مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها/ سال ۱۴۰۰/ دوره ۱۱/ شماره ۵/ صفحه ۶۳-۸۲

نشریه علمی مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها

DOI: 10.22044/jsfm.2021.10725.3376

تحلیل ترک در مسائل انتشار-ترموالاستیسیته تعمیم یافته با استفاده از روش المان محدود توسعه‌یافته

هادی بشیرنژاد دهقان[1]، محمد باقر نظری[2] و مسعود مهدی زاده رخی[3,*]

[1] کارشناس ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک و مکاترونیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران

[2] استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک و مکاترونیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران

[3] استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک و مکاترونیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران

مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۴۰۰/۰۱/۲۷؛ تاریخ بازنگری: ۱۴۰۰/۰۴/۰۴؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۵/۱۴

چکیده

در این مقاله، رفتار یک ترک ساکن در محیط محدود انتشار- ترموالاستیسیته تعمیم‌یافته تحت شوک دمایی و غلظت بررسی شده است. ترک با استفاده از روش المان محدود توسعه‌یافته مدل‌سازی و ضرایب شدت تنش با بکارگیری روش انتگرال برهم‌کنش استخراج شده‌اند. برای مطالعه پدیده انتشار گرما و غلظت از تئوری‌های تعمیم‌یافته گرین – نقدی و غیرفیک استفاده شده است. روش المان محدود توسعه‌یافته برای گسسته‌سازی معادلات در فضا و روش ضمنی نیومارک جهت انتگرال‌گیری زمانی مورد استفاده قرارگرفته است. برای بارگذاری‌های مختلف (شوک گرمایی و غلظت)، ضرایب شدت تنش، توزیع دمای نوک ترک و توزیع انتشار نوک ترک مطالعه شده است؛ همچنین اثر سرعت موج تنش، موج غلظت و موج دما روی ضرایب شدت تنش برای ترک‌های مستقیم و مایل بررسی شده است. مشاهده می‌شود، برای حالتی که سرعت موج تنش و موج دما یکسان و بیشتر از سرعت موج غلظت است، افزایش ضریب شدت تنش سریع‌تر و بیشتر از حالت‌های دیگر است.

کلمات کلیدی: انتشار-ترموالاستیسیته تعمیم یافته؛ تئوری گرین نقدی؛ تئوری غیر فیک؛ ترک؛ ضرایب شدت تنش.

Crack Analysis in Diffusion-Generalized Thermoelasticity Problems Using the Extended Finite Element Method

H. Bashirnezhad Dehghan[1], M. B. Nazari[2], M. Mahdizadeh Rokhi[3,*]

[1] MA, Faculty of Mechanical and Mechatronics Engineering, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran.

[2] Assistant. Prof., Faculty of Mechanical and Mechatronics Engineering, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran.

[3] Assistant. Prof., Faculty of Mechanical and Mechatronics Engineering, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran.

Abstract

In this paper, the behavior of a stationary crack in a generalized diffusion-thermoelasticity medium under temperature and concentration shock has been investigated. Cracks have been modeled using the extended finite element method and stress intensity factors have been obtained using the interaction integral method. To study the phenomenon of heat dissipation and concentration, generalized Green-Naghdi and non-Fickian theories have been used. The extended finite element method has been developed to discrete equations in space and the Newmark implicit method has been used to calculate time integrals. For different loads (heat shock and concentration), stress intensity factors and temperature and concentration distribution at the crack tip have been studied. The effect of stress wave velocity, concentration wave and temperature wave on stress intensity factors for straight and oblique cracks has also been investigated. It is observed that for the case where the speed of the stress wave, and the temperature wave are the same and greater than the speed of the concentration wave, the increase of the stress intensity factors is faster and higher in other states.

Keywords: Diffusion - Generalized Thermoelasticity; Green-Naghdi Theory; non-Fickian theory; Crack; Stress Intensity Factors.

* نویسنده مسئول؛ تلفن: ۰۲۳-۳۲۳۰۰۲۴۰؛ فکس: ۰۲۳-۳۲۳۰۰۲۵۸

آدرس پست الکترونیک: mmrokhi@shahroodut.ac.ir

۱- مقدمه

امروزه مسئله انتقال هم‌زمان گرما و ماده در صنایع گوناگون مشاهده می‌شود. به عنوان نمونه، می‌توان دستیابی به آلیاژهای فلزی با استحکام قابل‌قبول برای کار در شرایط سخت دمایی را اشاره کرد که یکی از موضوع‌های مورد علاقه محققان علم مواد است. یکی از مشکلات فرآیند ساخت این است که سطح آلیاژهای فلزی در دماهای بالا به‌راحتی اکسید می‌شود. پس از ایجاد ناحیه سطحی اکسیدی، اکسیژن در این ناحیه نفوذ کرده و به سطح فلزی می‌رسد که براثر آن اکسید شدن سطح فلزی جدید را در پی دارد.

در برخی موارد، نتایج تحلیل این مسائل براساس تئوری کلاسیک انتشار-ترموالاستیسیته با داده‌های آزمایشگاهی اختلاف بسیاری دارند [۱] این مشکل در نهایت منجر به ارائه نظریه‌های انتشار- ترموالاستیسیته تعمیم‌یافته شده است. سرعت انتقال امواج گرما در تئوری‌های ترموالاستیسیته تعمیم‌یافته، به علت استفاده از زمان‌های آسایش و فرم هذلولوی معادله هدایت گرمایی، محدود است که باعث گسترش تئوری‌های هدایت گرمایی غیر کلاسیک می‌شود [۲]. مطالعه و بررسی نظریه‌های ترموالاستیسیته تعمیم‌یافته توسط هتنارسکی و اسلامی انجام شده است [۳].

تاکنون، مطالعاتی در مورد نقش لایه اکسیدی در ادامه فرآیند اکسیداسیون سطح فلز و پیشرفت آن انجام شده [۴ و ۵] که نتیجه قابل ذکر آن‌ها، ارائه معادلات ماکرو مکانیک این پدیده است. در پدیده اکسیداسیون، نفوذ اتم‌های اکسیژن در ناحیه اکسید شده، باعث ایجاد تنش و گرادیان دمایی در این ناحیه می‌شود. به‌طوری‌که در توصیف دقیق این پدیده برهم‌کنش سه میدان تغییر شکل، غلظت اتم‌های اکسیژن و دما در نظر گرفته می‌شود [۶ و ۷].

عثمان و همکاران مسئله دو بعدی کوپل انتشار- الاستیسیته برای یک صفحه محدود همگن و غیرهمگن تابعی با روش عددی بدون المان پتروف-گلرکین حل و تغییر زمانی تنش و غلظت ماده منتشرشده در یک نقطه بررسی شده است [۸]. لی و همکاران [۹]، پاسخ زمانی یک نیم صفحه با ضرایب هدایت گرمایی و نفوذپذیری متغیر با دما را با در نظر گرفتن معادلات انتشار-ترموالاستیسیته تعمیم‌یافته گذرای غیر خطی بدست آوردند. آنها نشان دادند که هدایت حرارتی و نفوذپذیری متغیر تأثیر مهمی بر گسترش موج حرارتی و موج انتشار دارد. اودی و همکاران [۱۰]، یک تئوری انتشار-ترموالاستیسیته اصلاح شده را برای تحلیل مسائل در ابعاد میکرو پیشنهاد کردند. این نظریه غیر خطی ترمودینامیک برای مواد الاستیک است که در آن ذرات تحت میدان‌های جابجایی، دما و انتشار جرم کلاسیک قرار می گیرند. آنها نشان دادند که کوپلینگ بین دما، پتانسیل شیمیایی، میکرو دما و غلظت‌های میکرو حتی برای اجسام همسانگرد وجود دارد.

شارما و همکاران [۱۱]، حل تحلیلی مسئله انتشار- ترموالاستیسیته تعمیم‌یافته در حالت کرنش صفحه‌ای برای یک ماده همگن همسانگرد تحت یک نیروی عمودی، منبع حرارتی و منبع پتانسیل شیمیایی را ارائه کردند. آنها برای حل مسئله از تکنیک‌های تبدیل لاپلاس و فوریه استفاده نموده و جابجایی‌ها، تنش‌ها، توزیع دما و توزیع پتانسیل شیمیایی را بدست آوردند.

لی و همکاران [۱۲]، اثر سورت[1] بر پاسخ گذرای یک نوار باریک را با در نظر گرفتن معادلات انتشار-ترموالاستیسیته تعمیم‌یافته، گزارش کردند که یک انتهای آن در معرض اختلالات حرارتی و شیمیایی است. آنها مدل جدیدی از انتشار – ترموالاستیسیته تعمیم یافته را با اثر سورت ایجاد کردند و پاسخ‌های شوک گذرا را بررسی کردند. آنها برای حل مسئله از تکنیک‌های تبدیل لاپلاس استفاده کردند. نتایج نشان داد که اثر سورت، اثرات قابل توجهی بر پتانسیل شیمیایی، جابجایی، تنش و غلظت دارد.

لی و همکاران [۱۳]، یک مطالعه تحلیلی از پاسخ‌های گذرای یک استوانه توخالی تحت شوک حرارتی و شیمیایی با در نظر گرفتن معادلات انتشار-ترموالاستیسیته تعمیم‌یافته انجام دادند. آنها معادلات حاکم را با استفاده از روش‌های تبدیل لاپلاس استخراج و حل کردند و مقادیر بی‌بعد دما، پتانسیل شیمیایی، جابجایی، تنش، غلظت، شار گرما و شار انتشار در امتداد جهت شعاعی استوانه را بدست آوردند.

زنکور [۱۴] مسئله انتشار- ترمو الاستیک را برای یک فضای نیمه همسانگرد حل کرد. او از مدل گرین – نقدی با و

[1] Soret

بدون اتلاف انرژی استفاده کرد و چند مدل جدید با تاخیر فاز یگانه/دوگانه برای بررسی رفتار انتشار- ترمو الاستیک محیط ارائه کرد؛ همچنین تئوری گرین-نقدی نوع II و III ساده و مدل های اصلاح شده آنها را بررسی کرد.

لی و همکاران [۱۵]، یک نظریه غیر محلی مواد انتشار دهنده ترموالاستیک را توسعه دادند و اثرات غیر محلی فضایی انتقال حرارت و جرم را برای اولین بار در نظر گرفتند و با کمک اصول ترمودینامیکی، روابط ساختاری شامل طول‌های مشخصه وابسته به اندازه را بدست آوردند. مدل نظری پیشنهادی آنها از جنبه کاربردی بیشتر برای بررسی پاسخ‌های دینامیکی حرارتی- الاستیک-انتشار در یک محیط نیمه بی‌نهایت یک بعدی که یک انتهای آن تحت شوک‌های وابسته به زمان است و نیز تکنیک‌های نیمه تحلیلی بر اساس روش‌های تبدیل لاپلاس برای بدست آوردن حل‌های گذرا مناسب است.

زنکور [۱۶] مسئله انتشار-حرارت یک صفحه دایره‌ای ضخیم ایزوتروپیک را با استفاده از اشکال ساده مدل‌های گرین و نقدی شامل اتلاف انرژی حل کرد. او نشان داد، مدل گرین-نقدی نوع II با تأخیر فاز یگانه کمترین مقدار میدان را نتیجه می‌دهد؛ در حالی که مدل ساده گرین – نقدی نوع III بیشترین مقدار را دارد؛ همچنین مدل G-N نوع III با تاخیر فاز دوگانه نتایج متوسطی را بین مدل‌های گرین – نقدی نوع III با تاخیر فاز یگانه و گرین - نقدی ساده نوع III ارائه می‌دهد.

با توجه به اینکه در تمام تحقیقاتی که تا کنون روی معادلات انتشار-ترموالاستیسیته تعمیم‌یافته انجام شده است، جسم بدون ترک در نظر گرفته شده است، در این تحقیق قصد داریم اثر میدان‌های کوپله تنش، دما و غلظت را روی ضرایب شدت تنش در نوک ترک بررسی کنیم. به همین منظور در این مقاله یک صفحه مستطیلی ایزوتروپیک شامل، ترک عایق گرمایی و انتشار در معرض شوک گرمایی مورد مطالعه قرار گرفته است. هدف بررسی اثر برهم‌کنش متقابل میدان‌های الاستیسیته، گرما و انتشار بر تغییرات زمانی ضرایب شدت تنش است. معادلات حاکم خطی بوده و مسئله با روش المان محدود توسعه‌یافته حل می‌شود.

۲- انتگرال برهمکنش

در رابطه (۱) فرم متداول انتگرال J برای یک ترک با صرف‌نظر کردن از اعمال نیرو به سطوح آن آورده شده است [۱۷]:

$$J=\lim_{\Gamma_s\to 0}\int_{\Gamma_s}(W\delta_{1j}-\sigma_{ij}u_{i,1})n_j\,d\Gamma_s \qquad (۱)$$

که در این رابطه n_j بردار نرمال بر مسیر Γ_s، u_i و σ_{ij} به ترتیب مولفه های جابجایی و تنش و W چگالی انرژی کرنشی است و با رابطه (۲) تعریف می‌شود:

$$W=\frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^{m} \qquad (۲)$$

ε_{ij} مولفه های کرنش هستند. با در نظر گرفتن تابع پیوسته q و اعمال قضیه دیورژانس، انتگرال J با استفاده از انتگرال ناحیه‌ای معادل، مطابق با رابطه (۳) بدست می‌آید [۱۸]. لازم به ذکر است که q برای مرز داخلی یک و برای مرز خارجی صفر در نظر گرفته می‌شود.

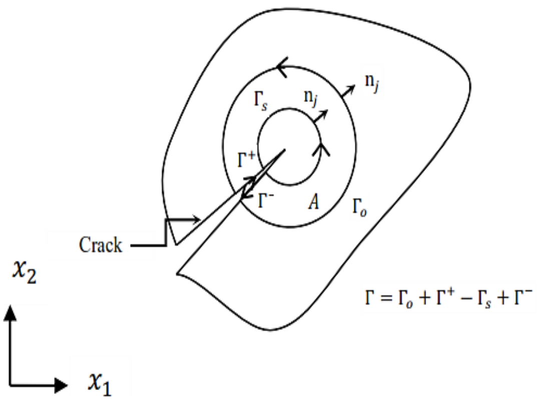
$$J=\int_A(\sigma_{ij}u_{i,1}-W\delta_{1j})q_{,j}dA+\int_A(\sigma_{ij}u_{i,1}+W\delta_{1j})_{,j}\,q\,dA \qquad (۳)$$

ناحیه انتگرال‌گیری A در شکل ۱ نشان داده شده است که ناحیه محصور به منحنی Γ است.

برای یک سیستم خطی با اعمال بارگذاری اصلی و بارگذاری کمکی، انتگرال J به صورت رابطه (۴) بیان می‌شود.

$$J^S=J+J^{aux}+M \qquad (۴)$$

در رابطه (۴)، J مقدار انتگرال J در حالت اصلی است و همچنین J^{aux} مقدار انتگرال J در حالت کمکی است و M هم انتگرال برهمکنش است که در رابطه (۵) بیان شده است [۱۸].



شکل ۱- تبدیل فرم کانتوری انتگرال J به فرم ناحیه‌ای [۱۵]

$$M=\int_A(\sigma_{ij}u_{i,1}^{aux}+\sigma_{ij}^{aux}u_{i,1}-W^{int}\delta_{1j})q_{,j}dA$$
$$+\int_A(\sigma_{ij}u_{i,1}^{aux}+\sigma_{ij}^{aux}u_{i,1}-W^{int}\delta_{1j})_{,j}\,qdA \qquad (۵)$$

W^{int} تابع چگالی انرژی کرنشی برهمکنش است که از رابطه (۶) بدست می‌آید.

$$W^{int}=\frac{1}{2}(\sigma_{ik}\varepsilon_{ik}^{aux}+\sigma_{ik}^{aux}\varepsilon_{ik}^{m}) \qquad (۶)$$

اگر از عبارت دوم رابطه (۵) مشتق گیری شود، با توجه به رابطه تعادل ($\sigma_{ij,j}=0$) و رابطه سازگاری میدان‌های اصلی و میدان‌های کمکی، انتگرال برهم‌کنش به‌صورت رابطه (۷) به‌دست می‌آید.

$$M=\int_A(\sigma_{ij}u_{i,1}^{aux}+\sigma_{ij}^{aux}u_{i,1}-W^{int}\delta_{1j})q_{,j}dA$$
$$+\int_A\left(\sigma_{ij}u_{i,1j}^{aux}+\sigma_{ij}^{aux}u_{i,1j}-W_{,1}^{int}\right)qdA \qquad (۷)$$

مشتق رابطه (۶) را می‌توان به صورت (۸) نوشت:

$$\frac{\partial W^{int}}{\partial x_1}=\sigma_{ij}u_{i,j1}^{aux}+\sigma_{ij}^{aux}u_{i,j1}+\left(\frac{\partial W^{int}}{\partial x_1}\right)_{expl} \qquad (۸)$$

در رابطه (۸) عبارت $\left(\frac{\partial W^{int}}{\partial x_1}\right)_{expl}$ را می‌توان با رابطه (۹) نوشت:

$$\left(\frac{\partial W^{int}}{\partial x_1}\right)_{expl}=\frac{\partial W^{int}}{\partial(\Delta T)}\frac{\partial(\Delta T)}{\partial x_1}+\frac{\partial W^{int}}{\partial(\Delta C)}\frac{\partial(\Delta C)}{\partial x_1} \qquad (۹)$$

با جایگذاری معادله ساختاری برحسب کرنش کل (ε)، اختلاف دما (ΔT) و غلظت رطوبت (ΔC) در رابطه (۶) می‌توان انرژی کرنشی برهمکنش را به صورت (۱۰) نوشت:

$$W^{int}=\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}^{aux}2\mu\left(\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}^{aux}\right)+\lambda\varepsilon_{kk}\varepsilon_{ij}^{aux}$$
$$-\alpha_0^c\varepsilon_{ll}^{aux}C-\alpha_0^T\varepsilon_{ll}^{aux}T \qquad (۱۰)$$

با مشتق‌گیری از رابطه (۱۰) نسبت به ΔC و ΔT روابط (۱۱) و (۱۲) به دست می‌آیند:

$$\frac{\partial W^{int}}{\partial(\Delta T)}=-\alpha_0^T\varepsilon_{ll}^{aux} \qquad (۱۱)$$

$$\frac{\partial W^{int}}{\partial(\Delta C)}=-\alpha_0^C\varepsilon_{ll}^{aux} \qquad (۱۲)$$

با جایگذاری روابط به‌دست‌آمده (۱۱) و (۱۲) در رابطه (۷) فرم نهایی انتگرال برهمکنش برای بارگذاری گرمایی-انتشار به‌صورت رابطه (۱۳) ارائه می‌شود.

$$M=\int_A\left(\sigma_{ij}u_{i,1}^{aux}+\sigma_{ij}^{aux}u_{i,1}-W^{int}\delta_{ij}\right)q_{,j}dA$$
$$+\int_A((-\alpha_0^T\varepsilon_{ll}^{aux}T)\frac{\partial(\Delta T)}{\partial x_1})qdA$$
$$+\int_A\left((-\alpha_0^c\varepsilon_{ll}^{aux}C)\frac{\partial(\Delta C)}{\partial x_1}\right)qdA \qquad (۱۳)$$

۳- استخراج ضرایب شدت تنش

رابطه بین انتگرال J و ضرایب شدت تنش K_I و K_{II} به‌صورت رابطه (۱۴) است [۱۹]:

$$J=\frac{K_I^2+K_{II}^2}{E'} \qquad (۱۴)$$

همچنین، با توجه به رابطه (۱۴) انتگرال برهم‌کنش M را می‌توان برحسب ضرایب شدت تنش K_I و K_{II} به صورت (۱۵) بازنویسی کرد [۱۹].

$$M=\frac{2}{E'}(K_IK_I^{aux}+K_{II}K_{II}^{aux}) \qquad (۱۵)$$

در رابطه بالا، E' به‌صورت رابطه (۱۶) بیان می‌شود [۱۴]:

$$E'=\begin{cases}E & \text{تنش صفحه‌ای}\\ E/(1-\nu^2) & \text{کرنش صفحه‌ای}\end{cases} \qquad (۱۶)$$

ضرایب شدت تنش K_I و K_{II} را می‌توان با انتخاب صحیح میدان‌های کمکی (مودهای خالص I و II) و نیز با استفاده از انتگرال برهم‌کنش M، به صورت زیر بدست آورد [۱۹]:

$$K_I=\frac{E'}{2}M^{(1)}\,,(K_I^{aux}=1,K_{II}^{aux}=0) \qquad (۱۷)$$

$$K_{II}=\frac{E'}{2}M^{(2)}\,,(K_I^{aux}=0,K_{II}^{aux}=1) \qquad (۱۸)$$

۴- معادلات حاکم بر انتشار در محیط ترموالاستیسیته

در اینجا به منظور تحلیل یک سازه تحت انتشار سیال از شکل کوپل معادلات انتشار-ترموالاستیسیته استفاده می‌شود. معادله حرکت، معادله تعادل جرم و معادله انرژی عبارتند از [۲۰]:

$$\sigma_{ij,j}+f_i=\rho\ddot{u}_i \qquad (۱۹)$$

$$\dot{\mu}+\dot{\mu}^{(a)}=\frac{I}{c_0}-\frac{\beta' J_{i,i}}{c_0} \qquad (۲۰)$$

$$C^T\ddot{T}+\gamma^T T_0\ddot{u}_{j,j}=\kappa^* T_{,ii} \qquad (۲۱)$$

در رابطه فوق، σ تانسور تنش، f بردار نیروی کالبدی بر واحد حجم، u_i بردار جابه‌جایی، $\mu^{(a)}$ اینرسی پتانسیل شیمیایی، I منبع انتشار، c_0 غلظت مولی و ρ چگالی، T دما، T_0 دمای اولیه، κ^* ثابت ماده، C^T گرمای ویژه است.

معادلات ساختاری عبارت است از:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} - \alpha^{c}{}_{ij}c - \alpha^{T}_{ij}T$$
$$= 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} - \alpha^{c}{}_{ij}c\delta_{ij} - \alpha^{T}_{ij}T\delta_{ij} \qquad (۲۲)$$

$$\mu = \alpha^{c}{}_{ij}\varepsilon_{ij} + \beta c \qquad (۲۳)$$

$$\rho s = S = \alpha^{T}_{ij}\varepsilon_{ij} + \rho C^{T}T \qquad (۲۴)$$

در رابطه بالا σ_{ij} مولفه‌های تانسور تنش، ε_{ij} مولفه‌های تانسور کرنش، c غلظت مولی، μ پتانسیل شیمیایی، S آنتروپی، α^{c}_{ij} ضریبی برای اتصال بین تنش و غلظت، α^{T}_{ij} ضریبی برای اتصال بین تنش و درجه حرارت، J_i شار انتشار است.

قانون فیک برای مواد ایزوتروپیک و همگن به شرح زیر است [۲۰]:

$$J_i = -D_{ij}c_{,j} = -D_0\delta_{ij}c_{,j} = -D_0c_{,i} \qquad (۲۵)$$

در رابطه (۲۵) D_0 ضریب انتشار است و در رابطه (۲۶) وابستگی $\mu^{(a)}$ به میزان غلظت نشان داده شده است:

$$\mu^{(a)} = \gamma^{c}\dot{c} \qquad (۲۶)$$

در رابطه (۲۶)، γ ضریب وابستگی است. β در رابطه (۲۳) عبارت است از:

$$\beta = \frac{\beta'}{c_0} = \frac{RT}{c_0} \qquad (۲۷)$$

در رابطه فوق R ثابت جهانی گازها و T دمای مطلق است.

با صرف‌نظر کردن از نیروهای کالبدی و منابع انتشار معادلات حاکم را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\sigma_{ij,j}(x,t) = \rho\ddot{u}_i(x,t) \qquad (۲۸)$$

$$\dot{\mu}(x,t) + \dot{\mu}^{(a)}(x,t) = -\frac{\beta' J_{i,i}}{c_0}(x,t) \qquad (۲۹)$$

$$C^{T}\ddot{T}(x,t) + \gamma^{T}T_0\ddot{u}_{j,j}(x,t) = \kappa^{*}T_{,ii}(x,t) \qquad (۳۰)$$

برای مواد ایزوتروپیک و همگن، تانسور الاستیسیته و ضرایب ماده به‌صورت زیر است [۲۰]:

$$C_{ijkl} = \frac{2\nu G}{1-2\nu}\delta_{ij}\delta_{kl} + G\delta_{ik}\delta_{jl} + G\delta_{il}\delta_{jk} \qquad (۳۱)$$

$$\alpha^{C}_{ij} = \alpha^{c}_{0}\delta_{ij} \qquad (۳۲)$$

$$\alpha^{T}_{ij} = \alpha^{T}_{0}\delta_{ij} \qquad (۳۳)$$

رابطه سینماتیک برای تغییر شکل‌های بسیار کوچک به قرار زیر است [۳]:

$$\varepsilon_{i,j} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) \qquad (۳۴)$$

در رابطه فوق ε تنسور کرنش کل است.

معادلات حاکم بر انتشار سیال در محیط ترموالاستیسیته را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\mu u_{i,jj} + (\lambda+\mu)u_{j,ij} + \mu u_{1,22} - \beta^{C}c_{,i} - \beta^{T}T_{,i} = \rho\ddot{u}_i \qquad (۳۵)$$

$$\alpha^{c}_{0}(\dot{u}_{i,i}) + \beta\dot{c} + \gamma^{c}\ddot{c} = \beta D_0(c_{,ii}) \qquad (۳۶)$$

$$\rho c\ddot{T} + \beta^{T}T_0(\ddot{u}_{i,i}) = \kappa^{*}(T_{,ii}) \qquad (۳۷)$$

در روابط فوق c غلظت مولی، β^{C} ضریب حرارتی مکانیکی، β^{T} ضریب شیمیایی مکانیکی، u جابجایی، β ثابت پتانسیل شیمیایی، D_0 ضریب پخش و κ^{*} ثابت ماده است.

۵- بی‌بعد سازی معادلات حاکم

به منظور بی‌بعد سازی معادلات حاکم از پارامترهای بدون بعد زیر استفاده شده است:

$$\hat{x} = \frac{x}{L} \qquad (۳۸)$$

$$\hat{u}_i = \frac{u_i}{L} \qquad (۳۹)$$

$$\hat{C} = \frac{\beta^{C}}{\lambda+2\mu}(C - C_0) \qquad (۴۰)$$

$$\hat{T} = \frac{\beta^{T}}{\lambda+2\mu}(T - T_0) \qquad (۴۱)$$

در این روابط L طول مشخصه است. معادلات حاکم بر انتشار سیال در محیط ترموالاستیسیته بعد از فرآیند بی‌بعد سازی به‌صورت زیر قابل بیان هستند:

$$\left(\frac{\mu}{\lambda+2\mu}\right)\hat{u}_{i,jj} + \left(\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\right)\hat{u}_{j,ij}$$
$$-\hat{C}_{,i} - \hat{T}_{,i} = \frac{\rho V^2}{\lambda+2\mu}\ddot{\hat{u}}_i \qquad (۴۲)$$

$$\ddot{\hat{T}} + \frac{\beta^{T}T_0^2}{\rho c(\lambda+2\mu)}\ddot{\hat{u}}_{i,i} = \frac{\kappa^{*}}{\rho c V^2}\hat{T}_{,ii} \qquad (۴۳)$$

$$\frac{\gamma^{c}V}{\beta L}\ddot{\hat{C}} + \dot{\hat{C}} + \frac{\beta C^2}{\beta(\lambda+2\mu)}\dot{\hat{u}}_{i,i} = D_0\frac{1}{VL}\hat{C}_{i,i} \qquad (۴۴)$$

برای ساده‌سازی معادلات (۴۲) تا (۴۴)، پارامترهایی به‌صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$\left(\frac{\mu}{\lambda+2\mu}\right) = \hat{\mu} \qquad (۴۵)$$

$$\left(\frac{\lambda+\mu}{\lambda+2\mu}\right) = (\hat{\lambda} + \hat{\mu}) \qquad (۴۶)$$

$$\frac{\rho V^2}{\lambda+2\mu} = \hat{\rho} \qquad (۴۷)$$

$$\frac{\beta^{T}T_0^2}{\rho c(\lambda+2\mu)} = \varepsilon^{T} \qquad (۴۸)$$

$$\frac{\kappa^*}{\rho c V^2} = \hat{\kappa}^* \tag{۴۹}$$

$$\frac{\gamma^c V}{\beta L} = \hat{\tau}_0 \tag{۵۰}$$

$$\frac{\beta C^2}{\beta(\lambda + 2\mu)} = \varepsilon^c \tag{۵۱}$$

$$D_0 \frac{1}{VL} = \widehat{D}_0 \tag{۵۲}$$

با معرفی و جایگذاری این پارامترها در معادلات (۴۲) تا (۴۴)، این معادلات به‌صورت زیر در خواهند آمد:

$$\hat{\mu}\hat{u}_{i,jj} + (\hat{\lambda} + \hat{\mu})\hat{u}_{j,ij} - \widehat{C}_{,i} - \widehat{T}_{,i} = \hat{\rho}\ddot{\hat{u}}_i \tag{۵۳}$$

$$\ddot{\widehat{T}} + \varepsilon^T \ddot{\hat{u}}_{i,i} = \hat{\kappa}^* \widehat{T}_{,ii} \tag{۵۴}$$

$$\hat{\tau}_0 \ddot{\widehat{C}} + \dot{\widehat{C}} + \varepsilon^c \dot{\hat{u}}_{i,i} = \widehat{D}_0 \widehat{C}_{i,i} \tag{۵۵}$$

در معادلات بالا $V = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}$ است.

۶- گسسته‌سازی معادلات انتشار- ترموالاستیسیته

برای گسسته‌سازی معادلات حاکم از روش گلرکین استفاده شده است. یک المان مبنا (e) در نظر گرفته می‌شود که تمامی گره‌های آن توسط هر دو تابع غنی‌ساز، غنی سازی می‌شوند. این توابع برحسب مختصات محلی قطبی (r و Φ) در نوک ترک عبارتند از [۲۱]:

$$\Phi_h(x,y) = N_h(x,y)[H(Z) - H(Z_h)] \tag{۵۶}$$

$$\Psi_n(x,y) = N_h(x,y)[\sqrt{r}\sin\left(\frac{\Phi}{2}\right) - \sqrt{r_n}\sin\left(\frac{\Phi_n}{2}\right), \sqrt{r}\cos\left(\frac{\Phi}{2}\right) - \sqrt{r_n}\cos\left(\frac{\Phi_n}{2}\right), \sqrt{r}\sin(\Phi)\sin\left(\frac{\Phi}{2}\right) - \sqrt{r_n}\sin(\Phi_n)\sin\left(\frac{\Phi_n}{2}\right), \sqrt{r}\sin(\Phi)\cos\left(\frac{\Phi}{2}\right) - \sqrt{r_n}\sin(\Phi_n)\cos\left(\frac{\Phi_n}{2}\right)] \tag{۵۷}$$

$H(Z)$ تابع هویساید است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H(Z) = \begin{cases} 1, & Z > 0 \\ 0 & Z \le 0 \end{cases}$$

در اینجا Z تابعی از موقعیت یک نقطه نسبت به مسیر ترک است.

بنابراین مؤلفه‌های جابه‌جایی، دما و غلظت برای المان مبنای e به‌صورت زیر بیان می‌شوند:

$$u^e(x,y,t) = N_h(x,y)a_h^u(t) + \Phi_h(x,y)b_h^u(t) + \Psi_{nm}(x,y)c_{hm}^u(t) \tag{۵۸}$$

$$v^e(x,y,t) = N_h(x,y)a_h^v(t) + \Phi_h(x,y)b_h^v(t) + \Psi_{nm}(x,y)c_{hm}^v(t) \tag{۵۹}$$

$$\theta^e(x,y,t) = N_h(x,y)a_h^T(t) + \Phi_h(x,y)b_h^T(t) + \Psi_{nm}(x,y)c_{hm}^T(t) \tag{۶۰}$$

$$c^e(x,y,t) = N_h(x,y)a_h^z(t) + \Phi_h(x,y)b_h^z(t) + \Psi_{nm}(x,y)c_{hm}^T(t) \tag{۶۱}$$

$$h = 1, \dots, ne, \quad m = 1, \dots, 4$$

با نوشتن فرم ضعیف معادلات حاکم بی بعد شده در نهایت فرم گسسته شده معادلات حرکت (۶۲) و (۶۳)، معادله تعادل جرم (۶۴) و معادله انرژی (۶۵) به‌صورت زیر بدست می‌آیند:

$$\int_{\Omega^e} [(\hat{\lambda} + 2\hat{\mu})u_{1,11} + (\hat{\lambda} + \hat{\mu})u_{1,22} + \hat{\mu}u_{2,22} - \beta^c C_{,1} - \beta^T T_{,1} - \ddot{u}_1] d\Omega = \int_{\Omega^e} T r_x^n N_i d\Omega \tag{۶۲}$$

$$\int_{\Omega^e} [\hat{\mu}u_{1,12} + (\hat{\lambda} + \hat{\mu})u_{2,11} + (\hat{\lambda} + 2\hat{\mu})u_{2,22} - \beta^c C_{,1} - \beta^T T_{,1} - \ddot{u}_2] d\Omega = \int_{\Omega^e} T r_y^n N_i d\Omega \tag{۶۳}$$

$$\int_{\Omega^e} (\hat{\tau}_0 \ddot{c} + \dot{c} - \widehat{D}_0 c_{,ii} + \kappa^c \dot{u}_{i,i}) d\Omega = -\int_{\Omega^e} (q_i n_i) N_i d\Omega \tag{۶۴}$$

$$\int_{\Omega^e} (\ddot{T} + \kappa^T(\ddot{u}_{1,1} + \ddot{u}_{2,2}) - \hat{\kappa}^*(T_{,11} + T_{,22})) d\Omega = -\int_{\Omega^e} (q_i n_i) N_i d\Omega \tag{۶۵}$$

با گسسته‌سازی انتگرال‌های فوق با استفاده از روش المان محدود توسعه یافته و اعمال تقریب‌های میدان‌های جابجایی، دما و غلظت خواهیم داشت:

$$\int_{\Omega^e} [(\hat{\lambda} + 2\hat{\mu}) S_{L.x}\left(N_{n.x}a_n^u + \Phi_{n,x}b_n^u + \Psi_{nm,x}c_{nm}^u\right) + (\hat{\lambda} + \hat{\mu}) S_{L.y}\left(N_{n.y}a_n^u + \Phi_{n,y}b_n^u + \Psi_{nm,y}c_{nm}^u\right) + \hat{\mu} S_{L.x}\left(N_{n.y}a_n^v + \Phi_{n,y}b_n^v + \Psi_{nm,y}c_{nm}^v\right) - \beta^c S_{L.x}(N_n a_n^c + \Phi_n b_n^c + \Psi_{nm}c_{nm}^c)$$

$$-\beta^{T} S_{L.x}(N_n a_n^T + \Phi_n b_n^T + \Psi_{nm} c_{nm}^T)$$
$$-S_L(N_n a_n^u + \Phi_n b_n^u + \Psi_{nm} c_{nm}^u)]\mathrm{d}\Omega$$
$$= \int_{\Omega^e} \mathrm{Tr}_x^n \mathrm{S_L d}\Omega \quad (۶۶)$$

$$\int_{\Omega^e} [\hat{\mu}\, S_{L.x}\big(N_{n.y} a_n^u + \Phi_{n,y} b_n^u + \Psi_{nm,y} c_{nm}^u\big)$$
$$+\big(\hat{\lambda} + \hat{\mu}\big) S_{L.x}\big(N_{n.x} a_n^v + \Phi_{n,x} b_n^v + \Psi_{nm,x} c_{nm}^v\big)$$
$$+\big(\hat{\lambda} + 2\hat{\mu}\big) S_{L.y}\big(N_{n.y} a_n^v + \Phi_{n,y} b_n^v + \Psi_{nm,y} c_{nm}^v\big)$$
$$-\beta^c S_{L.y}(N_n a_n^c + \Phi_n b_n^c + \Psi_{nm} c_{nm}^c)$$
$$-\beta^T S_{L.y}(N_n a_n^T + \Phi_n b_n^T + \Psi_{nm} c_{nm}^T)$$
$$-S_L\big(N_n \ddot{a}_n^u + \Phi_n \ddot{b}_n^u + \Psi_{nm} \ddot{c}_{nm}^u\big)]d\Omega$$
$$= \int_{\Omega^e} Tr_y^n S_L d\Omega \quad (۶۷)$$

$$\int_{\Omega^e} [\hat{\tau}_0\, S_L\big(N_n \ddot{a}_n^c + \Phi_n \ddot{b}_n^c + \Psi_{nm} \ddot{c}_{nm}^c\big)$$
$$+S_L\big(N_n \dot{a}_n^c + \Phi_n \dot{b}_n^c + \Psi_{nm} \dot{c}_{nm}^c\big)$$
$$-\widehat{D}_0 S_{L.x}\big(N_{n.x} a_n^c + \Phi_{n,x} b_n^c + \Psi_{nm,x} c_{nm}^c\big)$$
$$+S_{L.y}\big(N_{n.y} a_n^c + \Phi_{n,y} b_n^c + \Psi_{nm,y} c_{nm}^c\big)$$
$$+\kappa^c S_{L.x}\big(N_{n.y} a_n^u + \Phi_{n,x} b_n^x + \Psi_{nm,x} c_{nm}^x\big)$$
$$+S_{L.y}\big(N_{n.y} a_n^v + \Phi_{n,y} b_n^v + \Psi_{nm,y} c_{nm}^v\big)]d\Omega$$
$$= -\int_{\Omega^e} (q_x n_x) S_L d\Omega - \int_{\Omega^e} (q_y n_y) S_L d\Omega \quad (۶۸)$$

$$\int_{\Omega^e} [S_L(N_n a_n^T + \Phi_n b_n^T + \Psi_{nm} c_{nm}^T)$$
$$+\kappa^T S_{L.x}\big(N_n \ddot{a}_n^u + \Phi_n \ddot{b}_n^u + \Psi_{nm} \ddot{c}_{nm}^u\big)$$
$$+\kappa^T S_{L.y}\big(N_n \ddot{a}_n^v + \Phi_n \ddot{b}_n^v + \Psi_{nm} \ddot{c}_{nm}^v\big)$$
$$-\hat{\kappa}^* S_{L,x}\big(N_{n,x} a_n^T + \Phi_{n,x} b_n^T + \Psi_{nm,x} c_{nm}^T\big)$$
$$+\hat{\kappa}^* S_{L,y}\big(N_{n,y} a_n^T + \Phi_{n,y} b_n^T + \Psi_{nm,y} c_{nm}^T\big)]\, d\Omega$$
$$= -\int_{\Omega^e} (q_x n_x) S_L d\Omega - \int_{\Omega^e} (q_y n_y) S_L d\Omega \quad (۶۹)$$

که در این رابطه توابع وزنی $(S_L(x,y))$ همان توابع شکل المان محدود توسعه یافته هستند یعنی،

$$S_L = \{N_1, N_2, N_3, N_4, \Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4, \Psi_{1m}, \Psi_{2m}, \Psi_{3m}, \Psi_{4m}\} \quad m=1,\dots,4 \quad (۷۰)$$

در معادلات بالا $\mathrm{Tr}=\sigma.n$ همان بردار تنش است.

درنهایت معادلات گسسته‌سازی شده را می‌توان به‌صورت ماتریسی بیان کرد:

$$[\mathrm{M}]\{\ddot{\Delta}\} + [\mathrm{C}]\{\dot{\Delta}\} + [\mathrm{K}]\{\Delta\} = \{\mathrm{F}\} \quad (۷۱)$$

در این رابطه [M]، [C] و [K] به ترتیب ماتریس‌های جرم، میرایی، و سفتی هستند. {Δ} بردار مجهولات گره‌ای و {F} بردار نیروهای گره‌ای است. برای یک المان مبنا (e) ماتریس‌ها و بردارهای بدست آمده در پیوست مقاله ارائه شده‌اند.

۷- مثال‌های عددی

در این بخش برای استخراج نتایج عددی ابتدا دقت و کارایی روش المان محدود توسعه‌یافته بررسی گردیده است. همچنین تاریخچه زمانی ضریب شدت تنش، دمای نوک ترک و غلظت نوک ترک در سه مثال مختلف با شرایط مرزی متفاوت برای یک صفحه دارای ترک مورد تعیین شده‌اند.

در این تحقیق برای پیاده‌سازی روش المان محدود توسعه‌یافته و حل معادلات انتشار-ترموالاستیسیته به‌منظور شبیه‌سازی مسائل مختلف شکست از محیط برنامه‌نویسی نرم‌افزار MATLAB استفاده شده است.

۷-۱- صفحه دارای ترک تحت بارگذاری متقارن حرارتی – انتشار

ضریب شدت تنش مود اول برای این مسئله، با استفاده از روش انتگرال برهم‌کنش برای یک ناحیه انتگرال‌گیری دایروی به شعاع r/a = ۰/۳ به دست آمده است. برای انتخاب تعداد المان از یک آزمون همگرایی استفاده شده که نتایج آن در شکل ۳ نشان داده شده‌اند. ضریب شدت تنش با استفاده از روش انتگرال برهم‌کنش در چارچوب روش المان محدود توسعه‌یافته محاسبه گردیده است.

یک صفحه همگن به عرض W=۱ واحد و ارتفاع H=۲ واحد با یک طول ترک a=0.3 واحد در فضای بدون بعد و شامل یک ترک موازی با جهت محور x مطابق با شکل ۲ انتخاب شده است. سرعت موج تنش برابر با یک، سرعت موج دما ۱/۲ و سرعت موج غلظت برابر با ۰/۸ در نظر گرفته شده است. این صفحه، بدون هیچ قید مکانیکی در ابتدا در دمای مرجع یکنواخت (بدون تنش) $\mathrm{T_0}$ = ۲۹۳K قرار دارد. یک

تغییر دمای ناگهانی در لبه ترک‌خورده باریکه، به‌عنوان بارگذاری حرارتی و انتشار اعمال شده است. شرایط بارگذاری این‌گونه است که وجه سمت چپ تحت تأثیر یک شوک حرارتی به مقدار ۰/۰۰۱- بی‌بعد و شوک غلظتی به مقدار ۰/۰۰۵- بی‌بعد قرار دارد.

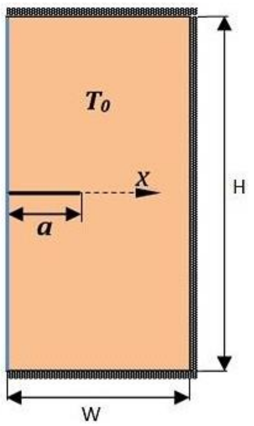
در تحلیل المان محدود از شبکه مش بندی‌های منظم با المان‌های مستطیلی چهار گره‌ای استفاده گردیده و همچنین گام زمانی d=۰/۰۳ در نظر گرفته‌شده است، جنس صفحه مس بوده که خواص آن در جدول ۱ ارائه شده است. شعاع انتگرال‌گیری برای انتگرال ناحیه‌ای معادل r/a=۰/۳ انتخاب شده است.

منحنی ضریب شدت تنش بر حسب زمان برای سه شبکه متشکل از ۸۰×۱۶۰، ۹۰×۱۸۰ و ۱۰۰×۲۰۰ المان در شکل ۳ ارائه شده است. بر طبق نتایج به‌دست‌آمده که در شکل ۳ مشاهده می‌شود با ریزتر شدن مش نتایج همگرا می‌شوند. همانطور که مشاهده می‌شود، نتایج به‌دست‌آمده تقریباً یکسان است.

برای صحت سنجی از عبارت جفت کننده معادلات دما، غلظت و جابجایی صرف‌نظر شده است؛ در نتیجه این معادلات را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\ddot{\hat{T}} - \hat{\kappa}^{*}\hat{T}_{,ii} = 0 \quad (۷۲)$$

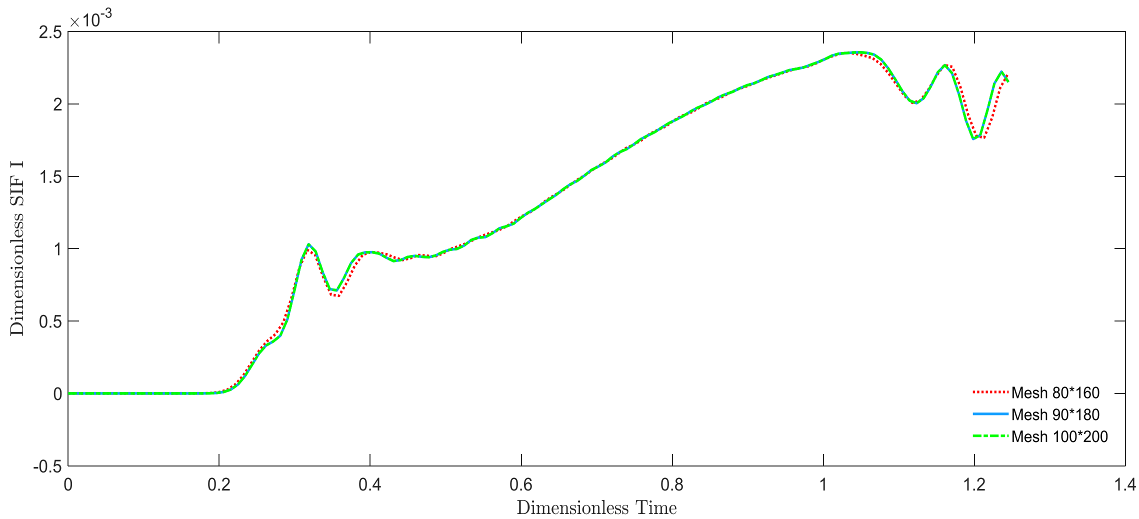
$$\hat{\tau}_0\ddot{\hat{C}} + \dot{\hat{C}} - \widehat{D}_0\hat{C}_{,i,i} = 0 \quad (۷۳)$$



شکل ۲- صفحه مستطیلی شامل ترک عمود بر لبه تحت شوک حرارتی و انتشار

جدول ۱- خواص ماده تشکیل دهنده صفحه (مس) [۱۲]

ظرفیت گرمایی ویژه (J/kg-K)	چگالی (kg/m^3)	هدایت گرمایی (W/m-K)	ضریب انبساط گرمایی $(10^{-6}/K)$	نسبت پواسون	مدول یانگ (GPa)
۳۸۳/۱	۸۹۵۴	۳۸۶	۸/۵	۰/۳	۷۰



شکل ۳- نمودار ضریب شدت تنش برای مش بندی‌های مختلف در صفحه

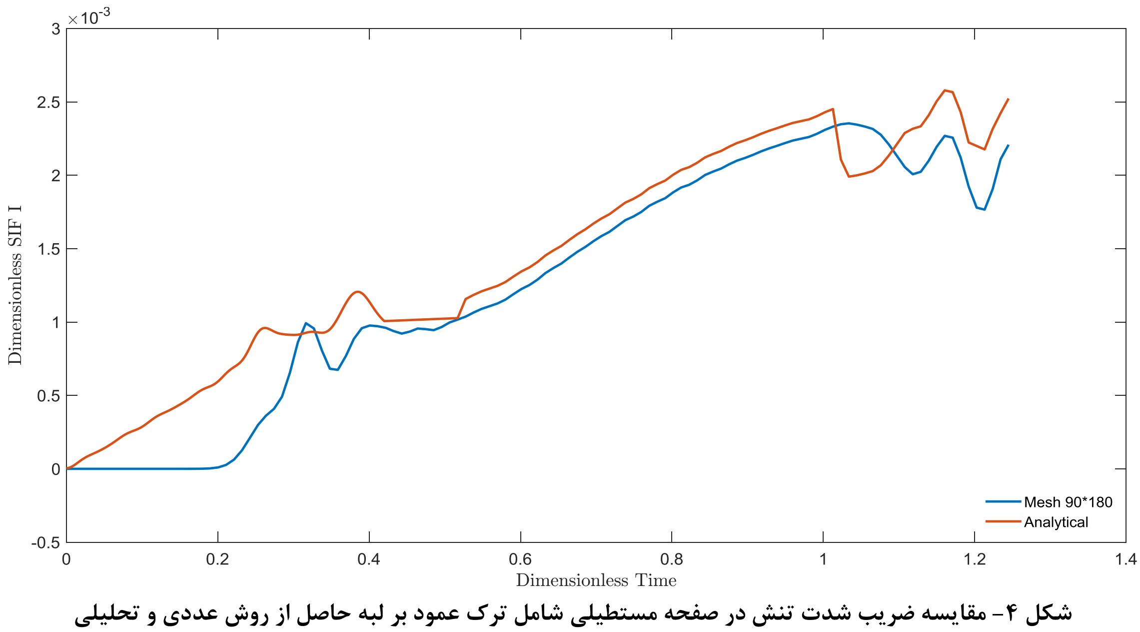
معادلات را به صورت تحلیلی با استفاده از روش جداسازی متغیرها حل کرده تا دما و غلظت برحسب x و t به دست آید (مسئله یک بعدی است)، سپس تنش را به دست آورده و با استفاده از روش تابع وزنی ضریب شدت تنش مود اول همان‌طور که در شکل ۴ مشاهده می‌شود، با استفاده از نرم افزار MAPLE بدست آمده و با ضریب شدت تنش حاصل از روش عددی مقایسه است.

با توجه به سرعت‌های اعمالی زمان رسیدن موج تنش به نوک ترک همان‌طور که در شکل ۴ مشاهده می‌شود، در زمان t=۰/۳۷۵، زمان رسیدن موج غلظت به نوک ترک t=۰/۳ و زمان رسیدن موج دما به نوک ترک t=۰/۲۵ است. بعد از رد شدن موج تنش، دما و غلظت از نوک ترک همان‌طور که در شکل نیز مشاهده می‌شود، ضریب شدت تنش روند افزایشی پیدا می‌کند تا اینکه امواج ذکر شده کل صفحه را پیموده و پس از برخورد به دیواره سمت راست صفحه منعکس شده و دوباره به نوک ترک می‌رسند که می‌توان در نمودار به‌وضوح این پدیده را مشاهده کرد.

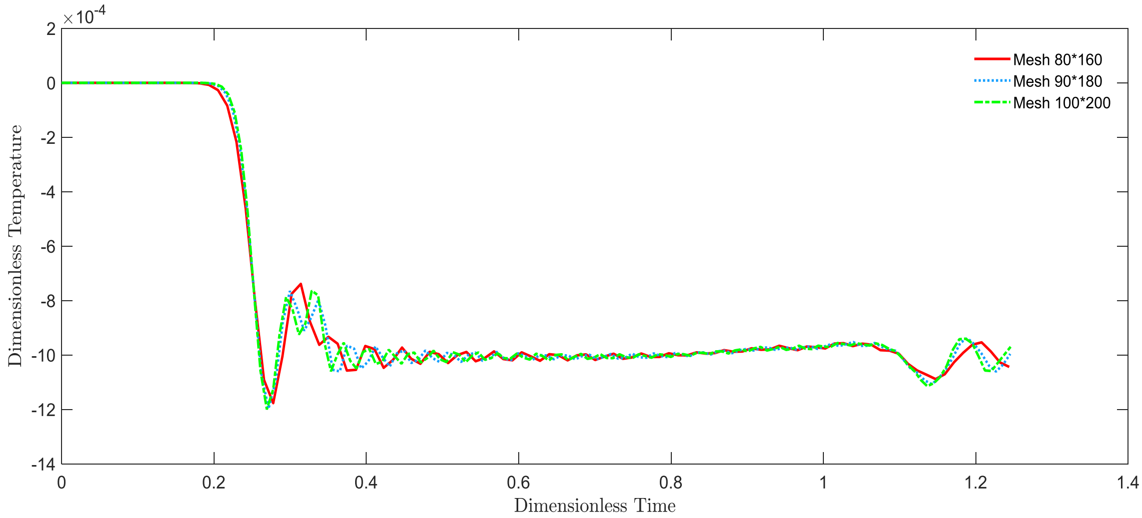
منحنی‌های تغییرات زمانی دما در نوک ترک برای شبکه بندی‌های مختلف در شکل ۵ نشان داده شده است. موج دما در t=۰/۲۵ در فضای بی‌بعد به نوک ترک می‌رسد که این امر موجب افت شدید دما در نوک ترک می‌شود. نوسانات اضافی در منحنی تغییرات دما به علت استفاده از روش ضمنی نیومارک وارد شده است. موج تنش به همراه موج غلظت در زمان t=۰/۳ به نوک ترک می‌رسد و موجب کاهش دوباره دما در نوک ترک می‌شود. تطابق منحنی‌ها با تعداد المان‌های مختلف، نشانگر این است که نتایج به‌دست‌آمده مستقل از تعداد المان است. با رسیدن موج دما به نوک ترک در زمان بی‌بعد t=۰/۲۵ دمای نوک ترک کاهش پیداکرده است.

رسیدن موج غلظت در زمان t=۰/۳ باعث افزایش دمای نوک ترک می‌شود. رسیدن موج تنش به نوک ترک در زمان t=۰/۳۷۵ باعث کاهش دمای نوک ترک شده و دما با نوسان جرئی در همین مقدار باقی می‌ماند تا اینکه امواج از لبه سمت راست دوباره به نوک ترک برسند.

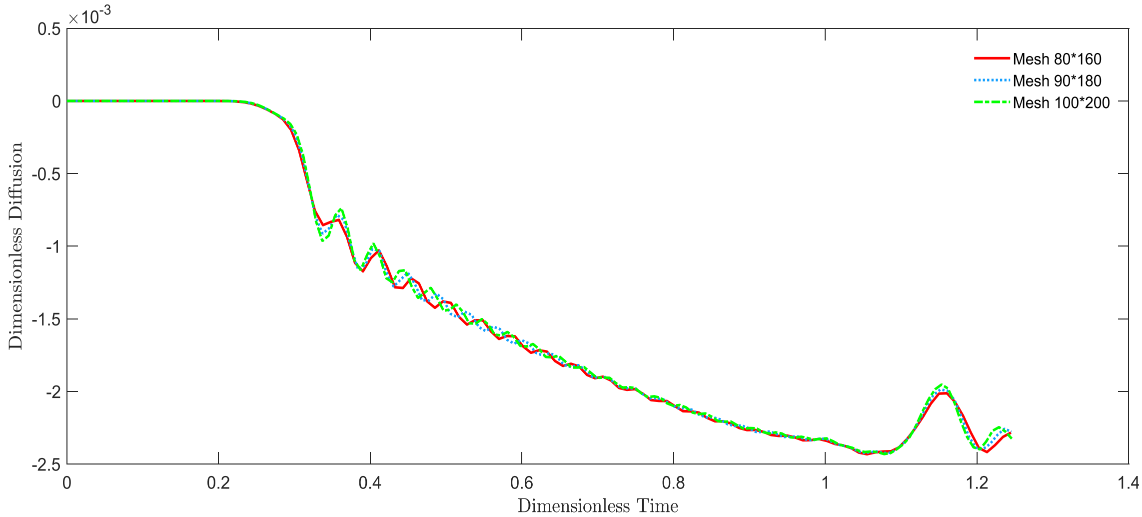
منحنی‌های تغییرات زمانی انتشار در نوک ترک برای شبکه بندی‌های مختلف در شکل ۶ نشان داده شده است. موج دما در t=۰/۲۵ در فضای بی‌بعد به نوک ترک می‌رسد که این امر موجب افت شدید غلظت در نوک ترک می‌شود. نوسانات اضافی در منحنی تغییرات انتشار به علت استفاده از روش ضمنی نیومارک وارد شده است. موج غلظت در زمان t=۰/۳ به نوک ترک می‌رسد و موجب کاهش دوباره غلظت در نوک ترک می‌شود. با رسیدن موج تنش به نوک ترک در زمان بی‌بعد t=۰/۳۷۵ غلظت در نوک ترک کاهش یافته است.



شکل ۴- مقایسه ضریب شدت تنش در صفحه مستطیلی شامل ترک عمود بر لبه حاصل از روش عددی و تحلیلی



شکل ۵- دمای نوک ترک در مش بندی‌های مختلف برحسب زمان



شکل ۶- انتشار در نوک ترک برای مش بندی‌های مختلف برحسب زمان

تأثیر گام زمانی بر ضریب شدت تنش مود اول برای گام‌های زمانی ۰/۰۰۱ و ۰/۰۰۳ در شکل ۷ بررسی شده است. برای مدل‌سازی هندسه صفحه از شبکه‌ای متشکل از ۸۰×۱۶۰ المان استفاده شده و شعاع ناحیه انتگرال‌گیری برای انتگرال ناحیه‌ای معادل r/a=۰/۳ انتخاب شده است. نتایج به‌دست‌آمده تقریباً یکسان هستند.

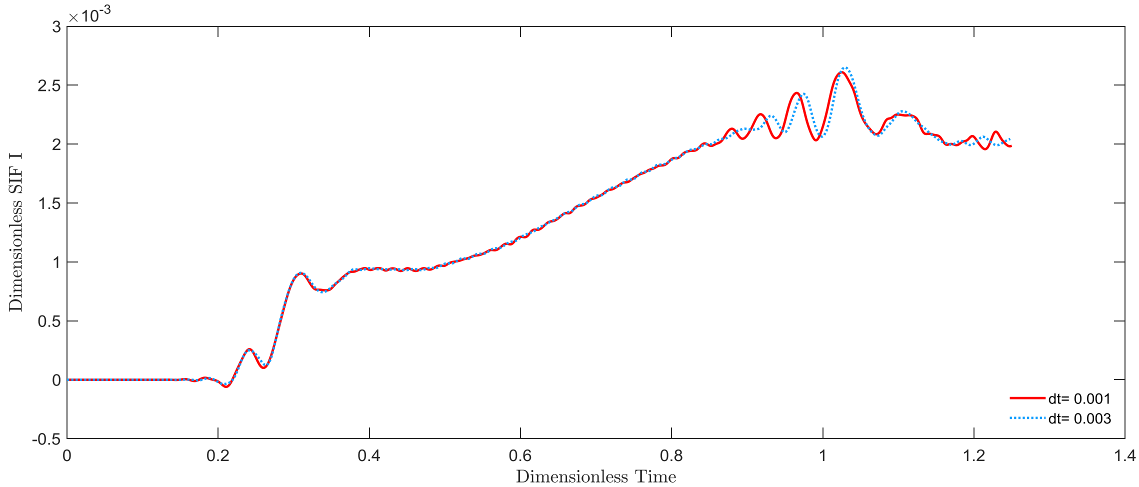
با توجه به سرعت‌های بی‌بعد اعمالی، سرعت موج تنش یک (C_P =۱)، سرعت موج دما ۱/۲ (C_T=۱/۲) و سرعت موج غلظت ۰/۸ (C_C=۰/۸) در نظر گرفته شده است. با رسیدن موج دما در زمان t=۰/۲۵ به نوک ترک، ضریب شدت تنش مود اول شروع به افزایش می‌کند. نوسانات اضافی در نمودار تغییرات ضریب شدت تنش مود اول به دلیل استفاده از روش ضمنی نیومارک رخ داده است. با رسیدن موج غلظت در زمان t=۰/۳ به نوک ترک، ضریب شدت تنش مود اول افزایش پیداکرده و در زمان t=۰/۳۷۵ با تأثیرات موج تنش ضریب شدت تنش مود اول دوباره افزایش پیدا کرده و به حالت نوسانات پیوسته به افزایش خود تا انتهای مسیر ادامه می‌دهد. این نوسانات افزایش ضریب شدت تنش تا رسیدن بازتاب موج تنش، غلظت و دما به نوک ادامه پیدا می‌کند.

تغییرات دمای نوک ترک و تغییرات انتشار در نوک ترک برحسب زمان برای گام‌های زمانی ۰/۰۰۱ و ۰/۰۰۳ به ترتیب در شکل‌های ۸ و ۹ نشان داده شده‌اند. مشاهده می‌شود، نتایج بدست آمده برای گام‌های زمانی انتخاب شده تقریبا یکسان هستند.

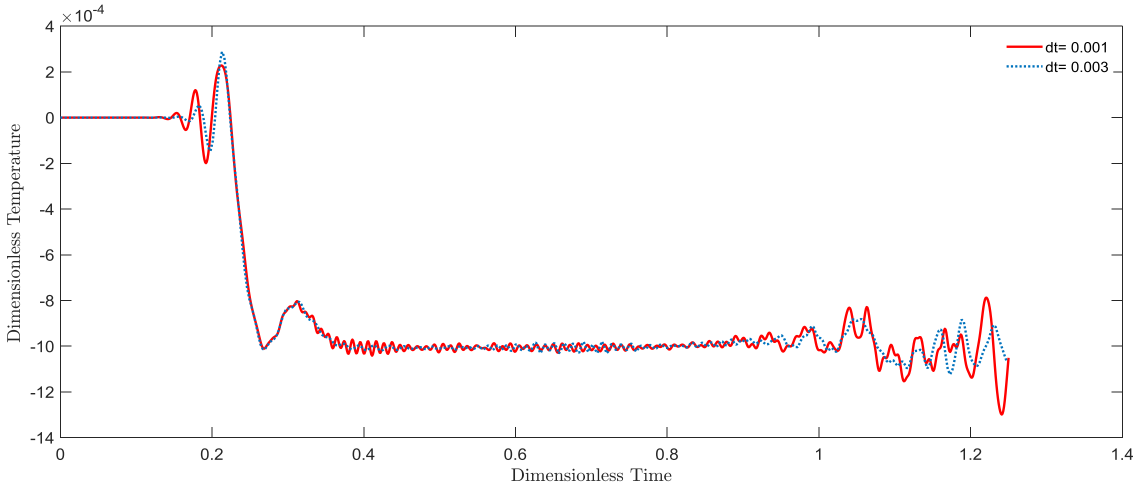
همان‌طور که در شکل ۹ نشان داده شده است، به‌منظور بررسی اثر اندازه ناحیه انتگرال‌گیری در مقادیر ضریب شدت تنش، این مثال با سه ناحیه انتگرال‌گیری با مساحت‌های متفاوت تحلیل شده است. المان‌هایی که توسط یک دایره به مرکز نوک ترک و شعاع‌های نسبی مختلف (با توجه به طول ترک) محصور شده‌اند، به‌عنوان ناحیه انتگرال‌گیری در نظر گرفته شده‌اند. سه شعاع نسبی (r/a) با مقادیر ۰/۱ ، ۰/۲ و ۰/۳ انتخاب شده‌اند.

۷-۲- صفحه دارای ترک تحت بارگذاری نامتقارن حرارتی – انتشار

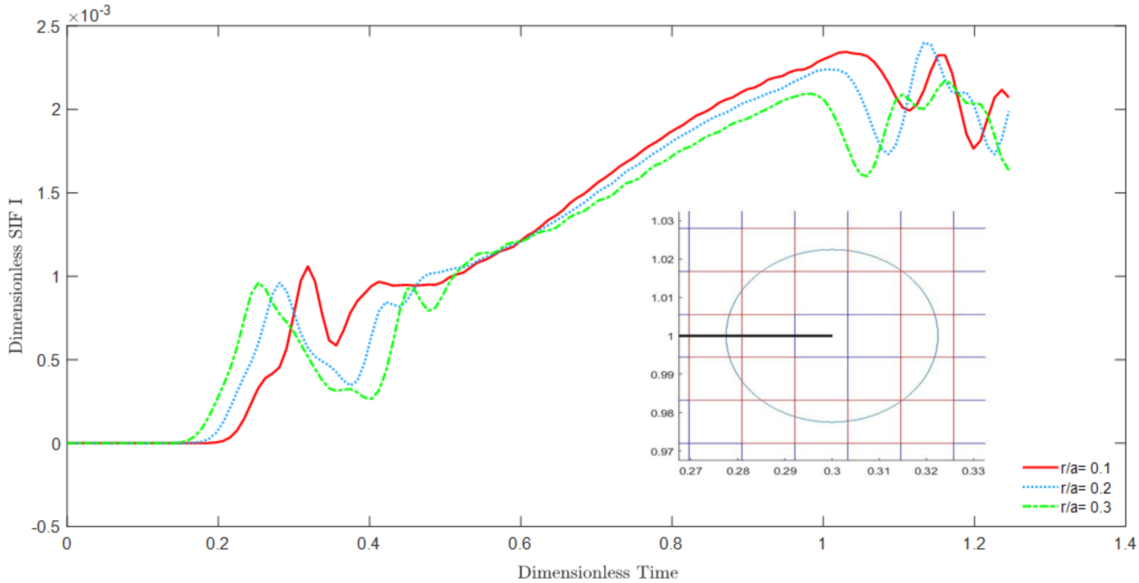
در مثال قبل به علت بارگذاری متقارن نسبت به ترک، تنها ضریب شدت تنش مود اول استخراج گردید. در این مثال به علت بارگذاری نامتقارن نسبت به ترک، هر دو ضریب شدت تنش مود اول و دوم وجود خواهد داشت که با استفاده از روش انتگرال برهمکنش در چارچوب روش المان محدود



شکل ۷- تأثیر گام زمانی بر ضریب شدت تنش مود اول



شکل ۸- دمای نوک ترک در صفحه دارای ترک برحسب زمان برای گام‌های زمانی مختلف



شکل ۹- تغییرات ضریب شدت تنش برحسب زمان برای ناحیه‌های انتگرال‌گیری متفاوت در نوک ترک

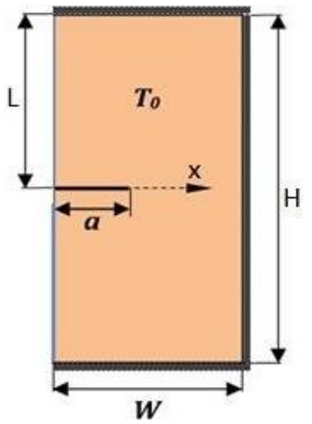
توسعه‌یافته محاسبه می‌شوند. صفحه به‌صورت محدود و همگن است و بدون هیچ قید مکانیکی در ابتدا در دمای مرجع یکنواخت (بدون تنش) T_0 = ۲۹۳K قرار دارد. نیمه پایینی وجه چپ این صفحه تحت تأثیر یک شوک حرارتی به مقدار ۰/۰۰۱- بی‌بعد و شوک غلظتی به مقدار ۰/۰۰۵- بی‌بعد قرار دارد. ابعاد صفحه و طول ترک همانند مثال قبل در نظر گرفته شده‌اند که در شکل ۱۰ هم نشان داده شده است.

در تحلیل المان محدود از شبکه بندی‌های منظم با المان‌های مستطیلی چهار گره‌ای استفاده گردیده و همچنین گام زمانی d=۰/۰۳ در نظر گرفته شده است. برای مدل‌سازی هندسه نیم‌صفحه از دو شبکه بندی متشکل از ۸۰×۱۶۰ و ۹۰×۱۸۰ المان استفاده شده است، نتایج به‌دست‌آمده تقریباً یکسان است.

شعاع نسبی ناحیه انتگرال‌گیری برای انتگرال ناحیه‌ای معادل r/a=۰/۳ قرار داده شده است. با توجه به سرعت‌های بی‌بعد اعمالی، سرعت موج تنش یک (C_P =۱)، سرعت موج دما ۱/۲ (C_T=۱/۲) و سرعت موج غلظت ۰/۸ (C_C=۰/۸) در نظر گرفته شده است.

منحنی‌های تغییرات زمانی ضریب شدت تنش مود اول در شکل ۱۱ ارائه شده‌اند. با توجه به سرعت‌های اعمالی زمان رسیدن موج تنش به نوک ترک، همان‌طور که در شکل ۱۱ هم نشان داده شده است، در زمان ۰/۳۷۵، زمان رسیدن موج غلظت به نوک ترک ۰/۳ و زمان رسیدن موج دما به نوک ترک ۰/۲۵ است.

بعد از عبور موج‌های تنش، دما و غلظت از نوک ترک همان‌طور که در شکل نیز مشاهده می‌شود، ضریب شدت تنش روند افزایشی پیدا می‌کند تا اینکه موج‌ها کل صفحه را پیموده و پس از برخورد به لبه سمت راست منعکس شده و دوباره به نوک ترک می‌رسند که می‌توان در نمودار زیر نیز به‌وضوح این پدیده را مشاهده کرد.

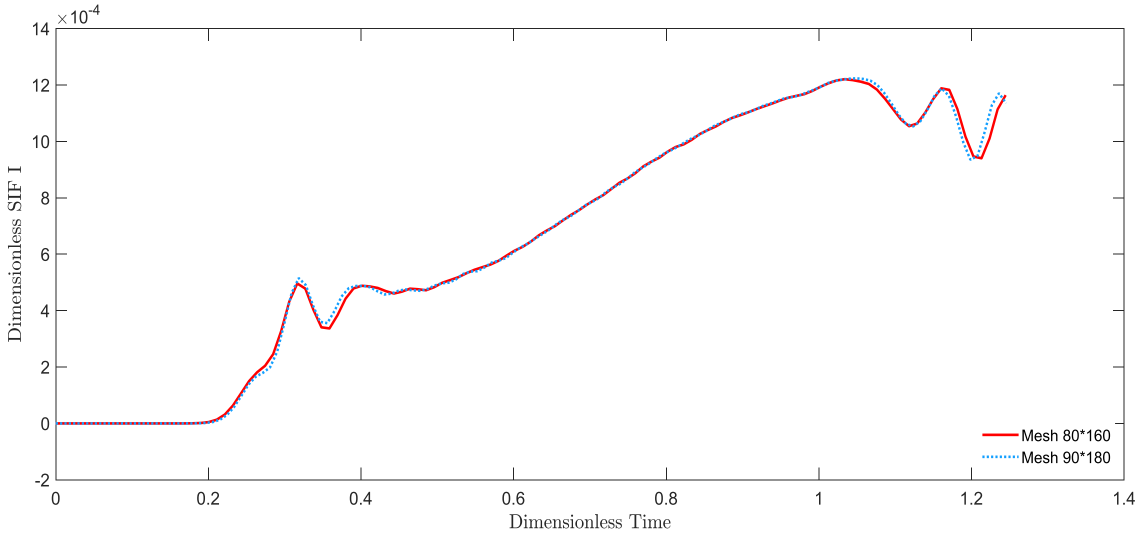


شکل ۱۰- صفحه مستطیلی شامل ترک عمود بر لبه تحت شوک حرارتی و انتشار ...

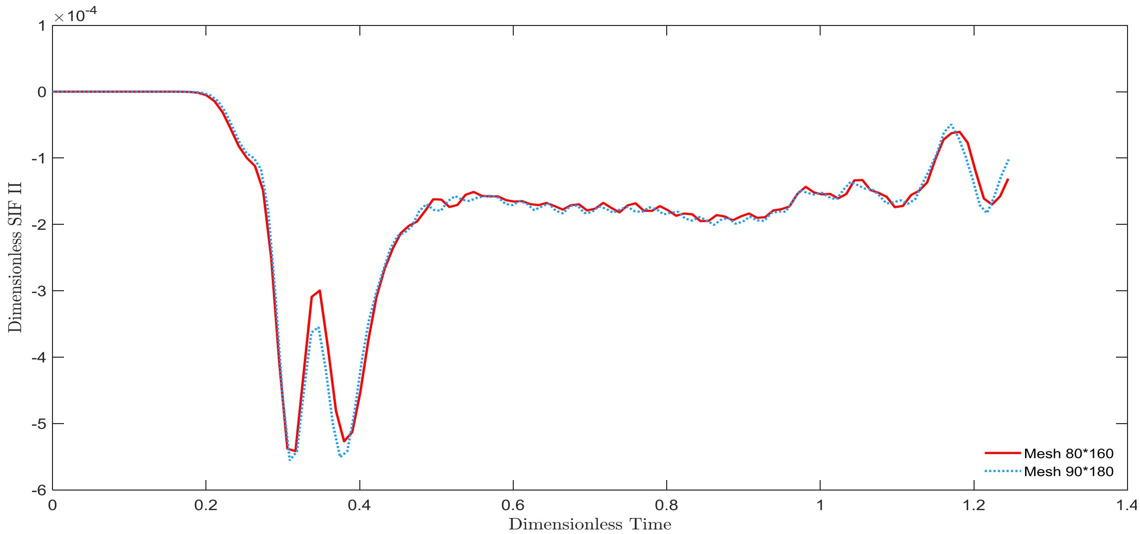
تغییرات زمانی ضریب شدت تنش مود دوم در شکل ۱۲ بررسی شده است.

با رسیدن موج غلظت در زمان t=۰/۲ به نوک ترک، با کاهش دما و افزایش غلظت ضریب شدت تنش مود دوم شروع به کاهش می‌کند. با رسیدن موج تنش در زمان t=۰/۳ ضریب شدت تنش مود دوم افزایش یافته تا با رسیدن موج غلظت در زمان t=۰/۳۵ مجدد کاهش پیدا کرده و در زمان t=۰/۴ با تأثیرات موج تنش دوباره افزایش یافته و در مقدار حدود ۱/۵ نوسان می‌کند. این نوسانات تا رسیدن بازتاب موج تنش و دما به نوک ادامه پیدا می‌کند. با رسیدن موج تنش و دما ضریب شدت تنش شروع به کاهش کرده و سپس افزایش می‌یابد و بعد از عبور موج‌ها دوباره به نوسانات پایدار خود می‌رسد.

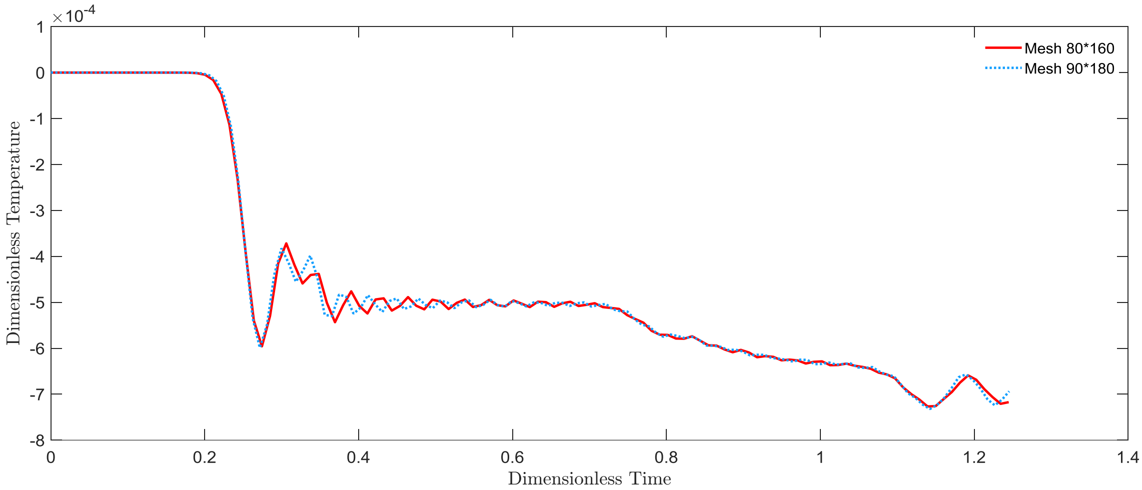
منحنی‌های تغییرات زمانی دما در نوک ترک برای شبکه‌بندی‌های متفاوت در شکل ۱۳ نشان داده شده است. با رسیدن موج دما به نوک ترک در زمان t=۰/۲۵ دمای نوک ترک به‌طور ناگهانی کاهش‌یافته است و ممکن است، از مقدار شوک دمایی اعمالی نیز تجاوز کند.



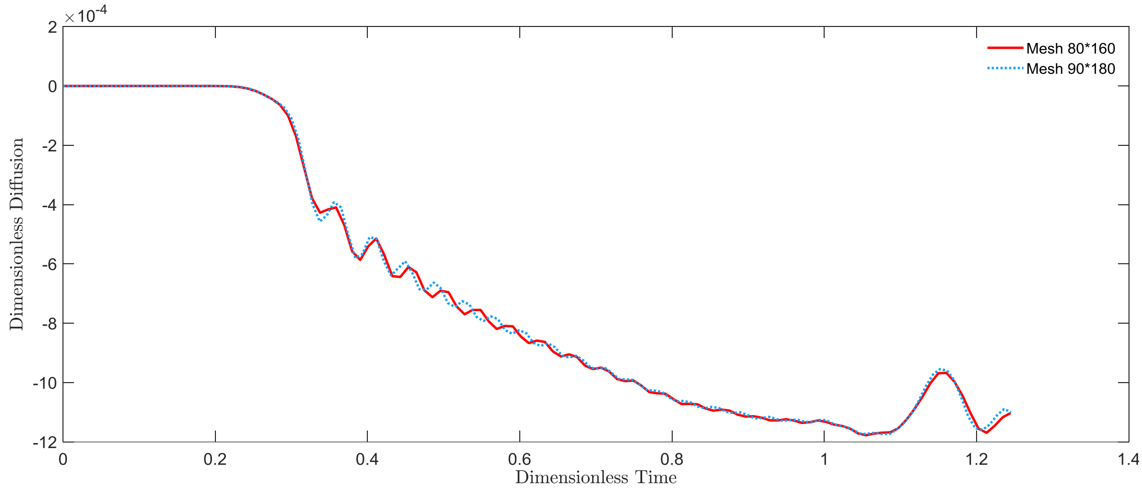
شکل ۱۱- نمودار ضریب شدت تنش مود اول بر حسب زمان برای شبکه بندی‌های مختلف



شکل ۱۲- منحنی‌های ضریب شدت تنش مود دوم برحسب زمان برای شبکه‌بندی‌های مختلف



شکل ۱۳- دمای نوک ترک بر حسب زمان برای شبکه‌بندی‌های مختلف



شکل ۱۴- انتشار نوک ترک برحسب زمان برای شبکه‌بندی‌های مختلف

با رسیدن موج غلظت در زمان t=۰/۳ دما در نوک ترک افزایش‌یافته تا اینکه موج تنش در زمان t=۰/۳۷۵ به نوک ترک می‌رسد و با تأثیرات موج تنش دمای نوک ترک کاهش پیداکرده و به حالت نوسانات پیوسته به کاهش تدریجی خود ادامه می‌دهد. این نوسانات تا رسیدن بازتاب موج تنش، غلظت و دما به نوک ادامه پیدا می‌کند.

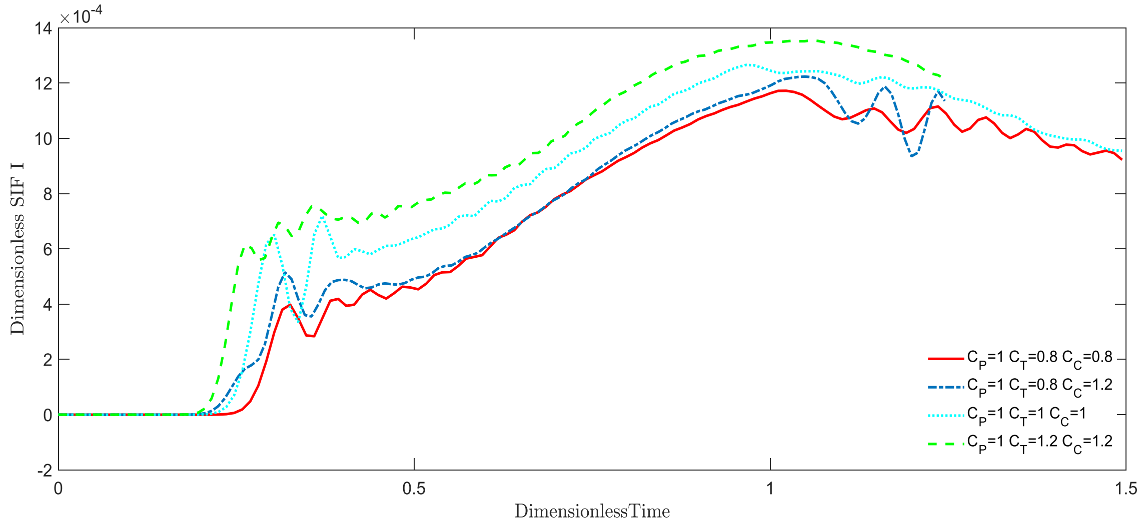
منحنی‌های تغییرات زمانی انتشار در نوک ترک برای شبکه‌بندی‌های مختلف در شکل ۱۴ نشان داده شده است. با رسیدن موج دما به نوک ترک در زمان t=۰/۲۵ غلظت نوک ترک به‌طور ناگهانی کاهش پیدا می‌کند. با رسیدن موج غلظت در زمان t=۰/۳ غلظت نوک ترک کاهش‌یافته تا اینکه موج تنش در زمان t=۰/۳۷۵ به نوک ترک رسیده و با تأثیرات آن غلظت نوک ترک دوباره کاهش پیداکرده و با کاهش تا انتهای باحالت نوسانات پیوسته خود ادامه می‌دهد. این نوسانات تا رسیدن بازتاب موج تنش، غلظت و دما به نوک ادامه پیدا می‌کند.

منحنی‌های ضریب شدت تنش مود اول برای سرعت‌های مختلف امواج در شکل ۱۵ نشان داده شده است. مشاهده می‌شود، برای حالتی که سرعت موج تنش و سرعت موج دما یکسان و بیشتر از سرعت موج غلظت است، افزایش ضریب شدت تنش سریع‌تر و بیشتر از حالت‌های دیگر است.

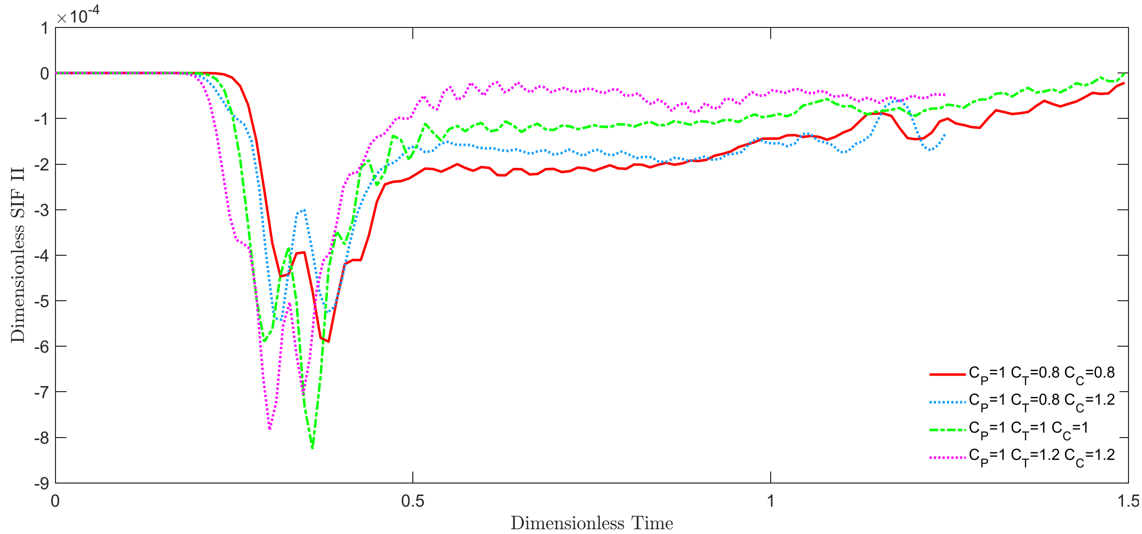
تاریخچه زمانی ضرایب شدت تنش مود دوم به‌دست‌آمده در سرعت‌های مختلف در شکل ۱۶ نشان داده شده است. می‌توان گفت، برای حالتی که سرعت موج تنش و سرعت موج دما یکسان و بیشتر از سرعت موج غلظت است افزایش ضریب شدت تنش مود دوم در ابتدا کاهش و با رسیدن موج تنش ضریب شدت تنش مود دوم افزایش می‌یابد.

تغییرات دمای نوک ترک برحسب زمان برای سرعت‌های مختلف موج‌های تنش، دما و غلظت در شکل ۱۷ نشان داده شده است. مشاهده می‌شود برای حالتی که سرعت موج تنش و سرعت موج غلظت یکسان و بیشتر از سرعت موج دما است، کاهش دما سریع‌تر و بیشتر از حالت‌های دیگر است.

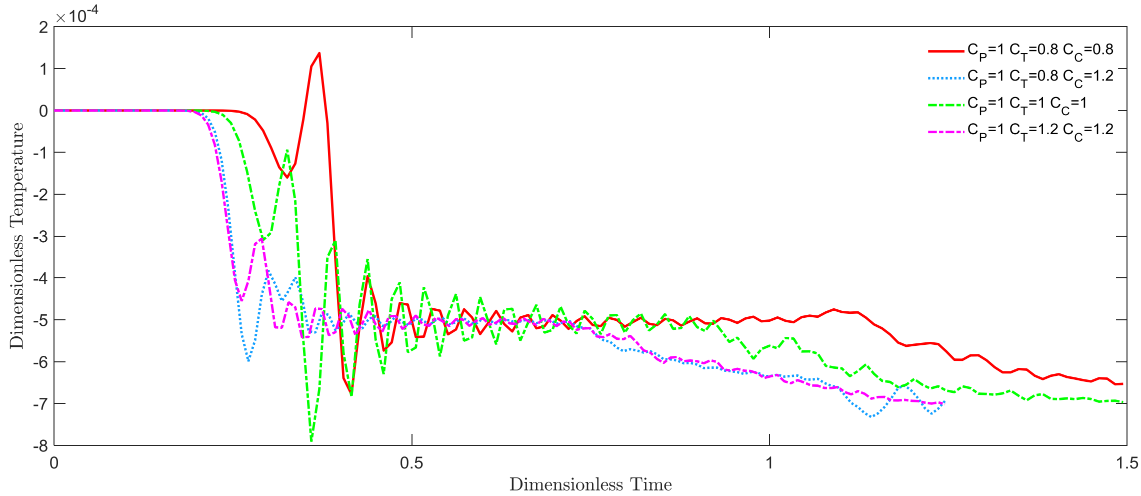
منحنی‌های تغییرات غلظت نوک ترک بر حسب زمان برای سرعت‌های مختلف امواج در شکل ۱۸ نشان داده شده است. نتیجه‌ای که از سرعت‌های مختلف می‌توان گرفت، این است که برای حالتی که سرعت موج تنش و سرعت موج دما یکسان و بیشتر از سرعت موج غلظت است. کاهش انتشار سریع‌تر و بیشتر از حالت‌های دیگر خواهد بود.



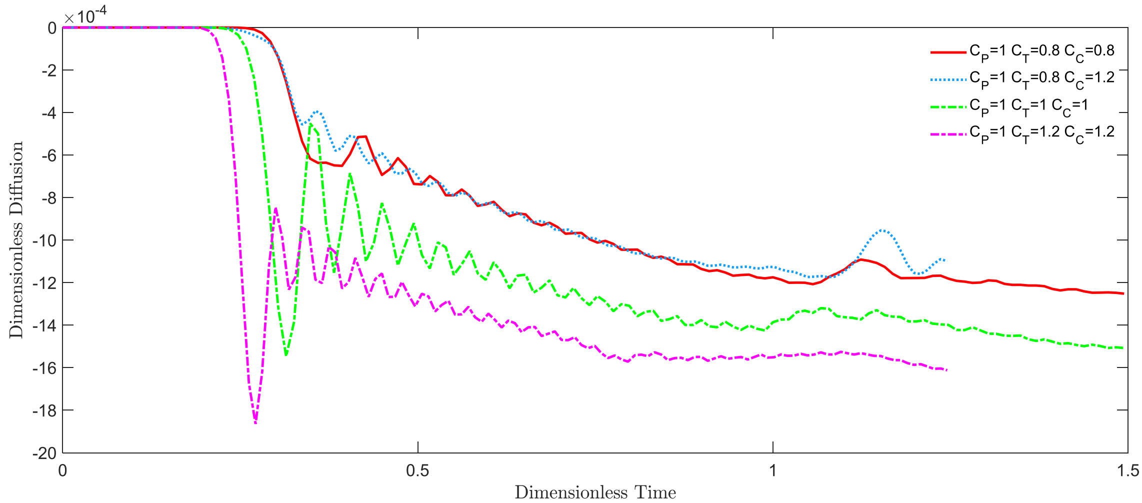
شکل ۱۵- ضریب شدت تنش مود اول برحسب زمان برای سرعت‌های مختلف انتشار و دما



شکل ۱۶- ضریب شدت تنش مود دوم برحسب زمان برای سرعت‌های مختلف انتشار و دما



شکل ۱۷- دمای نوک ترک برحسب زمان برای سرعت‌های مختلف دما و انتشار



شکل ۱۸- انتشار در نوک ترک بر حسب زمان برای سرعت‌های مختلف موج های دما و انتشار

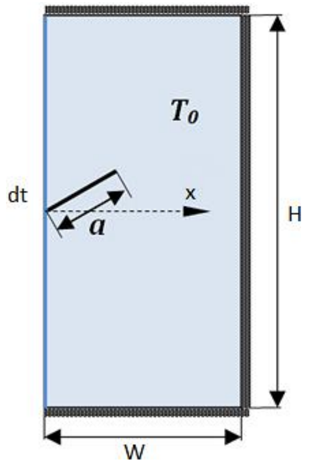
۷-۳- ترک مایل در معرض شوک دمایی و انتشار

در این مثال مطابق شکل ۱۹ یک صفحه دارای ترک مایل در معرض شوک دمایی و انتشار با ویژگی‌های هندسی و خواص مکانیکی مثال اول در نظر گرفته شده است. این صفحه حاوی یک ترک لبه‌ای مایل با زاویه ۲۰ درجه نسبت به محور x و طول a=۰/۳ در فضای بی‌بعد است. در این مثال به علت بارگذاری نامتقارن نسبت به ترک، ضریب شدت تنش مود اول و دوم خواهیم داشت که با استفاده از روش انتگرال برهمکنش در چارچوب روش المان محدود توسعه‌یافته محاسبه گردیده‌اند. صفحه به‌صورت محدود و همگن است و بدون هیچ قید مکانیکی در ابتدا در دمای مرجع یکنواخت (بدون تنش) T_0 = ۲۹۳K قرار دارد. نیمه وجه چپ این صفحه تحت تأثیر یک شوک حرارتی به مقدار ۰/۰۰۱- بی‌بعد و شوک غلظتی به مقدار ۰/۰۰۵- بی‌بعد قرار دارد. شعاع نسبی ناحیه انتگرال‌گیری برای انتگرال ناحیه‌ای معادل r/a=۰/۳ قرار داده شده است.

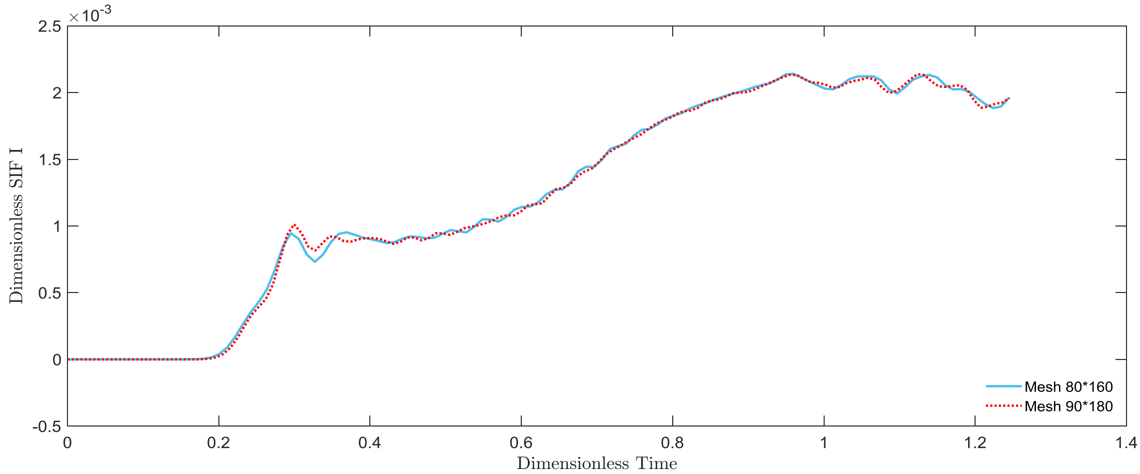
در تحلیل المان محدود از شبکه مش بندی‌های منظم با المان‌های مستطیلی چهار گره‌ای استفاده گردیده و همچنین گام زمانی Δt=۰/۰۳ در نظر گرفته شده است، مطابق نتایج به‌دست‌آمده که در شکل ۲۰ هم مشاهده می‌شود با ریزتر شدن مش نتایج همگرا می‌شوند. برای

مدل‌سازی هندسه صفحه از دو شبکه‌بندی متفاوت متشکل از ۸۰×۱۶۰ و ۹۰×۱۸۰ المان استفاده شده است، نتایج به‌دست‌آمده تقریباً یکسان است.

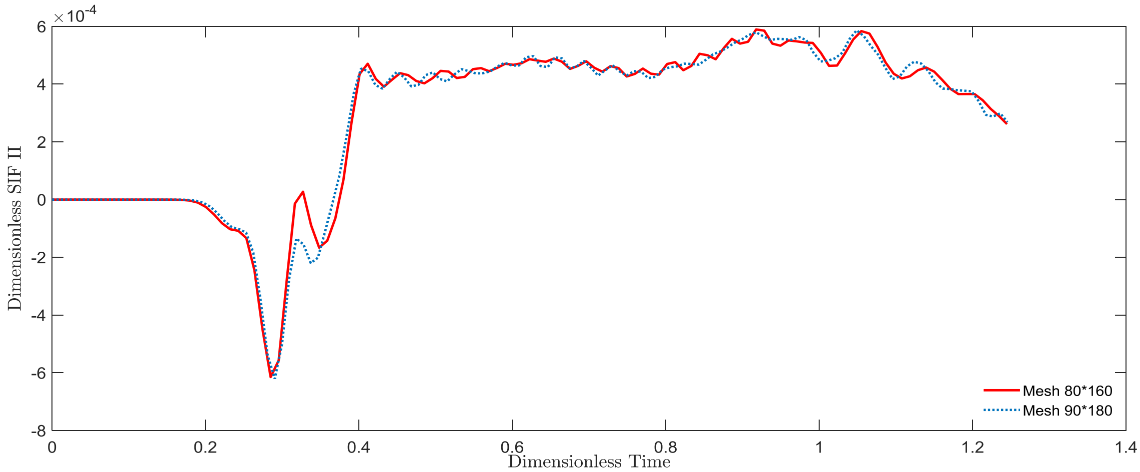
با توجه به سرعت‌های اعمالی زمان رسیدن موج دما به نوک ترک همان‌طور که در شکل ۲۰ هم نشان داده شده است، در زمان t=۰/۲۵ است که باعث افزایش ضریب شدت تنش شده است. رسیدن موج غلظت به نوک ترک در زمان t=۰/۳ باعث کاهش ضریب شدت تنش شده و رسیدن موج تنش به نوک ترک در زمان t=۰/۳۷۵ ضریب شدت تنش را افزایش داده و تا زمان ۱ بتدریج با نوسانات و افزایش ادامه پیداکرده است.



شکل ۱۹- هندسه و بارگذاری یک صفحه دارای ترک لبه‌ای مایل تحت بارگذاری دما و انتشار



شکل ۲۰- همگرایی ضریب شدت تنش مود اول برحسب زمان برای شبکه‌بندی‌های مختلف در ترک مایل



شکل ۲۱- همگرایی ضریب شدت تنش مود دوم در مش بندی‌های مختلف در ترک مایل

منحنی‌های تغییرات زمانی ضریب شدت تنش مود دوم حاصل از مدل‌سازی دو شبکه متفاوت متشکل از ۸۰×۱۶۰ و ۹۰×۱۸۰ المان در شکل ۲۱، نشان می‌دهند که نتایج به‌دست‌آمده تقریباً یکسان هستند. با رسیدن موج غلظت در زمان t=۰/۲ به نوک ترک، ضریب شدت تنش مود دوم شروع به کاهش می‌کند. نوسانات اضافی در نمودار تغییرات ضریب شدت تنش مود دوم به دلیل استفاده از روش ضمنی نیومارک رخ داده است. با رسیدن موج تنش در زمان t=۰/۳ ضریب شدت تنش مود دوم کاهش‌یافته تا با رسیدن موج غلظت در زمان t=۰/۳۵ ضریب شدت تنش افزایش پیداکرده و به حالت نوسانات پیوسته خود ادامه می‌دهد. این نوسانات تا رسیدن بازتاب موج تنش و دما به نوک ادامه پیدا می‌کند با رسیدن موج تنش و دما ضریب شدت تنش شروع به کاهش و سپس افزایش رو آورده و بعد از سپری شدن موج‌ها دوباره به نوسانات پایدار خود می‌رسد.

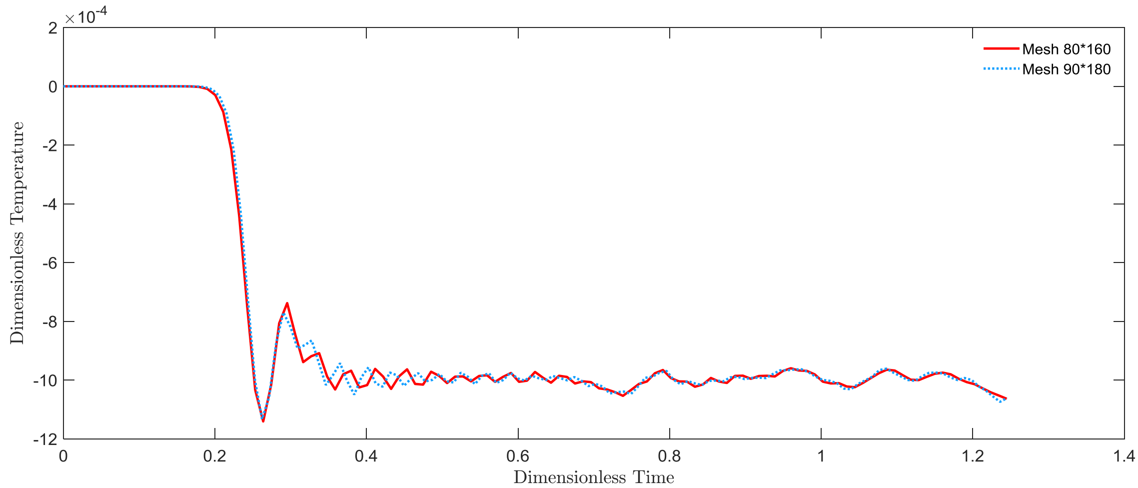
منحنی‌های تغییرات زمانی دمای نوک ترک در شکل ۲۲ نشان داده شده است. با رسیدن موج دما به نوک ترک در زمان t=۰/۲۵ دمای نوک ترک به‌طور ناگهانی کاهش‌یافته است و ممکن است، از مقدار شوک دمایی اعمالی نیز تجاوز کند. با رسیدن موج غلظت در زمان t=۰/۳ دما در نوک ترک افزایش‌یافته تا موج تنش در زمان t=۰/۳۷۵ به نوک ترک رسیده است با تأثیرات موج تنش دمای نوک ترک کاهش پیداکرده و به حالت نوسانات پیوسته با کاهش تدریجی به روند خود تا انتهای صفحه ادامه می‌دهد. این نوسانات تا رسیدن بازتاب موج تنش، غلظت و دما به نوک ادامه پیدا می‌کند.

منحنی‌های تغییرات زمانی غلظت در نوک ترک برای مقادیر مختلف زمان در شکل ۲۳ نشان داده شده است. با رسیدن موج دما به نوک ترک در زمان t=۰/۲۵ غلظت نوک ترک به‌طور ناگهانی کاهش‌یافته و ممکن است، از مقدار شوک دمایی اعمالی نیز تجاوز کند. با رسیدن موج غلظت در زمان t=۰/۳ غلظت نوک ترک کاهش‌یافته تا موج تنش در زمان t=۰/۳۷۵ به نوک ترک رسیده با تأثیرات موج تنش غلظت نوک ترک دوباره کاهش پیداکرده و با کاهش تا انتهای صفحه باحالت نوسانات پیوسته خود ادامه می‌دهد. این نوسانات تا رسیدن بازتاب موج تنش، غلظت و دما به نوک ادامه پیدا می‌کند.

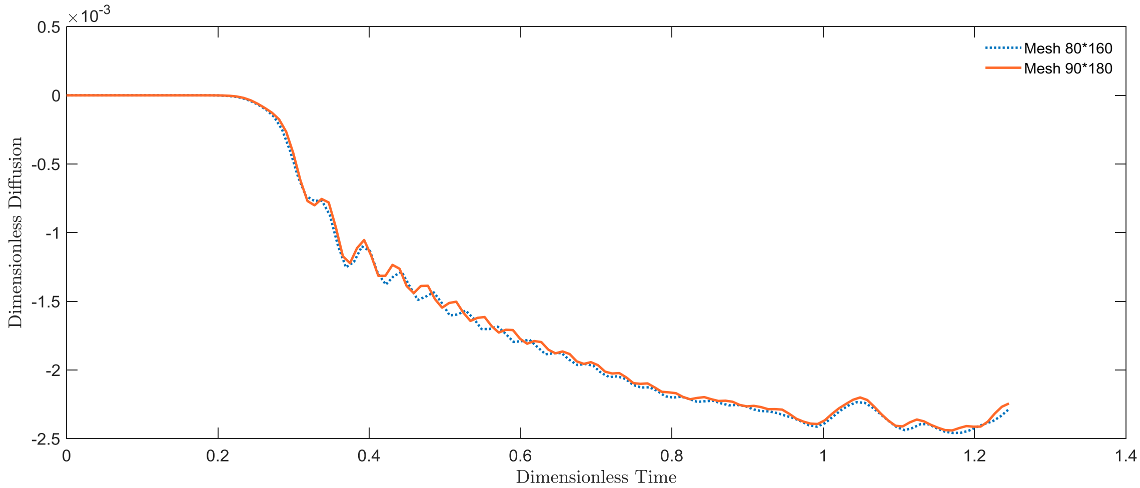
۸- نتیجه‌گیری

در این مقاله، ضرایب شدت تنش برای یک صفحه دارای ترک ساکن در معرض شوک دمایی و غلظت براساس تئوری گرین نقدی و غیرفیک محاسبه شده است. ترک با استفاده از روش المان محدود توسعه‌یافته مدل‌سازی شده که برای گسسته سازی معادلات در فضا و روش ضمنی نیومارک جهت انتگرال‌گیری زمانی مورد استفاده قرارگرفته است.

اثر بارگذاری‌های مختلف (شوک گرمایی و غلظت) و همچنین اثر سرعت موج‌های غلظت و دما روی ضرایب شدت تنش برای ترک‌های مستقیم و مایل بررسی شده است. این



شکل ۲۲- دمای نوک ترک در مش بندی‌های مختلف برای ترک مایل



شکل ۲۳- انتشار نوک ترک در مش بندی‌های مختلف در ترک مایل

نتایج به دست آمده که برای حالت‌هایی که سرعت موج تنش و سرعت موج دما یکسان و بیشتر از سرعت موج غلظت است، افزایش ضریب شدت تنش سریع‌تر و بیشتر از حالت‌های دیگر است.

با توجه به نتایج عددی، سرعت امواج تنش، انتشار و دما تأثیر فراوان ای بر ضرایب شدت تنش به‌خصوص در شروع شوک انتشار و حرارتی داشته است. با رسیدن امواج انتشار و دما به نوک ترک ضرایب شدت تنش شروع به افزایش کرده و روند افزایشی پیدا می‌کند.

۹- پیوست

برای یک المان مبنا (e) ماتریس‌ها و بردارهای حاصل از گسسته سازی معادلات حاکم به‌صورت زیر به دست می‌آیند.

$$M=\begin{bmatrix} M^{UU} & 0 & 0 \\ 0 & M^{CC} & 0 \\ M^{TU} & 0 & M^{TT}\end{bmatrix} \tag{۷۴}$$

$$M^{UU}=\int_{\Omega^e}[NU]^T[NU]d\Omega \tag{۷۵}$$

$$M^{CC}=\hat{\tau}_0\int_{\Omega^e}[NC]^T[NC]d\Omega \tag{۷۶}$$

$$M^{TU}=\int_{\Omega^e}[NT]^T[\varepsilon^T\ \varepsilon^T\ 0][BU]d\Omega \tag{۷۷}$$

$$M^{TT}=\int_{\Omega^e}[NT]^T[NT]d\Omega \tag{۷۸}$$

$$C=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ C^{CU} & C^{CC} & 0 \\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{۷۹}$$

$$C^{CU}=\int_{\Omega^e}[NC]^T[\varepsilon^C\ \varepsilon^C\ 0][BU]d\Omega \tag{۸۰}$$

$$C^{CC}=\int_{\Omega^e}[NC]^T[NC]d\Omega \tag{۸۱}$$

$$K=\begin{bmatrix} K^{UU} & K^{UC} & K^{UT} \\ 0 & K^{CC} & 0 \\ 0 & 0 & K^{TT}\end{bmatrix} \tag{۸۲}$$

$$K^{UU}=\int_{\Omega^e}[BU]^T[D][BU]d\Omega \tag{۸۳}$$

$$K^{UC}=-\int_{\Omega^e}[BU]^T\begin{Bmatrix}1\\1\\0\end{Bmatrix}[NC]d\Omega \tag{۸۴}$$

$$K^{UT}=-\int_{\Omega^e}[BU]^T\begin{Bmatrix}1\\1\\0\end{Bmatrix}[NT]d\Omega \tag{۸۵}$$

$$K^{CC}=\widehat{D}_0\int_{\Omega^e}[BC]^T[BC]d\Omega \tag{۸۶}$$

$$K^{TT}=\int_{\Omega^e}\hat{\kappa}^*[BT]^T[BT]d\Omega \tag{۸۷}$$

$$[NU]=\begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4\end{bmatrix} \tag{۸۸}$$

$$[NT]=[N_1\quad N_2\quad N_3\quad N_4] \tag{۸۹}$$

$$[NC]=[N_1\quad N_2\quad N_3\quad N_4] \tag{۹۰}$$

در غیاب توابع غنی‌سازی ماتریس‌های [BU] و[BT]، [BC] به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$[\mathrm{BU}] = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & N_{2,x} & 0 & N_{3,x} & 0 & N_{4,x} & 0 \\ 0 & N_{1,y} & 0 & N_{2,y} & 0 & N_{3,y} & 0 & N_{4,y} \\ N_{1,y} & N_{1,x} & N_{2,y} & N_{2,x} & N_{3,y} & N_{3,x} & N_{4,y} & N_{4,x} \end{bmatrix} \qquad (۹۱)$$

$$[\mathrm{BT}] = [BC] = \begin{bmatrix} N_{1,x} & N_{2,x} & N_{3,x} & N_{4,x} \\ N_{1,y} & N_{2,y} & N_{3,y} & N_{4,y} \end{bmatrix} \qquad (۹۲)$$

ماتریس خواص [D] برای حالت کرنش صفحه‌ای در فضای بی‌بعد به صورت زیر است.

$$[\mathrm{D}] = \begin{bmatrix} \hat{\lambda} + 2\hat{\mu} & \hat{\lambda} & 0 \\ \hat{\lambda} & \hat{\lambda} + 2\hat{\mu} & 0 \\ 0 & 0 & \hat{\mu} \end{bmatrix} \qquad (۹۳)$$

۱۰- مراجع

[1] Chandrasekharaiah DS (1998) Hyperbolic thermoelasticity: a review of recent literature. Appl Mech Rev 51(12): 705-729.

[2] Green AE, Naghdi PM (1993) Thermoelasticity without energy dissipation. J Elasticity 31(3): 189-208.

[3] Hetnarski RB, Eslami MR (2009) Thermal stresses – Advanced theory and applications. Springer, 2009.

[4] Favergeon J, Montesin T, Bertrand G (2005) Mechano-chemical aspects of high temperature oxidation: a mesoscopic model applied to zirconium alloys. Oxid Met 64(3-4): 253-279.

[5] Zhou H, Qu J, Cherkaoui M (2010) Stress–oxidation interaction in selective oxidation of Cr–Fe alloys. Mech Mater 42(1): 63-71.

[6] Yaohong S, Shen S (2012) Dynamical theoretical model and variational principles for coupled temperature–diffusion–mechanics. Acta Mech 223(1): 29-41.

[7] Hosseini SM, Sladek J, Sladek V (2015) Two dimensional analysis of coupled non-Fick diffusion-elastodynamics problems in functionally graded materials using meshless local Petrov–Galerkin (MLPG) method. Appl Math Comput 268: 937-946.

[8] Othman MIA, Atwa SY, Farouk RM (2009) The effect of diffusion on two-dimensional problem of generalized thermoelasticity with Green–Naghdi theory. Int Commun Heat Mass 36(8): 857-864.

[9] Li C, Guo H, Tian X (2017) Time-domain finite element analysis to nonlinear transient responses of generalized diffusion-thermoelasticity with variable thermal conductivity and diffusivity. Int J Mech Sci 131: 234-244.

[10] Aouadi M, Ciarletta M, Tibullo V (2016) A thermoelastic diffusion theory with microtemperatures and microconcentrations. J Therm Stresses 40(4): 486-501.

[11] Sharma N, Kumar R. Ram P (2008) Plane strain deformation in generalized thermoelastic diffusion. Int J Thermophys 29(4): 1503-1522.

[12] Li C, Guo H, Tian X (2017) Soret effect on the shock responses of generalized diffusion-thermoelasticity. J Therm Stresses 40(12): 1563-1574.

[13] Li C, Guo H, Tian X (2019) Transient responses of a hollow cylinder under thermal and chemical shock based on generalized diffusion-thermoelasticity with memory-dependent derivative. J Therm Stresses 42(3): 313-331.

[14] Zenkour AM (2020) Thermoelastic diffusion problem for a half-space due to a refined dual-phase-lag Green-Naghdi model. J Ocean Eng Sci 5(3): 214-222.

[15] Li C, He T, Tian X (2020) Nonlocal theory of thermoelastic diffusive materials and its application in structural dynamic thermo-elasto-diffusive responses analysis. Wave Random Complex.

[16] Zenkour AM (2020) Thermo-diffusion of a thick circular plate via modified Green–Naghdi models. Arch Mech 72(3): 235-256.

[17] Shih CF, Moran B, Nakamura T (1986) Energy release rate along a three dimensional crack front in a thermally stressed body. Int J Frac 30: 79-102.

[18] Roshani Zarmehri N, Nazari MB, Rokhi MM (2018) XFEM analysis of a 2D cracked finite domain under thermal shock based on Green-Lindsay theory. Eng Fract Mech 191: 286-299.

[19] Kim JH, Paulino GH (2003) An accurate scheme for mixed-mode fracture analysis of functionally graded materials using the interaction integral and micromechanics models. Int J Numer Meth Engng 58: 1457-1497.

[20] Hosseini S, Abolbashari M, Hosseini S (2014) Shock-induced molar concentration wave propagation and coupled non-Fick diffusion–elasticity analysis using an analytical method. Acta Mech 225(12): 3591-3599.

[21] Mahdizadeh Rokhi M, Shariati M (2013) Implementation of the extended finite element method for coupled dynamic thermoelastic fracture of a functionally graded cracked layer. J Braz Soc Mech Sci 35: 69-81.