جریان لایه‌ای آرام در محیط متخلخل (قانون دارسی) پایه‌گذاری شده‌اند و در صورتی که جریان آشفته در محیط برقرار باشد، این معادلات اعتباری نخواهند داشت و همچنین در نظر داریم، این روابط دارای محدودیت‌های خطی می‌باشند که فقط تغییر شکل‌های کوچک را شامل می‌شوند و همچنین محیط متخلخل باید به صورت محیط دو فازی باشد و برای محیط‌های سه فازی جواب ارائه نمی‌دهد.

در روابط فوق $u_i (i = r, \theta, z)$ بیانگر مولفه‌های بردار تغییر مکان در فاز جامد، ω فرکانس تحریک و p فشار سیال منفذی در محیط می‌باشند. c_{ij} ضرایب الاستیسیته اسکلت

جامد محیط می‌باشند که از روابط زیر به دست می‌آیند [۱]:

$$c_{11} = \frac{E \left(1 - \frac{E}{E'} \nu'^2 \right)}{(1 + \nu) \left(1 - \nu - 2 \frac{E}{E'} \nu'^2 \right)}$$

$$c_{12} = \frac{E \left(\nu + \frac{E}{E'} \nu'^2 \right)}{(1 + \nu) \left(1 - \nu - 2 \frac{E}{E'} \nu'^2 \right)}$$

$$c_{13} = \frac{E \nu'}{\left(1 - \nu - 2 \frac{E}{E'} \nu'^2 \right)} \quad (5)$$

$$c_{33} = \frac{E' (1 - \nu)}{\left(1 - \nu - 2 \frac{E}{E'} \nu'^2 \right)}$$

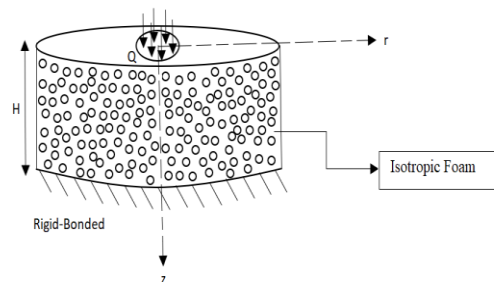
$$c_{44} = G' \quad c_{66} = \frac{E}{2(1 + \nu)} = G$$

که E و G ضرایب پواسون، الاستیسیته و مدول برشی در صفحه ایزوتروپیک و ν' ، E' ، G' پارامترهای مشابه در محور عمود بر صفحه ایزوتروپیک هستند.

با توجه به اینکه فوم به کار رفته در این مقاله رفتاری همسانگرد داشته و ایزوتروپ است، روابط زیر برقرار است:

$$E = E', \quad \nu = \nu', \quad G = G'$$

همچنین در روابط ۴، ثوابت و عملگرها به قرار زیر هستند:



شکل ۲- فوم ایزوتروپیک تحت نیروی هارمونیک دلخواه با سطح انتهایی صلب

۴- معادلات حاکم

معادلات حاکم برای یک ماده متخلخل اشباع، در دستگاه مختصات استوانه‌ای و در فضای فرکانسی، برای محیط ایزوتروپ عرضی به صورت زیر بیان می‌شوند [۱۲]:

$$c_{66} \left(\nabla_r^2 u_r - \frac{1}{r^2} u_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) + (c_{66} + c_{12}) \frac{\partial e}{\partial r} + c_{44} \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + (c_{44} + c_{13}) \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z} + \rho_r^c \omega^2 u_r + \alpha_{r\theta}^c \frac{\partial p}{\partial r} = 0$$

$$c_{66} \left(\nabla_r^2 u_\theta - \frac{1}{r^2} u_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) + (c_{66} + c_{12}) \frac{\partial e}{r \partial \theta} + c_{44} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} + \frac{1}{r} (c_{44} + c_{13}) \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta \partial z} + \rho_r^c \omega^2 u_\theta + \alpha_{r\theta}^c \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0$$

$$c_{66} \nabla_r^2 u_z + (c_{44} + c_{13}) \frac{\partial e}{\partial z} + c_{33} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \rho_z^c \omega^2 u_z + \alpha_z^c \frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

$$\left(\alpha_{r\theta}^c e + \frac{K_r \theta}{(i \omega)} \nabla_r^2 p \right) + \left(\alpha_z^c \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{K_z}{(i \omega)} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} \right) - \frac{p}{M} = 0$$

و همکاران با تعمیم روابطی که توسط اسکندری قادی برای مواد ایزوتروپیک و ایزوتروپیک عرضی بیان شده بود، مولفه‌های تغییر مکان را برحسب توابع پتانسیل ϕ و χ در دستگاه مختصات استوانه‌ای و در حالت دینامیکی برای یک ماده متخلخل اشباع به صورت زیر تعریف کردند [۱۲]:

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{\partial^2}{\partial r \partial z} \Delta_{r\theta} \phi - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \chi; \\ u_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial z} \Delta_{r\theta} \phi + \frac{\partial}{\partial \theta} \chi; \\ u_z &= \Delta_z \phi; \quad p = \Delta_p \frac{\partial}{\partial z} \phi; \end{aligned} \quad (6)$$

که در روابط بالا:

$$\begin{aligned} \Delta_{r\theta} &= -(\bar{K}_{r\theta} \alpha_3 \nabla_p - (i\omega) \bar{\alpha}_{r\theta} \bar{\alpha}_z); \\ \Delta_z &= (\bar{K}_{r\theta} (1 + \alpha_1) \nabla_\alpha \nabla_p - (i\omega) \bar{\alpha}_{r\theta}^2 \nabla_{r\theta}^2); \\ \Delta_p &= -(i\omega) \left((1 + \alpha_1) \bar{\alpha}_z \nabla_\alpha - \alpha_3 \bar{\alpha}_{r\theta} \nabla_{r\theta}^2 \right); \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{c_{66} + c_{12}}{c_{66}} & \alpha_3 &= \frac{c_{13} + c_{44}}{c_{66}} \\ \nabla_\alpha &= \nabla_{r\theta}^2 + \frac{\alpha_2}{(1 + \alpha_1)} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\bar{\rho}_{r\theta}}{(1 + \alpha_1)} \omega^2 \\ \nabla_p &= \nabla_{r\theta}^2 + \frac{\bar{K}_z}{\bar{K}_{r\theta}} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\bar{\beta}}{\bar{K}_{r\theta}} (i\omega) \end{aligned}$$

و همچنین:

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \frac{c_{44}}{c_{66}} \\ \left. \begin{aligned} \bar{K}_i &= \frac{K_i}{c_{66}} & \bar{\rho}_i &= \frac{\rho_i^c}{c_{66}} \\ \bar{\alpha}_i &= \frac{\alpha_i^c}{c_{66}} & \bar{\beta}_i &= \frac{\beta_i}{c_{66}} \end{aligned} \right\} (i = z, r\theta) \end{aligned}$$

با قرار دادن روابط ۶ در معادلات ۴ و همچنین با استفاده از سری فوریه مختلط در راستای مولفه مماسی و اعمال تبدیل انتگرال هنکل در راستای مولفه شعاعی [۸]، پاسخ‌های توابع

$$\begin{aligned} e &= \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_\theta}{r \partial \theta} \\ \nabla_{r\theta}^2 &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \\ K_i(\omega) &= \left(\frac{1}{(i\omega)m_i + b_i} \right) \quad i = r\theta, z \\ \rho_i^c &= \left(\rho + \rho_f \omega^2 \frac{K_i}{(i\omega)} \right) \\ \alpha_i^c &= - \left(\beta_i + \rho_f \omega^2 \frac{K_i}{(i\omega)} \right) \end{aligned}$$

در معادلات فوق K_i^c ، ρ_i^c ، α_i^c به ترتیب بیانگر نفوذپذیری، چگالی و ضریب تنش موثر بیو در فضای اعداد مختلط می‌باشند؛ همچنین ρ ، ρ_f ، β_i ، b_i و m_i به ترتیب بیانگر چگالی جرمی سیال، چگالی جرمی کل ماده متخلخل، ضرایب تنش موثر بیو، ضرایب ویسکوز و اینرسی داخلی ماده متخلخل اشباع است که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} \rho &= \phi \rho_f + (1 - \phi) \rho_s, \quad \beta_{r\theta} = 1 - \frac{c_{11} + c_{12} + c_{13}}{3K_s} \\ \beta_z &= 1 - \frac{c_{33} + 3c_{13}}{3K_s}, \quad \left. \begin{aligned} m_i &= \frac{T_i \rho_f}{\phi} \\ b_i &= \frac{\eta}{\kappa_i} \end{aligned} \right\} (i = r\theta, z) \end{aligned}$$

در روابط بالا، ρ_s چگالی جرمی اسکلت جامد، η ضریب ویسکوزیته سیال موجود در منفذهای فوم آلومینیومی، κ_i ضریب نفوذپذیری ذاتی، K_s مدول حجمی اسکلت جامد و T_i ضریب چرخشی است که در ذیل روابط مدول حجمی و ضریب چرخشی ارائه شده است:

$$K_s = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \quad T = 1.15\phi^{1.16}$$

معادلات حرکت ۴ یک دستگاه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی می‌باشند که حل این معادلات به این سادگی انجام نمی‌گیرند. به منظور مجزا سازی این معادلات از یکدیگر از دو تابع پتانسیل مجهول ϕ و χ استفاده شده است. پولادی

که در این روابط ξ متغیر فضای هنکل است. معادلات ۷ از نوع معادلات دیفرانسیل معمولی از مرتبه ۶ و ۲ با ضرایب ثابت هستند که دارای جواب عمومی به شکل زیر می‌باشند:

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_m^m(\xi, z) &= C_1(\xi)e^{-\lambda_1 z} + D_1(\xi)e^{-\lambda_2 z} \\ &+ E_1(\xi)e^{-\lambda_3 z} + C_2(\xi)e^{\lambda_1 z} \\ &+ D_2(\xi)e^{\lambda_2 z} + E_2(\xi)e^{\lambda_3 z} \\ \tilde{\chi}_m^m(\xi, z) &= F_1(\xi)e^{-\lambda_4 z} + F_2(\xi)e^{\lambda_4 z} \end{aligned} \quad (۸)$$

در روابط بالا، C_1 ، C_2 ، ... و F_2 ، توابعی مجهول هستند که با نوشتن شرایط مرزی بدست می‌آیند. $\lambda_i (i=1, 2, 3, 4)$ ریشه‌های معادلات مشخصه معادلات دیفرانسیل ۷ بوده و دارای جواب‌های تحلیلی به شکل زیر می‌باشند:

$$\lambda_i(\xi)^2 = -\frac{1}{3} \left(l_1 + \delta_i D + \frac{\Delta_0}{\delta_i D} \right) \quad (i=1, 2, 3) \quad (۹)$$

$$\lambda_4(\xi)^2 = -a_0$$

که در روابط بالا:

$$D = \sqrt[3]{\frac{\Delta_1 + \sqrt{\Delta_1^2 - 4\Delta_0^3}}{2}}$$

$$\Delta_0 = (l_1)^2 - 3l_2$$

$$\Delta_1 = 2l_1^3 - 9l_1l_2 + 27l_3$$

$$\delta_1 = 1, \quad \delta_2 = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, \quad \delta_3 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$$

ریشه‌های روابط ۹ که بیانگر اعداد موج‌های حجمی برای مواد متخلخل اشباع می‌باشند عبارتند از:

$$\xi_1 = \pm \sqrt{\frac{(i\omega)}{2K_{r\theta}(1+\alpha_1)} \left(S + \sqrt{S^2 - 4K_{r\theta}(1+\alpha_1)(i\omega)\bar{\beta}\bar{\rho}_{r\theta}} \right)} \quad (۱۰)$$

پتانسیل یاد شده در فضای تبدیل یافته به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^6}{dz^6} + l_1 \frac{d^4}{dz^4} + l_2 \frac{d^2}{dz^2} + l_3 \right) \bar{\varphi}_m^m &= 0 \\ \left(\frac{d^2}{dz^2} + l_0 \right) \tilde{\chi}_m^m &= 0 \end{aligned} \quad (۷)$$

بالانویس m بیانگر مرتبه تبدیل هنکل و زیرنویس m بیانگر مقادیر سری فوریه مختلط می‌باشند. ضرایب موجود در روابط بالا بصورت زیر تعریف می‌شوند:

$$l_0 = \frac{1}{\alpha_2} (\bar{\rho}_r \theta \omega^2 - \xi^2)$$

$$l_1 = C_p + \left(C_\alpha + C_\beta + \frac{\alpha_3^2}{\alpha_2 \alpha_4} \xi^2 \right) - \frac{(i\omega) \bar{\alpha}_z^2}{\bar{K}_z \alpha_4}$$

$$l_2 = C_\alpha C_\beta + C_p \left(C_\alpha + C_\beta + \frac{\alpha_3^2}{\alpha_2 \alpha_4} \xi^2 \right) + \left(C_m \xi^2 - \frac{\bar{\rho}_r \theta \omega^2}{\alpha_2} \right) \frac{(i\omega) \bar{\alpha}_z^2}{\bar{K}_z \alpha_4}$$

$$l_3 = C_\beta \left(C_\alpha C_p + \frac{(i\omega) \bar{\alpha}_r \theta}{\bar{K}_z \alpha_2} \xi^2 \right)$$

و همچنین:

$$C_\alpha = \frac{(1+\alpha_1)}{\alpha_2} \left(\frac{\bar{\rho}_r \theta}{(1+\alpha_1)} \omega^2 - \xi^2 \right)$$

$$C_\beta = \frac{\alpha_2}{\alpha_4} \left(\frac{\bar{\rho}_z}{\alpha_2} \omega^2 - \xi^2 \right)$$

$$C_p = -\frac{\bar{K}_r \theta}{\bar{K}_z} \left(\frac{(i\omega)}{\bar{K}_r \theta} \bar{\beta} + \xi^2 \right)$$

$$C_m = \frac{\alpha_4 \bar{\alpha}_r \theta^2 - 2\alpha_3 \bar{\alpha}_r \theta \bar{\alpha}_z + \bar{\alpha}_z^2 (1+\alpha_1)}{\alpha_2 \bar{\alpha}_z^2}$$

روابط تنش‌ها و جابجایی‌ها، برحسب دو تابع پتانسیل φ و χ و با اعمال سری فوریه مختلط در راستای مولفه مماسی و تبدیل انتگرال هنکل در راستای مولفه شعاعی، به صورت زیر به دست می‌آیند.

$$\begin{aligned}
 u_{zm}^m &= \bar{\Delta}_z^m \phi_m^m \\
 u_{rm}^{m-1} - iu_{\theta m}^{m-1} &= \xi \left(\bar{\Delta}_{r\theta}^m \frac{d}{dz} \phi_m^m - i \chi_m^m \right) \\
 u_{zm}^{m+1} + iu_{\theta m}^{m+1} &= -\xi \left(\bar{\Delta}_{r\theta}^m \frac{d}{dz} \phi_m^m + i \chi_m^m \right) \\
 p_m^m &= \bar{\Delta}_p^m \frac{d}{dz} \phi_m^m \\
 \sigma_{zzm}^m &= c_{66} \left(\alpha_4 \bar{\Delta}_z^m \right. \\
 &\quad \left. - (\alpha_3 - \alpha_2) \xi^2 \bar{\Delta}_{r\theta}^m - \bar{\beta}_z \bar{\Delta}_p^m \right) \frac{d}{dz} \phi_m^m \\
 \sigma_{zrm}^{m+1} + i \sigma_{z\theta m}^{m+1} &= -c_{66} \alpha_2 \xi \left(\bar{\Delta}_z^m \right. \\
 &\quad \left. + \bar{\Delta}_{r\theta}^m \frac{d^2}{dz^2} \right) \phi_m^m - ic_{66} \alpha_2 \xi \frac{d}{dz} \chi_m^m \\
 \sigma_{zrm}^{m-1} - i \sigma_{z\theta m}^{m-1} &= c_{66} \alpha_2 \xi \left(\bar{\Delta}_z^m \right. \\
 &\quad \left. + \bar{\Delta}_{r\theta}^m \frac{d^2}{dz^2} \right) \phi_m^m - ic_{66} \alpha_2 \xi \frac{d}{dz} \chi_m^m
 \end{aligned} \tag{11}$$

اگر جابجایی سیال در محیط متخلخل اشباع نسبت به ساختار جامد با w نشان داده شود، مقادیر این تابع در سه راستای (r, θ, z) به صورت زیر تعریف می‌گردند [۱۳]:

$$\begin{aligned}
 w_r &= \frac{-K_{r\theta}}{i\omega} \left(\frac{\partial p}{\partial r} - \rho_f \omega^2 u_r \right) \\
 w_\theta &= \frac{-K_{r\theta}}{i\omega} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} - \rho_f \omega^2 u_\theta \right) \\
 w_z &= \frac{-K_z}{i\omega} \left(\frac{\partial p}{\partial z} - \rho_f \omega^2 u_z \right)
 \end{aligned} \tag{12}$$

با جاگذاری روابط ۶ در روابط بالا و هم‌چنین با اعمال سری فوریه در راستای مماسی و تبدیل هنکل در راستای شعاعی، روابط بالا به صورت زیر ساده می‌شوند:

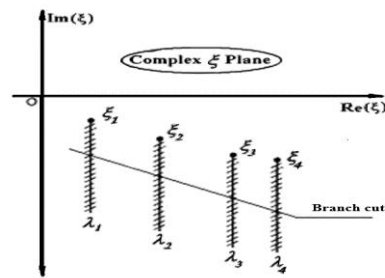
$$\begin{aligned}
 \xi_2 &= \pm \sqrt{\frac{(i\omega)}{2K_{r\theta}(1+\alpha_1)} (S - \sqrt{S^2 - 4K_{r\theta}(1+\alpha_1)(i\omega)\bar{\beta}\bar{\rho}_{r\theta}})}{S}} \\
 \xi_3 &= \pm \sqrt{\frac{\bar{\rho}_z}{\alpha_2} \omega} \quad \xi_4 = \pm \sqrt{\frac{\bar{\rho}_{r\theta}}{\alpha_2} \omega}
 \end{aligned}$$

که در روابط بالا:

$$S = (\bar{\beta}(1+\alpha_1) + (i\omega)K_{r\theta}\bar{\rho}_{r\theta} + \bar{\alpha}_r^2)$$

به توابع چند مقدار مشهور هستند.

برای تبدیل این توابع به توابع تک متغیره باید مسیره‌های انتگرال‌گیری به نحوی انتخاب گردند که بریدگی‌های شاخه‌ای فقط اعداد مختلط با قسمت‌های مثبت را در برگیند.



شکل ۳- بریدگی‌های شاخه‌ای برای ماده متخلخل اشباع

شکل ۳ بیانگر انتخاب این بریدگی‌های شاخه‌ای است و در آن مشاهده می‌شود که برخلاف مواد غیر متخلخل، نقاط شاخه‌ای بر روی محور حقیقی قرار نمی‌گیرند و این بدین معنا است که کل حل مساله حتی در نقاط شاخه‌ای به صورت تحلیلی انجام می‌گیرد؛ ولی برای انتگرال‌گیری مواد غیر متخلخل در نقاط شاخه‌ای بایستی از تئوری باقی‌مانده‌ها^۱ استفاده کرد. شکل زیر بریدگی‌های شاخه‌ای را برای یک ماده متخلخل اشباع نشان می‌دهد.

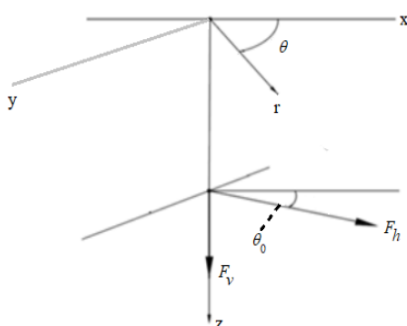
ξ_1 و ξ_2 معرف اعداد امواج فشاری نوع اول و نوع دوم (P_1 و P_2) و ξ_3 معرف عدد موج مولفه قائم امواج برشی (SV) و ξ_4 معرف عدد موج مولفه افقی امواج برشی (SH) است.

^۱ Residual Method

$$Y_{-1}(\xi) = \frac{F_h}{2\pi} e^{+i\theta_0}, \quad Y_m = 0 \text{ for } m \neq -1$$

$$Z_0(\xi) = \frac{F_v}{2\pi}, \quad Z_m = 0 \text{ for } m \neq 0$$

زیر نشان داده شده است. F_v و F_h مولفه‌های قائم و افقی می‌باشند و θ_0 در شکل



شکل ۴- مولفه‌های قائم و افقی برای بارگذاری نقطه‌ای

۲-۵- بارگذاری حلقوی

مولفه‌های بارگذاری حلقوی در فضای هنکل به قرار زیر است [۱۳]:

$$X^{+1}(\xi) = aF_h J_0(a\xi) e^{-i\theta_0}, \quad X_m = 0 \text{ for } m \neq +1$$

$$Y^{-1}(\xi) = aF_h J_0(a\xi) e^{+i\theta_0}, \quad Y_m = 0 \text{ for } m \neq -1$$

$$Z^0(\xi) = aF_v J_0(a\xi), \quad Z_m = 0 \text{ for } m \neq 0$$

۳-۵- بارگذاری یکنواخت صفحه‌ای

مولفه‌های بارگذاری یکنواخت صفحه‌ای در فضای هنکل به قرار زیر است [۱۳]:

$$X^{+1}(\xi) = aF_h \frac{J_1(a\xi)}{\xi} e^{-i\theta_0}, \quad X_m = 0 \text{ for } m \neq +1$$

$$Y^{-1}(\xi) = aF_h \frac{J_1(a\xi)}{\xi} e^{+i\theta_0}, \quad Y_m = 0 \text{ for } m \neq -1$$

$$Z^0(\xi) = aF_v \frac{J_1(a\xi)}{\xi}, \quad Z_m = 0 \text{ for } m \neq 0$$

$$w_{r_m}^{m+1} + iw_{\theta_m}^{m+1} = -\frac{\bar{K}_{r\theta}}{(i\omega)} \xi \left(\left(\rho_f \omega^2 \bar{\Delta}_{r\theta}^{2-m} - \bar{\Delta}_p^{-m} \right) \frac{d}{dz} \phi_m^m + \rho_f \omega^2 i \chi_m^m \right)$$

$$w_{r_m}^{m-1} - iw_{\theta_m}^{m-1} = \frac{\bar{K}_{r\theta}}{(i\omega)} \xi \left(\left(\rho_f \omega^2 \bar{\Delta}_{r\theta}^{2-m} - \bar{\Delta}_p^{-m} \right) \frac{d}{dz} \phi_m^m - \rho_f \omega^2 i \chi_m^m \right) \quad (13)$$

$$w_{z_m}^m = \frac{\bar{K}_z}{(i\omega)} \left(\rho_f \omega^2 \bar{\Delta}_z^{2-m} - \bar{\Delta}_p^{-m} \frac{d^2}{dz^2} \right) \phi_m^m$$

که در روابط بالا خواهیم داشت:

$$\bar{\Delta}_{r\theta}^m = -(\bar{K}_{r\theta} \alpha_3 \bar{\nabla}_p^m - (i\omega) \bar{\alpha}_{r\theta} \bar{\alpha}_z)$$

$$\bar{\Delta}_z^m = (\bar{K}_{r\theta} (1 + \alpha_1) \bar{\nabla}_\alpha^m \bar{\nabla}_p^m - (i\omega) \bar{\alpha}_{r\theta}^2 \bar{\nabla}_{r\theta}^{m2})$$

$$\bar{\Delta}_p^m = -(i\omega) ((1 + \alpha_1) \bar{\alpha}_z \bar{\nabla}_\alpha^m - \alpha_3 \bar{\alpha}_{r\theta} \bar{\nabla}_{r\theta}^{m2})$$

$$\bar{\nabla}_p^m = -\xi^2 + \frac{\bar{K}_z}{\bar{K}_{r\theta}} \frac{d^2}{dz^2} - \frac{\bar{\beta}}{\bar{K}_{r\theta}} (i\omega);$$

$$\bar{\nabla}_\alpha^m = -\xi^2 + \frac{\alpha_2}{(1 + \alpha_1)} \frac{d^2}{dz^2} + \frac{\bar{\rho}_{r\theta}}{(1 + \alpha_1)} \omega^2;$$

$$\bar{\nabla}_{r\theta}^{m2} = -\xi^2$$

۵- بارگذاری

در این مقاله، بارگذاری‌های مختلف هارمونیک برای انتشار امواج در تک لایه فوم ایزوتروپیک ارائه شده است. با توجه به اینکه، تمامی معادلات حاکم بر مساله به دلیل دشواری حل در فضای زمان به فضای هنکل انتقال داده شده‌اند، بایستی مولفه‌های هر بارگذاری نیز در فضای تبدیل یافته بدست آیند.

۵-۱- بارگذاری نقطه‌ای

مولفه‌های نقطه‌ای در فضای هنکل به قرار زیر است [۱۳]:

$$X_{+1}(\xi) = \frac{F_h}{2\pi} e^{-i\theta_0}, \quad X_m = 0 \text{ for } m \neq +1$$

مجهول‌های $F_1(\xi)$ و $F_2(\xi)$ حذف خواهند شد و روابط ۱۵ به روابط زیر تبدیل می‌شوند:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} C_1(\xi) & D_1(\xi) & E_1(\xi) \\ C_2(\xi) & D_2(\xi) & E_2(\xi) \end{bmatrix}^T \quad (16)$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} Z^0(\xi) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

ماتریس \mathbf{M} ماتریسی با ضرایب معلوم است که از شرایط مرزی به‌دست می‌آید:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} [\sigma_{zz} n_i(\xi, 0)]_{1 \times 3} & [\sigma_{zz} p_i(\xi, 0)]_{1 \times 3} \\ [\sigma_{zr} n_i(\xi, 0)]_{1 \times 3} & [\sigma_{zr} p_i(\xi, 0)]_{1 \times 3} \\ [pn_i(\xi, 0)]_{1 \times 3} & [pp_i(\xi, 0)]_{1 \times 3} \\ [u_z n_i(\xi, H)]_{1 \times 3} & [u_z p_i(\xi, H)]_{1 \times 3} \\ [u_r n_i(\xi, H)]_{1 \times 3} & [u_r p_i(\xi, H)]_{1 \times 3} \\ [w_z n_i(\xi, H)]_{1 \times 3} & [w_z p_i(\xi, H)]_{1 \times 3} \end{bmatrix} \quad (17)$$

که در رابطه بالا:

$$\sigma_{zz} n_i(\xi, z) = c_{66} \left(\alpha_4 \bar{\Delta}_z^m - (\alpha_3 - \alpha_2) \xi^2 \bar{\Delta}_{r\theta}^m - \bar{\beta}_z \bar{\Delta}_p^m \right) \frac{d}{dz} e^{-\lambda_i^p z}$$

$$\sigma_{zr} n_i(\xi, z) = c_{44} \xi \left((\alpha_3 - \alpha_2) \frac{d^2}{dz^2} + \xi^2 (1 + \alpha_1) - \frac{\rho \omega^2}{c_{66}} \right) e^{-\lambda_i^p z}$$

$$pn_i(\xi, z) = \bar{\Delta}_p^m \frac{d}{dz} e^{-\lambda_i^p z}$$

$$u_z n_i(\xi, z) = \left(\alpha_2 \frac{d^2}{dz^2} + \frac{\rho \omega^2}{c_{66}} - \xi^2 (1 + \alpha_1) \right) e^{-\lambda_i^p z}$$

$$u_r n_i = \alpha_3 \xi \frac{d}{dz} e^{-\lambda_i^p z}$$

$$w_z n_i(\xi, z) = \frac{\bar{K}_z}{(i\omega)} \left(\rho_f \omega^2 \bar{\Delta}_z^m - \bar{\Delta}_p^m \frac{d^2}{dz^2} \right) e^{-\lambda_i^p z}$$

$$\sigma_{zz} p_i(\xi, z) = c_{66} \left(\alpha_4 \bar{\Delta}_z^m - (\alpha_3 - \alpha_2) \xi^2 \bar{\Delta}_{r\theta}^m - \bar{\beta}_z \bar{\Delta}_p^m \right) \frac{d}{dz} e^{\lambda_i^p z}$$

$$\sigma_{zr} p_i(\xi, z) = c_{44} \left((\alpha_3 - \alpha_2) \frac{d^2}{dz^2} + \xi^2 (1 + \alpha_1) - \frac{\rho \omega^2}{c_{66}} \right) e^{\lambda_i^p z}$$

۶- شرایط مرزی و روش حل مساله

۶-۱- شرایط مرزی حاکم بر تک لایه فوم ایزوتروپیک

طبق شکل ۲، شرایط مرزی حاکم بر مسئله به‌صورت زیر است:

$$u_z(r, z = H) = 0$$

$$u_r(r, z = H) = 0$$

$$u_\theta(r, z = H) = 0$$

$$w_z(r, z = H) = 0$$

$$\sigma_{zz}(r, z = 0) = \begin{cases} f_v(r, \theta, z) & (r, \theta) \in Q \\ 0 & (r, \theta) \notin Q \end{cases} \quad (14)$$

$$\sigma_{zr}(r, z = 0) = 0$$

$$\sigma_{z\theta}(r, z = 0) = 0$$

$$p(r, z = 0) = 0$$

همان‌طور که گفته شد، تمامی معادلات حاکم بر مساله به‌دلیل دشواری حل در فضای زمان به فضای هنکل انتقال داده شده‌اند، به همین دلیل بایستی شرایط مرزی حاکم نیز در فضای تبدیل یافته شده به‌دست آیند، پس باید از روابط ۱۱ و ۱۳ استفاده شود. روابط ارائه شده در کار حاضر به‌صورت دینامیکی بوده و در فضای فرکانسی حل شده‌اند. حل حاضر شامل حل تحلیلی در فضای هنکل بوده و با تغییر بار دینامیکی فقط شرایط مرزی عوض خواهند شد.

۶-۲- راه‌حل مساله برای تک لایه فوم ایزوتروپیک

با تشکیل دستگاه معادلات به فرم $\mathbf{M} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{N}$ ، ضرایب مجهول توابع پتانسیل برای تک لایه فوم ایزوتروپیک مورد نظر که یک ماده متخلخل اشباع است، به سادگی مشخص می‌گردند.

در این دستگاه معادلات خواهیم داشت:

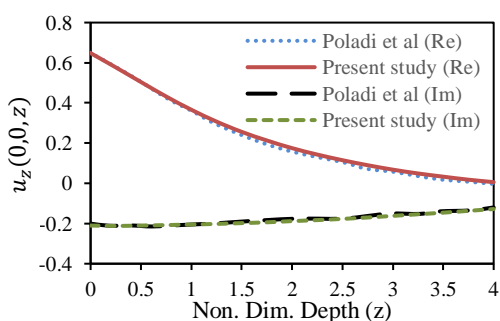
$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} C_1(\xi) & D_1(\xi) & E_1(\xi) & F_1(\xi) \\ C_2(\xi) & D_2(\xi) & E_2(\xi) & F_2(\xi) \end{bmatrix}^T \quad (15)$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} Z^0(\xi) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

بارگذاری اعمال شده در این مقاله به‌صورت قائم و متقارن نسبت به راستای θ است، پس نتیجه می‌شود، تمامی تنش‌ها و تغییر مکان‌های ایجاد شده در راستای θ برابر صفر است. از طرفی از رابطه ۶ نتیجه می‌شود که تابع پتانسیل χ با توجه به بارگذاری اعمال شده برابر صفر خواهد بود، پس در رابطه ۷،

جدول ۲- مشخصات ضرایب تخلخل برای فوم متخلخل [۱۲]

β	۰/۹۷
b	۱۰
m	۱/۱
φ	۰/۴
ρ_f	۰/۵۳
ω	۰/۵



شکل ۵- مقایسه تغییر مکان حاصل از مطالعه حاضر و مقاله پولادی و همکاران [۱۲]

۷-۲- نتایج عددی

به منظور تحلیل دینامیکی و ارائه پاسخ‌های فوم مورد نظر به صورت گرافیکی، سه پارامتر فرکانس، تخلخل و نوع بار تحریک، به عنوان متغیر در نظر گرفته شده‌اند. در جدول ۳ مشخصات بی بعد اسکلت جامد فوم ایزوتروپیک و در جدول ۴ ضرایب تخلخل برای فوم ایزوتروپیک مشاهده می‌شود [۱۹ و ۲۰]. با استفاده از معادلات زیر ضرایب تخلخل برای فوم ایزوتروپیک بی بعد می‌شود:

جدول ۳- مشخصات بی بعد اسکلت فوم [۱۹ و ۲۰]

PPI	۱۰ و ۲۰ و ۴۰
\bar{c}_{11}	۳
\bar{c}_{12}	۳
\bar{c}_{13}	۱
\bar{c}_{33}	۳
\bar{c}_{44}	۱
H/a	۱

$$pp_i(\xi, z) = \bar{\Delta}_p^m \frac{d}{dz} e^{\lambda_i^p z}$$

$$u_z p_i(\xi, z) = \left(\alpha_2 \frac{d^2}{dz^2} + \frac{\rho \omega^2}{c_{66}} - \xi^2 (1 + \alpha_1) \right) e^{\lambda_i^p z}$$

$$u_r p_i = \alpha_3 \xi \frac{d}{dz} e^{\lambda_i^p z}$$

$$w_z p_i(\xi, z) = \frac{\bar{K}_z}{(i \omega)} \left(\rho_f \omega^2 \bar{\Delta}_z^m - \bar{\Delta}_p^m \frac{d^2}{dz^2} \right) e^{\lambda_i^p z}$$

$$(i = 1, 2, 3)$$

با تعیین ضرایب مجهول، توابع پتانسیل بردار تغییر مکان و تانسورهای تنش برای تک لایه ایزوتروپیک عرضی مورد نظر در فضای تبدیل یافته هنکل به سادگی مشخص می‌شوند و با استفاده از عکس هنکل، جواب‌ها در فضای فرکانسی حاصل می‌شوند؛ توجه شود که انتگرال‌هایی که از معکوس هنکل به دست می‌آیند، بصورت تحلیلی قابل حل نیستند و بایستی از روش‌های عددی محاسبه شوند.

۷- صحت سنجی و نتایج عددی

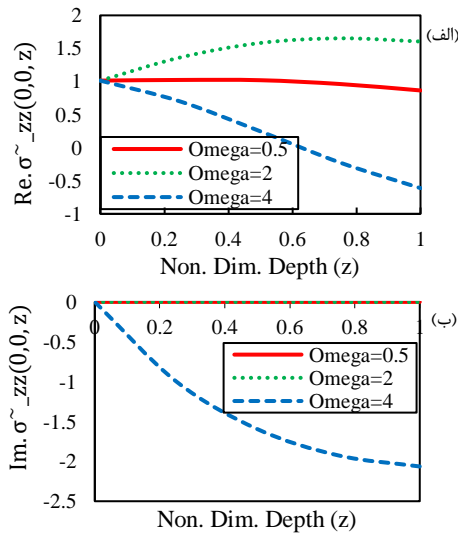
۷-۱- صحت سنجی

به منظور اعتبار سنجی، انتشار امواج در محیط نیمه بی نهایت متخلخل اشباع با رفتار ایزوتروپیک عرضی که توسط پولادی و همکاران [۱۲] مورد مطالعه قرار گرفته بود، در نظر گرفته شده است. مشخصات محیط مد نظر مطابق جداول ۱ و ۲ است.

شکل ۵ تغییر مکان قائم بی بعد در راستای محور z را نشان می‌دهد. با مشاهده در شکل ۵ ملاحظه می‌گردد که روش به کار گرفته شده برای تک لایه فوم ایزوتروپیک دارای صحت و دقت کافی برای تحلیل است.

جدول ۱- مشخصات مصالح مصرفی در صحنه گذاری [۱۲]

c_{11}	۳/۵
c_{12}	۱/۵
c_{13}	۱/۵
c_{33}	۳/۵
c_{44}	۱
ρ	۱
$\frac{H}{a}$	-



شکل ۷- (الف) قسمت حقیقی و (ب) قسمت موهومی تنش نرمالیزه شده σ_{zz} فوم با تخلخل 0.92، تحت بارگذاری Patch load برای فرکانس‌های تحریک مختلف

در هر دو شکل مشاهده می‌شود که در بخش‌های حقیقی (شکل ۶-الف و شکل ۷-الف) ماکزیمم جابجایی عمودی و تنش عمودی برای فرکانس تحریک بی‌بعد ۲ است. در بخش‌های موهومی (شکل ۶-ب و ۷-ب) مشاهده می‌شود که فرکانس‌های پایین، تنش و جابجایی عمودی صفر دارند. به عبارت دیگر زاویه فرکانس حاصل از نشر موج برای فرکانس‌های پایین صفر است و ماکزیمم توابع گرین تنش و تغییر مکان برای فرکانس‌های تحریک بی‌بعد بالا اتفاق می‌افتد. شکل‌های ۸ و ۹، تاثیر بارگذاری‌های مختلف بر روی فوم ایزوتروپیک با تخلخل مشخص را تحت فرکانس تحریک یکسان نشان می‌دهند.

شکل ۸-الف نشان می‌دهد که ماکزیمم جابجایی عمودی برای قسمت حقیقی در بازه ۰ تا ۰/۵ برای بارگذاری نقطه‌ای است که بیشترین جابجایی عمودی برای این بارگذاری است که روند آن کاملاً به صورت نزولی است و بعد از آن هر سه بارگذاری رفتار شبیه به هم‌دیگر را دارند. در حالیکه مطابق شکل ۸-ب، در قسمت موهومی مشاهده می‌شود که بیشترین جابجایی عمودی برای بارگذاری حلقوی است که روند آن به صورت نزولی است و مقادیر موهومی تنش عمودی برای هر سه بارگذاری، با افزایش ضخامت کاهش می‌یابند. به عبارت

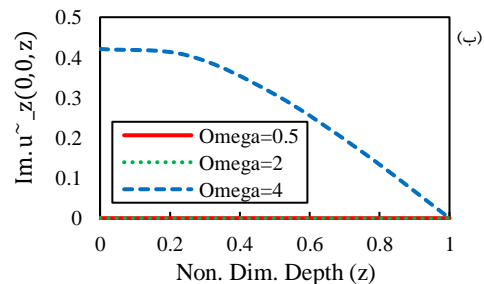
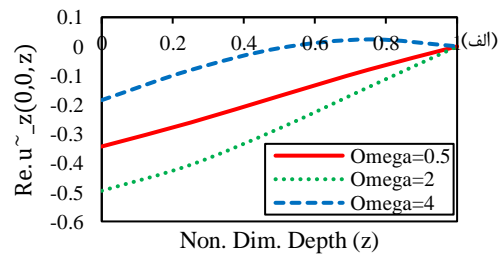
جدول ۴- ضرایب تخلخل فوم ایزوتروپیک [۱۹ و ۲۰]

PPI	۱۰	۲۰	۴۰
β	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۰۱
b	۴۱۰۹/۹	۵۱۵۹/۶	۱۰۶۵۹/۶
m	۱۱۴۱	۱۱۳۷/۹	۱۱۱۶/۷
φ	۰/۹۲	۰/۸۸	۰/۷۷۶
ρ_f	۱۰۰۰	۱۰۰۰	۱۰۰۰
ρ	۱۱۳۶	۱۲۰۴	۱۳۸۰/۸

$$\tilde{\rho}_f = \frac{\rho_f}{\rho_f}, \tilde{\rho} = \frac{\rho}{\rho_f}, \quad (16)$$

$$\tilde{m} = \frac{m}{\rho_f}, \tilde{b} = \frac{ba}{\sqrt{\rho_f c_{66}}} \quad (a = 1)$$

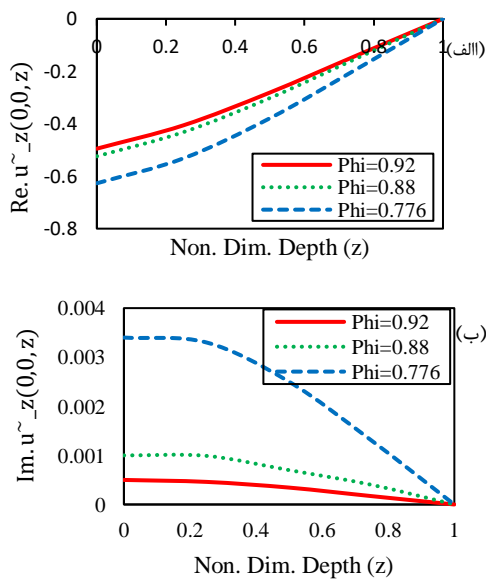
شکل‌های ۶ و ۷، تاثیر فرکانس‌های تحریک مختلف بر روی فوم ایزوتروپیک با تخلخل مشخص و تحت بارگذاری یکسان را نمایش می‌دهند؛ در این شکل‌ها قسمت‌های حقیقی و موهومی جابجایی و تنش در راستای عمودی برای فوم ایزوتروپیک در راستای ضخامت بی‌بعد را نشان می‌دهند.



شکل ۶- (الف) قسمت حقیقی و (ب) قسمت موهومی جابجایی نرمالیزه شده u_z فوم با تخلخل 0.92، تحت بارگذاری Patch load برای فرکانس‌های تحریک مختلف

در شکل ۹-الف، مشاهده می‌شود که بیشترین تنش عمودی برای قسمت حقیقی تا ضخامت بی بعد ۰/۵ مربوط به بارگذاری نقطه‌ای است و بعد از آن روند هر سه بارگذاری تقریباً یکسان است. در قسمت موهومی، با افزایش ضخامت، هر سه بارگذاری روند افزایشی پیدا می‌کنند و بیشترین زاویه فرکانس حاصل از نشر موج برای تنش عمودی، مربوط به بارگذاری حلقوی است.

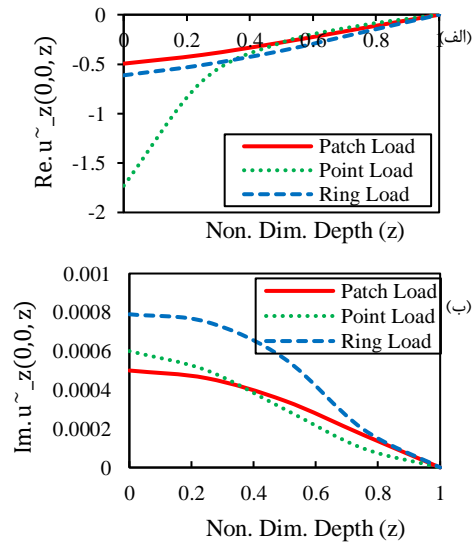
شکل‌های ۱۰ و ۱۱ تاثیر مقادیر تخلخل مختلف را برای فوم ایزوتروپیک تحت بارگذاری و فرکانس تحریک یکسان نشان می‌دهند. شکل ۱۰ تغییر مکان‌های عمودی را برای تخلخل‌های مختلف نشان می‌دهد. در بخش حقیقی با افزایش تخلخل، جابجایی‌های عمودی کاهش می‌یابند؛ هم‌چنین در بخش موهومی مشاهده می‌شود که کمترین جابجایی عمودی برای تخلخل‌های بزرگ اتفاق می‌افتد. از طرفی روند هر سه تخلخل به صورت کاملاً نزولی است که در انتها به عدد صفر می‌رسند و دلیل آن این است که فوم ایزوتروپیک در انتها اتصال صلب فرض شده است.



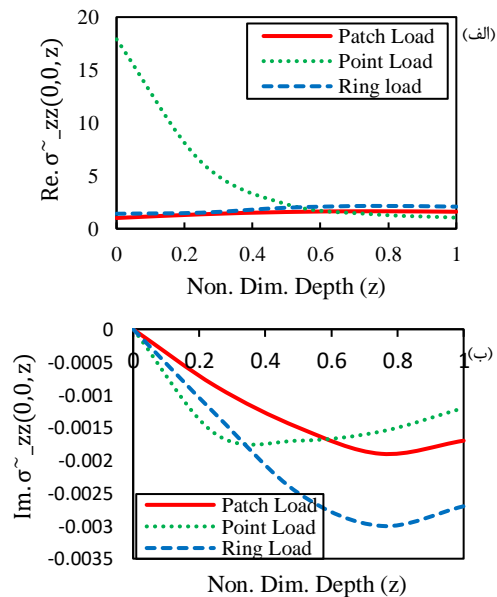
شکل ۱۰- (الف) قسمت حقیقی و (ب) قسمت موهومی جابجایی نرمالیزه شده u_z تحت بارگذاری Patch load و فرکانس تحریک بی بعد $\omega=2$ ، برای تخلخل‌های مختلف

در شکل ۱۱-الف مشاهده می‌شود که با افزایش تخلخل همواره تنش عمودی در بخش حقیقی، کاهش پیدا می‌کند؛

دیگر بیشترین زاویه فرکانس حاصل از نشر موج برای جابجایی در راستای عمودی، مربوط به بارگذاری حلقوی است.



شکل ۸- (الف) قسمت حقیقی و (ب) قسمت موهومی جابجایی نرمالیزه شده u_z فوم با تخلخل 0.92، تحت بارگذاری‌های مختلف



شکل ۹- (الف) قسمت حقیقی و (ب) قسمت موهومی تنش نرمالیزه شده σ_{zz} فوم با تخلخل 0.92، تحت فرکانس بی بعد $\omega=2$ ، برای بارگذاری‌های مختلف

از جمله تفاوت‌های یک محیط نیمه‌بینهایت متخلخل اشباع با محیط تک لایه متخلخل اشباع مانند فوم ایزوتروپیک در اصل تشعشع است؛ وجود تشعشع در محیط‌های نیمه بی‌نهایت باعث می‌شود، جملات e^{kz} در توابع پتانسیل حذف شوند.

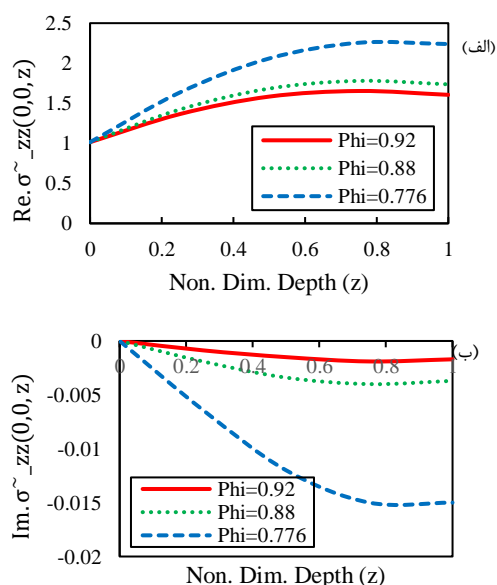
نتایج مهم حاصل از بررسی حاضر به قرار زیر است.

- در مقایسه فرکانس‌های تحریک مختلف مشاهده می‌شود که فرکانس تحریک بی‌بعد 2، بیشینه تنش و تغییر مکان را در بخش حقیقی توابع گرین دارد و فرکانس‌های بالاتر، ماکزیمم زاویه فرکانس حاصل از نشر موج را در توابع گرین دارا هستند.
- در مقایسه بارگذاری‌های مختلف بر روی سطح فوم این نتیجه حاصل شد که در بخش موهمی، بارگذاری حلقوی تنش و جابجایی عمودی بیشتری را ایجاد می‌کند و این بدین معنی است که بارگذاری حلقوی بیشترین زاویه فرکانس حاصل از نشر موج را در توابع گرین دارد و در بخش حقیقی بیشترین تنش عمودی و تغییر مکان در راستای عمودی، در سطح فوم ایزوتروپیک و برای بارگذاری نقطه‌ای می‌باشند.
- در مقایسه تخلخل‌های مختلف فوم این نتیجه حاصل شد که با کاهش تخلخل، توابع گرین تنش و جابجایی افزایش می‌یابند.

۹- مراجع

- [1] Eskandari-Ghadi M (2005) A complete solution of the wave equations for transversely isotropic media. J Elasticity 81(1): 1-19.
- [2] Biot MA (1956) Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid-Saturated Porous Solid. I. Low-Frequency Range. J Acoust Soc Am 28(2): 168-178.
- [3] Biot MA (1956) Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid-Saturated Porous Solid. II. Higher Frequency Range. J Acoust Soc Am 28(2): 179-191.
- [4] Biot MA (1962) Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media. J Appl Phys 33(4): 1482-1498.
- [5] Biot MA (1962) Generalized theory of acoustic propagation in porous dissipative media. J Acoust Soc Am 34(9A): 1254-1264.

هم‌چنین در بخش موهمی کمینه مقادیر تنش عمودی مربوط به تخلخل‌های بزرگ است و این بدین معنی است که بیشترین زاویه فرکانس حاصل از نشر موج برای تنش عمودی برای تخلخل‌های کم، اتفاق می‌افتد.



شکل ۱۱- (الف) قسمت حقیقی و (ب) موهمی تنش نرمالیزه شده σ_{zz} تحت بارگذاری Patch load و فرکانس تحریک بی‌بعد $\omega=2$ ، برای تخلخل‌های مختلف

۸- نتیجه‌گیری

در این تحقیق روش تحلیلی برای بدست آوردن توابع گرین انتشار امواج برای تک لایه فوم متخلخل با ضخامت محدود تحت بارگذاری هارمونیک بیان شده است. معادلات انتشار امواج برای چنین موادی به صورت معادلات دیفرانسیل پیچیده با مشتقات جزئی می‌باشند که با استفاده از دو تابع پتانسیل مجهول، این معادلات به دو معادله مجزا تبدیل می‌شوند و سپس با استفاده از سری فوریه در راستای محیطی و انتگرال هنکل در راستای شعاعی، معادلات حاکم به معادلات دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌شوند که به کمک شرایط مرزی حاکم بر مساله توابع پتانسیل محاسبه می‌شوند. کاربرد روابط موجود در مدل مد نظر می‌تواند برای بسط نرم افزارهای عددی و هم‌چنین یافتن روابط انتگرالی در روش المان مرزی به کار برده شوند.

- [13] Teymouri H, et al (2020) Wave propagation in a transversely isotropic porous ocean bottom. *Mar Georesources Geotechnol* 38(8): 923-938.
- [14] Mahmoodian M, Eskandari-Ghadi M, Nikkhoo A (2020) Rayleigh, Love and Stoneley waves in a transversely isotropic saturated poroelastic media by means of potential method. *Soil Dyn Earth Eng* 134: 106-139.
- [15] Cheng W, et al (2021) Effect of flow-independent viscosity on the propagation of Rayleigh wave in porous media. *Soil Dyn Earth Eng* 142: 106564.
- [16] Teymouri H, et al (2021) Rigid disc vibration in a multi-layered transversely isotropic poroelastic half-space underlying a liquid layer. *Appl Math Model* 95: 575-592.
- [17] Ye Z, Ai ZY (2021) Dynamic analysis of multilayered unsaturated poroelastic media subjected to a vertical time-harmonic load. *Appl Math Model* 90: 394-412.
- [18] Cheng A (2016) *Poroelasticity*. 1st edn.
- [19] Alomair M, Tasnim S (2018) Experimental Measurements of Permeability of Open Foam.
- [20] Veale PJ (2010) Investigation of the Behavior of Open Cell Aluminum Foam.
- [6] Frenkel J (2005) On the theory of seismic and seismoelectric phenomena in a moist soil. *J Eng Mech* 131(9): 879-887.
- [7] Kazi-Aoual MN, Bonnet G, Jouanna P (1988) Green's functions in an infinite transversely isotropic saturated poroelastic medium. *J Acoust Soc Am* 84(5): 1883-1889.
- [8] Sahebkar K, Eskandari-Ghadi M (2017) Displacement ring load Green's functions for saturated porous transversely isotropic tri-material full-space. *Int J Numer Anal Methods Geomech* 41(3): 359-381.
- [9] Manolis G, Beskos D (1989) Integral formulation and fundamental solutions of dynamic poroelasticity and thermoelasticity. *Acta Mecha* 76: 89-104.
- [10] Liang J, Wu M, Ba Z (2019) Three-dimensional dynamic Green's functions for transversely isotropic saturated half-space subjected to buried loads. *Eng Anal Bound Elem* 108: 301-320.
- [11] Ba Z, Liang J (2017) Fundamental solutions of a multi-layered transversely isotropic saturated half-space subjected to moving point forces and pore pressure. *Eng Anal Bound Elem* 76: 40-58.
- [12] Pooladi A, Rahimian M, Pak RYS (2017) Poroelastodynamic potential method for transversely isotropic fluid-saturated poroelastic media. *Appl Math Model* 50: 177-199.