



تحلیل ارتعاشات آزاد پنل‌های مخروطی مدرج تابعی تقویت شده با نانو صفحات گرافن با شرایط مرزی مختلف

مصطفی میرزائی^{۱*} و راضیه هاشمی^۲

^۱ دانشیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه قم، قم، ایران

^۲ کارشناس ارشد، گروه مهندسی عمران، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه قم، قم، ایران

مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۰۷/۱۷؛ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۰/۰۱/۱۲؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۲/۱۱

چکیده

در این پژوهش، رفتار ارتعاش آزاد پنل‌های مخروطی ناقص زمینه پلیمری تقویت شده با نانو صفحات گرافنی بررسی شده است. توزیع نانو صفحات گرافن در راستای ضخامت سازه به دو صورت یکنواخت و مدرج تابعی می‌باشد. همچنین خواص مکانیکی کامپوزیت با استفاده از مدل اصلاح شده هالپین-تسای و قانون مخلوط‌ها تخمین زده شده است. معادلات حاکم بر مبنای روابط کرنش-تغییر مکان خطی و تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول پوسته‌ها و با استفاده از اصل همیلتون استخراج شده است. در مرحله بعد، برای تعیین فرکانس‌های طبیعی سازه، معادلات حاکم به کمک روش ریتز و چندجمله‌ای‌های چیبیشف نوع اول گسسته سازی و حل شده است که برای سازه با شرایط مرزی مختلف مناسب است. مقایسه نتایج این پژوهش با سایر مقالات معتبر نشان می‌دهد که نتایج عددی از دقت بالایی برخوردار می‌باشد. همچنین مطالعات پارامتری با هدف بررسی تأثیر پارامترهای مختلف نظیر مقادیر کسر جرمی و الگوهای مختلف توزیع نانو صفحات گرافنی، شرایط مرزی مختلف، ابعاد و نسبت‌های هندسی پنل مخروطی کامپوزیتی بر پاسخ فرکانسی ارتعاش آزاد ارائه گردیده است. نتایج نشان می‌دهد که استفاده از نانو صفحات گرافنی به عنوان تقویت کننده سبب بهبود پاسخ ارتعاش آزاد پنل مخروطی می‌گردد.

کلمات کلیدی: ارتعاش آزاد؛ پنل مخروطی ناقص؛ نانو صفحات گرافنی؛ مدل اصلاح شده هالپین-تسای؛ چند جمله‌ای‌های چیبیشف.

Free Vibration Analysis of Functionally Graded Graphene Platelets – Reinforced Composite Conical Shell Panels with Different Boundary Conditions

M. Mirzaei^{1,*}, R. Hashemi²

¹ Associate Professor, Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, University of Qom, Qom, Iran.

² Master of Science, Department of civil Engineering, Faculty of Engineering, University of Qom, Qom, Iran.

Abstract

This paper analyses the free vibration behavior of truncated conical panels made of a polymeric matrix reinforced with graphene platelets (GPLs). The Distribution of GPLs across the thickness of the panel is considered uniform or functionally graded. The mechanical properties of the composite have been calculated using the modified Halpin-Tsai model and the rule of mixtures. Considering strain-displacement relationships as well as first-order shear deformation theory (FSDT) of shells, the governing equations have been derived using Hamilton principle. In the next step, to obtain the natural frequencies of the structure, the governing equations have been discretized and solved using Chebyshev polynomial of the first kind and Ritz method which is suitable for structures with different boundary conditions. A Comparison of the numerical results of this study with other articles shows that the numerical results are highly accurate. Also, parametric studies have been performed to investigate the effect of GPLs distribution patterns, GPLs weight fraction, different boundary conditions, different geometric parameters on the vibrational behavior of the conical panel. The results show that the use of GPLs as a reinforcement for the nanocomposite panel is effective to improve the vibrational behavior and greatly increases the stiffness and resistance of the panel.

Keywords: Free Vibration; Truncated Conical Panel; Graphene Platelets; Modified Halpin-Tsai Model; Chebyshev Polynomials.

۱- مقدمه

در سال‌های اخیر کاربرد سازه‌های مکانیکی نظیر ورق‌ها، پوسته‌ها و پل‌های نانوکامپوزیتی در ساخت تجهیزات مورد استفاده در صنایع مختلف نظیر خودروسازی، هواپیما سازی، هوافضا و پتروشیمی رواج یافته است [۱ و ۲]. در این میان استفاده از نانو صفحات گرافنی^۱، به عنوان تقویت کننده مواد پلیمری، با توجه به خواص مکانیکی و حرارتی منحصر به فرد آن‌ها گسترش یافته و متعاقباً مطالعه رفتار ارتعاشی و دینامیکی سازه‌های تشکیل شده از این مواد نیز مورد توجه محققان قرار گرفته است [۳ و ۴]. اولین بار سانگ و همکاران [۵] ارتعاش آزاد و اجباری خطی ورق‌های کامپوزیتی مدرج تابعی تقویت شده با نانو صفحات گرافنی^۲ را بررسی کردند. در این پژوهش، به منظور در نظر گرفتن اثر کرنش برشی عرضی در استخراج معادلات حرکت از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول^۳ استفاده شده است. همچنین نتایج آن محدود به ورق‌هایی با تکیه‌گاه ساده در تمامی لبه‌ها بوده و فرکانس‌های طبیعی و پاسخ دینامیکی ورق با استفاده از روش حل ناوبر به دست آمده است. برای بررسی تأثیر شرایط مرزی بر ارتعاش آزاد ورق‌های FG-GLRC، ردی و همکاران [۶] از روش اجزا محدود^۴ استفاده کردند. آن‌ها دریافتند که بیشترین فرکانس طبیعی مربوط به ورق کاملاً گیردار است. گوا و همکاران [۷] تأثیر GPLها را بر رفتار ارتعاش آزاد ورق‌های کامپوزیتی چهارضلعی با کمک روش ریتز مبتنی بر حداقل مربعات متحرک تعمیم یافته^۵ بررسی کردند. مزیت این پژوهش استفاده از روش حداقل مربعات متحرک در تولید مجموعه‌ای از توابع شکل متعامد است که تعداد ضرایب مجهول در توابع آزمایشی کاهش می‌دهد. غلامی و انصاری [۸ و ۹] ارتعاش آزاد و اجباری غیرخطی ورق‌های مستطیلی FG-GLRC را با استفاده از روش تغییرات مربعات دیفرانسیلی^۶ بررسی کردند. آنها دریافتند که افزایش

درصد جرمی GPLها باعث افزایش فرکانس‌های طبیعی ورق - های FG-GLRC می‌گردد.

گائو و همکاران [۱۰] با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی^۷ ارتعاش آزاد غیرخطی ورق‌های سوراخدار FG-GLRC مستقر بر بستر الاستیک را مورد مطالعه قرار دادند. به منظور بررسی اثر دما و بار محوری بر رفتار ارتعاشی ورق‌های حلقوی FG-GLRC وانگ و همکاران [۱۱] از تئوری برشی مرتبه بالاتر^۸ برای استخراج معادلات حاکم و از روش GDQ برای حل معادلات استفاده کردند. جوانی و همکاران [۱۲] ارتعاش آزاد غیرخطی ورق‌های دایروی FG-GLRC را با استفاده از روش مربعات دیفرانسیلی تعمیم یافته^۹ و الگوریتم کنترل تغییر مکان^{۱۰} بررسی کردند.

دانگ و همکاران [۱۳] تحلیل ارتعاش غیرخطی پوسته‌های استوانه‌ای دوار FG-GLRC تحت بار محوری را بر مبنای نظریه غیرخطی پوسته دانل^{۱۱} و اصل همیلتون^{۱۲} و همچنین با استفاده از روش گالرکین^{۱۳} مطالعه کردند. عیوضیان و همکاران [۱۴] ارتعاشات پوسته‌های استوانه‌ای ساندویچی با رویه‌ی نانو گرافنی تحت بار هارمونیک را بررسی کردند. صفرپور و همکاران [۱۵] با استفاده از تئوری الاستیسیته، ارتعاش آزاد دیسک‌ها و پوسته‌های استوانه‌ای و مخروطی FG-GLRC با شرایط مرزی مختلف را مطالعه کردند. آن‌ها دریافتند که افزایش چگالی GPLها در نزدیکی سطوح داخلی و بیرونی باعث بهبود پاسخ استاتیکی و ارتعاش آزاد سازه می‌گردد. یانگ و همکاران [۱۶] با استفاده از تئوری FSDT ارتعاش آزاد و اجباری غیرخطی پوسته‌های مخروطی ناقص GPLRC را با استفاده از روش تعادل هارمونیک^{۱۴} و سری فوریه^{۱۵} بررسی کردند. در پژوهشی دیگر، جمال آبادی و همکاران [۱۷] از روش تعادل هارمونیک، برای بررسی ارتعاش آزاد غیرخطی پل‌های مخروطی FG-GLRC مستقر بر بستر الاستیک استفاده کردند. انصاری و همکاران

⁷ Differential Quadrature Method (DQM)

⁸ Higher-Order Shear Deformable Plate

⁹ Generalized Differential Quadrature Method (GDQM)

¹⁰ Iterative Displacement Control Technique

¹¹ Donnell Shell Theory

¹² Hamilton's Principle

¹³ Galerkin Approach

¹⁴ Harmonic Balance Method

¹⁵ Fourier Series

¹ Graphene Platelet (GPL)

² Functionally Graded Graphene Platelets Reinforced Composite (FG-GLRC)

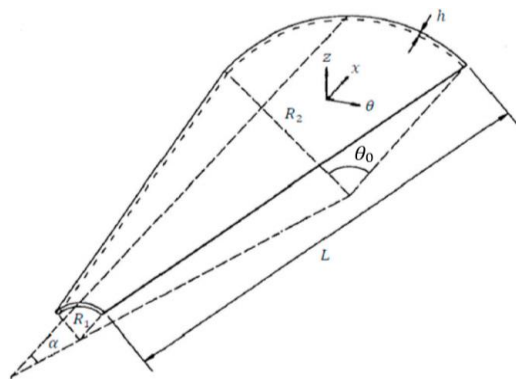
³ First order Shear Deformation Theory (FSDT)

⁴ Finite Elements

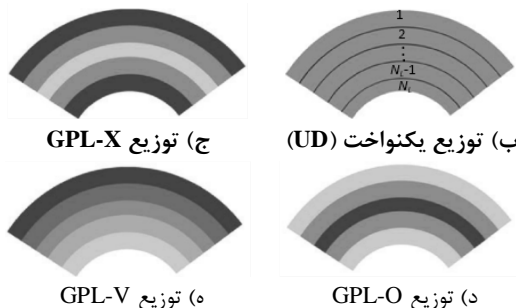
⁵ Improved Moving Least-Squares (IMLS)-Ritz

⁶ Variational Differential Quadrature Method (VDQM)

عمود بر سطح میانی، که مبدأ آن در مرکز سطح میانی قرار دارد، مفروض است. پنل به صورت چندلایه بوده و توزیع نانو صفحات گرافنی در راستای ضخامت به صورت یکنواخت (UD) و مدرج تابعی با نرخ توزیع خطی در نظر گرفته شده است. الگوهای مختلف توزیع GPLها که شامل UD، GPL-X، GPL-O و GPL-V می‌باشد، در شکل‌های ۱-ب تا ۱-ه نشان داده شده است.



(الف) مختصات و هندسه پنل مخروطی ناقص



شکل ۱- شماتیک هندسی و نحوه توزیع نانو صفحات گرافنی در پنل نانوکامپوزیتی مخروطی ناقص

جدول ۱- مقادیر کسر حجمی نانو صفحات گرافنی لایه k ام به ازای الگوهای مختلف GPLs [۱۷]

الگوی توزیع GPLها	V_{GPL}^k
UD	V_{GPL}^*
GPL-x	$2V_{GPL}^* \frac{ 2k - N_L - 1 }{N_L}$
GPL-O	$2V_{GPL}^* \left(1 - \frac{ 2k - N_L - 1 }{N_L}\right)$
GPL-v	$V_{GPL}^* \frac{(2k - 1)}{N_L}$

[۱۸ و ۱۹] با ترکیب روش‌های VDQ و روش اجزا محدود، ایده جدیدی برای حل عددی ارتعاش آزاد غیرخطی پنل‌های استوانه‌ای و مخروطی FG-GPLRC سوراخدار با شرایط مرزی مختلف ارائه کردند. آن‌ها دریافتند که با افزایش کسر جرمی GPLها و افزایش نسبت ضخامت به شعاع پنل، فرکانس طبیعی سازه افزایش می‌یابد.

با مروری بر مقالات بررسی شده مشاهده می‌شود که کارهای انجام شده در زمینه ارتعاشات پنل‌های مخروطی FG-GPLRC اندک بوده و در این تعداد معدود نیز روش حل شامل روش‌های پیچیده و زمانبر می‌باشد. در حالیکه در این مقاله، از روش ریتز برای بررسی رفتار ارتعاش آزاد سازه مورد نظر استفاده شده است که برای انواع شرایط مرزی مناسب است. مزیت این روش سادگی و صرفه‌جویی در هزینه و زمان محاسبات است. دقت این روش بستگی به تعداد جملات توابع شکل دارد که در پژوهش فوق چندجمله‌ای‌های چبیشف^{۱۶} به عنوان توابع شکل در نظر گرفته شده است. برای این منظور، معادلات حاکم با استفاده از تئوری برشی مرتبه اول پوسته‌ها و اصل همپلتون استخراج و با کمک روش ریتز گسسته‌سازی شده است و در نهایت فرکانس طبیعی سازه به کمک مقادیر ویژه خطی تعیین شده است. همچنین خواص ماده به دلیل استفاده از نانو صفحات گرافنی بعنوان تقویت کننده، به کمک مدل اصلاح شده هالپین-تسای و قانون مخلوط‌ها محاسبه شده است. تأثیر کسر جرمی و الگوهای مختلف توزیع نانو صفحات گرافنی، ابعاد هندسی سازه و شرایط مرزی مختلف بر رفتار ارتعاشی پنل‌ها نیز بررسی شده است.

۲- مدل هندسی و خواص مکانیکی

مطابق شکل ۱-الف پنل مخروطی ناقص با شعاع‌های انتهایی $R_1 < R_2$ ، ضخامت h ، طول L ، زاویه نیم رأس α و زاویه مرکزی دهانه θ_0 ، را در نظر بگیرید که از پلیمر تقویت شده با نانو صفحات گرافنی ساخته شده است. دستگاه مختصات (x, θ, z) با محور x در راستای نصف النهاری و محورهای θ و z به ترتیب در راستای مداری و

¹⁶ Chebyshev Polynomials

۳- معادلات حاکم

با توجه به تئوری تغییر شکل FSDT، مؤلفه‌های تغییر مکان در هر نقطه دلخواه از پل در راستای x ، θ و z (u, v, w) را می‌توان به صورت روابط زیر بیان کرد [۲۴-۲۷]:

$$\begin{aligned} u(x, z, \theta, t) &= u_0(x, \theta, t) + z\varphi_x(x, \theta, t) \\ v(x, z, \theta, t) &= v_0(x, \theta, t) + z\varphi_\theta(x, \theta, t) \\ w(x, z, \theta, t) &= w_0(x, \theta, t) \end{aligned} \quad (۵)$$

در روابط (۵) اندیس صفر نشان‌دهنده مؤلفه‌های تغییر مکان سطح میانی است. φ_x و φ_θ نیز به ترتیب بیانگر چرخش سطح میانی حول محورهای x و θ است؛ همچنین مطابق تئوری تغییر شکل FSDT، مؤلفه‌های کرنش درون صفحه‌ای به صورت خطی تابعی از ضخامت و کرنش‌های برشی خارج از صفحه به صورت زیر تعریف می‌شوند [۲۵-۲۸]:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \gamma_{x\theta} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{\theta z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{\theta\theta}^0 \\ \gamma_{x\theta}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \\ \gamma_{\theta z}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{\theta\theta} \\ \kappa_{x\theta} \\ \kappa_{xz} \\ \kappa_{\theta z} \end{Bmatrix} \quad (۶)$$

در رابطه (۶) مؤلفه‌های کرنش سطح میانی و انحنای برابر است با [۲۵-۲۸]:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{\theta\theta}^0 \\ \gamma_{x\theta}^0 \\ \gamma_{xz}^0 \\ \gamma_{\theta z}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{v_{0,x}}{r(x)} + \frac{\cos(\alpha)}{r(x)} w_0 + \frac{\sin(\alpha)}{r(x)} u_0 \\ \frac{u_{0,\theta}}{r(x)} + v_{0,\theta} - \frac{\sin(\alpha)}{r(x)} v_0 \\ w_{0,x} + \varphi_x \\ \frac{w_{0,\theta}}{r(x)} - \frac{\cos(\alpha)}{r(x)} v_0 + \varphi_\theta \\ \varphi_{x,x} \end{Bmatrix} \quad (۷)$$

$$\begin{Bmatrix} \kappa_{xx} \\ \kappa_{\theta\theta} \\ \kappa_{x\theta} \\ \kappa_{xz} \\ \kappa_{\theta z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\varphi_{\theta,\theta}}{r(x)} + \frac{\sin(\alpha)}{r(x)} \varphi_x \\ \frac{\varphi_{x,\theta}}{r(x)} + \varphi_{\theta,x} - \frac{\sin(\alpha)}{r(x)} \varphi_\theta \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

همچنین $r(x) = R_1 + x \sin(\alpha)$ است و بیانگر شعاع انحنا در راستای نصف النهاری است؛ همچنین $(\cdot)_{,x}$ و $(\cdot)_{,\theta}$ به ترتیب بیانگر مشتقات تابع نسبت به x و θ است.

برای مواد الاستیک خطی در غیاب تنش نرمال σ_{zz} می‌توان روابط ساختاری را مطابق روابط (۸) نوشت [۲۹] و [۳۰]:

همانطور که مشاهده می‌شود، با تیره تر شدن رنگ لایه‌ها، چگالی GPLها در زمینه افزایش می‌یابد؛ به نحوی که در الگوی GPL-X سطوح بالا و پایین بیشترین کسر جرمی را دارند. برعکس در الگوی GPL-O، بیشترین کسر جرمی نانو صفحات گرافنی در سطح میانی پل توزیع شده است. در توزیع GPL-V نیز بیشترین کسر جرمی نانو صفحات گرافنی در سطح بالای پل توزیع شده و سطح پایین زمینه بدون تقویت کننده است [۲۰ و ۲۱].

مقدار کسر حجمی نانو صفحات گرافنی لایه k ام پل مخروطی ناقص یا V_{GPL}^k به ازای الگوهای مختلف توزیع مطابق جدول (۱) به دست می‌آید، که مقدار V_{GPL}^* برابر است با:

$$V_{GPL}^* = \frac{W_{GPL}}{W_{GPL} + (\rho_{GPL}/\rho_m)(1 - W_{GPL})} \quad (۱)$$

بر اساس قوانین اصلاح شده هالپین-تسای، مدول الاستیسیته لایه k ام پل برابر است با [۲۲ و ۲۳]:

$$E^k = \frac{E_m}{8} \left(\frac{3(1 + \xi_L \eta_L V_{GPL}^k)}{1 - \eta_L V_{GPL}^k} + \frac{5(1 + \xi_T \eta_T V_{GPL}^k)}{1 - \eta_T V_{GPL}^k} \right) \quad (۲)$$

که E مدول الاستیسیته و اندیس m و GPL به ترتیب بیانگر ماده زمینه و نانو صفحات گرافنی است. در رابطه فوق مقادیر ξ_T ، η_L ، η_T و ξ_L مطابق روابط (۳) به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \eta_L &= \frac{(E_{GPL}/E_m) - 1}{(E_{GPL}/E_m) + \xi_L} \\ \eta_T &= \frac{(E_{GPL}/E_m) - 1}{(E_{GPL}/E_m) + \xi_T} \\ \xi_L &= 2 \left(\frac{a_{GPL}}{t_{GPL}} \right) \\ \xi_T &= 2 \left(\frac{b_{GPL}}{t_{GPL}} \right) \end{aligned} \quad (۳)$$

که a_{GPL} ، b_{GPL} و t_{GPL} به ترتیب طول، عرض و ضخامت نانو صفحات گرافنی می‌باشند. بر اساس قانون مخلوط‌ها، نسبت پواسون ν و چگالی ρ لایه k ام طبق روابط زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} \rho^k &= \rho_{GPL} V_{GPL}^k + \rho_{GPL}(1 - V_{GPL}^k) \\ \nu^k &= \nu_{GPL} V_{GPL}^k + \nu_m(1 - V_{GPL}^k) \end{aligned} \quad (۴)$$

(۱۲)

با جایگذاری روابط (۱۱) و (۱۲) در رابطه (۱۰) می‌توان معادلات دیفرانسیلی حاکم بر مسئله را با در نظر گرفتن شرایط مرزی مختلف به‌دست آورد که برای گسسته سازی معادلات حاکم از روش ریتز استفاده می‌شود.

۴- گسسته سازی و حل معادلات

در روش ریتز، انتخاب مناسب توابع شکل، مسئله‌ای مهم و حساس است، زیرا عدم انتخاب صحیح توابع شکل منجر به عدم همگرایی و یا خطا در محاسبات خواهد شد. در این پژوهش، به منظور همگرایی سریع نتایج از چند جمله‌ای‌های چبیشف نوع اول به عنوان توابع شکل استفاده شده است. هریک از متغیرهای اصلی براساس توابع شکل چبیشف به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned}
 u_0(x, \theta, t) &= R^u(x, \theta) \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_\theta} U_{ij}(t) q_i(x) q_j(\theta) \\
 v_0(x, \theta, t) &= R^v(x, \theta) \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_\theta} V_{ij}(t) q_i(x) q_j(\theta) \\
 w_0(x, \theta, t) &= R^w(x, \theta) \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_\theta} W_{ij}(t) q_i(x) q_j(\theta) \\
 \varphi_x(x, \theta, t) &= R^x(x, \theta) \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_\theta} X_{ij}(t) q_i(x) q_j(\theta) \\
 \varphi_\theta(x, \theta, t) &= R^\theta(x, \theta) \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_\theta} \Theta_{ij}(t) q_i(x) q_j(\theta)
 \end{aligned}
 \tag{۱۳}$$

که $q_i(x)$ و $q_j(\theta)$ به ترتیب i -امین و j -امین چندجمله‌ای‌های چبیشف نوع اول است که به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned}
 q_i(x) &= \cos\left((i-1) \arccos\left(\frac{2x}{L}\right)\right) \\
 q_j(\theta) &= \cos\left((j-1) \arccos\left(\frac{2\theta}{\theta_0}\right)\right)
 \end{aligned}
 \tag{۱۴}$$

همچنین N_x و N_θ نیز تعداد جملات می‌باشند که با افزایش مقادیر آن‌ها دقت متغیرهای اصلی بهبود خواهد یافت. از طرفی دیگر $R^\beta(x, \theta)$ $\beta = u, v, w, x, \theta$ توابع کمکی هستند که باتوجه به شرایط مرزی تعریف می‌شوند و برابر است با:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \tau_{x\theta} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{\theta\theta} \\ \gamma_{x\theta} \end{bmatrix} \\
 \begin{bmatrix} \tau_{\theta z} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} Q_{44} & Q_{45} \\ Q_{45} & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{\theta z} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{۸}$$

در روابط (۸) Q_{ij} $i, j = 1, 2, 4, 5, 6$ ثابت سفتی می‌باشند که برای لایه k ام برابر است با:

$$\begin{aligned}
 Q_{11}^k &= Q_{22}^k = \frac{E^k}{1 - (v^k)^2} \\
 Q_{12}^k &= \frac{v^k E^k}{1 - (v^k)^2} \\
 Q_{44}^k &= Q_{55}^k = Q_{66}^k = \frac{E^k}{2(1 + v^k)} \\
 Q_{16}^k &= Q_{26}^k = Q_{45}^k = 0
 \end{aligned}
 \tag{۹}$$

برای به‌دست آوردن معادلات حاکم از اصل همپلتون استفاده شده است که به صورت رابطه (۱۰) تعریف می‌شود [۲۹-۳۱]:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(U - T) dt = 0$$

$t = t_1, t_2$:

$$\delta u_0 = \delta v_0 = \delta w_0 = \delta \varphi_x = \delta \varphi_y = 0
 \tag{۱۰}$$

در رابطه (۱۰)، تغییرات انرژی کرنشی سازه است که مقادیر آن برابر است با [۲۹-۳۱]:

$$\begin{aligned}
 \delta U &= \sum_{k=1}^{N_L} \int_{-0.5L}^{+0.5L} \int_{-0.5\theta_0}^{+0.5\theta_0} \int_{Z_k}^{Z_{k+1}} (\sigma_{xx}^k \delta \varepsilon_{xx} \\
 &\quad + \sigma_{xx}^k \delta \varepsilon_{xx} + \tau_{x\theta}^k \delta \gamma_{x\theta} + \kappa \sigma_{xz}^k \delta \varepsilon_{xz} \\
 &\quad + \sigma_{\theta z}^k \delta \varepsilon_{\theta z}) r(x) dz d\theta dx
 \end{aligned}
 \tag{۱۱}$$

در رابطه (۱۱) مقدار ضریب تصحیح برشی براساس تئوری مرتبه اول برشی است و مقادیر آن به شرایط مرزی، خواص ماده، هندسه و نوع بارگذاری سازه بستگی دارد. در این پژوهش مقدار $\kappa = 5/(6 - v_{12})$ در نظر گرفته شده است [۲۹-۳۳]. همچنین δT تغییرات انرژی جنبشی سازه می‌باشد که از رابطه (۱۲) به‌دست می‌آید [۳۳]:

$$\begin{aligned}
 \delta T &= \sum_{k=1}^{N_L} \int_{-0.5L}^{+0.5L} \int_{-0.5\theta_0}^{+0.5\theta_0} \int_{Z_k}^{Z_{k+1}} \rho^k(z) (\dot{u} \delta \dot{u} \\
 &\quad + \dot{v} \delta \dot{v} + \dot{w} \delta \dot{w}) r(x) dz d\theta dx
 \end{aligned}$$

در نهایت با جایگذاری روابط (۱۳) در رابطه (۱۰) معادلات حرکت ارتعاش آزاد به فرم زیر تبدیل می‌شود:

$$M\ddot{X} + KX = 0 \quad (23)$$

که M ماتریس جرم و K ماتریس سختی است. از طرفی X بردار تغییر مکان است که شامل مؤلفه‌های $X_{ij}, W_{ij}, V_{ij}, U_{ij}$ و θ_{ij} است. برای ارتعاش آزاد پل مخروطی ناقص با فرض $X = \bar{X} \sin(\omega t + \alpha)$ به رابطه (۲۳) تبدیل خواهد شد.

$$(K - \omega^2 M)\bar{X} = 0 \quad (24)$$

رابطه (۲۴)، یک مسئله مقادیر ویژه استاندارد است و فرکانس‌های ارتعاشی سازه (ω) با استفاده از این رابطه به دست می‌آید.

۵- نتایج عددی و بحث

در این بخش پاسخ ارتعاشی پل‌های مخروطی ناقص FG-GPLRC که معادلات حاکم آن در بخش قبل استخراج گردید، ارائه می‌گردد. پل مورد نظر زمینه پلیمری دارد و توسط GPLها تقویت شده است. خواص ماده پلیمری شامل $E_m = 3$ (Gpa)، $\nu_m = 0.34$ و $\rho_m = 1/2$ (g/cm³) و خواص GPLها نیز برابر $E_{GPL} = 101$ (Tpa)، $\nu_{GPL} = 0.2$ و $\rho_{GPL} = 1/0.6$ (g/cm³) است؛ همچنین ابعاد GPLها برابر است با $a_{GPL} = 2/5$ (nm)، $b_{GPL} = 1/5$ (nm) و $t_{GPL} = 1/5$ (nm) [۱۸ و ۱۹].

۵-۱- همگرایی و صحت سنجی

به منظور بررسی همگرایی، پاسخ ارتعاشی پل مخروطی FG-GPLRC با تکیه‌گاه ساده در تمامی لبه‌ها به ازای تعداد جملات مختلف در جدول (۲) آورده شده است. همانطور که دیده می‌شود، با در نظر گرفتن $(N_x^\alpha, N_\theta^\alpha) = (15, 15)$ همگرایی خوبی برای پنج پارامتر فرکانسی اول ایجاد شده است. لازم به ذکر است در بررسی همگرایی، مشخصات پل شامل $R_1/h = 4$ ، $L/R_1 = 20$ ، $\theta_0 = 120^\circ$ و $\alpha = 60^\circ$ است؛ همچنین الگوی توزیع از نوع GPL-X، کسر جرمی $w_{GPL} = 0.5\%$ و تعداد لایه‌ها $N_L = 10$ در نظر گرفته شده است.

$$R^\beta(x, \theta) =$$

$$\left(1 + \frac{2x}{L}\right)^p \left(1 - \frac{2x}{L}\right)^q \left(1 + \frac{2\theta}{\theta_0}\right)^r \left(1 - \frac{2\theta}{\theta_0}\right)^s \quad (15)$$

در رابطه (۱۵)، هر یک از متغیرهای p, q, r, s با توجه به نوع شرایط مرزی می‌توانند مقدار صفر یا یک را داشته باشند. در این پژوهش سه شرایط مرزی تکیه‌گاهی مختلف فرض شده است که شامل تکیه‌گاه گیردار (C)، تکیه‌گاه ساده (S) و تکیه‌گاه آزاد (F) است. هر یک از شرایط مرزی فوق به صورت زیر بیان می‌شود:

$$x = \pm \frac{L}{2}: u_0 = v_0 = w_0 = \varphi_x = \varphi_\theta = 0 \quad (16)$$

$$\theta = \pm \frac{\theta_0}{2}: u_0 = v_0 = w_0 = \varphi_x = \varphi_\theta = 0 \quad (17)$$

تکیه‌گاه گیردار (C):

تکیه‌گاه ساده (S):

$$x = \pm \frac{L}{2}: u_0 = v_0 = w_0 = \varphi_\theta = 0 \quad (18)$$

$$\theta = \pm \frac{\theta_0}{2}: u_0 = v_0 = w_0 = \varphi_x = 0 \quad (19)$$

تکیه‌گاه آزاد (F):

$$x = \pm \frac{L}{2}: - \quad (20)$$

$$\theta = \pm \frac{\theta_0}{2}: - \quad (21)$$

هریک از توابع کمکی $\beta = u, v, w, x, \theta$ باید براساس شرایط مرزی ضروری و روابط (۱۶-۲۱) انتخاب شوند. برای مثال برای پل CFSC حرف اول (C) بیانگر شرایط مرزی گیردار در لبه $x = -0.5L$ ، حرف دوم (F) بیانگر تکیه‌گاه آزاد در لبه $\theta = -0.5\theta_0$ ، حرف سوم (S) بیانگر شرایط مرزی ساده در لبه $x = +0.5L$ و در نهایت حرف چهارم (C) بیانگر تکیه‌گاه گیردار در لبه $\theta = +0.5\theta_0$ است و توابع کمکی آن‌ها به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$R^u(x, \theta) = \left(1 + \frac{2x}{L}\right) \left(1 - \frac{2x}{L}\right) \left(1 - \frac{2\theta}{\theta_0}\right)$$

$$R^v(x, \theta) = \left(1 + \frac{2x}{L}\right) \left(1 - \frac{2x}{L}\right) \left(1 - \frac{2\theta}{\theta_0}\right)$$

$$R^w(x, \theta) = \left(1 + \frac{2x}{L}\right) \left(1 - \frac{2x}{L}\right) \left(1 - \frac{2\theta}{\theta_0}\right)$$

$$R^x(x, \theta) = \left(1 + \frac{2x}{L}\right) \left(1 - \frac{2x}{L}\right) \left(1 - \frac{2\theta}{\theta_0}\right)$$

$$R^\theta(x, \theta) = \left(1 + \frac{2x}{L}\right) \left(1 - \frac{2x}{L}\right) \quad (22)$$

جدول ۴- هشت پارامتر فرکانسی اول

$$\hat{\omega} = \omega a^2 (2\pi h) \sqrt{\rho/E}$$

[۳۳]	[۳۲]	[۲۷]	حاضر	منبع	α°
۹/۸۵۵۴	۹/۸۹۱۱	۹/۷۸۲۹	۹/۸۸۶۳	$\hat{\omega}_1$	۱۵
۱۰/۲۸۱۳	۱۰/۳۹۳۸	۱۰/۳۱۹۶	۱۰/۳۹۰۶	$\hat{\omega}_2$	
۱۴/۰۸۸۴	۱۴/۱۱۲۴	۱۳/۹۴۳۰	۱۴/۱۰۵۴	$\hat{\omega}_3$	
۱۴/۷۳۸۲	۱۴/۷۶۳۰	۱۴/۶۲۱۰	۱۴/۷۵۷۰	$\hat{\omega}_4$	
۱۷/۱۷۵۰	۱۷/۱۰۸۶	۱۶/۹۳۹۰	۱۷/۱۰۱۴	$\hat{\omega}_5$	
۷/۲۷۸۲	۷/۳۹۲۹	۷/۳۲۶۸	۷/۳۹۰۳	$\hat{\omega}_1$	۳۰
۷/۷۹۸۷	۷/۸۹۳۷	۷/۸۱۰۵	۷/۸۹۰۵	$\hat{\omega}_2$	
۱۰/۳۸۵۳	۱۰/۵۷۶۷	۱۰/۴۸۹۰	۱۰/۵۷۳۴	$\hat{\omega}_3$	
۱۰/۹۰۴۷	۱۰/۸۹۳۲	۱۰/۷۳۳۱	۱۰/۸۸۷۶	$\hat{\omega}_4$	
۱۲/۲۲۹۳	۱۲/۲۵۷۶	۱۲/۱۵۱۴	۱۲/۲۵۳۷	$\hat{\omega}_5$	
۵/۷۴۳۵	۵/۸۷۶۲	۵/۸۲۶۶	۵/۸۷۴۴	$\hat{\omega}_1$	۴۵
۶/۰۲۷۷	۶/۱۲۴۷	۶/۰۵۹۳	۶/۱۲۲۲	$\hat{\omega}_2$	
۸/۰۵۰۱	۸/۱۴۲۶	۸/۰۱۶۳	۸/۱۳۸۶	$\hat{\omega}_3$	
۸/۱۳۵۸	۸/۲۴۰۰	۸/۱۶۶۴	۸/۲۳۷۵	$\hat{\omega}_4$	
۹/۶۴۰۹	۹/۷۰۵۰	۹/۶۲۵۹	۹/۷۰۱۹	$\hat{\omega}_5$	
۴/۴۲۹۵	۴/۵۴۲۳	۴/۵۰۳۴	۴/۵۴۰۹	$\hat{\omega}_1$	۶۰
۴/۶۵۵۲	۴/۷۵۳۶	۴/۷۰۷۴	۴/۷۵۱۸	$\hat{\omega}_2$	
۶/۰۰۳۲	۶/۱۱۶۷	۶/۰۶۴۸	۶/۱۱۶۷	$\hat{\omega}_3$	
۶/۴۱۰۴	۶/۴۲۴۴	۶/۳۲۶۸	۶/۴۲۱۳	$\hat{\omega}_4$	
۷/۵۴۰۰	۷/۵۸۷۴	۷/۵۲۲۴	۷/۵۸۴۸	$\hat{\omega}_5$	

است. اکبری و همکاران [۲۸] با استفاده از روش GDQ به نتایج فوق دست یافتند. کیانی و همکاران [۳۲] نیز با استفاده از روش ریتز نتایج فوق را گزارش کردند. همانطور که در جدول ۳ دیده می‌شود، نتایج از دقت خوبی برخوردار است. شایان ذکر است که وقتی کسر جرمی نانو صفحات گرافنی

به منظور صحت سنجی نتایج، نتایج پژوهش فوق با نتایج روش‌های عددی دیگر مقالات معتبر مقایسه شده است.

در جدول ۳ پنج پارامتر فرکانسی اول $\hat{\omega} = \omega a^2 h \sqrt{\rho/E}$ پنل همسانگرد مخروطی ناقص با شرایط مرزی مختلف و با مشخصات هندسی $L/R_1=4$ ، $R_1/h=20$ ، $\theta_0=120^\circ$ و $\alpha=45^\circ$ با نتایج مقالات اکبری و همکاران [۲۸]، کیانی و همکاران [۳۲] و شانگ و همکاران [۳۳] صحت سنجی شده

جدول ۲- همگرایی پنج پارامتر فرکانسی اول

$$\hat{\omega} = \omega a^2 / 2\pi h \sqrt{\rho_m/E_m}$$

$\hat{\omega}_5$	$\hat{\omega}_4$	$\hat{\omega}_3$	$\hat{\omega}_2$	$\hat{\omega}_1$	(N_x^g, N_θ^g)
۱۰/۹۰	۹/۶۲	۸/۱۶	۶/۱۵	۵/۹۹	(۸,۸)
۹/۹۳	۹/۶۲	۷/۵۸	۶/۱۵	۵/۹۸	(۱۰,۱۰)
۹/۹۰	۹/۶۲	۷/۵۶	۶/۱۵	۵/۹۸	(۱۲,۱۲)
۹/۸۹	۹/۶۱	۷/۵۵	۶/۱۵	۵/۹۸	(۱۴,۱۴)
۹/۸۹	۹/۶۱	۷/۵۵	۶/۱۵	۵/۹۸	(۱۵,۱۵)

جدول ۳- پنج پارامتر فرکانسی اول $\hat{\omega} = \omega a^2 h \sqrt{\rho/E}$ پنل همسانگرد

BC	منبع	حاضر	[۲۸]	[۳۲]	[۳۳]
SSSS	$\hat{\omega}_1$	۲۵/۴۵۵۱	۲۵/۴۵۹۸	۲۵/۶۰۴۴	۲۵/۶۰۴۴
	$\hat{\omega}_2$	۲۵/۶۳۱۹	۲۸/۶۴۰۰	۲۸/۱۹۳۰	۲۸/۱۹۳۰
	$\hat{\omega}_3$	۳۱/۴۸۸۸	۳۱/۴۹۴۶	۳۱/۳۳۵۰	۳۱/۳۳۵۰
	$\hat{\omega}_4$	۴۰/۶۰۸۳	۴۰/۷۰۰۵	۴۰/۲۵۵۶	۴۰/۲۵۵۶
	$\hat{\omega}_5$	۵۰/۶۷۲۰	۵۰/۶۸۵۹	۴۹/۲۱۱۷	۴۹/۲۱۱۷
CSCS	$\hat{\omega}_1$	۳۱/۰۳۰۴	۳۰/۹۷۸۴	۳۱/۰۴۲۱	۳۰/۱۲۹۲
	$\hat{\omega}_2$	۳۵/۸۹۰۹	۳۵/۵۷۰۴	۳۵/۹۰۳۳	۳۴/۸۳۸۷
	$\hat{\omega}_3$	۲۶/۱۰۲۴	۲۶/۴۴۹۲	۲۶/۱۲۰۷	۳۵/۱۵۵۸
	$\hat{\omega}_4$	۴۵/۰۴۸۱	۴۵/۱۴۳۸	۴۴/۲۹۰۴	۴۴/۲۹۰۴
	$\hat{\omega}_5$	۵۴/۲۵۹۴	۵۴/۲۸۱۷	۵۳/۳۷۶۳	۵۳/۳۷۶۳

جدول ۶- فرکانس پایه $\hat{\omega} = \omega a^2 / h \sqrt{\rho/E}$ پل مخروطی ناقص تقویت شده با نانو صفحات گرافن

$R_2/R_1=4$		$R_2/R_1=2$		منبع	شرایط مرزی
$\theta_0=180^\circ$	$\theta_0=90^\circ$	$\theta_0=180^\circ$	$\theta_0=90^\circ$		
۲/۸۰۹	۳/۶۰۵	۱۰/۵۵۷	۱۱/۵۹۴	حاضر	CCCC
۲/۸۱۳	۳/۶۰۹	۱۰/۵۶۵	۱۱/۶۰۵	[۱۷]	
۲/۶۰۱	۳/۱۶۱	۸/۸۷۸	۹/۹۹۰	حاضر	CCSS
۲/۶۰۵	۳/۱۶۵	۸/۸۸۹	۹/۹۹۸	[۱۷]	
۲/۷۵۹	۳/۳۷۷	۹/۵۴۰	۱۰/۷۵۲	حاضر	SSCC
۲/۷۶۳	۳/۳۸۱	۹/۵۵۲	۱۰/۷۶۰	[۱۷]	
۲/۶۱۲	۳/۳۵۰	۸/۳۰۳	۹/۵۷۹	حاضر	SCSC
۲/۶۱۷	۳/۳۵۳	۸/۳۱۴	۹/۵۸۶	[۱۷]	
۲/۷۵۶	۳/۲۲۴	۱۰/۴۴۳	۱۱/۵۴۱	حاضر	CSCS
۲/۷۵۷	۳/۲۲۷	۱۰/۴۵۶	۱۱/۵۵۱	[۱۷]	
۲/۵۵۰	۳/۰۲۰	۸/۱۶۳	۹/۵۳۱	حاضر	SSSS
۲/۵۵۱	۳/۰۲۳	۸/۱۷۳	۹/۵۲۵	[۱۷]	

۵-۲- مطالعات پارامتری

بعد از صحت سنجی نتایج، به منظور بررسی تأثیر شرایط مرزی مختلف، کسر جرمی و الگوهای توزیع نانو صفحات گرافنی و ابعاد هندسی بر رفتار ارتعاشی پل مطالعات پارامتری ارائه می‌شود. در تمامی نتایج زیر پارامتر فرکانسی به صورت فرکانس طبیعی بی بعد $\hat{\omega} = \omega L^2 / h \sqrt{\rho_m/E_m}$ تعریف می‌شود.

در جداول ۷ تا ۱۲، هشت پارامتر فرکانسی اول پل‌های مخروطی FG-GPLRC به ترتیب به ازای شرایط مرزی SSSS، CCSC، CFCF و SFSF آورده شده است. ابعاد هندسی پل‌ها شامل نسبت $L/R_1 = 4$ ، $R_2/h = 20$ ، $\theta_0 = 120^\circ$ و $\alpha = 45^\circ$ است. در تمامی جداول ۷ تا ۱۲ سه کسر جرمی مختلف از GPLها و چهار الگوی توزیع نانو صفحات گرافنی در نظر گرفته شده است. با توجه به نتایج

صفر در نظر گرفته شود، روابط حاکم که برای پل‌های تقویت شده با نانو صفحات گرافنی است، برای پل‌های مخروطی ناقص همسانگرد نیز برقرار خواهد بود.

در جدول ۴ پنج پارامتر فرکانسی اول پل همسانگرد با شرایط مرزی $\hat{\omega} = \omega a^2 (2\pi h) \sqrt{\rho/E}$ گیردار در تمامی لبه‌ها به ازای مقادیر مختلف α آورده شده است. ابعاد هندسی پل شامل $R_1=0.2$ (m)، $R_2=0.1$ (m)، $h = 0.1$ (m) و $L = 0.8$ (m) و $\theta_0 = 120^\circ$ در نظر گرفته شده است. این نتایج با نتایج پژوهش ژائو و لیو [۲۷]، کیانی و همکاران [۳۲] و شانگ و همکاران [۳۳] اعتبارسنجی شده است. مجدداً دیده می‌شود، تطابق خوبی بین نتایج این تحقیق با نتایج گزارش شده در ادبیات تحقیق وجود دارد.

در جدول ۵ چهار پارامتر فرکانسی اول پل همسانگرد $\hat{\omega} = \omega L^2 \sqrt{\rho h/D}$ ($D = Eh^2/12(1-\nu^2)$) با شرایط مرزی تمام گیردار با نتایج شانگ و همکاران [۳۳]، برادل و همکاران [۳۴] و چه اونگ و همکاران [۳۵] مقایسه شده است. ابعاد هندسی پل شامل $L/S = 0.6$ ، $L/h = 100$ ، $\alpha = 6/\pi$ و $\theta_0 = 3/\pi$ ، $L/R_1 = 0.6$ است. نتایج این جدول نشان می‌دهد که نتایج از دقت قابل قبولی برخوردار است.

در جدول ۶ مقایسه فرکانس پایه $\hat{\omega} = \omega a^2 / h \sqrt{\rho/E}$ برای پل FG-GPLRC با الگوی GPL-X، کسر جرمی $w_{GPL} = 1/10$ و ابعاد هندسی شامل نسبت $R_2/h = 10$ و $\alpha = 45^\circ$ با نتایج پژوهش جمال آبادی و همکاران [۱۷] آورده شده است. نتایج نشان می‌دهد که روش حل این پژوهش برای پل‌های FG-GPLRC نیز برای شرایط مرزی مختلف، نسبت‌های متفاوت R_2/R_1 و زاویای مختلف دهانه دقت بالایی دارد.

جدول ۵- چهار فرکانس اول $\hat{\omega} = \omega a^2 \sqrt{\rho h/D}$ پل همسانگرد CCCC

منبع	$\hat{\omega}_1$	$\hat{\omega}_2$	$\hat{\omega}_3$	$\hat{\omega}_4$
حاضر	۲۰۹/۰۸	۲۵۵/۱۸	۳۰۶/۵۳	۳۴۹/۲۱
[۳۲]	۲۰۷/۳۱	۲۵۵/۱۱	۳۰۵/۶۲	۳۴۹/۷۵
[۳۴]	۲۱۳/۴	۲۶۲/۵	۳۱۴/۷	۳۵۸/۶
[۳۵]	۲۰۹/۸۴	۲۵۷/۱۱	۳۰۷/۹۰	۳۵۱/۹۰

صفحات گرافنی در جداول (۱۲-۷)، به ازای تمامی شرایط مرزی، بیشترین و کمترین پارامتر فرکانسی به ترتیب مربوط به توزیع GPL-X و GPL-O می‌باشد. در توزیع GPL-X نسبت به سایر الگوهای توزیع در سطوح بالا و پایین پنل، چگالی GPLها بیشتر است که باعث افزایش سفتی خمشی و در نهایت افزایش پارامتر فرکانسی سازه می‌گردد؛ در حالیکه در توزیع FG-O برخلاف توزیع GPL-X بیشترین چگالی GPLها در سطح میانی پنل می‌باشد.

به‌دست آمده، به ازای افزایش میزان کسر جرمی GPLها در تمامی شرایط مرزی و الگوهای مختلف توزیع از مقدار ۰/۲۵ $W_{GPL} = \%$ به مقدار ۱ $W_{GPL} = \%$ منجر به افزایش سفتی خمشی و در نهایت افزایش پارامتر فرکانسی سازه می‌گردد. با توجه به نتایج به‌دست آمده، به ازای افزایش میزان کسر جرمی GPLها در تمامی شرایط مرزی و الگوهای مختلف توزیع از مقدار ۰/۲۵ $W_{GPL} = \%$ به مقدار ۱ $W_{GPL} = \%$ منجر به افزایش سفتی خمشی و در نهایت افزایش پارامتر فرکانسی سازه می‌گردد. در بین الگوهای مختلف توزیع نانو

جدول ۷- تأثیر الگوی توزیع و کسر جرم نانو صفحات گرافنی بر هشت فرکانس اول $\hat{\omega} = \omega L^2 / h \sqrt{\rho_m / E_m}$ پنل مخروطی ناقص تقویت شده با نانو صفحات گرافن با شرایط مرزی SSSS

$\hat{\omega}_8$	$\hat{\omega}_7$	$\hat{\omega}_6$	$\hat{\omega}_5$	$\hat{\omega}_4$	$\hat{\omega}_3$	$\hat{\omega}_2$	$\hat{\omega}_1$	الگوی توزیع	W_{GPL}
۷۵/۸۹۶۱	۷۵/۳۹۱۸	۷۱/۲۰۱۳	۶۸/۹۲۰۸	۵۵/۶۱۴۲	۴۳/۰۵۹۴	۳۸/۷۹۸۴	۳۴/۷۲۰۹	UD	۰/۲۵
۷۸/۵۷۹۶	۷۷/۹۹۲۸	۷۵/۵۲۸۱	۷۱/۹۰۶۹	۶۰/۵۷۵۴	۴۶/۴۵۵۱	۳۹/۴۹۷۶	۳۶/۸۶۳۴	GPL-X	
۷۵/۲۴۴۲	۷۰/۱۱۲۸	۶۵/۷۵۰۱	۶۳/۶۳۹۵	۵۰/۰۹۹۷	۳۹/۲۶۹۲	۳۸/۰۶۸۴	۳۲/۳۱۵۴	GPL-O	
۷۵/۳۰۷۹	۷۴/۰۵۶۰	۶۸/۸۵۵۰	۶۷/۸۷۶۶	۵۳/۸۹۵۹	۴۱/۸۷۱۳	۳۸/۵۳۵۳	۳۳/۹۵۴۸	GPL-V	
۹۱/۵۱۰۲	۹۰/۹۱۶۶	۸۵/۸۴۵۸	۸۳/۱۰۳۷	۶۷/۰۵۳۳	۵۱/۹۱۷۱	۴۶/۷۸۴۶	۴۱/۸۶۴۶	UD	۰/۵
۹۶/۹۲۳۴	۹۵/۲۵۱۷	۹۱/۱۴۳۰	۸۸/۰۱۰۱	۷۵/۱۴۸۸	۵۷/۴۵۶۰	۴۷/۹۳۶۸	۴۵/۳۵۵۵	GPL-X	
۹۰/۶۶۹۰	۸۱/۷۱۸۴	۷۷/۷۷۴۸	۷۲/۹۸۶۸	۵۷/۶۷۷۸	۴۵/۵۶۳۹	۴۵/۴۶۳۶	۳۷/۷۶۶۲	GPL-O	
۹۰/۷۵۱۰	۸۷/۳۲۷۹	۸۰/۷۵۳۸	۸۰/۴۷۵۵	۶۳/۱۲۵۲	۴۹/۲۰۴۶	۴۶/۲۰۶۴	۴۰/۱۲۲۲	GPL-V	
۱۱۶/۶۳۶۱	۱۱۵/۹۱۶۴	۱۰۹/۴۰۶۶۸	۱۰۵/۹۳۱۲	۸۵/۴۵۸۳	۶۶/۱۶۹۸	۵۹/۶۴۱۰	۵۳/۳۶۰۷	UD	٪۱
۱۲۶/۵۵۶۵	۱۲۱/۹۶۷۵	۱۱۶/۲۷۹۵	۱۱۳/۵۷۴۰	۹۷/۹۹۵۴	۷۴/۷۴۶۲	۶۱/۴۴۱۹	۵۸/۷۶۱۹	GPL-X	
۱۱۵/۵۳۰۶	۱۰۰/۹۸۰۳	۹۷/۴۷۳۳	۸۸/۷۶۳۶	۷۰/۴۰۹۰	۵۷/۷۱۳۹	۵۵/۷۹۵۹	۴۶/۷۷۱۵	GPL-O	
۱۱۵/۶۲۵۲	۱۰۸/۵۰۰۰	۱۰۱/۳۹۹۵	۹۸/۹۰۶۳	۷۷/۷۸۲۲	۶۰/۸۶۹۳	۵۸/۵۴۰۹	۴۹/۹۶۰۹	GPL-V	

جدول ۸- تأثیر الگوی توزیع و کسر جرمی نانو صفحات گرافنی بر هشت فرکانس اول $\hat{\omega} = \omega L^2 / h \sqrt{\rho_m / E_m}$ پنل مخروطی ناقص تقویت شده با نانو صفحات گرافن با شرایط مرزی CCCC

$\hat{\omega}_8$	$\hat{\omega}_7$	$\hat{\omega}_6$	$\hat{\omega}_5$	$\hat{\omega}_4$	$\hat{\omega}_3$	$\hat{\omega}_2$	$\hat{\omega}_1$	الگوی توزیع	W_{GPL}
۹۹/۷۲۴۵	۹۰/۸۹۰۸	۸۴/۸۷۸۵	۸۳/۰۳۰۲	۷۰/۲۴۰۱	۶۹/۸۳۵۹	۵۲/۳۲۱۵	۵۰/۰۸۰۴	UD	۰/۲۵
۱۰۳/۱۶۵	۹۸/۱۴۴۱	۸۹/۴۲۵۹	۸۷/۰۰۵۱	۷۵/۲۹۶۷	۷۳/۰۱۱۷	۵۵/۲۸۴۸	۵۲/۵۰۳۴	GPL-X	

۹۲/۶۹۱۲	۸۳/۵۰۶۷	۷۹/۲۱۱	۷۸/۵۴۶۵	۶۶/۸۳۹۳	۶۳/۷۵۷۵	۴۸/۷۸۷۷	۴۷/۳۴۶۶	GPL-O	
۹۷/۹۶۸۲	۸۸/۴۸۸۷	۸۳/۱۵۴۰	۸۱/۶۱۵۵	۶۹/۲۱۸۳	۶۷/۹۳۲۰	۵۱/۲۲۵۸	۴۹/۲۰۹۵	GPL-V	
۱۲۰/۲۳۸۵	۱۰۹/۵۸۹۲	۱۰۲/۳۴۲۳	۱۰۰/۱۱۴۹	۸۴/۶۹۶۵	۸۴/۲۰۳۰	۶۳/۰۸۸۳	۶۰/۳۸۷۷	UD	
۱۲۵/۴۸۶۷	۱۲۱/۵۱۶۴	۱۰۹/۶۱۲۳	۱۰۶/۵۹۹۵	۹۳/۰۹۳۶	۸۹/۲۱۷۱	۶۷/۸۵۸۱	۶۴/۳۳۸۲	GPL-X	%۰/۵
۱۰۷/۱۷۱۲	۹۷/۴۱۸۷	۹۲/۵۳۷۶	۹۲/۴۲۲۶	۷۸/۶۱۸۳	۷۳/۸۹۶۱	۵۷/۰۰۶۸	۵۵/۷۱۰۷	GPL-O	
۱۱۵/۸۰۵۱	۱۰۴/۱۸۲۲	۹۸/۳۵۱۱	۹۶/۸۸۸۶	۸۲/۳۳۰۰	۷۹/۸۵۷	۶۰/۵۷۳۰	۵۸/۴۰۸۶	GPL-V	
۱۵۳/۲۴۶۶	۱۳۹/۶۷۷۸	۱۳۰/۴۴۷۰	۱۲۷/۶۱۰۹	۱۰۷/۹۶۶۶	۱۰۷/۳۲۱۸	۸۰/۴۱۷۴	۷۶/۹۷۹۲	UD	
۱۶۱/۰۱۳۵	۱۵۸/۲۴۳۲	۱۴۱/۵۲۳۵	۱۳۷/۶۵۶۲	۱۲۱/۰۵۹۹	۱۱۴/۹۸۴	۸۷/۷۲۲۷	۸۳/۰۹۷۲	GPL-X	%۱
۱۳۱/۰۴۱۵	۱۲۰/۷۳۳۵	۱۱۵/۱۲۲۵	۱۱۴/۵۳۹۶	۹۷/۶۷۶۶	۹۰/۸۳۶۵	۷۰/۵۵۷۹	۶۹/۴۲۰۶	GPL-O	
۱۴۳/۷۰۷۶	۱۲۹/۳۲۶۰	۱۲۲/۵۳۱۳	۱۲۱/۲۹۵۳	۱۰۳/۲۲۷۷	۹۸/۸۴۵۵	۷۵/۴۶۶۵	۷۳/۱۱۶۷	GPL-V	

جدول ۹- تأثیر الگوی توزیع و کسر جرمی نانو صفحات گرافنی بر هشت فرکانس اول $\hat{\omega} = \omega L^2 / h \sqrt{\rho_m / E_m}$ پنل مخروطی ناقص تقویت شده با نانو صفحات گرافن با شرایط مرزی SCSC

$\hat{\omega}_8$	$\hat{\omega}_7$	$\hat{\omega}_6$	$\hat{\omega}_5$	$\hat{\omega}_4$	$\hat{\omega}_3$	$\hat{\omega}_2$	$\hat{\omega}_1$	الگوی توزیع	W_{GPL}
۶۵/۳۰۶۱	۸۲/۸۹۲۵	۷۹/۳۰۴۴	۷۷/۴۹۷۶	۶۶/۲۳۸۸	۶۴/۲۴۲۳	۴۶/۶۹۹۶	۴۴/۱۸۵۷	UD	
۹۱/۶۴۵۶	۸۴/۶۲۷۶	۸۲/۹۸۸۵	۸۰/۴۶۱۸	۶۹/۱۸۱۱	۶۸/۸۸۶۱	۴۹/۵۸۶۵	۴۶/۶۲۵۵	GPL-X	%۰/۲۵
۸۰/۹۷۰۱	۷۹/۱۷۶۱	۷۴/۴۴۲۰	۷۳/۸۵۴۱	۶۲/۷۳۷۲	۵۸/۶۱۸۸	۴۳/۲۷۰۵	۴۱/۳۸۶۵	GPL-O	
۸۳/۲۶۹۳	۸۲/۳۱۴۴	۷۷/۸۴۸۰	۷۶/۳۶۵۰	۶۵/۲۱۳۸	۶۲/۴۹۳۷	۴۵/۶۴۰۱	۴۳/۳۰۳۸	GPL-V	
۱۰۲/۸۵۷۰	۹۹/۹۵۸۹	۹۵/۶۲۲۷	۹۳/۴۴۶۰	۷۹/۸۷۰۲	۷۷/۴۵۸۰	۳۶/۳۰۷۵	۵۳/۲۷۷۴	UD	
۱۱۳/۳۴۲۳	۱۰۲/۹۴۵۸	۱۰۱/۴۶۷۰	۹۸/۱۶۸۵	۸۵/۴۴۹۵	۸۴/۱۳۴۷	۶۰/۹۶۱۰	۵۷/۲۴۲۱	GPL-X	%۰/۵
۹۶/۲۳۴۴	۹۲/۸۳۳۱	۸۷/۱۶۰۱	۸۷/۱۱۶۴	۷۳/۵۱۷۲	۶۷/۸۸۴۲	۵۰/۴۰۲۳	۴۸/۴۷۷۶	GPL-O	
۹۸/۶۳۳۸	۹۸/۳۱۰۷	۹۲/۲۲۵۸	۹۰/۸۴۳۴	۷۷/۴۶۶۴	۷۳/۴۵۴۳	۵۳/۸۷۲۸	۵۱/۲۶۵۱	GPL-V	
۱۳۱/۰۹۹۷	۱۲۷/۴۳۷۸	۱۲۱/۸۸۵۵	۱۱۹/۱۱۵۷	۱۰۱/۸۱۰۵	۹۸/۷۲۳۵	۷۱/۷۶۹۰	۶۷/۹۰۹۴	UD	
۱۴۷/۴۹۲۸	۱۳۲/۲۹۴۹	۱۳۰/۷۴۳۶	۱۲۶/۲۸۸۸	۱۱۰/۹۹۸۵	۱۰۸/۳۶۸۱	۷۸/۹۰۴۱	۷۴/۰۳۱۴	GPL-X	%۱
۱۲۰/۲۰۷۸	۱۱۵/۵۴۸۱	۱۰۸/۷۱۲۴	۱۰۸/۱۱۶۱	۹۱/۰۰۱۳	۸۳/۳۵۱۶	۶۲/۱۸۴۳	۶۰/۱۴۱۲	GPL-O	
۱۲۴/۷۵۷۷	۱۲۲/۴۷۳۰	۱۱۵/۰۹۵۹	۱۱۳/۹۷۵۲	۹۶/۹۳۵۳	۹۰/۸۸۸۰	۶۶/۹۷۲۶	۶۳/۹۶۸۰	GPL-V	

جدول ۱۰- تأثیر الگوی توزیع و کسر جرمی نانو صفحات گرافنی بر هشت فرکانس اول $\hat{\omega} = \omega L^2 / h \sqrt{\rho_m / E_m}$ پینل مخروطی ناقص تقویت شده با نانو صفحات گرافن با شرایط مرزی CSCS

$\hat{\omega}_8$	$\hat{\omega}_7$	$\hat{\omega}_6$	$\hat{\omega}_5$	$\hat{\omega}_4$	$\hat{\omega}_3$	$\hat{\omega}_2$	$\hat{\omega}_1$	الگوی توزیع	W_{GPL}
۸۰/۶۰۹۷	۷۷/۹۸۶۸	۷۷/۶۸۹۶	۷۳/۸۲۹۵	۶۱/۶۲۴۰	۴۸/۹۶۷۸	۴۸/۶۰۷۱	۴۲/۱۱۴۰	UD	
۸۵/۷۰۲	۸۵/۰۲۰۴	۷۸/۲۶۷۱	۷۷/۳۱۱۶	۶۷/۰۱۷۸	۵۲/۶۲۵۸	۴۹/۳۳۱۸	۴۴/۲۰۴۲	GPL-X	%۰/۲۵
۷۷/۶۸۷۴	۷۴/۱۵۴۳	۷۰/۱۳۲۰	۶۹/۵۳۷۰	۵۵/۶۵۴۸	۴۷/۸۴۹۵	۴۴/۹۳۶۱	۳۹/۸۴۲۰	GPL-O	
۷۸/۵۵۹۷	۷۷/۸۵۷۰	۷۵/۱۵۴۶	۷۲/۶۲۲۶	۵۹/۷۵۷۳	۴۸/۳۲۹۴	۴۷/۶۹۳۴	۴۱/۳۷۴۶	GPL-V	
۹۷/۱۹۳۳	۹۴/۰۴۴۹	۹۳/۶۶۹۲	۸۹/۰۲۲۱	۷۴/۳۰۰۳	۵۹/۰۴۲۴	۵۸/۶۱۶۳	۵۰/۷۸۱۵	UD	
۱۰۵/۶۲۸۰	۱۰۴/۰۷۲۴	۹۴/۷۴۲۱	۹۴/۵۰۸۱	۸۳/۱۰۶۰	۶۵/۰۱۹۶	۵۹/۸۱۱۴	۵۴/۲۰۴۱	GPL-X	%۰/۵
۹۳/۵۴۲۴	۸۶/۲۷۱۷	۸۲/۸۰۹۴	۷۹/۸۱۱۹	۶۴/۱۶۵۱	۵۷/۳۴۸۳	۵۲/۲۰۱۹	۴۶/۹۴۱۰	GPL-O	
۹۳/۷۷۳۹	۹۲/۵۳۲۲	۸۷/۸۷۱۴	۸۶/۳۰۰۳	۷۰/۰۳۸۵	۵۸/۰۰۹۶	۵۶/۱۴۲۲	۴۹/۱۱۲۸	GPL-V	
۱۲۳/۸۷۸۹	۱۱۹/۹۰۲۳	۱۱۹/۳۷۹۱	۱۱۳/۴۷۴۱	۹۴/۶۹۶۷	۷۵/۲۵۴۸	۷۴/۷۳۴۳	۶۴/۷۳۳۴	UD	
۱۳۷/۸۹۴۶	۱۳۳/۴۵۲۵	۱۲۲/۳۸۱۷	۱۲۰/۶۳۴۶	۱۰۸/۳۳۹۴	۸۴/۵۲۲۸	۷۶/۶۰۵۴	۷۰/۰۵۰۷	GPL-X	%۱
۱۱۹/۱۱۱۵	۱۰۶/۴۳۳۱	۱۰۳/۶۱۶۴	۹۷/۱۴۴۵	۷۸/۴۵۰۳	۷۲/۷۳۳۰	۶۴/۲۹۶۴	۵۸/۶۰۵۰	GPL-O	
۱۱۹/۴۰۵۳	۱۱۴/۸۱۲۸	۱۰۸/۲۱۵۷	۱۰۸/۰۵۰۵	۸۶/۳۸۰۰	۷۳/۵۸۶۲	۶۹/۶۰۵۹	۶۱/۵۰۲۰	GPL-V	

جدول ۱۱- تأثیر الگوی توزیع و کسر جرمی نانو صفحات گرافنی بر هشت فرکانس اول $\hat{\omega} = \omega L^2 / h \sqrt{\rho_m / E_m}$ پینل مخروطی ناقص تقویت شده با نانو صفحات گرافن با شرایط مرزی CFCF

$\hat{\omega}_8$	$\hat{\omega}_7$	$\hat{\omega}_6$	$\hat{\omega}_5$	$\hat{\omega}_4$	$\hat{\omega}_3$	$\hat{\omega}_2$	$\hat{\omega}_1$	الگوی توزیع	W_{GPL}
۶۶/۸۶۹۵	۵۵/۱۷۵۴	۴۶/۹۸۰۲	۴۵/۸۷۷۱	۳۹/۴۱۶۶	۳۸/۶۲۵۱	۲۰/۲۶۵۸	۱۹/۶۳۱۴	UD	
۷۰/۲۷۲۸	۵۹/۷۴۷۷	۴۹/۷۷۴۹	۴۷/۹۹۵۹	۴۱/۶۰۹۳	۴۱/۵۰۲۴	۲۱/۶۱۷۵	۲۰/۷۷۳۰	GPL-X	%۰/۲۵
۶۰/۸۸۰۱	۵۰/۱۸۵۲	۴۳/۹۲۹۶	۴۳/۸۰۳۵	۳۶/۶۶۰۷	۳۵/۳۳۱۹	۱۸/۷۰۷۲	۱۸/۳۲۶۷	GPL-O	
۶۵/۰۹۳۰	۵۳/۵۹۸۱	۴۵/۹۹۷۲	۴۵/۲۰۰۹	۳۸/۶۴۲۶	۳۷/۶۲۷۴	۱۹/۸۰۹۷	۱۹/۲۵۰۷	GPL-V	
۸۰/۶۳۳۵	۶۶/۵۲۶۷	۵۶/۶۴۹۴	۵۵/۳۲۱۸	۴۷/۵۳۱۶	۴۶/۵۷۵۵	۲۴/۴۳۷۶	۲۳/۶۷۳۰	UD	
۸۴/۸۹۹۳	۷۴/۰۰۵۵	۶۱/۲۰۲۸	۵۸/۸۶۴۱	۵۱/۴۴۶۸	۵۰/۸۵۲۵	۲۶/۶۳۰۵	۲۵/۵۳۱۲	GPL-X	%۰/۵
۷۰/۳۶۱۴	۵۸/۰۸۵۷	۵۲/۱۵۸۷	۵۱/۲۰۸۱	۴۲/۶۸۲۱	۴۰/۹۸۸۱	۲۱/۷۶۷۳	۲۱/۴۳۴۸	GPL-O	
۷۶/۵۰۹۷	۶۲/۹۳۷۹	۵۴/۳۹۶۱	۵۳/۸۲۸۳	۴۵/۶۹۹۷	۴۴/۲۷۷۵	۲۳/۳۷۵۰	۲۲/۷۸۵۹	GPL-V	
۱۰۲/۷۹۰۶	۸۴/۷۹۳۱	۷۲/۲۱۳۶	۷۰/۵۲۷۶	۶۰/۵۹۷۳	۵۹/۳۷۴۱	۳۱/۱۵۳۹	۳۰/۱۸۰۰	UD	%۱

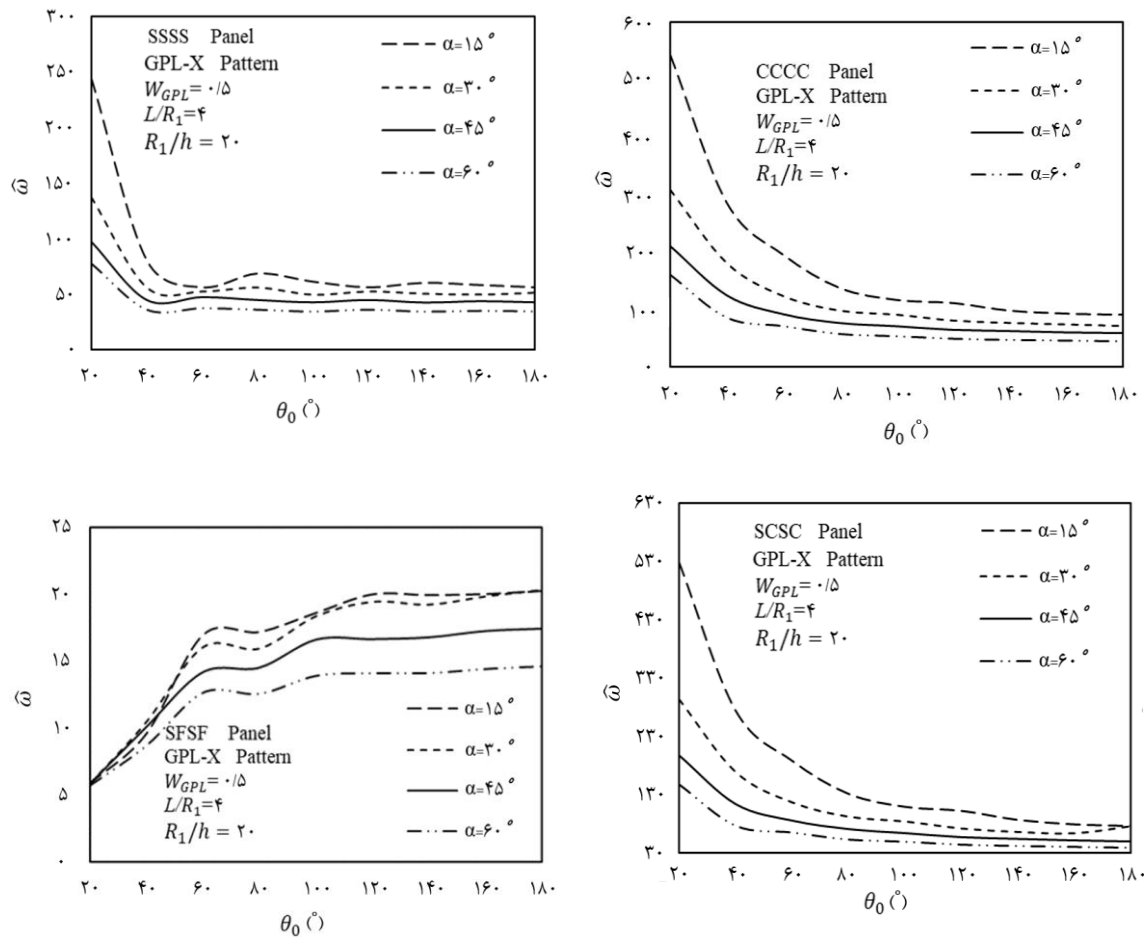
۱۰۸/۴۰۶	۹۶/۳۹۸۲	۷۹/۲۶۲۳	۷۶/۱۱۸۲	۶۶/۹۲۷۷	۶۵/۶۴۶۳	۳۴/۵۳۶۹	۳۳/۰۵۵۸	GPL-X
۸۶/۱۳۹۸	۷۱/۳۱۱۸	۶۵/۶۵۴۶	۶۳/۴۱۳۴	۵۲/۵۸۵۰	۵۰/۴۲۲۷	۲۶/۸۳۷۹	۲۶/۵۵۴۳	GPL-O
۹۴/۶۴۱۷	۷۷/۸۱۲۳	۶۷/۷۹۴۲	۶۷/۷۱۳۷	۵۶/۸۹۹۸	۵۴/۸۷۱۷	۲۹/۰۵۱۴	۲۸/۴۲۴۸	GPL-V

جدول ۱۲- تأثیر الگوی توزیع و کسر جرمی نانو صفحات گرافنی بر هشت فرکانس اول $\hat{\omega} = \omega L^2 / h \sqrt{\rho_m / E_m}$ پل مخروطی ناقص تقویت شده با نانو صفحات گرافن با شرایط مرزی SFSF

$\hat{\omega}_8$	$\hat{\omega}_7$	$\hat{\omega}_6$	$\hat{\omega}_5$	$\hat{\omega}_4$	$\hat{\omega}_3$	$\hat{\omega}_2$	$\hat{\omega}_1$	الگوی توزیع	W_{GPL}
۴۹/۱۲۷۸	۴۰/۶۱۶۱	۳۶/۹۴۲۶	۳۱/۱۰۶۳	۲۸/۸۴۴۶	۲۷/۹۳۵۹	۱۳/۹۹۴۰	۱۲/۷۴۳۶	UD	۰/۱۲۵
۵۲/۳۶۷۳	۴۳/۱۲۷۳	۳۹/۴۰۱۱	۳۳/۵۵۸۸	۳۰/۱۸۲۷	۲۸/۶۵۴۸	۱۴/۷۸۰۰	۱۳/۵۳۷۶	GPL-X	
۴۴/۴۶۹۳	۳۷/۷۵۵۱	۳۴/۱۶۱۴	۲۸/۴۳۳۱	۲۷/۳۷۳۲	۲۶/۹۸۳۷	۱۳/۰۳۴۴	۱۱/۸۵۱۶	GPL-O	
۴۷/۶۶۵۴	۳۹/۷۲۷۷	۳۶/۰۸۷۲	۳۰/۲۸۴۶	۲۸/۳۸۷۵	۲۷/۶۶۶۷	۱۳/۷۲۰۹	۱۲/۴۷۸۷	GPL-V	
۵۹/۲۳۴۳	۴۸/۹۷۴۲	۴۴/۵۴۷۱	۳۷/۵۰۹۸	۳۴/۷۸۲۳	۳۳/۶۸۵۷	۱۶/۸۷۵۲	۱۵/۳۶۷۴	UD	۰/۱۵
۶۶/۱۶۲۹	۵۳/۰۶۶۷	۴۸/۵۴۰۵	۴۱/۵۰۸۰	۳۶/۹۷۹۰	۳۴/۸۴۲۱	۱۸/۱۴۰۰	۱۶/۶۶۱۹	GPL-X	
۹۱/۳۳۸۹	۴۴/۰۶۲۵	۳۹/۸۲۵۸	۳۹/۸۲۵۸	۳۳/۱۲۹۲	۳۱/۸۶۲۹	۱۵/۲۰۸۶	۱۳/۸۴۶۲	GPL-O	
۵۵/۸۹۹۳	۴۶/۹۴۰۵	۴۲/۵۸۰۷	۳۵/۶۲۱۵	۳۳/۷۳۹۷	۳۳/۰۵۳۸	۱۶/۲۳۲۴	۱۴/۷۵۳۹	GPL-V	
۶۲/۴۲۶۵	۶۲/۴۲۶۵	۵۶/۷۸۹۵	۴۷/۸۱۹۱	۴۴/۳۴۱۵	۴۲/۹۴۱۳	۲۱/۵۱۴۲	۱۹/۵۹۲۰	UD	۱/۱
۸۶/۳۴۱۷	۶۸/۷۶۲۶	۶۲/۹۵۴۷	۵۴/۰۱۰۳	۴۷/۷۶۴۱	۴۴/۷۱۵۲	۲۳/۴۵۳۷	۲۱/۵۹۷۸	GPL-X	
۸۲/۸۶۱۹	۵۴/۴۶۲۵	۴۹/۲۴۳۳	۴۱/۲۳۷۴	۴۰/۲۴۳۱	۳۹/۵۰۶۵	۱۸/۷۸۶۷	۱۷/۱۴۲۶	GPL-O	
۶۸/۹۹۶۳	۵۸/۴۳۶۴	۵۲/۹۳۴۶	۴۴/۱۴۵۱	۴۲/۳۰۵۴	۴۱/۶۵۴۳	۲۰/۲۲۹۰	۱۸/۳۸۴۵	GPL-V	

در شکل ۲، نمودار پارامتر فرکانسی پایه پل‌های مخروطی ناقص FG-GPLRC با الگوی توزیع GPL-X، کسر جرمی $W_{GPL} = 10\%$ و با نسبت هندسی $L/R_l = 4$ و $\alpha = 45^\circ$ به صورت تابعی از θ_0 ، ترسیم شده است. در شکل ۲ مشاهده می‌شود، با افزایش زاویه دهانه پل (θ_0) در شرایط مرزی SSSS، CCCC، CSCS فرکانسی پایه سازه کاهش می‌یابد که نرخ کاهشی آن در محدوده $45^\circ \leq \theta_0$ بیشتر است؛ همچنین با افزایش زاویه نیم رأس پل (α) پارامتر فرکانسی پایه سازه کاهش می‌یابد. در حالی که برای پل با شرایط مرزی SFSF، با افزایش زاویه دهانه پل (θ_0) پارامتر فرکانسی پایه سازه روند صعودی دارد که نرخ افزایش آن در

تأثیر شرایط مرزی مختلف بر رفتار ارتعاشی سازه نیز در جداول ۷ تا ۱۲ آورده شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، بالاترین فرکانس در بین شرایط مرزی در نظر گرفته شده متعلق به پل‌های کاملاً گیردار (CCCC) است و با فرض ثابت بودن سایر پارامترهای هندسی و خواص ماده برای یک لبه‌ی مرزی بالاترین فرکانس سازه به ترتیب مربوط به لبه گیردار، ساده و آزاد می‌باشد. در واقع، در شرایط مرزی مختلف هرچه شرایط تکیه‌گاهی مقیدتر باشد به دلیل افزایش سفتی خمشی سازه در مجاورت لبه‌های مرزی، پارامترهای فرکانسی سازه افزایش می‌یابد.



شکل ۲- تأثیر زوایای (θ_0 و α) و شرایط مرزی مختلف بر روی فرکانس پایه پنل مخروطی ناقص GPL-RC

می‌یابد. علت این افزایش رابطه مستقیم پارامتر فرکانسی پایه با نسبت R_1/h می‌باشد.

۶- نتیجه گیری

در این پژوهش، رفتار ارتعاشی پنل‌های مخروطی ناقص FG-GPLRC با استفاده از تئوری تغییر شکل پوسته FSĐT و اصل همیلتون بررسی شده است. معادلات حرکت با استفاده از روش ریتز و چندجمله‌ای‌های چبیشف گسسته سازی و حل شده اند. سپس پاسخ ارتعاشی سازه به ازای شرایط مرزی، ابعاد هندسی و کسر جرمی مختلف GPLها با سایر مقالات معتبر صحت سنجی شده است. در ادامه تأثیر شرایط مرزی، ابعاد هندسی، کسر جرمی و الگوهای توزیع نانو

محدوده $\theta_0 \leq 45^\circ$ بیشتر است و با افزایش زاویه نیم رأس پنل (α)، تغییرات پارامتر فرکانسی پایه نظم مشخصی ندارد و به نظر می‌رسد، علت آن شرایط مرزی خاص است.

در شکل ۳، نمودار پارامتر فرکانسی پایه پنل‌های مخروطی ناقص FG-GPLRC با الگو توزیع GPL-X، کسر جرمی $W_{GPL} = 0.15$ و با نسبت هندسی $L/R_1 = 4$ و $\alpha = 45^\circ$ به صورت تابعی از زاویه دهانه مخروط (θ_0)، ترسیم شده است. در این شکل دو شرط مرزی SSSS و SCSC در نظر گرفته شده است و پارامتر فرکانسی پایه به ازای مقادیر مختلف θ_0 و نسبت‌های مختلف R_1/h برای هر شرط مرزی به دست آمده است. نتایج این شکل نشان می‌دهد که با افزایش مقدار R_1/h ، مقدار پارامتر فرکانسی پایه سازه افزایش

خمش سازه در مرزها بیشتر می‌شود و در نتیجه پارامتر فرکانسی سازه افزایش می‌یابد.

۷- سهم نویسندگان

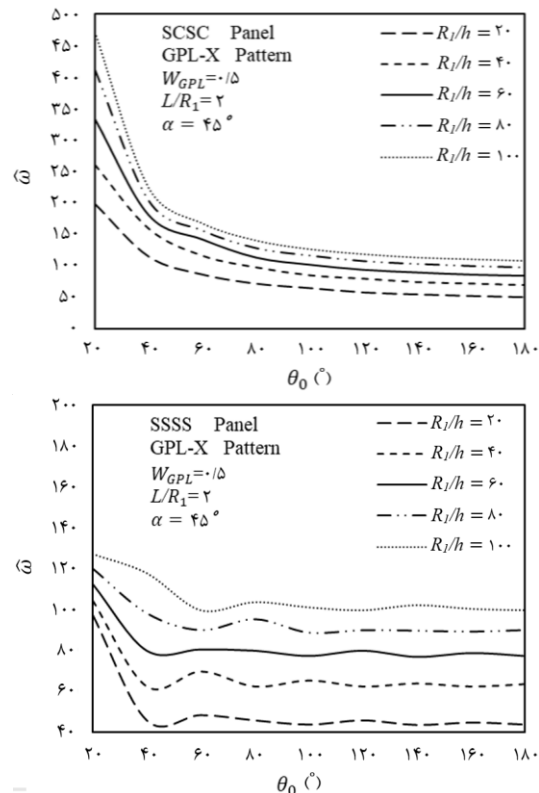
مصطفی میرزایی (نویسنده اول)، پژوهشگر اصلی/نگارنده بحث، (۵۰ درصد) و راضیه هاشمی (نویسنده دوم) پژوهشگر اصلی/نگارنده مقاله، (۵۰ درصد)

۸- منابع مالی

منابع مالی پژوهش توسط دانشگاه قم فراهم شده است.

۹- مراجع

- [1] Zhao S, Zhao Zh, Yang Zh, Ke LL, Kitipornchaia S, Yang J (2020) Functionally graded graphene reinforced composite structures: A review. *Engineering Structure* 210: 1-16.
- [2] Ray SC (2015) Applications of Graphene and Graphene-Oxide Based Nanomaterials. *Micro & Nano Technologies Series*.
- [3] Rafiee MA, Rafiee J, Wang ZH, Song Yu ZZ, Koratkar N (2009) Enhanced mechanical properties of nanocomposites at low graphene content. *ACS Nano*, 3(12): 3884-3890.
- [4] King JA, Klimek DR, Miskioğlu I, Odegard GM (2013) Mechanical properties of graphene nanoplatelet/epoxy composites. *Journal Applied Polymer Science* 128 (6): 4217-4223.
- [5] Song M, Kitipornchai S, Yang J (2017) Free and forced vibrations of functionally graded polymer composite plates reinforced with graphene nanoplatelets. *Composite Structures* 159: 579-588.
- [6] Muni Rami Reddy R, Karunasena W, Lokuge W (2018) Free vibration of functionally graded-GPL reinforced composite plates with different boundary conditions. *Aerospace Science and Technology* 78: 174-156.
- [7] Guo H, Cao S, Yang T, Chen Y (2018) Vibration of laminated composite quadrilateral plates reinforced with graphene nanoplatelets using the element-free IMLS-Ritz method. *International Journal of Mechanical Science* 142-143: 610-62.
- [8] Gholami R, Ansari R (2019) On the nonlinear vibrations of polymer nanocomposite rectangular plates reinforced by graphene nanoplatelets: a unified higher-order shear deformable model. *Iranian Journal of Science and Technology* 43: 603-620.
- [9] Gholami R, Ansari R (2018) Nonlinear harmonically excited vibration of third-order shear deformable functionally graded graphene platelet-



شکل ۳- تأثیر نسبت (R_1/h) بر روی فرکانس اول پنل مخروطی ناقص GPL-RC

صفحات گرافنی بر پارامتر فرکانسی سازه مطالعه شده است. نتایج حاصل نشان می‌دهد که:

- افزایش کسر جرمی GPLها در پنل نانوکامپوزیتی، رفتار ارتعاشی پنل‌های مخروطی ناقص FG-GPLRC را به طور قابل ملاحظه‌ای بهبود می‌بخشد.

- از بین تمامی الگوهای توزیع GPLها در راستای ضخامت، کمترین و بیشترین پارامتر فرکانس طبیعی به ترتیب متعلق به الگوی GPL-O و GPL-X می‌باشد.

- پارامترهای هندسی سازه نظیر نسبت R_1/h و همچنین مقادیر α و θ_0 بر رفتار ارتعاشی سازه اثر دارند.

- هرچه درجه آزادی شرایط تکیه گاهی پنل محدودتر باشد یا به عبارتی پنل مقیدتر باشد، سفتی

- cylindrical shell subjected to thermo-mechanical loads. *Composite Structures* 255.
- [21] Arefi M, Mohammad-Rezaei Bidgoli E, Dimitri R, Tornabene F (2018) Free vibrations of functionally graded polymer composite nanoplates reinforced with graphene nanoplatelets. *Aerospace Science and Technology* 81: 108-117.
- [22] Arefi M, Mohammad-Rezaei Bidgoli E, Rabczuk T (2019) Effect of various characteristics of graphene nanoplatelets on thermal buckling behavior of FGRC micro plate based on MCST. *European Journal of Mechanics - A/Solids* 77.
- [23] Mohammad-Rezaei Bidgoli E, Arefi M (2021) Free vibration analysis of micro plate reinforced with functionally graded graphene nanoplatelets based on modified strain-gradient formulation. *Journal of Sandwich Structures & Materials* 23(2): 436-472
- [24] Mirzaei M, Kiani Y (2015) Thermal buckling of temperature dependent FG-CNT reinforced composite conical shells. *Aerospace Science and Technology* 47: 42-53.
- [25] Hashemi R, Mirzaei M, Adlparvar MR (2021) On thermally induced instability of FG-CNTRC cylindrical panels. *Advances in Nano Research*, 10(1): 43-57.
- [26] Hashemi R, Mirzaei M, Adlparvar M (2020) Mechanical Buckling of FG-CNT Reinforced Composite Cylindrical Panels. *Iranian Journal of Mechanical Engineering* 22(1): 50-73.
- [27] Zhao X, Liew KM (2011) Free vibration analysis of functionally graded conical shell panels by a meshless method. *Composite Structures* 93(2): 649-664.
- [28] Akbari M, Kiani, Y, Aghdam MM, Eslami MR (2015) Free vibration of FGM Levy conical panels. *Composite Structures* 116: 732-746.
- [29] Reddy JN (2003) *Mechanics of laminated composite plates and shells. theory and application.* Boca Raton.
- [30] Zhang LW, Lei ZX, Liew KM (2015) Free vibration analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite triangular plates using the FSDT and element-free IMLS Ritz method. *Composite Structures* 120: 189-99.
- [31] Zhang LW, Lei ZX, Liew KM (2015) Vibration characteristic of moderately thick functionally graded carbon nanotube reinforced composite skew plates. *Composite Structures* 122: 172-183.
- [32] Kiani Y, Dimitri R, Tornabene F (2018) Free vibration study of composite conical panels reinforced with FG-CNTs. *Engineering Structures* 172: 472-482.
- [33] Xiang P, Xisa Q, Jiang LZ, Peng L, Yan JW, Liu X (2021) Free vibration analysis of FG-CNTRC reinforced composite rectangular plates. *Engineering Structures* 156: 197-209.
- [10] Gao K, Gao W, Chen D, Yang J (2018) Nonlinear free vibration of functionally graded graphene platelets reinforced porous nanocomposite plates resting on elastic foundation. *Composite Structures* 204: 831-846.
- [11] Wang, YY, Zeng R, Safarpour M (2020). Vibration analysis of FG-GPLRC annular plate in a thermal environment. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*.
- [12] Javani M, Kiani Y, Eslami MR (2021) Geometrically nonlinear free vibration of FG-GPLRC circular plate on the nonlinear elastic foundation. *Composite Structures* 261.
- [13] Dong, YH, Zhu B, Wang YY, Li H, Yang J (2018) Nonlinear free vibration of graded graphene reinforced cylindrical shells: Effects of spinning motion and axial load. *Journal of Sound and Vibration* 437: 79-96.
- [14] Eyvazian A, Sebaey TA, Žur KK, Khan A, Zhang H, Wong SHF (2021) On the dynamics of FG-GPLRC sandwich cylinders based on an unconstrained higher-order theory, *Composite Structures* 267.
- [15] Safarpour M, Rahimi AR, Alibeigloo A (2020) Static and free vibration analysis of graphene platelets reinforced composite truncated conical shell, cylindrical shell and annular plate using theory of elasticity and DQM. *Mechanics Based Design of Structures and Machines* 48(4): 496-524.
- [16] Yang S, Hao Y, Zhang W, Yang L, Lie L (2021) Nonlinear vibration of functionally graded graphene platelet reinforced composite truncated conical shell using first-order shear deformation theory. *Applied Mathematics and Mechanics* 42(7): 981-998.
- [17] Abdollahzadeh Jamalabadi MY, Borji P, Habibi M, Pelalak R (2021) Nonlinear vibration analysis of functionally graded GPL-RC conical panels resting on elastic medium. *Thin-Walled Structures* 160.
- [18] Ansari R, Hassani R, Hasrati E, et al. (2021) Geometrically nonlinear vibrations of FG-GPLRC cylindrical panels with cutout based on HSDT and mixed formulation: a novel variational approach. *Acta Mechanica*.
- [19] Ansari R, Hassani R, Hasrati E, Rouhi R, et al. (2020) Studying nonlinear vibrations of composite conical panels with arbitrary-shaped cutout reinforced with graphene platelets based on higher-order shear deformation theory. *Journal of Vibration and Control*.
- [20] Arefi M, Kiani Moghaddam S, Mohammad-Rezaei Bidgoli E, Kiani M, Civalek O (2021) Analysis of graphene nanoplatelet reinforced

- finite strip method. Journal of Sound and Vibration 128(3): 411-422.
- [35] Bradell NS, Dunsdon JM, Langley RS (1998) Free vibration of thin, isotropic, open, conical panels. Journal of Sound and Vibration 217(2): 297-320.
- conical shell panels using the kernel partial Ritz element-free method. Composite Structures 255(1).
- [34] Cheung YK, Li WY, Tham LG (1998) Free vibration analysis of singly curved shell by spline