

تحلیل ارتعاش نانوورق‌های مدرج تابعی چند جهته دارای نقص هندسی اولیه با استفاده از تئوری شبه سه بعدی بر اساس رویکرد ایزوژئومتری

حیدر فاضلی^۱، آرمن آدامیان^{۲*} و احمد حسینی سیانکی^۲

^۱ دانشجوی دکتری، گروه مهندسی مکانیک، واحد تهران مرکزی، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

^۲ استادیار، گروه مهندسی مکانیک، واحد تهران مرکزی، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۱۲/۲۶، تاریخ بازنگری: ۱۴۰۰/۰۸/۰۲، تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۱۰/۲۵

چکیده

در این مقاله، اثرات نقص هندسی اولیه بر روی تحلیل ارتعاشات آزاد نانوورق‌های مدرج تابعی چند جهته با استفاده از رویکرد ایزوژئومتری همراه با تئوری شبه سه بعدی مورد مطالعه قرار گرفته است. نقص‌های هندسی ممکن است، به صورت اجتناب ناپذیر در ورق وجود داشته و یا به طور هدفمند توسط محققان ایجاد شده باشند. این نقص‌ها به شدت روی فرکانس طبیعی نانوورق تاثیرگذار است. نقص هندسی اولیه به صورت یک انحنای اولیه در نظر گرفته شده و توسط یک تابع تحلیلی در معادلات حاکم بر نانوورق مدلسازی شده است. توزیع خواص موثر ماده بر اساس مدل موری تاناکا بیان شده است که علاوه بر راستای ضخامت ورق، در راستاهای صفحه‌ای نیز تغییر می‌کنند. یک تئوری چهار متغیره شبه سه بعدی به همراه توابع توزیع جدید پیشنهاد شده‌اند. بر اساس اصل همیلتون، فرم ضعیف شده از مساله ارتعاش آزاد برای ورق غیرموضعی استخراج شده است. این سیستم گسسته از معادلات با استفاده از رویکرد ایزوژئومتری حل شده‌اند. دقت روش حاضر از طریق مقایسه نتایج حاضر با داده‌های حاصل از مقالات منتشر شده تصدیق شده‌اند. نتایج بدست آمده بیانگر اهمیت پارامترهای مختلف، به ویژه پارامتر دامنه نقص و شاخص کسر حجمی در راستاهای مختلف روی فرکانس نانوورق‌های مدرج تابعی است.

کلمات کلیدی: نقص هندسی اولیه؛ تحلیل ایزوژئومتری؛ نانوورق مدرج تابعی چند جهته؛ تحلیل ارتعاش آزاد؛ تئوری شبه سه بعدی.

Vibration Analysis of Multi-Directional Functionally Graded Nanoplates with Initial Geometric Imperfection Using Quasi-3d Theory Based on an Isogeometric Approach

H. Fazeli¹, A. Adamian^{2*}, A. Hosseini-Sianaki²

¹ Ph.D. Student, Department of Mechanical Engineering, Central Tehran Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran.

² Assistant Prof, Department of Mechanical Engineering, Central Tehran Branch, Islamic Azad University, Tehran, Iran.

Abstract

In this paper, effects of initial geometric imperfection on free vibration analysis of multi-directional functionally graded nanoplates are studied using an isogeometric approach together with the quasi-3D shear deformation theory. Geometric imperfections may exist inherently in nanoplates or purposely created by researchers. These imperfections strongly affect the plates' natural frequency. The initial geometric imperfection is considered as an initial curvature and modeled by an analytical function in the governing equations of the nanoplate. The effective material properties distribution is stated based on the Mori-Tanaka scheme, which in addition to the thickness of the plate, also changes in the in-plane directions. A four-variable quasi-3D theory with a new distribution function is proposed. Based on Hamilton's principle, a weak form of free vibration problem for nonlocal plates is derived. These discrete systems of equations are solved using an isogeometric approach. The accuracy of the present study was verified by comparing the results with those given in published papers. Present results indicate the importance of various parameters, especially imperfection amplitude, and material indexes in all directions, on the free vibration behavior of FG nanoplates.

Keywords: Initial Geometric Imperfection; Isogeometric Analysis; Multi-Directional FG Nanoplate; Free Vibration Analysis; Quasi-3d Theory.

۱- مقدمه

نانوورق‌های مدرج تابعی همچون همتای ماکرو مقیاس خود دارای ساختاری ناهمگن ولی ایزوتروپ هستند که به طور معمول از دو ماده سرامیک و فلز ساخته می‌شوند. ماده ساختاری سرامیک ضریب انتقال حرارت پایین و مقاومت بالایی در برابر درجه حرارت‌های بالا دارد؛ در حالی که فلز، انعطاف‌پذیری مورد نیاز ماده را فراهم می‌کند. امروزه از ورق‌های مدرج تابعی به طور وسیعی در شاخه‌های مختلف از جمله صنایع هوانوردی، دریانوردی و نظامی استفاده می‌شود [۱]. با پیشرفت تکنولوژی در سال‌های اخیر، کاربرد ورق‌های مدرج تابعی نانو مقیاس در سیستم‌های میکرو/نانو الکترومکانیکی، از جمله به شکل لایه‌های نازک آلیاژ حافظه دار با ضخامت در مقیاس نانو، روند رو به رشدی را به خود گرفته‌اند [۲ و ۳].

با نزدیک شدن به محدوده نانومتری ساختار گسسته‌ای از مواد بروز می‌کند. برای آن که بتوان این نوع مواد را از منظر محیط پیوسته بررسی نمود، بایستی از یک تئوری مناسب جهت اعمال ویژگی مقیاس کوچک بهره گرفت. تئوری الاستیسیته غیر موضعی ارائه شده توسط ارینگن [۴] به علت سادگی و دقت خوب یکی از تئوری‌های محبوب در بین محققان است و در تحلیل ارتعاشات نانوورق‌های مدرج تابعی جایگاه ویژه‌ای پیدا کرده است. بر اساس روش تربیع دیفرانسیلی، دانش مهر و همکارانش [۲]، رفتار ارتعاشی نانوورق‌های FG مرتبه بالا را با استفاده از تئوری غیر موضعی تحلیل کردند. سبحی و رادوان [۵]، یک تئوری ورق غیر موضعی شبه سه بعدی جدید برای تحلیل ارتعاشات و کماتش نانوورق‌های مدرج تابعی ارائه نمودند؛ همچنین با اعمال تئوری الاستیسیته غیرموضعی ارینگن، حل تحلیلی ارتعاش آزاد نانوورق‌های مدرج تابعی با استفاده از تئوری‌های مرتبه بالا مورد مطالعه قرار گرفت [۶ و ۷].

در سال‌های اخیر تئوری‌های ورق پالوده شده توسعه داده شده‌اند که در تحلیل ورق‌های ضخیم و نسبتاً ضخیم پاسخه‌های پایدار و با دقت بالایی را ارائه می‌دهند. علاوه بر آن اثرات کشش ضخامت در ورق‌های ضخیم از اهمیت بالایی برخوردار است و در تئوری پالوده شده لحاظ نشده است، از این رو تئوری‌های شبه سه بعدی ارائه شدند که علاوه بر اثرات تغییر شکل برشی، اثرات کشش ضخامت در

ورق را نیز در نظر می‌گیرند. تئوری ورق پالوده شده با به کار بردن چهار متغیر مستقل، ابتدا توسط سنتیلاناتان [۸] پیشنهاد شد. پس از آن زنگور [۹] یک تئوری شبه سه بعدی را برای تحلیل استاتیکی ورق‌های مدرج تابعی ارائه داد که دارای تنها چهار متغیر است. براتی و شاهوردی [۱۰] با به کار بردن یک مدل ورق چهار متغیره، تحلیل ارتعاشات حرارتی نانوورق‌های مدرج تابعی را تحت توزیع دمایی یکنواخت بررسی نمودند.

از آنجایی که ورق‌های مدرج تابعی معمولاً در دماهای بالا تولید می‌شوند، بعد از اینکه ماده تا دمای اتاق سرد شود، نقص هندسی اولیه (انحراف بین شکل واقعی موجود با شکل مطلوب) می‌تواند در ورق به وجود آید [۱۱]. علاوه بر نقص‌های اجتناب ناپذیر، محققان به منظور دستیابی به اشکال و خواص مطلوب، نقص‌های خارج از صفحه در نانوورق‌ها را به صورت مهندسی شده ایجاد می‌نمایند [۱۲ و ۱۳]. نقص‌های هندسی با تغییر میزان سفتی ورق، فرکانس ارتعاشی آن را تغییر داده که می‌توانند در بسیاری از ابزارهای مهندسی مورد استفاده قرار گیرند. کیتی پورنچای و همکاران [۱۴] اثرات نقص هندسی بر روی رفتار ارتعاش خطی و غیرخطی ورق‌های مدرج تابعی را با استفاده از رویکرد نیمه تحلیلی و استفاده از تئوری‌های مرتبه بالای برشی انجام دادند. نتایج آنها نشان داد که رفتار ارتعاشی به شدت حساس به نقص اولیه است. فانگ و چن [۱۱] ارتعاش غیر خطی ورق مدرج تابعی دارای تنش اولیه و دارای نقص هندسی را با استفاده از تکنیک آشوب تحقیق کردند. چن و سو [۱۵] اثرات نقص هندسی روی ارتعاشات غیر خطی ورق‌های مدرج تابعی دارای تنش اولیه را مطالعه نمودند. یانگ و هوانگ [۱۶] تحلیل رفتار ارتعاش غیرخطی ورق مدرج تابعی دارای نقص را با استفاده از تئوری‌های مرتبه بالای برشی و تئوری غیرخطی ون کارمن ارائه دادند. جلالی و همکاران [۱۲] بر اساس تئوری برشی مرتبه اول معادلات ارتعاشی نانوورق تک لایه گرافنی را با در نظر گرفتن نقص هندسی اولیه مورد بررسی قرار دادند. گوپتا و تالها [۱۷ و ۱۸] با استفاده از یک تئوری تغییر شکل برشی و نرمال مرتبه بالا که دارای چهار متغیر مستقل است، پاسخ ارتعاشی ورق مدرج تابعی دارای نقص هندسی را مورد بررسی قرار دادند.

جهته دارای ضخامت متغیر را با استفاده از یک تئوری تغییر شکل برشی عام (GSDT) بر مبنای رویکرد ایزوژئومتریکی بررسی کردند. رفتار خمشی، کمانش و ارتعاشات آزاد میکروورق‌های متخلخل مدرج تابعی چند جهته با استفاده از تئوری کوپل تنش تغییر یافته توسط فرزام و حسنی [۳۰] با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه بالای هیپربولیکی بر مبنای رویکرد ایزوژئومتریکی و توسط کارامانلی [۳۱] با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی و نرمال بر اساس رویکرد المان محدود مورد بررسی قرار گرفت. لی و همکاران [۳۲] با بهره‌گیری از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول همراه با روش ایزوژئومتریکی به بررسی رفتار استاتیکی، کمانش و ارتعاشات آزاد ورق‌های مدرج تابعی دو جهته متخلخل پرداختند.

خورشیدی و همکاران [۳۳]، اثرات محیط حرارتی بر ارتعاشات آزاد ورق‌های مدرج تابعی دو جهته را با استفاده از تئوری مرتبه سوم برشی مورد مطالعه قرار دادند. تحلیل ارتعاشات غیرخطی ورق‌های مستطیلی با مواد مدرج تابعی دو جهته با استفاده از تئوری‌های کلاسیک و برشی مرتبه اول توسط هاشمی و جعفری [۳۴ و ۳۵] مورد مطالعه قرار گرفت.

با مرور پیشینه پژوهش می‌توان دریافت که اثرات نقص هندسی اولیه بر روی ارتعاشات آزاد نانورق‌های مدرج تابعی چند جهته با استفاده از تئوری‌های برشی شبه سه بعدی بر مبنای رویکرد ایزوژئومتریکی تاکنون مورد مطالعه قرار نگرفته است که در پژوهش حاضر مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۲- مدل‌سازی ریاضی

نانورق مدرج تابعی به صورت یک ورق غیرهمگن به طول a ، عرض b و ارتفاع h در نظر گرفته می‌شود که خواص ماده در راستای صفحه‌ای و نیز در طول ضخامت آن تغییر می‌کند. این نانورق در شکل ۱ نشان داده شده است.

خواص یک نانورق مدرج تابعی چند جهته بر اساس قانون اختلاط را می‌توان به صورت زیر نمایش داد.

$$P(x, y, z) = P_c V_c + P_m V_m, \\ V_c = \left(\frac{x}{a}\right)^{n_x} \left(\frac{y}{b}\right)^{n_y} \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2}\right)^{n_z}, \quad V_m = 1 - V_c \quad (1)$$

به منظور ترکیب تحلیل المان محدود و طراحی به کمک کامپیوتر، تحلیل ایزوژئومتریکی توسط هیوز و همکارانش [۱۹] در سال ۲۰۰۵ ارائه شد. در سال‌های اخیر این روش تحلیل به علت نمایش هندسی دقیق، پیوستگی مرتبه بالا و تعداد مش بندی ساده توجه زیادی را به خود جلب کرده است و همگام با تئوری‌های برشی پالوده شده و شبه سه بعدی در تحلیل ارتعاشات آزاد توسعه پیدا کرده است. تئوری پالوده شده با استفاده از چهار متغیر مستقل توسط ترن و همکاران [۲۰] جهت تحلیل ارتعاشات ورق‌های کامپوزیت لایه‌ای همراه با رویکرد ایزوژئومتریکی مورد استفاده قرار گرفت؛ همچنین روش ایزوژئومتریکی وابسته به اندازه با استفاده از هر دو تئوری شبه سه بعدی و تئوری ورق پالوده شده برای تحلیل نانورق‌های مدرج تابعی توسط نویین و همکارانش [۲۱] مورد استفاده قرار گرفت. تای و همکاران [۲۲] برای تحلیل ورق‌های مدرج تابعی و ساندویچی از یک تئوری شبه سه بعدی و تئوری پالوده شده چهار متغیره استفاده کردند. فرزام راد و همکارانش [۲۳] با استفاده از تئوری ورق شبه سه بعدی تحلیل استاتیکی و ارتعاشی ورق‌های مدرج تابعی را مورد بررسی قرار دادند. نویین و همکارانش [۲۴] با استفاده از یک تئوری شبه سه بعدی تحلیل وابسته به اندازه میکروورق‌های مدرج تابعی را بر اساس رویکرد ایزوژئومتریکی بررسی کردند. فونگ و همکاران [۲۴] نانورق‌های مدرج تابعی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی را با این روش و با در نظر گرفتن اثرات مقیاس کوچک مطالعه نمودند. ارتعاشات آزاد ورق‌های مدرج تابعی صفحه‌ای با استفاده از تئوری ورق پالوده شده بر مبنای رویکرد ایزوژئومتریکی مورد بررسی قرار گرفت [۲۶]. لیو و همکاران [۲۷] تحلیل استاتیکی و کمانش ورق‌های مدرج تابعی را با استفاده از رویکرد ایزوژئومتریکی و ارائه یک تئوری جدید پالوده شده انجام دادند. تحلیل استاتیکی و ارتعاشات نانورق‌های مدرج تابعی دارای تخلخل با استفاده از روش ایزوژئومتریکی و تئوری پالوده شده توسط فونگ و همکاران انجام شد [۲۸].

در سال‌های اخیر، تحلیل ارتعاشات ورق‌های مدرج تابعی چند جهته با استفاده از رویکردهای مختلف در تعدادی از مقالات مورد استفاده قرار گرفته است. لیو و همکاران [۲۹] تحلیل رفتار خمشی و ارتعاشات ورق‌های مدرج تابعی چند

تابع نقص تنها در راستای عرضی ورق و در حالت بدون تنش در نظر گرفته می‌شود. این تابع به فرم کلی در صفحه $x-y$ همانند معادله زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$w^i(x, y) = \xi^* h \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \quad (۶)$$

تابع توزیع $f(z)$ نمایانگر توزیع غیر خطی تنش‌ها و کرنش‌های برشی عرضی در طول ضخامت ورق است. این تابع بایستی به نحوی انتخاب شود که شرایط مرزی بدون تنش را در سطوح بالا و پایین ورق برآورده کند. از طرفی $\Phi(z)$ نیز به صورت $\Phi(z) = \alpha f'(z)$ در نظر گرفته می‌شود. در جدول ۱ تعدادی از توابع توزیع آورده شده است که در پژوهش‌های مختلف مورد استفاده قرار گرفته است و در شکل ۲ این توابع توزیع و نیز مشتق مرتبه اول آن در طول ضخامت ورق ترسیم شده است.

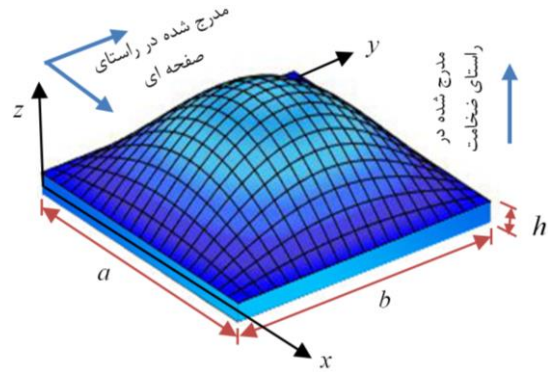
روابط تنش-کرنش غیر موضعی برای یک ورق ایزوتروپیک را با استفاده از تئوری الاستیسیته غیر موضعی ارینگن می‌توان به صورت زیر نمایش داد

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} - \mu \nabla^2 \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} \quad (۷)$$

ضرایب ماتریس الاستیک برای حالت کرنش غیرصفحه‌ای ($\varepsilon_z \neq 0$) به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{aligned} C_{11} &= C_{22} = C_{33} \\ &= \frac{E(x, y, z)(1 - \nu(x, y, z))}{(1 - 2\nu(x, y, z))(1 + \nu(x, y, z))} \\ C_{12} &= C_{21} = C_{13} = C_{31} = C_{23} = C_{32} \\ &= \frac{E(x, y, z)\nu(x, y, z)}{(1 - 2\nu(x, y, z))(1 + \nu(x, y, z))} \\ C_{44} &= C_{55} = C_{66} = \frac{E(x, y, z)}{2(1 + \nu(x, y, z))} \end{aligned} \quad (۸)$$

با اعمال معادله ون کارمن بر روی معادله (۵) و حذف ترمهای غیرخطی، می‌توان کرنش‌های صفحه‌ای را به صورت زیر نوشت.



شکل ۱- نانوورق مدرج تابعی چند جهته دارای نقص هندسی اولیه

که در آن n_x, n_y, n_z به ترتیب شاخص کسری حجم ماده در جهت‌های x و y و z هستند. قانون اختلاط به خوبی قادر به پوشش دادن تداخل‌های بین دو ماده سازنده نیست [۳۶]. در حالی که طرح موری تاناکا [۳۷] به خوبی می‌تواند این تداخل‌ها را پوشش دهد. بر اساس روش موری تاناکا، مدول بالک موثر (K_e) و مدول برشی موثر (G_e) به صورت زیر نوشته می‌شوند [۲۹]:

$$\begin{aligned} \frac{K_e - K_m}{K_c - K_m} &= \frac{V_c}{1 + V_m \frac{K_c - K_m}{K_m + \frac{4}{3}G_m}} \\ \frac{G_e - G_m}{G_c - G_m} &= \frac{V_c}{1 + V_m \frac{G_c - G_m}{G_m + f_1}} \end{aligned} \quad (۲)$$

که در آن

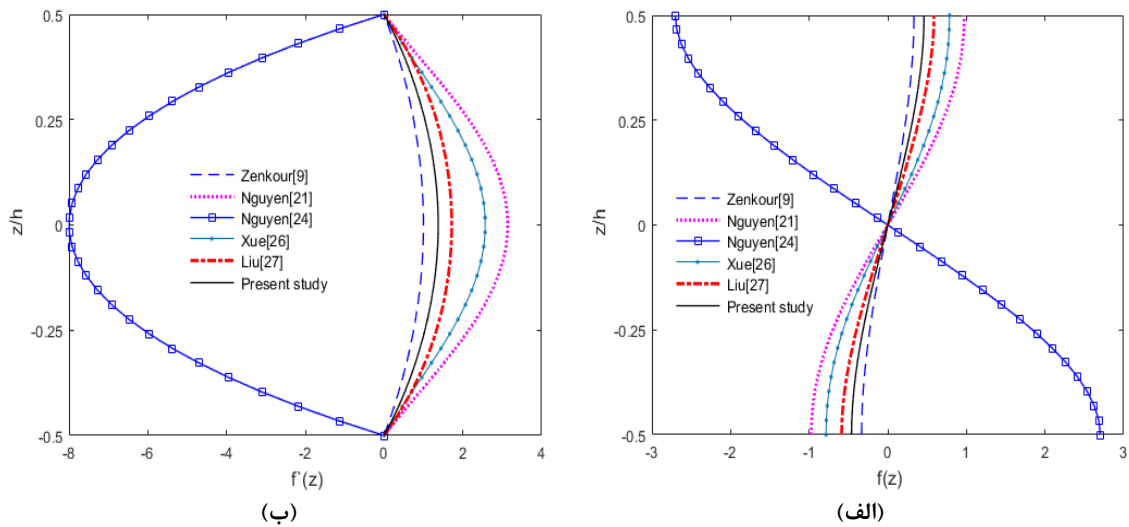
$$f_1 = \frac{G_m(9K_m + 8G_m)}{6K_m + 12G_m} \quad (۳)$$

چگالی موثر (ρ_e) بر مبنای معادله (۱) به دست می‌آید و مدول یانگ موثر (E_e) و نسبت پواسون موثر (ν_e) به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$E_e = \frac{9 K_e G_e}{3 K_e + G_e}, \quad \nu_e = \frac{3 K_e - 2 G_e}{6 K_e + 2 G_e} \quad (۴)$$

چنانچه نقص هندسی اولیه در ورق وجود داشته باشد، دیگر ورق به حالت صفحه‌ای و دوبعدی باقی نخواهد ماند و به شکل سه بعدی درخواهد آمد. با فرض اینکه این تغییر شکل اولیه تنها در راستای ضخامت ورق وجود دارد، میدان جابجایی می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0 - z w^b_{,x} + f(z) w^s_{,x} \\ v(x, y, z) &= v_0 - z w^b_{,y} + f(z) w^s_{,y} \\ w(x, y, z) &= w^b + \Phi(z) w^s + w^i \end{aligned} \quad (۵)$$



شکل ۲- توابع شکل مختلف و مشتق آنها الف) توابع شکل و ب) مشتق اول توابع شکل

جدول ۱- برخی از توابع توزیع مورد استفاده در پژوهش‌های مختلف

$\Phi(z)$	$f(z)$	مدل
$\frac{1}{12}f'(z)$	$h \sinh\left(\frac{z}{h}\right) - \frac{4z^3}{3h^2} \cosh\left(\frac{1}{2}\right)$	شبه سه بعدی زنکور [۹]
$k \cosh^2(kz/h)$	$\frac{-h \cosh^2\left(\frac{k}{2}\right)}{\sqrt{\left(1 + \frac{k^2}{4}\right) - 1}} \left(\sinh^{-1}\left(\frac{kz}{h}\right) - \left(\frac{kz}{h}\right) \right)$	شبه سه بعدی گوپتا [۱۷]
$\frac{1}{8}f'(z)$	$\frac{\pi}{h}z - \frac{9\pi}{5h^3}z^3 + \frac{28\pi}{25h^5}z^5$	شبه سه بعدی نویین [۲۱]
$\frac{3}{20}f'(z)$	$-8z + \frac{10}{h^2}z^3 + \frac{6}{5h^4}z^5 + \frac{8}{7h^6}z^7$	شبه سه بعدی نویین [۲۴]
	$z \cos\left(\frac{\pi z}{h}\right) + \frac{\pi z}{2}$	پالوده شده ژووی [۲۶]
	$z e - z \cosh\left(\frac{2z}{h}\right)$	پالوده شده لیو [۲۷]
$\frac{1}{3}f'(z)$	$\frac{11z}{8} - \frac{11z^3}{6h^2} + \frac{7z^5}{20h^4} - \frac{z^7}{h^6}$	شبه سه بعدی حاضر

$$\varepsilon_1 = - \begin{bmatrix} W^{b,xx} \\ W^{b,yy} \\ 2W^{b,xy} \end{bmatrix}, \varepsilon_2 = \begin{bmatrix} W^{s,xx} \\ W^{s,yy} \\ 2W^{s,xy} \end{bmatrix}, \quad \varepsilon^b = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \varepsilon_0 + z\varepsilon_1 + f(z)\varepsilon_2 + \Phi(z)\varepsilon_3 \quad (9)$$

که ترم‌های مربوطه عبارتند از:

$$\varepsilon_3 = \begin{bmatrix} W^{s,x}W^{i,x} \\ W^{s,y}W^{i,y} \\ W^{s,x}W^{i,y} + W^{s,y}W^{i,x} \end{bmatrix} \quad (10)$$

کرنش‌های برشی و نرمال غیر صفحه‌ای را به صورت زیر می‌توان نوشت.

$$\varepsilon_0 = \begin{bmatrix} u_{0,x} + W^{b,x}W^{i,x} \\ v_{0,y} + W^{b,y}W^{i,y} \\ u_{0,y} + v_{0,x} + W^{b,x}W^{i,y} + W^{b,y}W^{i,x} \end{bmatrix}$$

$$Z_{33} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\Phi'(z))^2 C_{33} dz$$

$$\bar{C}_{ij} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 \\ sym & C_{22} & 0 \\ & & C_{66} \end{bmatrix}$$

$$\hat{C}_{ij} = \begin{bmatrix} C_{13} \\ C_{23} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{C}_{ij} = \begin{bmatrix} C_{55} & 0 \\ 0 & C_{44} \end{bmatrix} \quad (۱۵)$$

با استفاده از اصل همیلتون معادلات حاکم بر نانوورق استخراج می‌شوند. تغییرات انرژی کرنش در نانوورق عبارت است از:

$$\delta U = \int_V (\sigma^T \delta \varepsilon) dV = \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}^T \delta(\varepsilon^b) + \begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix}^T \delta(\gamma) + \sigma_{zz}^T \delta \varepsilon_z dz dA \quad (۱۶)$$

در پژوهش حاضر، تحلیل ارتعاشات آزاد نانوورق در نظر گرفته شده است؛ در نتیجه تغییرات انرژی پتانسیل برابر صفر است. با در نظر گرفتن بردار جابجایی به صورت $u = [u_0 - w^b_{,x} w^s_{,x} v_0 - w^b_{,y} w^s_{,y} w^b w^s 0]^T$ تغییرات انرژی جنبشی را می‌توان به شکل (۱۷) نمایش داد:

$$\delta T = \int_V \dot{u}^T m \delta \dot{u} dV \quad (۱۷)$$

که در آن m ماتریس جرم نامیده می‌شود و به صورت زیر تعیین می‌شود

$$m = \begin{bmatrix} m_0 & 0 & 0 \\ 0 & m_0 & 0 \\ 0 & 0 & m_1 \end{bmatrix},$$

$$m_0 = \begin{bmatrix} I_1 & I_2 & I_4 \\ I_2 & I_3 & I_5 \\ I_4 & I_5 & I_6 \end{bmatrix},$$

$$m_1 = \begin{bmatrix} I_1 & I_7 & 0 \\ I_7 & I_8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (۱۸)$$

و در آن

$$I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6, I_7, I_8 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho(1, z, z^2, f(z), zf(z), (f(z))^2, \Phi(z), (\Phi(z))^2) dz \quad (۱۹)$$

با استفاده از معادله همیلتون می‌توان فرم ضعیف شده غیر موضعی معادله را به صورت رابطه (۲۰) نوشت [۲۱]:

$$\gamma = \begin{bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = [f'(z) + \Phi(z)] \begin{bmatrix} w^s_{,x} \\ w^s_{,y} \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_z = \Phi'(z) w^s \quad (۱۱)$$

حال می‌توانیم منته‌های تنش را به صورت زیر تعریف کنیم.

$$(N_{ij}, M^b_{ij}, M^s_{ij}, M^i_{ij})$$

$$= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{ij}(1, z, f(z), \Phi(z)) dz \quad , ij = xx, yy, xy$$

$$Q_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{ij}(f'(z) + \Phi(z)) dz \quad , ij = xz, yz$$

$$R_z = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{zz} \Phi'(z) dz \quad (۱۲)$$

آنگاه با استفاده از معادله‌های (۹) تا (۱۲) می‌توان معادله (۷) را به شکل (۱۳) درآورد:

$$\begin{bmatrix} N \\ M^b \\ M^s \\ M^i \\ R_z \end{bmatrix} - \mu \nabla^2 \begin{bmatrix} N \\ M^b \\ M^s \\ M^i \\ R_z \end{bmatrix} = D^b \varepsilon^b$$

$$Q - \mu \nabla^2 Q = D^s \varepsilon^s \quad (۱۳)$$

همان‌طور که قابل مشاهده است، ماتریس D به دو بخش D^b که اثرات خمش و بخش D^s که اثرات برش را نشان می‌دهند تقسیم شده است و عبارتند از:

$$D^b = \begin{bmatrix} A & B & E & K & X \\ & D & F & L & Y^b \\ & & H & O & Y^s \\ sym & & & P^1 & Y^i \\ & & & & Z_{33} \end{bmatrix}$$

$$D^s_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (f'(z) + \Phi(z))^2 \tilde{C}_{ij} dz \quad (۱۴)$$

که در آن

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, H_{ij}, K_{ij}, L_{ij}, O_{ij}, P^1_{ij})$$

$$= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (1, z, z^2, f(z), zf(z), (f(z))^2, \Phi(z), z\Phi(z), f(z)\Phi(z), (\Phi(z))^2) \bar{C}_{ij} dz$$

$$(X_{ij}, Y^b_{ij}, Y^s_{ij}, Y^i_{ij})$$

$$= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\Phi'(z), z\Phi'(z), f(z)\Phi'(z), \Phi(z)\Phi'(z)) \hat{C}_{ij} dz$$

$$= \sum_{I=1}^{m \times n} B^2_I u_I \quad (ج-۲۲)$$

$$\varepsilon_3 = \sum_{I=1}^{m \times n} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & R_{I,x} w^i_{,x} \\ 0 & 0 & 0 & R_{I,y} w^i_{,y} \\ 0 & 0 & 0 & R_{I,x} w^i_{,y} + R_{I,y} w^i_{,x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{0I} \\ v_{0I} \\ w^b_I \\ w^s_I \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{I=1}^{m \times n} B^3_I u_I \quad (د-۲۲)$$

$$\varepsilon^s = \sum_{I=1}^{m \times n} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & R_{I,x} \\ 0 & 0 & 0 & R_{I,y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{0I} \\ v_{0I} \\ w^b_I \\ w^s_I \end{pmatrix} = \sum_{I=1}^{m \times n} B^s_I u_I \quad (ه-۲۲)$$

$$\varepsilon_z = \sum_{I=1}^{m \times n} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & R_I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{0I} \\ v_{0I} \\ w^b_I \\ w^s_I \end{pmatrix} = \sum_{I=1}^{m \times n} B^z_I u_I \quad (و-۲۲)$$

با توجه به معادله (۹) می توان نوشت

$$\varepsilon^b = \begin{pmatrix} \varepsilon_0 \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ w^s \end{pmatrix} = \sum_{I=1}^{m \times n} \begin{pmatrix} B^m \\ B^1 \\ B^2 \\ B^3 \\ B^z \end{pmatrix} u_I = \sum_{I=1}^{m \times n} ([B^b]) u_I \quad (۲۳)$$

با استفاده از روابط فوق فرم ضعیف شده معادله (۲۰) به صورت (۲۴) بازنویسی می شود.

$$\int_A (((B^b) \delta u_I)^T D^b (B^b) u_I) dA + \int_A (B^s \delta u_I)^T D^s B^s u_I dA = \int_A (\delta u^T - \mu \nabla^2 \delta u^T) m \ddot{u} \quad (۲۴)$$

معادلات ارتعاش آزاد به فرم ماتریسی را می توان به صورت زیر نوشت

$$([K] + \omega^2 [M]) u = 0 \quad (۲۵)$$

که در آن ماتریس سفی K و ماتریس جرم M به صورت زیر نوشته می شوند

$$K = \int_A ((B^b)^T D^b B^b + (B^s)^T D^s B^s) dA \quad (۲۶)$$

$$M = \int_A \left(\begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix}^T - \mu \nabla^2 \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix}^T \right) m \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{pmatrix} dA \quad (۲۷)$$

$$\int_A (\delta \varepsilon^b)^T D^b \varepsilon^b dA + \int_A (\delta \varepsilon^s)^T D^s \varepsilon^s dA = \int_A (\delta u^T - \mu \nabla^2 \delta u^T) m \ddot{u} dA \quad (۲۰)$$

همانگونه که از فرم ضعیف شده قابل مشاهده است، متغیرهای تغییر شکل عرضی ورق (w^b, w^s) به علت حضور اثرات غیرموضعی و همراهی با اپراتور لاپلاسین به شکل مشتقات مرتبه سوم ظاهر می شوند؛ بنابراین توابع درونیاب مورد نیاز بایستی حداقل دارای مشتق مرتبه سوم بوده و پیوستگی مرتبه اول را دارا باشد. از اینرو رویکرد ایزوژئومتریکی به همراه توابع پایه ای نربز می تواند مورد استفاده قرار گیرد که به خوبی می تواند شرایط پیوستگی مرتبه اول را برآورده نماید.

۳- فرمول بندی ورق بر اساس توابع نربز

در یک فرمولاسیون ایزوپارامتریکی، میدان جابجایی را می توان با استفاده از توابع پایه ای نربز به صورت رابطه (۲۱) تقریب زد

$$u(\xi, \eta) = \sum_{I=1}^{m \times n} (R_I(\xi, \eta) u_I) \quad (۲۱)$$

که در آن بردار $u_I = [u_0 \ v_0 \ w^b \ w^s]$ درجات آزادی مرتبط با نقطه کنترلی I و $m \times n$ تعداد توابع پایه ای می باشند. با استفاده از رابطه فوق می توان کرنش های نرمال برشی را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\varepsilon_0 = \sum_{I=1}^{m \times n} \begin{pmatrix} R_{I,x} & 0 & R_{I,x} w^i_{,x} & 0 \\ 0 & R_{I,y} & R_{I,y} w^i_{,y} & 0 \\ R_{I,y} & R_{I,x} & R_{I,x} w^i_{,y} + R_{I,y} w^i_{,x} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{0I} \\ v_{0I} \\ w^b_I \\ w^s_I \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{I=1}^{m \times n} B^m_I u_I \quad (الف-۲۲)$$

$$\varepsilon_1 = \sum_{I=1}^{m \times n} \begin{pmatrix} 0 & 0 & R_{I,xx} & 0 \\ 0 & 0 & R_{I,yy} & 0 \\ 0 & 0 & 2R_{I,xy} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{0I} \\ v_{0I} \\ w^b_I \\ w^s_I \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{I=1}^{m \times n} B^1_I u_I \quad (ب-۲۲)$$

$$\varepsilon_2 = \sum_{I=1}^{m \times n} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & R_{I,xx} \\ 0 & 0 & 0 & R_{I,yy} \\ 0 & 0 & 0 & 2R_{I,xy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{0I} \\ v_{0I} \\ w^b_I \\ w^s_I \end{pmatrix}$$

به منظور تصدیق روش حاضر و مقایسه نتایج با دیگر پژوهش‌ها، ابتدا به بررسی یک ورق می‌پردازیم که فاقد نقص هندسی اولیه است. به همین منظور فرکانس بی‌بعد یک نانوورق مدرج تابعی ساخته شده از نانوورق SUS304/Si₃N₄ در جدول ۳ آورده شده است. خواص ماده تنها در راستای ضخامت ورق تغییر می‌کند ($n_x=n_y=0$) و نانوورق تحت شرط مرزی ساده در نظر گرفته شده است. همان‌گونه که مشاهده می‌شود، تطابق خوبی بین نتایج روش حاضر با داده‌های مراجع وجود دارد. در اینجا تئوری شبه سه بعدی به علت در نظر گرفتن اثرات کشش ضخامت، فرکانس‌های کوچکتری را ارائه می‌دهد. از طرفی، همزمان با افزایش پارامتر غیرموضعی، فرکانس بی‌بعد به خاطر کاهش سفتی ورق کاهش می‌یابد.

جدول ۲- مشخصات مواد مدرج تابعی [۲۸]

مشخصات ماده	Al	ZrO ₂	SUS304	Si ₃ N ₄
$E(GPa)$	۷۰	۱۵۱	۲۰۱/۰۴	۳۴۸/۴۳
$\rho(Kg/m^3)$	۲۷۰۷	۳۰۰۰	۸۱۶۶	۲۳۷۰
ν	۰/۳	۰/۳	۰/۳	۰/۳

جدول ۳- فرکانس بی‌بعد نانوورق SUS304/Si₃N₄ مربعی بدون نقص هندسی با $a/h=10$ و تحت شرط مرزی ساده ($n_x=n_y=0$)

n_z	مدل	مود اول				مود دوم			
		$\mu=4$	$\mu=2$	$\mu=1$	$\mu=0$	$\mu=4$	$\mu=2$	$\mu=1$	$\mu=0$
۱	شبه سه بعدی حاضر	۰/۰۴۰۲	۰/۰۴۵۵	۰/۰۴۹۱	۰/۰۵۳۸	۰/۰۷۳۰	۰/۰۸۹۳	۰/۱۰۳۰	۰/۱۲۵۹
	شبه سه بعدی [۲۱]	۰/۰۴۰۲	۰/۰۴۵۵	۰/۰۴۹۱	۰/۰۵۳۸	۰/۰۷۳۰	۰/۰۸۹۴	۰/۱۰۳۱	۰/۱۲۵۹
	پالوده شده [۲۵]	۰/۰۴۰۵	۰/۰۴۵۹	۰/۰۴۹۵	۰/۰۵۴۲	۰/۰۷۴۹	۰/۰۹۱۷	۰/۱۰۵۸	۰/۱۲۹۲
۲	شبه سه بعدی حاضر	۰/۰۳۵۹	۰/۰۴۰۶	۰/۰۴۳۹	۰/۰۴۸۰	۰/۰۶۵۰	۰/۰۷۹۵	۰/۰۹۱۷	۰/۱۱۲۲
	شبه سه بعدی [۲۱]	۰/۰۳۵۹	۰/۰۴۰۶	۰/۰۴۳۹	۰/۰۴۸۰	۰/۰۶۵۱	۰/۰۷۹۶	۰/۰۹۱۸	۰/۱۱۲۲
	پالوده شده [۲۵]	۰/۰۳۶۲	۰/۰۴۱۰	۰/۰۴۴۳	۰/۰۴۸۵	۰/۰۶۶۹	۰/۰۸۱۹	۰/۰۹۴۴	۰/۱۱۵۴
۱۰	شبه سه بعدی حاضر	۰/۰۳۰۶	۰/۰۳۴۸	۰/۰۳۷۴	۰/۰۴۱۱	۰/۰۵۵۶	۰/۰۶۷۹	۰/۰۷۸۳	۰/۰۹۵۹
	شبه سه بعدی [۲۱]	۰/۰۳۰۷	۰/۰۳۴۸	۰/۰۳۷۵	۰/۰۴۱۱	۰/۰۵۵۶	۰/۰۶۸۰	۰/۰۷۸۵	۰/۰۹۵۹
	پالوده شده [۲۵]	۰/۰۳۱۱	۰/۰۳۵۲	۰/۰۳۸۰	۰/۰۴۱۶	۰/۰۵۷۴	۰/۰۷۰۲	۰/۰۸۱۰	۰/۰۹۹۰

که در آن

$$R_1 = \begin{bmatrix} R_I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -R_{I,x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{I,x} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_2 = \begin{bmatrix} 0 & R_I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -R_{I,y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_{I,y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & R_I & R_I \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (28)$$

۴- نتایج و بحث

شرایط مرزی در نظر گرفته بر روی لبه‌های ورق به دو صورت شرط مرزی ساده بر روی تمامی لبه‌ها (SSSS) و شرط مرزی گیردار بر روی تمامی لبه‌ها (CCCC) است که به شرح زیر بیان می‌شوند:

شرط مرزی ساده (SSSS):

$$u_0 = w^b = w^s = 0 \quad x=0, a \text{ بر روی}$$

$$v_0 = w^b = w^s = 0 \quad y=0, b \text{ بر روی}$$

شرط مرزی گیردار (CCCC) بر روی تمامی لبه‌ها:

$$u_0 = v_0 = w^b = w^s = w^b_{,x} = w^b_{,y} = w^s_{,x} = w^s_{,y} = 0$$

فرکانس بی‌بعد به صورت $\bar{\omega} = \omega h \sqrt{\frac{2\rho_c(1+\nu_c)}{E_c}}$ در نظر گرفته شده و مشخصات نانوورق‌های مورد استفاده، به غیر از موارد خاصی که عنوان شده است، در جدول ۲ آورده شده است.

جدول ۴- فرکانس بی بعد $\bar{\omega} = \omega \left(\frac{a}{h}\right)^2 \sqrt{\frac{\rho_c h^3}{D_c}}$, $D_c = \frac{E_c h^3}{12(1-\nu_c^2)}$ نانورق SUS304/Si₃N₄ بدون نقص هندسی $a/h=100, n_z=0$

$n_x=2$	$n_x=1$	$n_x=0.5$	$n_x=0$	مدل	n_y
۱/۰۱۱۰	۱/۱۷۱۴	۱/۳۸۰۵	۱/۹۹۹۴	شبه سه بعدی حاضر	۰
۱/۰۱۱۰	۱/۱۷۱۳	۱/۳۸۰۴	۱/۹۹۹۳	سه بعدی [۳۱]	
۱/۰۱۲۴	۱/۱۷۱۳	۱/۳۷۸۳	۱/۹۹۹۳	تئوری برشی مرتبه بالا [۲۹]	
۱/۰۱۹۸	۱/۱۸۴۹	۱/۳۹۶۰	۱/۹۹۷۱	تئوری برشی مرتبه اول [۳۲]	
۰/۹۵۲۴	۱/۰۴۶۳	۱/۱۵۱۶	۱/۳۸۰۵	شبه سه بعدی حاضر	۰/۵
۰/۹۵۲۴	۱/۰۴۶۳	۱/۱۵۱۶	۱/۳۸۰۴	سه بعدی [۳۱]	
۰/۹۵۲۹	۱/۰۴۵۷	۱/۱۴۹۷	۱/۳۷۸۳	تئوری برشی کلی [۲۹]	
۰/۹۲۰۷	۰/۹۸۲۳	۱/۰۴۶۳	۱/۱۷۱۴	شبه سه بعدی حاضر	۱
۰/۹۲۰۷	۰/۹۸۲۳	۱/۰۴۶۳	۱/۱۷۱۳	سه بعدی [۳۱]	
۰/۹۲۱۳	۰/۹۸۲۳	۱/۰۴۵۷	۱/۱۷۱۳	تئوری برشی کلی [۲۹]	
۰/۸۸۸۳	۰/۹۲۰۷	۰/۹۵۲۴	۱/۰۱۱۰	شبه سه بعدی حاضر	۲
۰/۸۸۸۳	۰/۹۲۰۷	۰/۹۵۲۴	۱/۰۱۱۰	سه بعدی [۳۱]	
۰/۸۸۸۹	۰/۹۲۱۳	۰/۹۵۲۹	۱/۰۱۲۴	تئوری برشی کلی [۲۹]	

آمده، مقایسه شده است. با دقت در نتایج می توان دریافت که برای دامنه نقص $\xi^*=1$ مقادیر فرکانس بی بعد حاصل از پژوهش حاضر اندکی بیشتر از داده های مرجع [۱۱] بوده در حالی که به ازای سایر دامنه نقص ها کمتر می باشد. پس از آن پارامتر حساسیت نقص برای یک ورق مدرج تابعی موضعی AlZrO_2 استخراج می شود. در اینجا پارامتر حساسیت نقص به صورت $S = \left| \frac{\omega^* - \bar{\omega}}{\bar{\omega}} \right| \times 100$ تعریف شده است که در آن $\bar{\omega}$ و ω^* به ترتیب فرکانس پایه ورق بدون نقص و ورق دارای نقص هستند. نتایج به ازای هر دو شرط مرزی ساده و گیردار در شکل ۳ نشان داده شده و با داده های مرجع [۱۷] مقایسه شده است. همان گونه که مشاهده می شود، تطابق خوبی بین نتایج حاضر و مرجع [۱۷] به ویژه در حالت شرط مرزی گیردار وجود دارد. همچنین از شکل ۳ می توان دریافت که ورق های مقید شده با شرط مرزی ساده حساسیت بیشتری به نقص هندسی دارند.

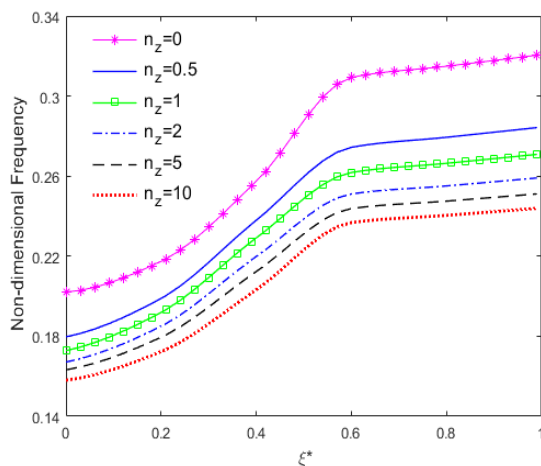
به منظور بررسی دقت روش حاضر در تحلیل ورق های مدرج تابعی چند جهته، فرکانس یک ورق مدرج تابعی چند جهته مربعی ساخته شده از SUS304/Si₃N₄ در جدول ۴ آورده شده است. خواص ماده تنها در راستای صفحه ای ورق تغییر می کند ($n_z=0$). در این جدول $\nu_c = 0.24$ و $\nu_m = 0.3262$ در نظر گرفته شده است. نتایج به دست آمده نشان از تطابق خوب با مراجع دارند. در ادامه اثرات نقص هندسی اولیه بر فرکانس نانورق مدرج تابعی بررسی می شود. از آنجایی که برای مقایسه تحلیل نانورق های مدرج تابعی دارای نقص هندسی مرجعی وجود ندارد، اعتبارسنجی نتایج با ورق های مدرج تابعی موضعی انجام می شود. جدول ۵ فرکانس بی بعد برای یک ورق مدرج تابعی یک جهته ($n_x=n_y=0$) دارای نقص هندسی اولیه ساخته شده از SUS304/Si₃N₄ را نمایش می دهد. نتایج حاضر با داده های مرجع [۱۱] که با استفاده از تئوری برشی مرتبه اول به دست

غیر موضعی است در حالی که با افزایش یافتن دامنه نقص، حساسیت نقص در ورق‌های موضعی ($\mu=0$) نسبت به ورق‌های غیر موضعی افزایش بیشتری را نشان می‌دهند. در حالتی که دامنه نقص و ضخامت ورق هم مرتبه باشند ($\xi^*=1$) مقدار پارامتر حساسیت نقص ورق موضعی به نزدیک ۱۰۰ می‌رسد و بدین معناست که فرکانس ورق دارای نقص حدود ۲ برابر حالت بدون نقص است.

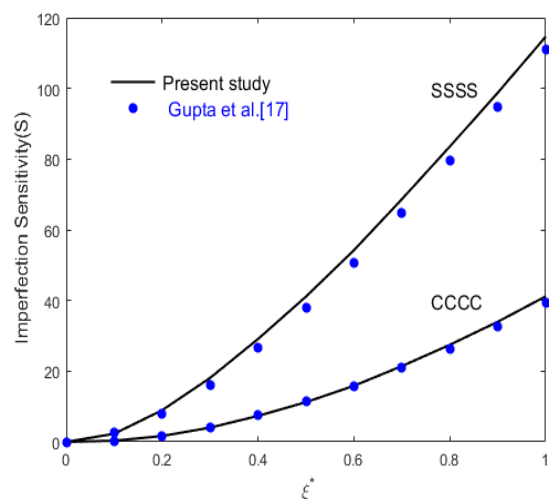
شکل ۴ حساسیت نقص یک نانورق $SUS304/Si_3N_4$ را بر اساس تغییرات دامنه نقص و به ازای پارامترهای غیرموضعی مختلف نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که پارامتر حساسیت نقص با افزایش دامنه نقص افزایش می‌یابد؛ همچنین می‌توان مشاهده نمود که با افزایش پارامتر غیر موضعی همواره حساسیت نقص کاهش می‌یابد. به ازای دامنه نقص‌های کوچکتر، حساسیت نقص مستقل از پارامتر

جدول ۵- فرکانس بی‌بعد ($\hat{\omega} = \omega \left(\frac{a}{h}\right) \sqrt{\frac{\rho c h (1-\nu c^2)}{E_c}}$) ورق $SUS304/Si_3N_4$ دارای نقص هندسی تحت شرط مرزی ساده با $a/h=10$

$n_z=10$	$n_z=5$	$n_z=2$	$n_z=1$	$n_z=0.5$	مدل	ξ^*
۰/۰۸۷	۰/۰۹۰	۰/۰۹۶	۰/۱۰۷	۰/۱۲۱	تئوری شبه سه بعدی حاضر	۰
۰/۰۹۰	۰/۰۹۳	۰/۱۰۱	۰/۱۰۹	۰/۱۲۱	مرجع [۱۱]	
۰/۰۹۴	۰/۱۰۰	۰/۱۰۴	۰/۱۱۶	۰/۱۳۰	تئوری شبه سه بعدی حاضر	۰/۲
۰/۰۹۸	۰/۱۰۴	۰/۱۰۹	۰/۱۱۹	۰/۱۳۲	مرجع [۱۱]	
۰/۱۱۲	۰/۱۱۵	۰/۱۲۵	۰/۱۳۶	۰/۱۵۲	تئوری شبه سه بعدی حاضر	۰/۴
۰/۱۱۶	۰/۱۲۰	۰/۱۳۰	۰/۱۴۲	۰/۱۵۸	مرجع [۱۱]	
۰/۱۴۰	۰/۱۴۸	۰/۱۶۵	۰/۱۸۴	۰/۲۰۹	تئوری شبه سه بعدی حاضر	۰/۸
۰/۱۴۵	۰/۱۵۱	۰/۱۶۷	۰/۱۸۹	۰/۲۱۱	مرجع [۱۱]	
۰/۱۶۳	۰/۱۷۲	۰/۱۸۸	۰/۲۱۴	۰/۲۳۳	تئوری شبه سه بعدی حاضر	۱
۰/۱۵۹	۰/۱۶۷	۰/۱۸۱	۰/۲۰۵	۰/۲۲۴	مرجع [۱۱]	



شکل ۴- تغییرات حساسیت نقص بر اساس تغییرات دامنه نقص نانورق $SUS304/Si_3N_4$ تحت شرط مرزی ساده با $n_x=n_y=0$ و $a/h=5$

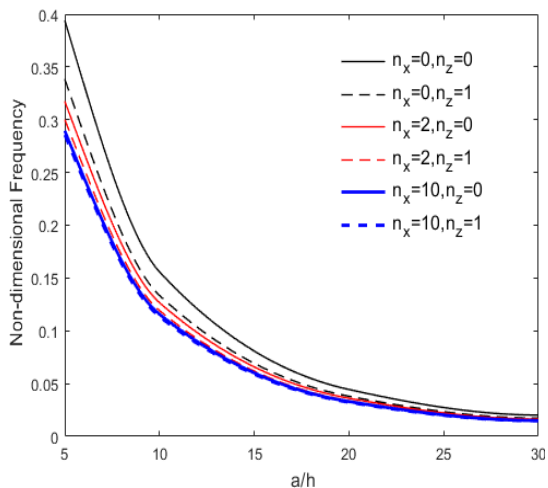


شکل ۳- حساسیت نقص ورق موضعی $AlZrO_2$ تحت شرط مرزی ساده و گیردار با $n_z=1$ و $a/h=100$

نقص پس از $\xi^* = 0.6$ برای هر n_z مشخص، فرکانس بی‌بعد تغییرات محسوسی را از خود نشان نمی‌دهد.

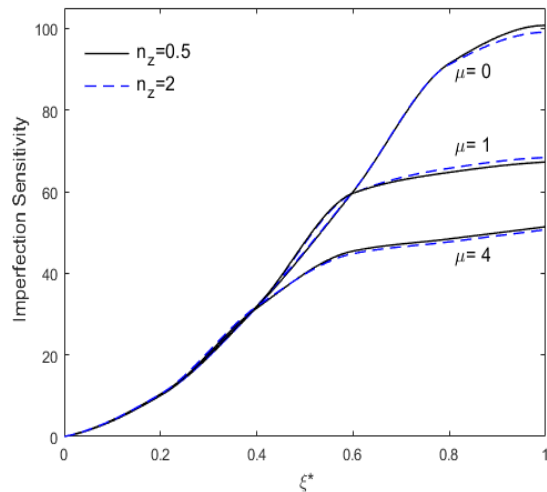
فرکانس بی‌بعد یک نانورق چند جهته AlZrO_2 دارای نقص هندسی به ازای نسبت‌های مختلف طول به ضخامت در شکل ۶ نمایش داده شده است. مشخصات ماده در دو راستای x و z به صورت متغیر در نظر گرفته شده است. با افزایش یافتن نسبت طول به ضخامت که نشان دهنده تغییر نانورق از حالت ضخیم به حالت نازک است، سفتی نانورق کاهش یافته و در نتیجه فرکانس بی‌بعد نیز کاهش می‌یابد. در یک نسبت طول به ضخامت مشخص، افزایش هر یک از شاخص‌های n_x یا n_z به تنهایی، موجب کاهش فرکانس بی‌بعد می‌شود. علت این امر آن است که با افزایش شاخص کسر حجمی، درصد مشارکت سرامیک که ماده قویتری است، کم شده و در نتیجه سفتی ورق نیز کاهش می‌یابد. از طرفی دیگر، فرکانس بی‌بعد ورق‌های ضخیم ($a/h=5$) نسبت به ورق‌های نازک ($a/h=30$) در برابر تغییرات شاخص کسر حجمی در راستاهای مختلف، تغییرات بیشتری دارد. به عبارتی در ورق‌های نازک شاخص کسر حجمی اثر چندانی بر فرکانس پایه ندارد.

تغییرات فرکانس بی‌بعد یک نانورق AlZrO_2 چند جهته دارای نقص هندسی بر حسب دامنه نقص و نسبت منظرهای مختلف (b/a) تحت شرط مرزی ساده در شکل ۷ ترسیم شده است. همانگونه که مشاهده می‌شود، افزایش نسبت منطری

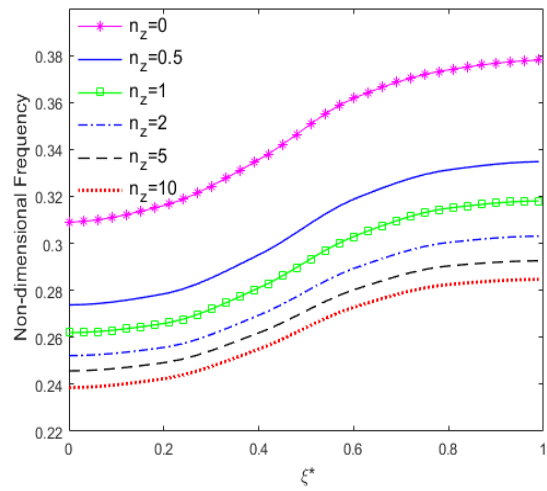


شکل ۶- تغییرات فرکانس بی‌بعد با نسبت طول به ضخامت برای نانورق AlZrO_2 تحت شرط مرزی گیردار با $\xi^* = 0.2$ و $\mu = 1$

در شکل ۵ اثرات نقص هندسی بر روی فرکانس بی‌بعد نانورق ضخیم AlZrO_2 تحت شرایط مرزی ساده و گیردار به ازای شاخص‌های کسر حجمی مختلف n_z نشان داده شده است. در حالت شرط مرزی ساده، با افزایش یافتن دامنه نقص از $\xi^* (=0)$ تا $\xi^* (=1)$ تغییرات فرکانس بی‌بعد به ازای n_z های مختلف بین ۵۴ الی ۵۹ درصد است. در حالی که در حالت شرط مرزی گیردار، درصد تغییرات فرکانس بی‌بعد بین ۱۹ الی ۲۲ درصد است؛ بنابراین در حالت شرط مرزی ساده، نقص هندسی اثرات بیشتری را روی فرکانس بی‌بعد نانورق غیرموضعی بر جای می‌گذارد. علاوه بر آن با افزایش دامنه



(الف) شرط مرزی ساده

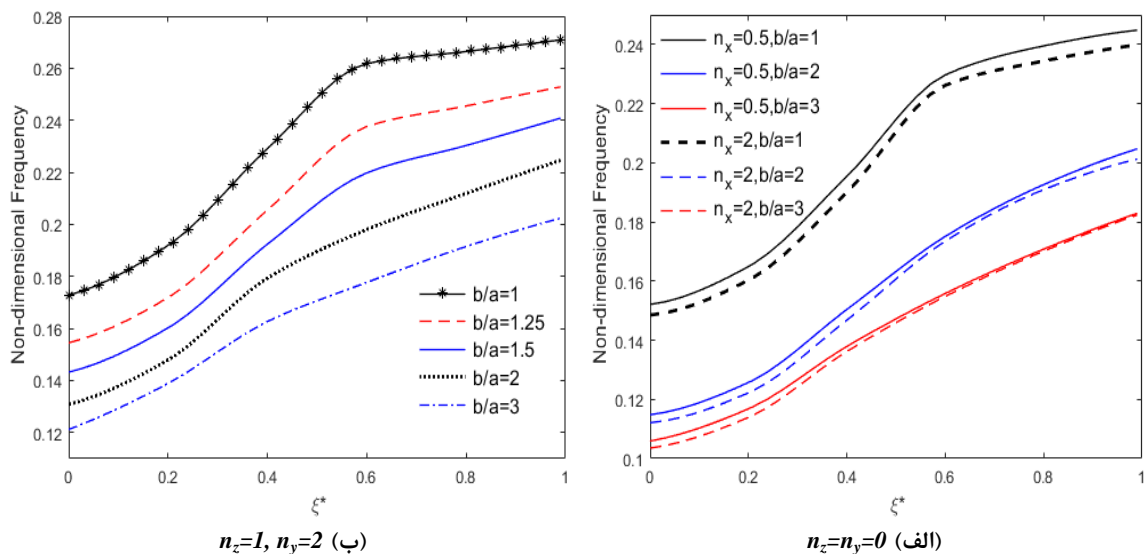


(ب) شرط مرزی گیردار

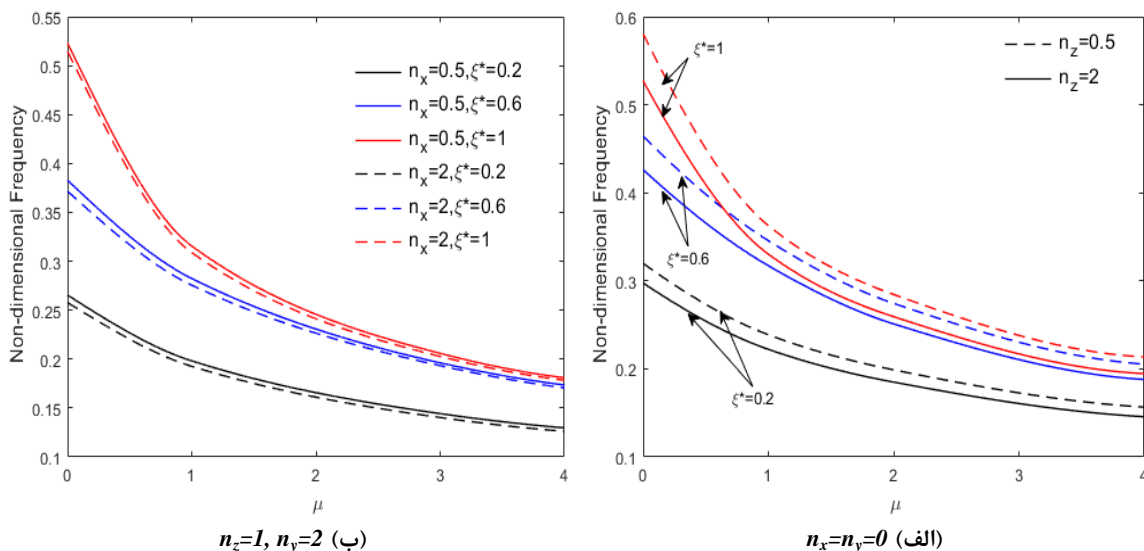
شکل ۵- اثرات نقص هندسی بر فرکانس بی‌بعد نانورق ضخیم غیرموضعی AlZrO_2 با $a/h=5$ و $\mu=2$ و $n_x=n_y=0$

به منظور مطالعه بیشتر، فرکانس بی‌بعد یک نانورق AlZrO_2 چند جهته دارای نقص هندسی با دامنه نقص $\xi^*=0.2$ ، پارامتر غیرموضعی $\mu=1$ و برای نسبت طول به ضخامت‌های مختلف، شاخص‌های کسر حجمی n_x ، n_y و n_z مختلف و شرایط مرزی ساده و گیردار در جدول ۶ ارائه شده است که می‌تواند به عنوان یک معیار در مطالعات آتی مورد استفاده قرار گیرد.

فرکانس بی‌بعد را کاهش می‌دهد. شکل ۸ اثرات تغییرات پارامتر غیرموضعی بر فرکانس بی‌بعد نانورق AlZrO_2 به ازای چندین مقدار از پارامتر دامنه نقص و شاخص کسر حجمی را بیان می‌کند. همان‌گونه که از شکل ۸ قابل مشاهده است، با افزایش پارامتر غیر موضعی به ازای تمامی مقادیر شاخص کسر حجمی n_z و یا n_x فرکانس‌های بی‌بعد به مقدار مشخصی همگرا می‌شوند.



شکل ۷- تغییرات فرکانس بی‌بعد یک نانورق AlZrO_2 دارای نقص هندسی بر حسب دامنه نقص با $a/h=5$ و $\mu=2$ و شرط مرزی ساده



شکل ۸- اثرات تغییرات پارامتر غیرموضعی بر فرکانس بی‌بعد نانورق AlZrO_2 با $a/h=5$ و شرط مرزی ساده

جدول ۶- فرکانس بی بعد نانورق مربعی AlZrO_2 با $\mu = 1$ و $\xi^* = 0.2$

$a/h=10$			$a/h=5$			n_y	n_z	شرط مرزی
$n_x=10$	$n_x=2$	$n_x=0$	$n_x=10$	$n_x=2$	$n_x=0$			
۰/۰۶۶۵	۰/۰۷۳۱	۰/۰۸۹۸	۰/۱۹۳۲	۰/۲۱۱۹	۰/۲۶۱۲	۰	۰	ساده
۰/۰۶۵۸	۰/۰۷۰۵	۰/۰۸۲۴	۰/۱۹۱۳	۰/۲۰۴۶	۰/۲۳۹۲	۰/۵		
۰/۰۶۴۹	۰/۰۶۵۹	۰/۰۶۸۴	۰/۱۸۸۵	۰/۱۹۱۵	۰/۱۹۸۶	۵		
۰/۰۶۵۶	۰/۰۷۰۰	۰/۰۸۱۲	۰/۱۹۰۵	۰/۲۰۲۸	۰/۲۳۵۳	۰	۱	
۰/۰۶۵۲	۰/۰۶۸۳	۰/۰۷۶۲	۰/۱۸۹۵	۰/۱۹۸۲	۰/۲۲۰۸	۰/۵		
۰/۰۶۴۶	۰/۰۶۵۳	۰/۰۶۶۸	۰/۱۸۷۹	۰/۱۸۹۶	۰/۱۹۴۰	۵		
۰/۰۶۵۴	۰/۰۶۶۸	۰/۰۷۱۸	۰/۱۸۸۴	۰/۱۹۳۴	۰/۲۰۶۹	۰	۱۰	
۰/۰۶۴۷	۰/۰۶۶۰	۰/۰۶۹۵	۰/۱۸۸۰	۰/۱۹۱۵	۰/۲۰۰۸	۰/۵		
۰/۰۶۴۵	۰/۰۶۴۷	۰/۰۶۵۴	۰/۱۸۷۵	۰/۱۸۸۱	۰/۱۸۹۸	۵		
۰/۱۱۵۷	۰/۱۲۶۷	۰/۱۵۵۹	۰/۲۸۹۵	۰/۳۱۷۵	۰/۳۹۴۱	۰	۰	گیردار
۰/۱۱۴۶	۰/۱۲۲۳	۰/۱۴۲۶	۰/۲۸۷۷	۰/۳۰۷۶	۰/۳۶۰۸	۰/۵		
۰/۱۱۲۱	۰/۱۱۴۱	۰/۱۱۸۶	۰/۲۸۳۲	۰/۲۸۷۴	۰/۲۹۶۵	۵		
۰/۱۱۳۵	۰/۱۱۹۲	۰/۱۳۳۵	۰/۲۸۵۶	۰/۳۰۰۲	۰/۳۳۸۵	۰	۱	
۰/۱۱۳۱	۰/۱۱۷۰	۰/۱۲۷۱	۰/۲۸۴۸	۰/۲۹۵۱	۰/۳۲۲۰	۰/۵		
۰/۱۱۱۹	۰/۱۱۲۸	۰/۱۱۵۰	۰/۲۸۲۸	۰/۲۸۴۷	۰/۲۸۹۲	۵		
۰/۱۱۲۵	۰/۱۱۴۸	۰/۱۲۱۳	۰/۲۸۳۶	۰/۲۸۸۸	۰/۳۰۳۰	۰	۱۰	
۰/۱۱۲۳	۰/۱۱۳۹	۰/۱۱۸۴	۰/۲۸۳۳	۰/۲۸۶۹	۰/۲۹۶۸	۰/۵		
۰/۱۱۱۸	۰/۱۱۲۲	۰/۱۱۳۰	۰/۲۸۲۶	۰/۲۸۳۲	۰/۲۸۴۹	۵		

۵- نتیجه گیری

در این پژوهش یک رویکرد ایزوژئومتری بر مبنای تئوری برشی و نرمال شبه سه بعدی برای تحلیل ارتعاشات آزاد نانورق‌های مدرج تابعی چند جهته دارای نقص هندسی اولیه به کار گرفته شده است. نتایج عددی پژوهش حاضر با داده‌های حاصل از مقالات منتشره مقایسه شده که حاکی از

توافق خوب آن است. با تجزیه و تحلیل نتایج، خلاصه برخی

از مهمترین یافته‌ها را می‌توان به شرح زیر بیان نمود:

- تئوری شبه سه بعدی به علت در نظر گرفتن اثرات کشش ضخامت، فرکانس‌های بی بعد ($\bar{\omega}$) کوچکتری را نسبت به تئوری‌های دوبعدی ارائه می‌دهد.

جابجایی صفحه میانی در راستای y	v_0	• با افزایش یافتن هر کدام از پارامترهای نسبت طول به ضخامت، نسبت منظری، شاخص کسر حجمی ماده در هر یک از راستاها و پارامتر غیر موضعی، فرکانس بی‌بعد کاهش می‌یابد.
کسر حجمی سرامیک	V_C	• با ثابت در نظر گرفتن مقدار a/h ، فرکانس‌های بی‌بعد نانورق با شاخص‌های کسر حجمی مختلف همگی در مقادیر بزرگ پارامتر غیر موضعی به مقدار مشخصی همگرا می‌شوند.
تغییر شکل عرضی ورق ناشی از خمش	w^b	• در ورق‌های نازک تغییرات شاخص کسر حجمی در تمام راستاها اثر چندانی بر فرکانس پایه‌ای نانورق غیر موضعی ندارد.
تغییر شکل عرضی ورق ناشی از برش	w^s	• فرکانسهای بی‌بعد ورق‌های دارای شرایط مرزی گیردار نسبت به ورق‌های دارای شرایط مرزی ساده حساسیت کمتری به نقص هندسی دارند.
تابع نقص هندسی اولیه	w^i	• به ازای دامنه نقص‌های کوچکتر، حساسیت نقص مستقل از پارامتر غیرموضعی است؛ در حالیکه با افزایش یافتن دامنه نقص، حساسیت نقص در ورق‌های موضعی ($\mu=0$) نسبت به ورق‌های غیر موضعی افزایش بیشتری را نشان می‌دهند؛ همچنین نقص‌های از مرتبه ضخامت ورق ($\xi^*=1$) روی نانورق‌های نازک غیرموضعی اثر بیشتری نسبت به نانورق‌های ضخیم غیر موضعی دارند.
علایم یونانی		
دامنه بدون بعد ماکزیمم (دامنه نقص)	ξ^*	
پارامتر غیرموضعی	μ	
اپراتور لاپلاسین	∇^2	
چگالی مؤثر	ρ_e	
نسبت پواسون مؤثر	ν_e	
بالانویس‌ها		
شاخص کسر حجمی ماده در راستاهای x و y و z	n_x, n_y, n_z	
زیرنویس‌ها		
فاز سرامیکی	c	
فاز فلزی	m	

۷- مراجع

- [1] Shahverdi H, Barati MR (2017) Vibration analysis of porous functionally graded nanoplates. Int J Eng Sci 120: 82-99.
- [2] Daneshmehr A, Rajabpoor A, Hadi A (2015) Size dependent free vibration analysis of nanoplates made of functionally graded materials based on nonlocal elasticity theory with high order theories. Int J Eng Sci 95: 23-35.
- [3] Lü CF, Lim CW, Chen W Q (2009) Size-dependent elastic behavior of FGM ultra-thin films based on generalized refined theory. Int J Solids Struct 46: 1176-1185.
- [4] Eringen AC (2002) Nonlocal continuum field theories. Springer, New York.
- [5] Sobhy M, Radwan AF (2017) A new quasi 3D nonlocal plate theory for vibration and buckling of FGM nanoplates. Int J Appl Mech 9(1):1750008.

۶- فهرست علایم و اختصارات

طول و عرض نانورق	a, b
مدول یانگ موثر	E_e
مدول برشی موثر	G_e
ضخامت نانورق	h
مدول بالک مؤثر	K_e
نقاط کنترلی	P_I
تابع پایه‌ای نریز در فضای پارامتریک دوبعدی	$R_I(\xi, \eta)$
جابجایی صفحه میانی در راستای x	u_0

- [19] Hughes TJR, Cottrell JA, Bazilevs Y (2005) Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement. *Comput Methods Appl Mech Eng* 194: 4135-4195.
- [20] Tran LV, Thai CH, Le HT, Gan BS, Lee J, Nguyen-Xuan H (2014) Isogeometric analysis of laminated composite plates based on a four-variable refined plate theory. *Eng Anal Bound Elem* 47: 68-81.
- [21] Nguyen NT, Huic D, Lee J, Nguyen-Xuan H (2015) An efficient computational approach for size-dependent analysis of functionally graded nanoplates. *Comput Methods Appl Mech Engrg* 297: 191-218.
- [22] Thai CH, Zenkour AM, Abdel Wahab M, Nguyen-Xuan H (2016) A simple four-unknown shear and normal deformations theory for functionally graded isotropic and sandwich plates based on isogeometric Analysis. *Compos Struct* 139: 77-95.
- [23] Farzam-Rad SA, Hassani B, Karamodin A (2017) Isogeometric analysis of functionally graded plates using a new quasi-3D shear deformation theory based on physical neutral surface. *Compos Part B-Eng* 108: 174-189.
- [24] Nguyen Hoang X, Nguyen Tuan N, Abdel Wahab M, Bordas SPA, Nguyen- Xuan H, Thuc PV (2017) A refined quasi-3D isogeometric analysis for functionally graded microplates based on the modified couple stress theory. *Comput Meth Appl Mech Eng* 313: 904-940.
- [25] Phung-Van P, Lieu QX, Nguyen-Xuan H, Abdel-Wahab M (2017) Size-dependent isogeometric analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite nanoplates. *Compos Struct* 166: 120-135.
- [26] Xue Y, Jin G, Ding H, Chen M (2018) Free vibration analysis of in-plane functionally graded plates using a refined plate theory and isogeometric approach. *Compos Struct* 192:193-205.
- [27] Liu Z, Wang C, Duan G, Tan J (2019) A new refined plate theory with isogeometric approach for the static and buckling analysis of functionally graded plates. *Int J Mech Sci* 161-162: 105036.
- [28] Phung-Van P, Thai CH, Nguyen-Xuan H, Abdel-Wahab M (2019) An isogeometric approach of static and free vibration analyses for porous FG nanoplates. *Eur J Mech A-Solid* 78: 103851.
- [29] Lieu QX, Lee S, Kang J, Lee J (2018) Bending and free vibration analyses of in-plane bi-directional functionally graded plates with variable thickness using isogeometric analysis. *Compos Struct* 192.
- [30] Farzam A, Hassani B (2019) Isogeometric analysis of in-plane functionally graded porous microplates
- [6] عزیزی ع، ستوده ع (۱۳۹۷) تحلیل خمش و ارتعاش آزاد نانوورق مدرج تابعی با استفاده از نظریه ورق مرتبه بالای مثلثاتی. *نشریه مهندسی مکانیک امیرکبیر* ۱۰۳۹-۱۰۵۰ (۵): ۵۰.
- [7] Najafizadeh MM, Raki M, Yousefi P (2018) Vibration analysis of FG Nanoplate based on third-order shear deformation theory (TSDT) and nonlocal elasticity. *J Solid Mech* 10(3): 464-475.
- [8] Senthilnathan NR, Lim SP, Lee KH, Chow ST (1987) Buckling of shear-deformable plates. *AIAA J* 25: 1268-1271.
- [9] Zenkour AM (2013) A simple four-unknown refined theory for bending analysis of functionally graded plates. *Appl Math Model* 37: 9041-9051.
- [10] Barati MR, Shahverdi H (2016) A four-variable plate theory for thermal vibration of embedded FG nanoplates under non-uniform temperature distributions with different boundary conditions. *Struct Eng Mech* 60(4): 707-727.
- [11] Fung CP, Chen CH (2006) Imperfection sensitivity in the nonlinear vibration of functionally graded plates. *Eur J Mech A-Solid* 25(3): 425-436.
- [12] Jalali SK, Pugno NM, Jomehzadeh E (2016) Influence of out-of-plane defects on vibration analysis of graphene sheets: molecular and continuum approaches. *Superlattice Microst* 91: 331-344.
- [13] Lusk MT, Carr LD (2008) Nanoengineering defect structures on graphene. *Phys Rev Lett* 100: 175503.
- [14] Kitipornchai S, Yang J, Liew KM (2004) Semi-analytical solution for nonlinear vibration of laminated FGM plates with geometric imperfections. *Int J Solids Struct* 41: 2235-2257.
- [15] Chen CH, Hsu C.Y (2007) Imperfection sensitivity in the nonlinear vibration oscillations of initially stressed plates. *Appl Math Comput* 190(1): 465-475.
- [16] Yang J, Huang XL (2007) Nonlinear transient response of functionally graded plates with general imperfections in thermal environments. *Comput Methods Appl Mech Eng* 196: 2619-2630.
- [17] Gupta A, Talha M (2016) An assessment of a non-polynomial based higher order shear and normal deformation theory for vibration response of gradient plates with initial geometric imperfections. *Compos Part B-Eng* 107: 141-161.
- [18] Gupta A, Talha M (2017) Nonlinear flexural and vibration response of geometrically imperfect gradient plates using hyperbolic higher-order shear and normal deformation theory. *Compos Part B-Eng* 123: 241-261.

- [۳۴] هاشمی س، جعفری ع ا (۱۳۹۹) تحلیل ارتعاش آزاد غیرخطی ورق‌های مستطیلی از جنس ماده مدرج تابعی دوجهته. نشریه علمی مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها ۱۰(۱): ۳۱-۵۲.
- [35] Hashemi S, Jafari AA (2020) Nonlinear Free and Forced vibrations of in-plane bi-directional functionally graded rectangular plate with temperature-dependent properties. *Int J Struct Stab Dy* 20(8): 2050097
- [36] Vel SS, Batra RC (2002) Exact solution for thermoelastic deformations of functionally graded thick rectangular plates. *AIAA J* 40: 1421-1433
- [37] Mori T, Tanaka K (1973) Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metall* 21: 571-574.
- using modified couple stress theory. *Aerosp Sci Technol* 91: 508-524.
- [31] Karamanli A (2020) Size-dependent behaviors of three directional functionally graded shear and normal deformable imperfect microplates. *Compos Struct* 113076.
- [32] Li S, Zheng S, Chen D (2020) Porosity-dependent isogeometric analysis of bi-directional functionally graded plates. *Thin Wall Struct* 156: 106999.
- [۳۳] خورشیدی ک، بخششی ا، قدیریان ح (۱۳۹۵) بررسی تاثیرات محیط حرارتی بر ارتعاشات آزاد ورق مستطیلی از جنس مواد تابعی مدرج دوبعدی مستقر بر بستر پسترناک. نشریه علمی مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها ۶(۳): ۱۳۷-۱۴۷.