مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها/ سال ۱۳۹۲/ دوره ۳/ شماره ۴/ صفحه ۱۱-۲۱

مجله علمی پژوهشی مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها

دانشگاه شاهرود

فرم معکوس معادلات حرکت ربات سیار غیرهولونومیک با مفاصل دورانی-کشویی

محرم حبیب نژاد کورایم[۱] و علی محمد شافعی[۲،*]

[۱] استاد مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران

[۲] دانشجوی دکتری مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران، تهران

تاریخ دریافت: ۱۳۹۲/۰۵/۰۵؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۲/۱۱/۱۵؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۳/۰۱/۱۶

چکیده

در این مقاله، مدلسازی ریاضی و پاسخ دینامیکی منیپولاتور موبایل غیرهولونومیک که از یک زنجیره بازوی رباتیکی با مفاصل دورانی-کشویی و یک پایه متحرک با چرخ‌های تحریک مستقل تشکیل شده است، مورد بررسی قرار می‌گیرد. به منظور اجتناب از محاسبه ضرایب لاگرانژ مرتبط با قیود غیرهولونومیک از روش گیبس-اپل به فرم بازگشتی آن استفاده شده است. به منظور مدلسازی دقیق این سیستم رباتیکی تأثیر متقابل حرکت همزمان دورانی و رفت وبرگشتی بازوهای صلب و همچنین دو قید غیرهولونومیک مربوط به شرط عدم لغزش چرخ‌ها و شرط عدم حرکت در امتداد محور دوران چرخ‌ها در این مقاله لحاظ گردیده است. در پایان یک منیپولاتور که دارای دو مفصل دورانی-کشویی بوده و بر روی یک پایه متحرک نصب گردیده است؛ مورد تحلیل قرار می‌گیرد.

کلمات کلیدی: منیپولاتور متحرک؛ رفت و برگشتی؛ غیرهولونومیک؛ بازگشتی؛ گیبس-اپل.

Inverse dynamic equations of nonholonomic mobile manipulators with revolute-prismatic joints

M.H. Korayem[1] and A.M. Shafei[2,*]

[1] Prof. of Mech. Eng., Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran

[2] Ph.D. Student, Mech. Eng., Iran University of Science and Technology, Tehran, Iran

Abstract

In this study, mathematical modeling and dynamic response of nonholonomic wheeled mobile robotic manipulator that consists of a serial manipulator with both Revolute-Prismatic (R-P) joints and an autonomous wheeled mobile platform is considered. To avoid the Lagrange multipliers associated with the nonholonomic constraints the approach of Gibbs-Appell formulation in recursive form is adopted. For modeling the system completely and precisely the coupling effects due to the simultaneous rotating and sliding motion of the rigid arms as well as both nonholonomic constraints associated with the no-slipping and the no-skidding conditions are included. Finally, the analysis of a mobile manipulator with two (R-P) joints is considered.

Keywords: Mobile manipulator; Revolute-prismatic; Nonholonomic; Recursive; Gibbs-Appell.

* نویسنده مسئول؛ تلفن: ۰۲۱۷۳۹۱۲۹۰۴-۹۸+؛ فکس: ۰۲۱۷۷۲۴۰۴۸۸-۹۸+

آدرس پست الکترونیک: shafei@iust.ac.ir

۱- مقدمه

بیشتر تحقیقات در زمینه ربات‌های سیار به ربات‌هایی که تنها از مفاصل دورانی تشکیل شده‌اند، محدود شده است. مسئله دینامیک ربات‌هایی که علاوه بر حرکت دورانی دارای حرکت رفت و برگشتی نیز می‌باشند، موضوع بسیار مهمی است که دارای کاربردهای بسیاری است. ترکیب چنین سیستمی با یک پایه متحرک قادر به انجام عملیات در فضای وسیعتری نسبت به یک منیپولاتور با پایه ثابت می‌باشد. قابلیت تحرک بالای پایه به همراه چابکی منیپولاتور باعث شده تا اینگونه از سیستمهای رباتیکی دارای کاربردهای بسیاری بویژه در زمینه‌هایی چون کاوشگرهای فضایی، عملیات نجات، یافتن مین، عملیات نظامی، نگهداری و تعمیر تأسیسات هسته‌ای، کشاورزی و غیره باشند.

هر پایه سیار با دو چرخ تحریک مستقل دارای سه قید دینامیکی می‌باشد که دو تا از این قیود غیرهولونومیک[۱] و دیگری هولونومیک می‌باشد. در چنین سیستمی، پایه بایستی در امتداد محور تقارن خود حرکت کند و قادر به انجام حرکت در هر جهت دلخواهی نمی‌باشد. این قید غیرانتگرال‌پذیر سینماتیکی به عنوان قید غیرهولونومیک شناخته می‌شود. از سوی دیگر، هر پایه سیاری که دارای سه درجه آزادی در صفحه است به عنوان یک سیستم هولونومیک شناخته می‌شود [۱]. بدلیل پیچیدگی مدل‌سازی که از ماهیت غیرهولونومیک سیستم منبعث می‌شود، بیشتر محققین قبلی تنها حرکت هولونومیک پایه را در نظر می‌گرفتند [۲ و ۳]. ولی به منظور استفاده کامل از مزایای بالقوه منیپولاتورها با پایه متحرک، تحلیلگر به یک مدل دینامیکی واضح، کامل و دقیق از این دسته از سیستم‌های رباتیکی نیازمند است. در نظر گرفتن تأثیر متقابل بین منیپولاتور و پایه متحرک یک مسئله مهم در مدلسازی دینامیکی اینگونه از سیستمهاست که توسط لیو و لویس[۲] [۴]، واینز[۳] [۵]، مقداری و همکارانش [۶] و یاماموتو[۴] و همکارانش [۷] مورد مطالعه قرار گرفت. چن و زالزالا[۵] [۸] قیود غیرهولونومیکی که از طبیعت پایه ناشی می‌گردند را مورد بررسی قرار دادند. در این تحقیق، معادلات حاکم بر سیستم با استفاده از فرمولاسیون نیوتن-اویلر[۶] استخراج گردید. با این وجود تمامی قیود غیرهولونومیک حاکم بر اینگونه از سیستم‌ها در مدل آنها ارائه نشده است. برخی از محققین مانند کالباق[۷] [۹] این قیود را به همراه معادلات دینامیکی در نظر گرفتند ولی برخی دیگر همانند یاماموتو و همکارش [۱۰] بعد از در نظر گرفتن تمامی قیود غیرهولونومیک حاکم بر سیستم، از نوعی کاهش مختصات استفاده نمودند. در کار آنها، معادلات قیدی با استفاده از ضرایب لاگرانژ در معادلات حرکت سیستم لحاظ شده بود.

با استفاده از مکانیک لاگرانژی، قیود غیرهولونومیک و ضرایب لاگرانژ مرتبط با آن قبل از استخراج کامل معادلات دینامیکی غیر قابل حذف می‌باشند. تنها بعد از استخراج معادلات حرکت که با قیود ترکیب شده‌اند، تحلیلگر با انجام یکسری عملیات جبری پیچیده قادر به حذف ضرایب لاگرانژ[۸] می‌باشد. به منظور اجتناب از ضرایب لاگرانژ تنجوور و راجاگوپالا[۹] [۱۱] یک پایه متحرک را با استفاده از معادلات کین[۱۰] مورد بررسی قرار دادند. در این تحقیق آنها به مزایای استفاده از فرمولاسیون کین در مدلسازی پایه‌های متحرک و استفاده از ابزار مناسب جهت در نظر گرفتن قیود غیرهولونومیک اشاره نمودند. همچنین در [۱۲] یک مدل کامل برای یک منیپولاتور متحرک با استفاده از فرمولاسیون کین توسط تانر[۱۱] ارائه گردید. در این مقاله یک دسته معادله دینامیکی، همچنین یک دسته معادله قیدی برای منیپولاتور با پایه متحرک ارائه گردیده است. یک روش دیگر برای اجتناب از ضرایب لاگرانژ توسط ساها[۱۲] [۱۳] و انجلس[۱۳] [۱۴] ارائه شد که در آن دینامیک ربات سیار مورد مطالعه قرار گرفت. در این مقاله از مفهوم ماتریس متعامد تکامل

[1] Nonholonomic
[2] Liu, Lewis
[3] Wiens
[4] Yamamoto
[5] Chen, Zalzala
[6] Newton-Euler
[7] Colbaugh
[8] Lagrange Multipliers
[9] Thanjavur, Rajagopalan
[10] Kane
[11] Tanner
[12] Saha
[13] Angeles

یافته[1] برای استخراج معادلات دینامیک حرکت استفاده شده است.

معادلات حرکت ربات با پایه متحرک با استفاده از فرمولاسیون‌های متنوعی حل گردیده است. به عنوان مثال با استفاده از فرمولاسیون نیوتن-اویلر می‌توان به کار لی و ژائو[2] [۱۵]؛ با استفاده از فرمولاسیون لاگرانژ-دالامبر[3] به مقاله چانگ[4] [۱۶]؛ با استفاده از فرمولاسیون کین به تحقیق مقداری [۱۷] و با استفاده از فرمولاسیون لاگرانژ به مقاله کورایم[5] و همکارانش [۱۸] اشاره نمود. معادلات گیبس-اپل[6] یکی از اصولی است که از آن در حل دینامیک ربات‌ها بسیار کم استفاده شده است. وثوقی و همکارانش ربات‌های شبه مار را با استفاده از این فرمولاسیون مورد بررسی قرار گرفتند [۱۹]. همچنین می‌توان به تحقیق کورایم و شافعی اشاره نمود که در آن معادلات دینامیک ربات با n لینک الاستیک که در آن تمامی مفاصل دورانی بودند، مورد تحلیل قرار گرفت [۲۰]. در پایان به مقاله اسماعیل زاده خادم و پیرمحمدی می‌توان اشاره نمود که در آن یک زنجیره از n لینک الاستیک که دارای مفاصل دورانی-کشویی بودند با استفاده از فرمولاسیون گیبس-اپل مورد تحلیل دینامیکی قرار گرفت [۲۱].

همان‌گونه که پیشتر نیز بیان شد، این مقاله به استخراج معادلات حرکت یک منیپولاتور n لینکی با مفاصل دورانی-کشویی که بر روی یک پایه متحرک قرار دارد و روابط آن بر اساس روش گیبس-اپل بازگشتی استخراج گردیده است، می‌پردازد. بنابراین در ادامه ساختار مقاله به شکل زیر خواهد بود. در بخش دوم سینماتیک مسئله شامل سینماتیک منیپولاتور، سینماتیک پایه غیرهولونومیک و سینماتیک چرخ‌های سمت راست و چپ توضیح داده می‌شود. بخش سوم که خود شامل سه قسمت است به بررسی معادلات دینامیک معکوس سیستم به فرم بسته می‌پردازد. فرم بازگشتی این معادلات به منظور استخراج خودکار و سیستماتیک معادلات دینامیک معکوس سیستم در بخش چهارم مورد بررسی قرار می‌گیرد. یک شبیه سازی عددی به منظور نشان دادن توانایی این روش در استخراج معادلات حرکت ربات‌ها با درجات آزادی بالا در بخش پنجم ارائه گردیده است. در پایان در بخش ششم نتیجه‌گیری و مزایای این روش بیان گردیده است.

۲- سینماتیک منیپولاتور با پایه متحرک و مفاصل دورانی-کشویی

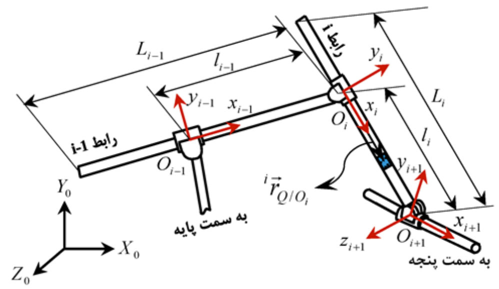
این بخش از سه قسمت تشکیل شده است. در ابتدا سینماتیک منیپولاتور با مفاصل دورانی-کشویی ارائه می‌گردد. سپس معادلات سینماتیکی پایه غیرهولونومیک مورد بررسی قرار می‌گیرد و در پایان سینماتیک چرخ‌های راست و چپ مورد ارزیابی قرار می‌گیرند.

۲-۱- سینماتیک منیپولاتور

در این بخش سینماتیک یک زنجیره از n لینک صلب که بوسیله مفاصل دورانی-کشویی بهم متصل گشته‌اند و کل مجموعه بر روی یک پایه متحرک قرار گرفته است، مورد بررسی قرار می‌گیرد. این پایه متحرک که بر روی زمین حرکت می‌کند تحت تأثیر قیود غیرهولونومیک قرار دارد. طبق قاعده زیر به هر لینک یک دستگاه مختصات اختصاص می‌یابد. $X_0Y_0Z_0$، چارچوب متصل به زمین است که در سینماتیک بازوی رباتیکی می‌توان آن را چارچوب مرجع در نظر گرفت. $x_iy_iz_i$ دستگاه مختصات متعلق به لینک iام را به‌گونه‌ای تعریف می‌کنیم که مبدأ آن چسبیده بر روی i امین مفصل دورانی-کشویی، محور x_i در امتداد طول رابط iام از مبدأ مختصات O_i به سمت مبدأ مختصات O_{i+1} و محور z_i آن به عنوان محور دوران iامین لینک در نظر گرفته شود. همچنین محور y_i تکمیل کننده دستگاه راستگرد $x_iy_iz_i$ می‌باشد.

در شکل ۱ المان دیفرانسیلی Q بر روی iامین بازو نشان داده شده است.

[1] Decoupled natural orthogonal complement
[2] Li, Zhao
[3] Lagrange-d'Alembert
[4] Chung
[5] Korayem
[6] Gibbs-Appell



شکل ۱- منیپولاتور با مفاصل رفت و برگشتی

موقعیت این المان دیفرانسیلی نسبت به دستگاه مختصات مرجع محلی رابط iام توسط بردار ${}^i\vec{r}_{Q/O_i}$ بیان می‌شود.

$$ {}^i\vec{r}_{Q/O_i} = \eta^{i}\vec{x}_i \tag{۱}$$

که در آن ${}^i\vec{x}_i = \{1 \quad 0 \quad 0\}^T$ است و η_i فاصله میان مبدأ O_i و المان دیفرانسیلی Q می‌باشد. شتاب مطلق المان دیفرانسیلی Q که در دستگاه مختصات رابط iام بیان شده است، به طریق زیر ارائه می‌گردد.

$$ \begin{aligned} {}^i\ddot{\vec{r}}_Q = {}^i\ddot{\vec{r}}_{O_i} + {}^i\ddot{\vec{r}}_{Q/O_i} + 2\,{}^i\vec{\omega}_i \times {}^i\dot{\vec{r}}_{Q/O_i} \\ + {}^i\dot{\vec{\omega}}_i \times {}^i\vec{r}_{Q/O_i} + {}^i\vec{\omega}_i \times \left({}^i\vec{\omega}_i \times {}^i\vec{r}_{Q/O_i}\right) \end{aligned} \tag{۲}$$

که در آن ${}^i\ddot{\vec{r}}_{O_i}$ شتاب مطلق مبدأ مختصات دستگاه متصل به مفصل iام، ${}^i\vec{\omega}_i$ و ${}^i\dot{\vec{\omega}}_i$ به ترتیب سرعت زاویه‌ای و شتاب زاویه‌ای رابط iام و ${}^i\dot{\vec{r}}_{Q/O_i}$ و ${}^i\ddot{\vec{r}}_{Q/O_i}$ به ترتیب سرعت و شتاب المان دیفرانسیلی Q نسبت به مبدأ مختصات دستگاه متصل به مفصل iام می‌باشند. دو ترم آخر به طریق زیر ارائه می‌گردند.

$$ {}^i\dot{\vec{r}}_{Q/O_i} = \dot{\eta}_i\,{}^i\vec{x}_i \tag{۳}$$

$$ {}^i\ddot{\vec{r}}_{Q/O_i} = \ddot{\eta}_i\,{}^i\vec{x}_i \tag{۴}$$

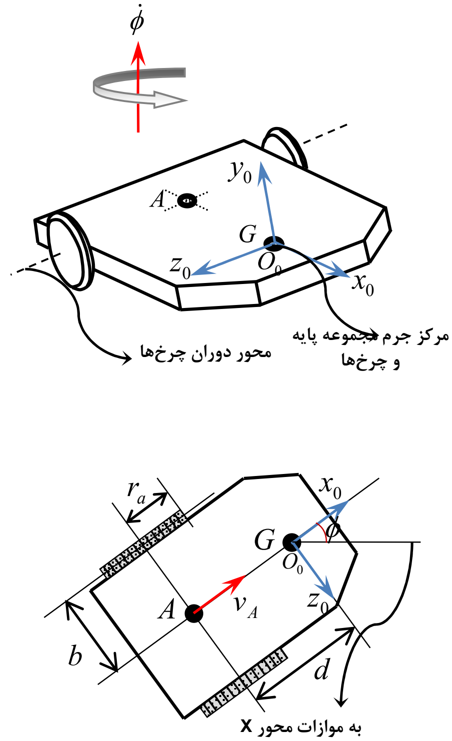
در بخش بعد معادله (۲) به منظور تشکیل انرژی شتاب سیستم (تابع گیبس) مربوط به حرکت لینک‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد.

۲-۲- سینماتیک پایه متحرک غیرهولونومیک

اکنون سینماتیک پایه ربات نشان داده شده در شکل ۲ ارائه می‌گردد.

عدم حرکت پایه در امتداد محور دوران چرخ‌ها باعث می‌شود تا سرعت نقطه A (نقطه تقاطع محور تقارن پایه ربات با محور دوران چرخ‌ها) نسبت به دستگاه مختصات $x_0y_0z_0$ (دستگاه مختصات متصل به پایه ربات) به فرم زیر ارائه گردد.

$$ {}^0\vec{v}_A = v_A\,{}^0\vec{x}_0 \tag{۵}$$



شکل ۲- پایه متحرک

سرعت زاویه‌ای پایه ربات در امتداد y_0 می‌باشد که به طریق زیر ارائه می‌گردد.

$$ {}^0\dot{\vec{\phi}} = \dot{\phi}\,{}^0\vec{y}_0 \tag{۶}$$

که در آن ${}^i\vec{y}_i = \{0 \quad 1 \quad 0\}^T$ است. اکنون با داشتن سرعت مطلق نقطه A و سرعت زاویه‌ای پایه، شتاب مطلق مرکز جرم مجموعه پایه و چرخ‌ها یعنی نقطه G نسبت به دستگاه $x_0y_0z_0$ به طریق زیر ارائه می‌گردد.

$$ {}^0\dot{\vec{v}}_G = \left(\dot{v}_A - d\dot{\phi}^2\right){}^0\vec{x}_0 - \left(v_A\dot{\phi} + d\ddot{\phi}\right){}^0\vec{z}_0 \tag{۷}$$

که در آن ${}^i\vec{z}_i = \{0 \quad 0 \quad 1\}^T$ می‌باشد. همچنین d فاصله بین نقطه A و G، $\dot{v}_A$ شتاب مطلق نقطه A و $\ddot{\phi}$ شتاب زاویه‌ای مربوط به پایه ربات می‌باشد. در بخش بعد معادله (۷) به منظور تشکیل تابع گیبس مربوط به پایه مورد استفاده قرار خواهد گرفت.

۲-۳- سینماتیک چرخ‌های سمت راست و چپ

با توجه به شرط عدم لغزش و قیود غیرهولونومیک حاکم بر این سیستم رباتیکی، سرعت مرکز چرخ‌های سمت راست و چپ به طریق زیر ارائه می‌گردد.

$$ {}^{0}\vec{v}_{R/L} = r_a \dot{\theta}_{R/L} \, {}^{0}\vec{x}_0 \qquad (۸) $$

که در آن r_a شعاع چرخ‌های متحرک و $\dot{\theta}_R$ و $\dot{\theta}_L$ به ترتیب سرعت زاویه‌ای چرخ‌های سمت راست و چپ می‌باشند. می‌توان معادله (۶) را بر حسب v_A و $\dot{\phi}$ به‌طریق زیر نیز ارائه نمود.

$$ {}^{0}\vec{v}_{R/L} = \left(v_A \pm b\dot{\phi}\right) {}^{0}\vec{x}_0 \qquad (۹) $$

که در آن b فاصله بین نقطه A و مرکز چرخ‌های متحرک می‌باشد. با توجه به معادلات (۸) و (۹)، $\dot{\theta}_R$ و $\dot{\theta}_L$ به فرم زیر ارزیابی می‌گردند.

$$ \dot{\theta}_{R/L} = \frac{1}{r_a}\left(v_A \pm b\dot{\phi}\right) \qquad (۱۰) $$

در بخش ۳ معادله (۱۰) به منظور محاسبه تابع گیبس مربوط به چرخ‌های متحرک و همچنین محاسبه نیروهای تعمیم یافته ناشی از اعمال گشتاورهایی که به چرخ‌های راست و چپ اعمال می‌گردد، مورد استفاده قرار می‌گیرند.

۳- معادلات دینامیک سیستم

این بخش از سه قسمت تشکیل شده است. در ابتدا انرژی شتاب سیستم محاسبه می‌گردد. سپس مشتقات جزئی انرژی شتاب سیستم نسبت به شبه شتاب‌ها ارائه می‌شود. و در پایان معادلات دینامیک معکوس این سیستم رباتیکی به فرم بسته مورد ارزیابی قرار می‌گیرد.

۳-۱- انرژی شتاب سیستم (تابع گیبس)

انرژی شتاب منیپولاتور با پایه متحرک از سه جزء اصلی تشکیل شده است. ۱) به دلیل حرکت لینک‌ها ۲) به دلیل حرکت پایه و ۳) به دلیل حرکت چرخ‌های محرک. برای محاسبه تابع انرژی شتاب لینک‌ها، در ابتدا انرژی شتاب برای یک المان دیفرانسیلی دلخواه بر روی رابط iام نوشته می‌شود. سپس انتگرال‌گیری از این انرژی شتاب دیفرانسیلی بر روی تمام طول لینک، کل انرژی شتاب مربوط به آن رابط را ایجاد می‌کند. با جمع کردن انرژی شتاب تک‌تک رابط‌ها، انرژی شتاب کل منیپولاتور بدست خواهد آمد.

$$ \begin{aligned} S_l &= \sum_{i=1}^{n} \int_{-(L_i - l_i)}^{l_i} \frac{1}{2}\mu_i(\eta)\left({}^{i}\ddot{\vec{r}}_Q^{\,T} \cdot {}^{i}\ddot{\vec{r}}_Q\right) d\eta \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n} \int_{-(L_i - l_i)}^{l_i} \frac{1}{2} {}^{i}\dot{\vec{\omega}}_i^{T} \cdot J_i(\eta)\, {}^{i}\dot{\vec{\omega}}_i \, d\eta \end{aligned} \qquad (۱۱) $$

که در آن L_i طول کل رابط iام، l_i طول آن بخش از لینک iام از مبدأ O_i به سمت مبدأ O_{i+1} و $\mu_i(\eta)$ و $J_i(\eta)$ به ترتیب جرم واحد طول و ممان اینرسی جرمی بر واحد طول برای بازوی iام می‌باشند. با وارد کردن معادله (۲) در رابطه (۱۱) عبارت زیر برای انرژی شتاب منیپولاتور بدست خواهد آمد.

$$ \begin{aligned} S_l &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} B_{0i} \, {}^{i}\ddot{\vec{r}}_{O_i}^{\,T} \cdot {}^{i}\ddot{\vec{r}}_{O_i} + {}^{i}\ddot{\vec{r}}_{O_i}^{\,T} \cdot {}^{i}\vec{B}_{1i} - 2\, {}^{i}\ddot{\vec{r}}_{O_i}^{\,T} \cdot B_{2i} \, {}^{i}\vec{\omega}_i \\ &- {}^{i}\ddot{\vec{r}}_{O_i}^{\,T} \cdot B_{3i} \, {}^{i}\dot{\vec{\omega}}_i - {}^{i}\ddot{\vec{r}}_{O_i}^{\,T} \cdot {}^{i}\tilde{\omega}_i B_{3i} \, {}^{i}\vec{\omega}_i + \frac{1}{2} B_{4i} \\ &- {}^{i}\vec{\omega}_i^{T} \cdot B_{5i} \, {}^{i}\vec{\omega}_i + 2\, {}^{i}\dot{\vec{\omega}}_i^{T} \cdot B_{6i} \, {}^{i}\vec{\omega}_i + {}^{i}\dot{\vec{\omega}}_i^{T} \cdot {}^{i}\tilde{\omega}_i B_{7i} \, {}^{i}\vec{\omega}_i \\ &+ \frac{1}{2} {}^{i}\dot{\vec{\omega}}_i^{T} \cdot \left(B_{7i} + B_{8i}\right) {}^{i}\dot{\vec{\omega}}_i + irrelevant\ \ terms \end{aligned} \qquad (۱۲) $$

که در آن

$$ \begin{aligned} & B_{0i} = \int_{-(L_i - l_i)}^{l_i} \mu_i \, d\eta_i && {}^{i}\vec{B}_{1i} = B_{0i} \, \ddot{\eta}_i \, {}^{i}\vec{x}_i \\ & B_{2i} = B_{0i} \, \dot{\eta}_i \, {}^{i}\tilde{x}_i && B_{3i} = \int_{-(L_i - l_i)}^{l_i} \mu_i \, \eta_i \, {}^{i}\tilde{x}_i \, d\eta_i \\ & B_{4i} = B_{0i} \, \ddot{\eta}_i^{2} && B_{5i} = B_{3i} \, \ddot{\eta}_i \, {}^{i}\tilde{x}_i^{T} \\ & B_{6i} = B_{3i} \, \dot{\eta}_i \, {}^{i}\tilde{x}_i^{T} && B_{7i} = \int_{-(L_i - l_i)}^{l_i} \mu_i \, \eta_i^{2} \, {}^{i}\tilde{x}_i \, {}^{i}\tilde{x}_i^{T} \, d\eta_i \\ & B_{8i} = \int_{-(L_i - l_i)}^{l_i} J_i \, d\eta_i \end{aligned} \qquad (۲۱-۱۳) $$

همچنین ${}^{i}\tilde{x}_i$ و ${}^{i}\tilde{\omega}_i$ به ترتیب ماتریس‌های پاد متقارن مربوط به بردارهای ${}^{i}\vec{x}_i$ و ${}^{i}\vec{\omega}_i$ می‌باشند. در معادله (۱۲) جمله‌ای تحت عنوان "ترم‌های نامربوط" وجود دارد. از آنجا که برای تشکیل معادلات حرکت بایستی مشتق جزئی تابع گیبس نسبت به شبه شتاب‌ها محاسبه گردد، لذا در انرژی شتاب می‌توان از ترم‌هایی که شامل شبه شتاب‌ها نیستند؛ صرفنظر نمود. در ادامه به محاسبه تابع گیبس چرخ‌های محرک و پایه متحرک می‌پردازیم. تابع گیبس مربوط به پایه و چرخ‌ها به طریق زیر ارائه می‌گردد.

$$ \begin{aligned} S_p + S_w &= \frac{1}{2} I_{pw} \ddot{\phi}^2 + \frac{1}{2} I_w \left(\ddot{\theta}_R^2 + \ddot{\theta}_L^2\right) \\ &\quad + \frac{1}{2} M_{pw} \left[\left(\dot{v}_A - d\dot{\phi}^2\right)^2 + \left(v_A \dot{\phi} + d\ddot{\phi}\right)^2\right] \end{aligned} \qquad (۲۲) $$

که در آن M_{pw} جرم مجموعه پایه و چرخ‌های محرک؛ I_{pw} ممان اینرسی مجموعه پایه و چرخ‌های محرک (حول محوری

عمودی که از مرکز جرم مجموعه پایه و چرخ‌ها می‌گذرد) و I_w ممان اینرسی چرخ‌های راست و چپ (حول محور دوران چرخ ها) می‌باشد. جمع روابط (۱۲ و ۲۲) انرژی شتاب کل مجموعه را در پی خواهد داشت.

۳-۲- مشتقات تابع گیبس نسبت به شبه شتاب‌ها

همانگونه که در بالا نیز اشاره شد، یک بخش از معادلات دینامیکی سیستمهای رباتیکی با استفاده از فرمولاسیون گیبس-اپل با مشتق جزئی گرفتن از تابع گیبس نسبت به شبه شتاب‌ها بدست خواهد آمد. بنابراین یک دسته شبه سرعت مستقل بایستی انتخاب گردد. در این مقاله، سرعت نقطه A یعنی v_A؛ سرعت زاویه‌ای پایه متحرک یعنی $\dot{\phi}$، سرعت زاویه‌ای مفاصل رابطها یعنی $\dot{q}_i$ها و سرعت خطی آنها یعنی $\dot{\eta}_i$ها به عنوان شبه سرعت‌های مستقل انتخاب می‌گردد.

در تابع گیبس تنها ${}^i\ddot{\vec{r}}_{O_i}$ و ${}^i\dot{\vec{\omega}}_i$ تابعی از $\ddot{q}_j$ هستند. بنابراین مشتق جزئی تابع گیبس نسبت به $\ddot{q}_j$ نتیجه می‌دهد:

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_j}=\sum_{i=j+1}^{n}\frac{\partial {}^i\ddot{\vec{r}}_{O_i}^{T}}{\partial \ddot{q}_j}\cdot {}^i\vec{S}_i+\sum_{i=j}^{n}\frac{\partial {}^i\dot{\vec{\omega}}_i^{T}}{\partial \ddot{q}_j}\cdot {}^i\vec{T}_i \qquad (۲۳)$$

که در آن

$${}^i\vec{S}_i=B_{0i}\,{}^i\ddot{\vec{r}}_{O_i}+{}^i\vec{B}_{1i}-2B_{2i}\,{}^i\vec{\omega}_i-B_{3i}\,{}^i\dot{\vec{\omega}}_i-{}^i\tilde{\omega}_i B_{3i}\,{}^i\vec{\omega}_i \qquad (۲۴)$$

$${}^i\vec{T}_i=B_{3i}\,{}^i\ddot{\vec{r}}_{O_i}+2B_{6i}\,{}^i\vec{\omega}_i+\left(B_{7i}+B_{8i}\right){}^i\dot{\vec{\omega}}_i+{}^i\tilde{\omega}_i B_{7i}\,{}^i\vec{\omega}_i \qquad (۲۵)$$

مشتق جزئی تابع گیبس نسبت به $\ddot{\eta}_j$ کمی پیچیده‌تر است. زیرا علاوه بر ${}^i\ddot{\vec{r}}_{O_i}$، ترم‌های ${}^i\vec{B}_{1i}$، B_{4i} و B_{5i} نیز تابعی از $\ddot{\eta}_j$ می‌باشند. بنابراین:

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{\eta}_j}=\sum_{i=j+1}^{n}\frac{\partial {}^i\ddot{\vec{r}}_{O_i}^{T}}{\partial \ddot{\eta}_j}\cdot {}^i\vec{S}_i+{}^j\ddot{\vec{r}}_{O_j}^{T}\cdot B_{0j}\,{}^j\vec{x}_j$$
$$+B_{0j}\,\ddot{\eta}_j-{}^j\vec{\omega}_j^{T}\cdot B_{3j}\,{}^j\tilde{x}_j^{T}\,{}^j\vec{\omega}_j \qquad (۲۶)$$

از آنجایی که ${}^i\dot{\vec{\omega}}_i$ مستقل از $\dot{v}_A$ است، مشتق پاره‌ای تابع گیبس نسبت $\dot{v}_A$ به طریق زیر ارائه می‌گردد.

$$\frac{\partial S}{\partial \dot{v}_A}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial {}^i\ddot{\vec{r}}_{O_i}^{T}}{\partial \dot{v}_A}\cdot {}^i\vec{S}_i$$
$$+\left(M_{pw}+\frac{2I_w}{r_a^2}\right)\dot{v}_A-M_{pw}d\dot{\phi}^2 \qquad (۲۷)$$

و در پایان مشتق جزئی تابع گیبس نسبت به شتاب زاویه‌ای پایه یعنی $\ddot{\phi}$ به شکل زیر ارائه می‌گردد.

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{\phi}}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial {}^i\ddot{\vec{r}}_{O_i}^{T}}{\partial \ddot{\phi}}\cdot {}^i\vec{S}_i+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial {}^i\dot{\vec{\omega}}_i^{T}}{\partial \ddot{\phi}}\cdot {}^i\vec{T}_i$$
$$+M_{pw}d\left(d\ddot{\phi}+v_A\dot{\phi}\right)+\left(I_{pw}+2I_w\left(\frac{b^2}{r_a^2}\right)\right)\ddot{\phi} \qquad (۲۸)$$

در اینجا باید به این نکته اشاره شود که در معادلات بالا از این خاصیت ماتریس‌های پاد متقارن که $a^T=-a$ استفاده شده است.

۳-۳- معادلات دینامیک معکوس به شکل بسته

معادلات سیستم رباتیکی مذکور با در نظر گرفتن نیروهای تعمیم یافته مربوط به گرانش زمین و دیگر نیروهای خارجی که به سیستم وارد می‌گردد، کامل خواهد گشت. تأثیر بارگذاری گرانش بر رابطها را می‌توان به سادگی با قرار دادن ${}^0\ddot{\vec{r}}_{O_0}=g\,{}^0\vec{y}_0$ در نظر گرفت؛ که در آن g ترم مربوط به گرانش است. در این صورت می‌توان فرض نمود که پایه ربات با شتاب $1g$ به سوی بالا حرکت می‌کند. بنابراین بدون هیچگونه محاسبات اضافی تأثیر بارگذاری گرانش لحاظ می‌گردد. در این مقاله فرض بر آن است که هیچ‌گونه باری بر روی لینک‌ها اعمال نمی‌گردد. لذا تنها نیروهای خارجی اعمالی به این سیستم دینامیکی عبارتند از گشتاور τ_j (که به j امین مفصل دورانی اعمال می‌گردد)، نیروی F_j (که به j امین مفصل کشویی اعمال می‌گردد) و گشتاورهای τ_R و τ_L که به ترتیب به چرخ‌های سمت راست و چپ اعمال می‌گردد. با این فرض، نیروهای تعمیم یافته مربوط به k امین شبه سرعت به طریق زیر محاسبه می‌گردد.

$$U_k=\sum_{i=1}^{n}\dot{q}_i^k\,\tau_i+\sum_{i=1}^{n}\dot{\eta}_i^k\,F_i+\dot{\theta}_R^k\,\tau_R+\dot{\theta}_L^k\,\tau_L$$
$$k=\dot{q}_1,\dot{q}_2,\ldots,\dot{q}_n,\dot{\eta}_1,\dot{\eta}_2,\ldots,\dot{\eta}_n,v_A,\dot{\phi} \qquad (۲۹)$$

که در آن U_k مشتق گیری نسبت به kامین شبه سرعت را نشان می‌دهد. اکنون معادلات حرکت ربات متحرک با مفاصل دورانی-کشویی با استفاده از فرمولاسیون گیبس-اپل به طریق زیر کامل می‌گردد.

- معادله حرکت مربوط به j امین مفصل دورانی

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{q}_j}=\tau_j \qquad j=1,2,\ldots\ldots,n \qquad (۳۰)$$

- معادله حرکت مربوط به j امین مفصل کشویی

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{\eta}_j}=F_j \qquad j=1,2,\ldots\ldots,n \qquad (۳۱)$$

• معادله حرکت مربوط به حرکت انتقالی پایه

$$\frac{\partial S}{\partial \dot{v}_A}=\frac{1}{r_a}\left(\tau_R+\tau_L\right) \qquad (۳۲)$$

• معادله حرکت مربوط به حرکت دورانی پایه

$$\frac{\partial S}{\partial \ddot{\phi}}=\frac{b}{r_a}\left(\tau_R-\tau_L\right) \qquad (۳۳)$$

معادلات بالا به فرم دینامیک معکوس می‌باشند. در این نوع دینامیک با دانستن یک حالت مشخص از پیکربندی ربات (موقعیت، سرعت و شتاب) گشتاور و نیروهای اعمالی به مفاصل به راحتی بدست خواهد آمد.

۴- معادلات دینامیک معکوس به فرم بازگشتی

در بخش قبل، معادلات دینامیک معکوس یک منیپولاتور n لینکی با مفاصل دورانی-کشویی که بر روی یک پایه متحرک غیرهولونومیک نصب شده است، مورد بررسی قرار گرفت. به منظور استخراج سیستماتیک و خودکار معادلات حرکت اینگونه از ربات‌ها و بهبود راندمان محاسباتی، ارائه یک فرمولاسیون بازگشتی اجتناب ناپذیر است. به منظور تحقق هدف این بخش، در ابتدا فرم مجموع عبارات ${}^i\ddot{\vec{r}}_{O_i}$ و ${}^i\dot{\vec{\omega}}_i$ بایستی ارائه گردد. با در اختیار داشتن این جملات به صورت مجموع، امکان محاسبه مشتقات جزئی ${}^i\ddot{\vec{r}}_{O_i}$ و ${}^i\dot{\vec{\omega}}_i$ نسبت به $\ddot{q}_j$، $\ddot{\eta}_j$ $\dot{v}_A$ و $\ddot{\phi}$ که در معادلات (۲۳، ۲۶- ۲۸) ظاهر گشته‌اند، میسر می‌گردد.

شتاب مطلق مبدأ دستگاه مختصات مرجع محلی جسم iام به شکل زیر ارائه می‌گردد.

$$\begin{aligned}{}^i\ddot{\vec{r}}_{O_i}={}^iR_{i-1}\Big({}^{i-1}\ddot{\vec{r}}_{O_{i-1}}+\ddot{\eta}_{i-1}{}^{i-1}\vec{x}_{i-1}\\ +2\,{}^{i-1}\vec{\omega}_{i-1}\times\dot{\eta}_{i-1}{}^{i-1}\vec{x}_{i-1}+{}^{i-1}\dot{\vec{\omega}}_{i-1}\times\eta_{i-1}{}^{i-1}\vec{x}_{i-1}\\ +{}^{i-1}\vec{\omega}_{i-1}\times\left({}^{i-1}\vec{\omega}_{i-1}\times\eta_{i-1}{}^{i-1}\vec{x}_{i-1}\right)\Big)\end{aligned} \qquad (۳۴)$$

در حالی‌که شتاب زاویه‌ای رابط iام عبارت است از:

$${}^i\dot{\vec{\omega}}_i={}^iR_{i-1}{}^{i-1}\dot{\vec{\omega}}_{i-1}+{}^iR_{i-1}{}^{i-1}\vec{\omega}_{i-1}\times{}^i\vec{z}_i\dot{q}_i+{}^i\vec{z}_i\ddot{q}_i \qquad (۳۵)$$

که در آن ${}^jR_i$ ماتریس دورانی است که جهتگیری iامین دستگاه مختصات مرجع محلی را نسبت به jامین دستگاه محلی نشان می‌دهد. این ماتریس به فرم بازگشتی به طریق زیر ارائه می‌گردد.

$${}^jR_i={}^jR_{i-1}A_i \qquad (۳۶)$$

در رابطه بالا A_i، ماتریس دوران iامین مفصل می‌باشد که جهت‌گیری دستگاه $x_iy_iz_i$ را نسبت به دستگاه $x_{i-1}y_{i-1}z_{i-1}$ نشان می‌دهد. درایه‌های این ماتریس تنها تابعی از q_i می‌باشند که در آن q_i مختصات تعمیم یافته مربوط به i امین مفصل می‌باشد.

معادله (۳۴) و (۳۵) فرم بازگشتی عبارات مربوط به ${}^i\ddot{\vec{r}}_{O_i}$ و ${}^i\dot{\vec{\omega}}_i$ را نشان می‌دهد. تبدیل این معادلات به صورت مجموع روابط زیر را در پی دارد.

$${}^i\ddot{\vec{r}}_{O_i}={}^i\ddot{\vec{r}}_{O_{s,i}}+{}^i\ddot{\vec{r}}_{O_{v,i}} \qquad (۳۷)$$

$${}^i\dot{\vec{\omega}}_i={}^i\dot{\vec{\omega}}_{s,i}+{}^i\dot{\vec{\omega}}_{v,i} \qquad (۳۸)$$

که در آن ${}^i\ddot{\vec{r}}_{O_{s,i}}$ و ${}^i\dot{\vec{\omega}}_{s,i}$ نماینده آن دسته از ترم‌های تشکیل دهنده ${}^i\ddot{\vec{r}}_{O_i}$ و ${}^i\dot{\vec{\omega}}_i$ هستند که حاوی شبه شتاب‌های $\ddot{q}_j$، $\ddot{\eta}_j$، $\dot{v}_A$ و $\ddot{\phi}$ می‌باشند؛ در حالی‌که ${}^i\ddot{\vec{r}}_{O_{v,i}}$ و ${}^i\dot{\vec{\omega}}_{v,i}$ آن بخش از جملات تشکیل دهنده ${}^i\ddot{\vec{r}}_{O_i}$ و ${}^i\dot{\vec{\omega}}_i$ هستند که شامل شبه شتاب‌ها نمی‌شوند. این جملات به صورت زیر ارائه می‌گردند.

$$\begin{aligned}{}^i\ddot{\vec{r}}_{O_{s,i}}&=\sum_{k=1}^{i-1}{}^iR_k\left({}^k\ddot{\vec{r}}_{O_{k+1}/O_k}+{}^k\dot{\vec{\omega}}_{s,k}\times{}^k\vec{r}_{O_{k+1}/O_k}\right)\\ &\quad+{}^iR_0\left(\dot{v}_A{}^0\vec{x}_0-d\ddot{\phi}{}^0\vec{z}_0\right)\end{aligned} \qquad (۳۹)$$

$$\begin{aligned}{}^i\ddot{\vec{r}}_{O_{v,i}}&=\sum_{k=1}^{i-1}{}^iR_k\Big({}^k\dot{\vec{\omega}}_{v,k}\times{}^k\vec{r}_{O_{k+1}/O_k}\\ &\quad+{}^k\vec{\omega}_k\times\left(2\,{}^k\dot{\vec{r}}_{O_{k+1}/O_k}+{}^k\vec{\omega}_k\times{}^k\vec{r}_{O_{k+1}/O_k}\right)\Big)\\ &\quad+{}^iR_0\left(-d\dot{\phi}^2\,{}^0\vec{x}_0+g_y{}^0\vec{y}_0-v_A\dot{\phi}{}^0\vec{z}_0\right)\end{aligned} \qquad (۴۰)$$

$${}^i\dot{\vec{\omega}}_{s,i}={}^iR_0{}^0\vec{y}_0\ddot{\phi}+\sum_{k=1}^{i}{}^iR_k{}^k\vec{z}_k\ddot{q}_k \qquad (۴۱)$$

$${}^i\dot{\vec{\omega}}_{v,i}=\sum_{k=0}^{i-1}{}^iR_k{}^k\vec{\omega}_k\times{}^iR_{k+1}{}^{k+1}\vec{z}_{k+1}\dot{q}_{k+1} \qquad (۴۲)$$

که در آن ${}^k\vec{r}_{O_{k+1}/O_k}$ بردار موقعیت مبدأ دستگاه مختصات ($k+1$)امین نسبت به مبدأ O_k می‌باشد. این ترم به شکل زیر ارائه می‌گردد.

$${}^k\vec{r}_{O_{k+1}/O_k}=l_k\,{}^k\vec{x}_k \qquad (۴۳)$$

همچنین ${}^k\dot{\vec{r}}_{O_{k+1}/O_k}$ و ${}^k\ddot{\vec{r}}_{O_{k+1}/O_k}$ به ترتیب سرعت و شتاب O_{k+1} نسبت به مبدأ دستگاه مختصات kام می‌باشند. این دو جمله نیز به صورت زیر ارائه می‌گردند.

$${}^k\dot{\vec{r}}_{O_{k+1}/O_k}=\dot{\eta}_k\,{}^k\vec{x}_k \qquad (۴۴)$$

$${}^k\ddot{\vec{r}}_{O_{k+1}/O_k}=\ddot{\eta}_k\,{}^k\vec{x}_k \qquad (۴۵)$$

اکنون به کمک روابط (۳۹) و (۴۱)، مشتقات جزئی ${}^i\ddot{\vec{r}}_{O_i}$ و ${}^i\dot{\vec{\omega}}_i$ نسبت به شبه شتاب‌ها به طریق زیر ارائه می‌گردد.

$$\frac{\partial\,{}^i\dot{\vec{\omega}}_i}{\partial\ddot{q}_j}={}^iR_j{}^j\vec{z}_j \qquad (۴۶)$$

$$\frac{\partial\,{}^i\dot{\vec{\omega}}_i}{\partial\ddot{\phi}}={}^iR_0{}^0\vec{y}_0 \qquad (۴۷)$$

$$\frac{\partial {}^i\ddot{\vec{r}}_{O_i}}{\partial \ddot{q}_j} = {}^iR_j\,{}^j\vec{z}_j \times {}^i\vec{r}_{O_i/O_j} \tag{۴۸}$$

$$\frac{\partial {}^i\ddot{\vec{r}}_{O_i}}{\partial \dot{v}_A} = {}^iR_0\,{}^0\vec{x}_0 \tag{۴۹}$$

$$\frac{\partial {}^i\ddot{\vec{r}}_{O_i}}{\partial \ddot{\phi}} = -{}^iR_0 d\,{}^0\vec{z}_0 + {}^iR_0\,{}^0\vec{y}_0 \times {}^i\vec{r}_{O_i/O_1} \tag{۵۰}$$

$$\frac{\partial {}^i\ddot{\vec{r}}_{O_i}}{\partial \ddot{\eta}_j} = {}^iR_j\,{}^j\vec{x}_j \tag{۵۱}$$

در روابط بالا ${}^i\vec{r}_{O_i/O_j}$ بردار موقعیت iامین مبدأ مختصات مرجع محلی نسبت به jامین مبدأ مختصات مرجع محلی را نشان می‌دهد که در آن $(i > j)$.

استخراج بازگشتی معادلات دینامیک معکوس نیازمند مراحلی است که در این بخش به آنها پرداخته می‌شود. در معادله مربوط به مفاصل دورانی، با جایگذاری روابط (۴۶) و (۴۸) در معادله (۳۰) و تبدیل آن به یک رابطه بازگشتی نتیجه زیر حاصل می‌گردد.

$${}^j\vec{z}_j^T \cdot {}^j\vec{\chi}_j = \tau_j \tag{۵۲}$$

که در آن

$${}^j\vec{\chi}_j = {}^j\vec{T}_j + {}^j\tilde{r}_{O_{j+1}/O_j}\,{}^j\vec{\Phi}_j + {}^jR_{j+1}\,{}^{j+1}\vec{\chi}_{j+1} \tag{۵۳}$$

$${}^j\vec{\Phi}_j = {}^jR_{j+1}\left({}^{j+1}\vec{S}_{j+1} + {}^{j+1}\vec{\Phi}_{j+1}\right) \tag{۵۴}$$

در معادله مربوط به حرکت رفت و برگشتی مفاصل، با وارد کردن معادله (۵۱) در معادله (۳۱) و تبدیل آن به یک رابطه بازگشتی عبارت معادل زیر بدست خواهد آمد.

$$\begin{gathered} {}^j\vec{x}_j^T \cdot {}^j\vec{\Phi}_j + {}^j\ddot{\vec{r}}_{O_j}^T \cdot B_{0j}\,{}^j\vec{x}_j + B_{0j}\,\ddot{\eta}_j \\ -{}^j\vec{\omega}_j^T \cdot B_{3j}\,{}^j\tilde{x}_j^T\,{}^j\vec{\omega}_j = F_j \end{gathered} \tag{۵۵}$$

همانند مرحله قبل، با وارد کردن معادله (۴۹) در معادله مربوط به حرکت انتقالی پایه یعنی معادله (۳۲) و تبدیل آن به یک رابطه بازگشتی، عبارت معادل زیر برای حرکت انتقالی پایه بدست خواهد آمد.

$$\begin{gathered} {}^0\vec{x}_0^T \cdot {}^0\vec{\Phi}_0 + \left(M_{pw} + \frac{2I_w}{r_a^2}\right)\dot{v}_A - M_{pw} d\dot{\phi}^2 \\ = \frac{1}{r_a}\left(\tau_R + \tau_L\right) \end{gathered} \tag{۵۶}$$

در پایان برای تبدیل معادله مربوط به حرکت دورانی پایه به یک رابطه بازگشتی، روابط (۴۷ و ۵۰) را در معادله (۳۳) جایگذاری نموده که در اینصورت عبارت معادل زیر برای حرکت دورانی پایه حاصل خواهد گشت.

$$\begin{gathered} {}^0\vec{y}_0^T \cdot {}^0R_1\,{}^1\vec{\chi}_1 - d\,{}^0\vec{z}_0^T \cdot {}^0\vec{\Phi}_0 + M_{pw} d\left(d\ddot{\phi} + v_A\dot{\phi}\right) \\ + \left(I_{pw} + 2I_w\left(\frac{b^2}{r_a^2}\right)\right)\ddot{\phi} = \frac{b}{r_a}\left(\tau_R - \tau_L\right) \end{gathered} \tag{۵۷}$$

معادلات (۵۲، ۵۵-۵۷) فرم بازگشتی معادلات دینامیک معکوس منیپولاتور با پایه متحرک را نشان می‌دهد.

۵- شبیه‌سازی عددی

در این قسمت نتایج شبیه‌سازی برای یک منیپولاتور با دو مفصل دورانی-کشویی که بر روی یک پایه متحرک نصب شده است، ارائه می‌گردد. شکل ۳ ربات مورد نظر را نشان می‌دهد. همچنین تمامی پارامترهای مورد نیاز برای شبیه‌سازی در جدول ۱ ارائه گردیده است که در آن I همان ماتریس یکه می‌باشد. نیرو و گشتاور اعمالی به مفاصل نیز به صورت زیر ارائه می‌گردند.

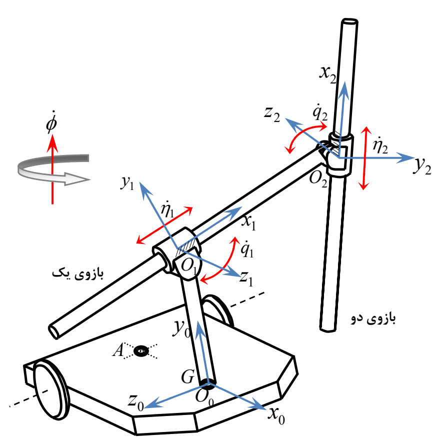
$$\begin{cases} if\ t \ge 0 \,\&\, t < 0.5 & \tau = 0.5N.m,\ F = 0.5N \\ if\ t \ge 0.5 \,\&\, t < 1 & \tau = -0.5N.m,\ F = -0.5N \\ elseif\ t \ge 1 \,\&\, t \le 1.5 & \tau = 0N.m,\ F = 0N \end{cases}$$

در ضمن شرایط اولیه به‌صورت زیر فرض می‌شود.

$$\dot{q}_1 = \dot{q}_2 = \dot{\eta}_1 = \dot{\eta}_2 = x_A = v_A = \phi = \dot{\phi}\Big|_{t=0} = 0$$

$$q_1\Big|_{t=0} = -\frac{\pi}{3},\ q_2\Big|_{t=0} = \frac{2\pi}{3},\ ,\ l_1\Big|_{t=0} = 0.7,\ l_2\Big|_{t=0} = 0.5$$

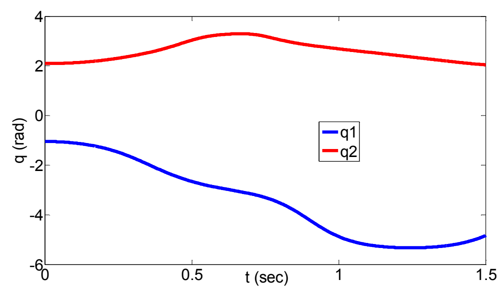
در ادامه در شکل‌های ۴-۷ پاسخ زمانی منیپولاتور نشان داده شده است. معادلات با استفاده از دستور ode45 در نرم افزار متلب حل شده است.



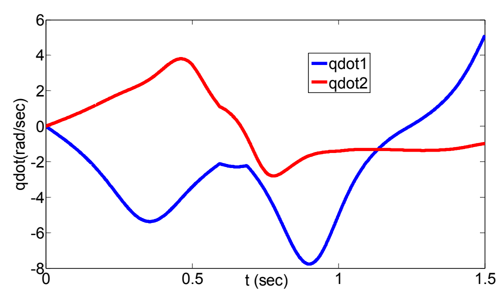
شکل ۳- ربات با دو مفصل دورانی-کشویی بر روی پایه متحرک

جدول ۱ پارامترهای مورد نیاز برای شبیه‌سازی

پارامتر	مقدار	واحد
$L_1 = L_2$	1	m
$\mu_1 = \mu_2$	1	$kg \cdot m^{-1}$
$J_1 = J_2$	$I \times 0.0008$	$kg \cdot m$
g	10	$m \cdot s^{-2}$
I_w	0.001	$kg \cdot m^2$
I_{pw}	0.06363	$kg \cdot m^2$
M_{pw}	6.64	kg
d	0.2	m
H	0.2	m
r_a	0.08	m
b	0.145	m
τ_R	0.1	$N \cdot m$
τ_L	0.2	$N \cdot m$

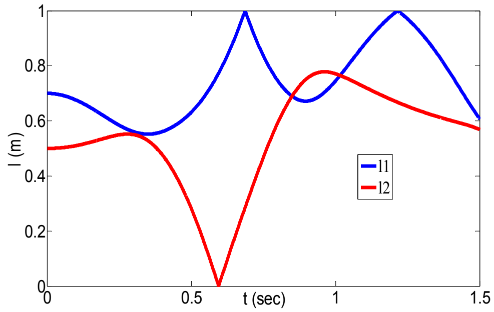


شکل ۴- موقعیت زاویه‌ای بازوها

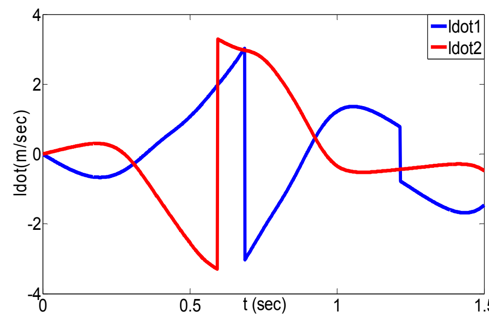


شکل ۵- سرعت زاویه‌ای بازوها

همان‌گونه که در نتایج شبیه‌سازی دینامیکی مشاهده می‌گردد، یک قید برای حرکت لینک‌ها در نظر گرفته شده است. زمانی که لینک به ابتدا یا انتهای طول خود می‌رسد

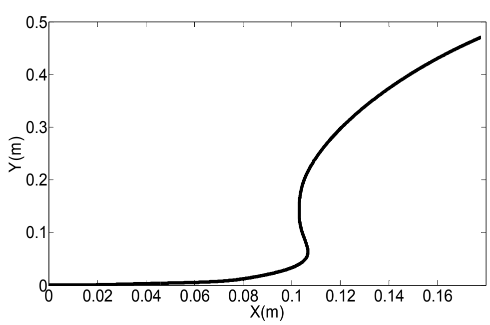


شکل ۶- موقعیت طولی لینک‌ها

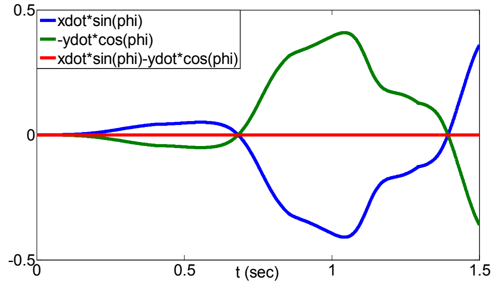


شکل ۷- سرعت طولی لینک‌ها

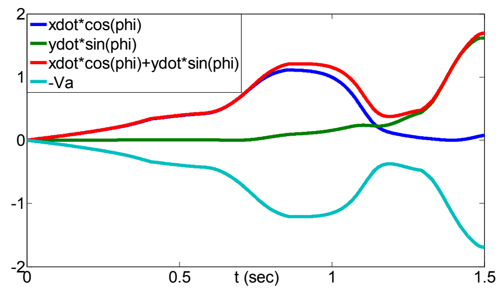
($l_i = 0$ یا $l_i = L_i$)، آنگاه با سرعتی برابر با منفی مقداری که به ابتدا یا انتهای خود رسیده است، در خلاف جهت ادامه حرکت می‌دهد (شکل ۷). اگر این قید در نظر گرفته نشود، آنگاه ممکن است که در شبیه سازی با مواردی چون ($l_i < 0$ یا $l_i > L_i$) برخورد نماییم که از لحاظ فیزیکی بی معنا است. در ادامه در شکل‌های ۸-۱۱ پاسخ مربوط به پایه ارائه می‌گردد.



شکل ۸- مسیر حرکت ربات در صفحه XY



شکل ۹- مسیر حرکت ربات در صفحه XY



شکل ۱۰- مسیر حرکت ربات در صفحه XY

شکل ۸ مسیر حرکت پایه را نشان می‌دهد. همان‌گونه که قبلاً نیز اشاره شد، پایه تحت تأثیر دو قید غیرهولونومیک قرار دارد. اگر چه در روش گیبس-اپل نیازی به در نظر گرفتن معادلات قیدی نیست، ولی این دو معادله قیدی عبارتند از:

$$\dot{x}_A \sin\phi - \dot{y}_A \cos\phi = 0 \qquad (۵۸)$$

$$\dot{x}_A \cos\phi + \dot{y}_A \sin\phi = \frac{r}{2}\left(\dot{\theta}_R + \dot{\theta}_L\right) = \dot{v}_A \qquad (۵۹)$$

که در آن $\dot{x}_A$ و $\dot{y}_A$ به‌ترتیب مؤلفه‌های سرعت نقطه A در جهت‌های X_0 و Y_0 را نشان می‌دهد. در شکل‌های (۹) و (۱۰) این دو معادله قیدی رسم شده‌اند. با توجه به این دو شکل، نتیجه می‌شود که معادلات قیدی در طول زمان شبیه‌سازی کاملاً ارضا شده‌اند. در پایان به منظور بررسی کارآیی الگوریتم بازگشتی پیشنهادی، زمان مورد نیاز برای استخراج معادلات حرکت و حل آنها برای سیستم نشان داده شده، بایستی ارائه گردد. زمان مورد نیاز برای مدت زمان شبیه سازی 1.5s که توسط کامپیوتری با مشخصات Intel CoreTM 2 Duo E7500 @ 3GHz ®Processor) انجام پذیرفته است، *34.32s* می‌باشد. این زمان با استفاده از دستور تیک و تاک نرم افزار متلب که به ابتدا و انتهای برنامه افزوده شده است، بدست آمده است.

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله یک روش بازگشتی بر اساس فرمولاسیون G-A برای استخراج معادلات دینامیک معکوس ربات سیار با مفاصل دورانی-کشویی آورده شده است. از این روش برای طراحی سیستم کنترل و شبیه‌سازی معادلات حرکت می‌توان استفاده کرد. مزیت عمده این روش نسبت به روش‌های قبل کاهش حجم محاسبات به میزان قابل ملاحظه‌ای می‌باشد که منجر به صرف زمان کمتری برای بررسی رفتار دینامیکی مدل می‌گردد. به‌عنوان کارهای آینده می‌توان از این روش برای استخراج معادلات حرکت ربات با لینک الاستیک که دارای مفاصل دورانی-کشویی می‌باشد، استفاده کرد. همچنین در گام‌های بعد می‌توان ربات‌هایی که مفاصل آنها نیز الاستیک می‌باشند با این روش مورد بررسی قرار داد.

منابع

[1] Holmberg R, Khatib O (2000) Development and control of a holonomic mobile robot for mobile manipulation tasks. International Journal of Robotics Research 19(11): 1066–1074.

[2] Tarn TJ, Yang SP (1997) Modeling and control for underwater robotic manipulators-An example. IEEE Int Conf Robotics and Automation, Albuquerque, New Mexico: 2166–2171.

[3] Dubowsky S, Vance EE (1989) Planning mobile manipulator motions considering vehicle dynamic stability constraints. IEEE Int Conf Robotics and Automation: 1271–1276.

[4] Liu K, Lewis FL (1990) Decentralized continuous robust controller for mobile robots. IEEE Int Conf Robotics and Automation: 1822–1827.

[5] Wiens GJ (1989) Effects of dynamic coupling in mobile robotic systems. Proc World Conf on Robot Res, Detroit, MI, SME: 43–57.

[6] Meghdari A, Durali M, Naderi D (2000) Investigating dynamic interaction between the one D.O.F manipulator and vehicle of a mobile manipulator. Journal of Intelligent and Robotic Systems: Theory and Applications 28(3): 277–290.

[7] Yamamoto Y, Yun X (1996) Effect of the dynamic interaction on coordinated control of mobile manipulators. IEEE Trans Robotics Automation 12(5): 816–824.

[8] Chen MW, Zalzala AMS (1997) Dynamic modeling and genetic-base trajectory generation for

nonholonomic mobile manipulators. Control Engineering Practice 5(1): 39–48.

[9] Colbaugh R (1998) Adaptive stabilization of mobile manipulators. Journal of Robotic Systems 15(9): 511-523.

[10] Yamamoto Y, Yun X (1994) Coordinating locomotion and manipulation of a mobile manipulator. IEEE Trans Automatic Control 39(6): 1326–1332.

[11] Thanjavur K, Rajagopalan R (1997) Ease of dynamic modeling of wheeled mobile robots (WMRs) using Kane's approach. IEEE In. Conf Robotics and Automation, Albuquerque, New Mexico: 2926–2931.

[12] Tanner HG, Kyriakopouos KJ (2001) Mobile manipulator modeling with Kane's approach. Robotica 19(6): 675–690.

[13] Saha SK, Angeles J (1989) Kinematics and dynamics of a three-wheeled 2-dof AGV. IEEE Int Conf Robotics and Automation 3, Piscataway, NJ: 1572–1577.

[14] Angeles J (2003) Fundamentals of robotic mechanical systems: theory, methods and algorithms. Springer, New York, 2nd edition.

[15] Li JJ, Zhao XH (2012) Dynamics modeling and simulation of tracked five DOF mobile manipulator. Advanced Materials Research 433-440: 4817–4822.

[16] Chung JH, Velinsky SA, Hess RA (1998) Interaction control of a redundant mobile manipulator. International Journal of Robotics 17(12): 1302–1309.

[17] Meghdari A, Mahboobi AH, Gaskarimahalle AL (2006) Dynamic modeling of 'CEDRA' rescue robot on uneven terrain. Scientia Iranica 13(3): 272–283.

[18] Korayem MH, Rahimi HN, Nikoobin A (2012) Mathematical modeling and trajectory planning of mobile manipulators with flexible links and joints. Applied Mathematical Modelling 36(7): 3229–3244.

[19] Vossoughi G, Pendar H, Heidari Z, Mohammadi S (2008) Assisted passive snake-like robots: conception and dynamic modeling using gibbs-appell method. Robotica 26(3): 267–276.

[20] Korayem MH, Shafei AM (2009) Motion equations proper for forward dynamic of robotic manipulators with flexible links by using recursive gibbs-appell formulation. Scientia Iranica Transaction B-mechanical engineering 16(6): 479–495.

[21] Khadem SE, Pirmohammadi AA (2003) Analytical development of dynamic equations of motion for a three-dimensional flexible link manipulator with revolute and prismatic joints. IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics 33(2): 237–24.