



تحلیل ارتعاشات پوسته استوانه‌ای دایروی متقارن محوری با استفاده از تئوری مرتبه بالا برای تقریب جابه‌جایی عرضی به وسیله المان محدود

سید ابوالفضل مختاری^{۱*}، کاظم ایمانی^۲ و محسن رستمی^۳

^۱ استادیار، گروه خلبانی، دانشکده پرواز، دانشگاه افسری امام علی (ع)، تهران، تهران، ایران

^۲ استادیار، گروه خلبانی، دانشکده پرواز، دانشگاه افسری امام علی (ع)، تهران، تهران، ایران

^۳ استادیار، گروه خلبانی، دانشکده پرواز، دانشگاه افسری امام علی (ع)، تهران، تهران، ایران

مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۱۲/۱۸؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۹/۰۵/۰۷؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۱۲/۲۳

چکیده

در این پژوهش به بررسی تحلیل ارتعاشات آزاد پوسته دایروی استوانه‌ای متقارن محوری پرداخته شده است. از تئوری مرتبه بالا برای تقریب جابه‌جایی عرضی در این پژوهش استفاده شده است. برخلاف پژوهش‌های گذشته، جابه‌جایی عرضی بر مبنای بسط فوریه، تا سه جمله گسترش یافته است. با توجه به متقارن محوری بودن پوسته استوانه، فقط مد محوری بررسی شده است. انرژی‌های کرنشی و جنبشی برای پوسته دایروی استوانه ای به‌دست آمده و برای استخراج معادلات از اصل همیلتون استفاده شده است. با در نظر گرفتن روش گلرکین و استفاده از روش المان محدود، ماتریس‌های سختی و جرم به‌دست آمده است. برای این منظور از تابع شکل‌های خطی برای همه مجهولات استفاده شده است. برای صحت‌گذاری پژوهش، از مقایسه فرکانس‌های مد محوری نتایج با پژوهش‌های پیشین استفاده شده است. در نهایت فرکانس‌های مد محوری و شکل مدهای محوری برای پوسته دایروی استوانه‌ای برای شرایط تکیه گاهی مختلف از جمله ساده- ساده، گیردار- گیردار، ساده- گیردار و گیردار- آزاد آورده شده است.

کلمات کلیدی: پوسته استوانه‌ای دایروی؛ تحلیل ارتعاشات؛ تئوری مرتبه بالا؛ المان محدود.

Vibration Analysis of Axial Symmetric Circular Cylindrical Shell Using High-Order Theory to Approximate Transverse Displacement by Finite Element

S A. Mokhtari^{1*}, K. Imani², M. Rostami³

¹ Assis. Prof., Pilot Department, Imam Ali University, Tehran, Iran.

² Assis. Prof., Pilot Department, Imam Ali University, Tehran, Iran.

³ Assis. Prof., Pilot Department, Imam Ali University, Tehran, Iran.

Abstract

In this study, vibration analysis of axial symmetric circular cylindrical shell has been investigated. The high-order theory is used to approximate the transverse displacement in this study. Hence, the transverse displacement based on the Fourier expansion is extended to three terms. Due to the symmetry of the cylindrical shell, only the axial mode has been investigated. The strain and kinetic energies are obtained for the circular cylindrical shell. The Hamiltonian principle was used to derive the equations of motion. The stiffness and mass matrices have been obtained by applying Galerkin method and finite element method. For this purpose, the linear shape function is used for all unknowns. In order to validate the research, comparing the axisymmetric frequencies of the results with previous studies has been used. Finally, the axisymmetric frequencies and axial mode shapes of the circular cylindrical shell for various boundary conditions are given, including simply support-simply support, clamped-clamped, clamped-simply support and clamped-free.

Keywords: Circular Cylindrical Shell; Analysis of Vibration; High-Order Theory; Finite Element.

۱- مقدمه

پوسته‌ها کاربرد گسترده‌ای در صنعت دارند. خودروسازی، صنایع نظامی، صنعت هوافضا و غیره از جمله مواردی است که پوسته‌ها نقش مهمی را ایفا می‌کنند. مسئله ارتعاشات پوسته به شکلی ساده و منطقی توسط لاو^۱ در سال ۱۸۸۸ مطرح شد. او از طریق بسط دادن معادلات تیر و صفحه برای تغییر مکان‌های عرضی، معادلات پوسته را به دست آورد [۱]. تیموشینکو^۲ اثر اینرسی را در به دست آوردن معادلات پوسته در نظر گرفت [۲]. برای نخستین بار ردی^۳ از تئوری مرتبه اول برشی و مرتبه سوم برشی برای حل پوسته‌ها استفاده کرد (۳ و ۴). داو^۴ برای اولین بار از تئوری مرتبه بالا برای به دست آوردن معادلات حرکت پوسته استفاده کرد [۵]. او برای تقریب جابه‌جایی‌های درون صفحه‌ای بسط چهار جمله‌ای به کار برد. ژو^۵ و همکاران [۶] از تئوری مرتبه بالا برای استخراج معادلات یک پوسته استوانه‌ای ضخیم استفاده کردند. آن‌ها پاسخ گذرای حرارتی را روی پوسته استوانه‌ای بررسی کردند. چو^۶ برای تقریب جابه‌جایی‌های درون صفحه‌ای، بسط درجه ۳ به کار برد [۱۰]. او در پژوهش خود فرکانس‌های محوری را برای یک پوسته کامپوزیت استخراج کرد. در سال ۲۰۱۳ وایلو^۷ برای اولین بار از توابع برشی برای تقریب جابه‌جایی‌های درون صفحه‌ای استفاده کرد [۱۱]. این توابع ترکیبی از توابع سهموی و کلاسیک را در بر گرفته‌اند. فرکانس‌های طبیعی برای پل‌های مخلوطی و کروی در این پژوهش به دست آمده است. تحلیل فرکانسی پوسته ساندویچی کروی با بهره‌گیری از توابع شکل به منظور تقریب جابه‌جایی‌های درون صفحه توسط سیاد^۸ انجام شده است. این توابع شکل، شامل توابع سینوسی و کسینوسی است [۱۲].

در پژوهش‌های گذشته تنها برای جابه‌جایی‌های درون صفحه‌ای از بسط چندجمله استفاده شده است. در صورتی

که در پژوهش حاضر جابه‌جایی عرضی با استفاده از بسط سه جمله‌ای تقریب زده شده است. با توجه به متقارن محوری بودن پوسته استوانه‌ای، تنها مدهای محوری^۹ بررسی شده‌اند و از مدهای پیرامونی^{۱۰} صرفه‌نظر شده است (رجوع شود به شکل). کرنش‌ها با توجه به نازک بودن پوسته به دست آورده شده‌اند. محورهای مختصات با توجه به شکل ۱ در راستای محور، ضخامت و محیط استوانه در نظر گرفته شده و انرژی‌های کرنشی و جنبشی پوسته استوانه‌ای با توجه به متقارن محوری بود به دست آمده است. از اصل همیلتون برای استخراج معادلات حرکت به کار شده است. با توجه به مجهولات، پنج معادله دیفرانسیل کوپل به دست آمده که برای حل معادلات از روش گلرکین المان محدود استفاده شده است. ماتریس‌های سختی و جرم برای یک المان از هر کدام از معادلات استخراج شده و در نتیجه ماتریس سختی و جرم برای یک المان از پوسته استوانه‌ای محاسبه شده است. با همبندی^{۱۱} ماتریس‌های سختی و جرم روی کل المان‌های سازه و اعمال شرایط مرزی و در نهایت حل کردن مسئله مشخصه^{۱۲}، فرکانس‌های محوری و شکل مدهای متناسب با آن‌ها فراهم آمده است. این فرکانس‌ها برای شرایط تکیه‌گاهی ساده- ساده، گیردار- گیردار، ساده- آزاد و گیردار- آزاد آورده شده است. نتایج با پژوهش‌های گذشته اعتبارسنجی شده است. هدف از این پژوهش تحلیل فرکانسی پوسته استوانه‌ای با به کارگیری بسط^۳ جمله‌ای برای تقریب جابه‌جایی عرضی است.

شکل مدهای ارتعاشی برای یک پوسته استوانه‌ای را نشان می‌دهد. همان‌طور که پیش از این نیز بیان شد، این پژوهش فقط به بررسی مدهای محوری پوسته استوانه‌ای پرداخته است (قسمت (ب) شکل). در این شکل، شماره‌دهنده m مربوط به مدمحوری و شماره‌دهنده n در برگزیده مدهای پیرامونی است؛ بنابراین مسئله پوسته به یک تیر ($n=1$) ساده‌سازی شده است [۷].

¹ Love
² Timoshenko
³ Reddy
⁴ Dawe
⁵ Zhou
⁶ Cho
⁷ Viola
⁸ Sayyad

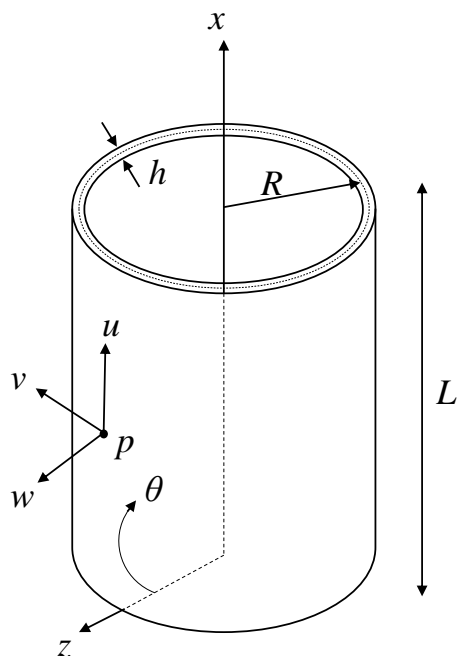
⁹ Axial Modes
¹⁰ Circumferential Mode
¹¹ Assemble
¹² Eigenvalue Problem

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ \epsilon_\theta &= \frac{w + zw_1 + \frac{z^2}{2} w_2}{R + z} \\ \epsilon_n &= w_1 + zw_2 \\ \gamma_{x\theta} &= \psi + \frac{\partial w}{\partial x} + z \frac{\partial w_1}{\partial x} + \frac{z^2}{2} \frac{\partial w_2}{\partial x} \\ \gamma_{\theta n} &= 0\end{aligned}\quad (2)$$

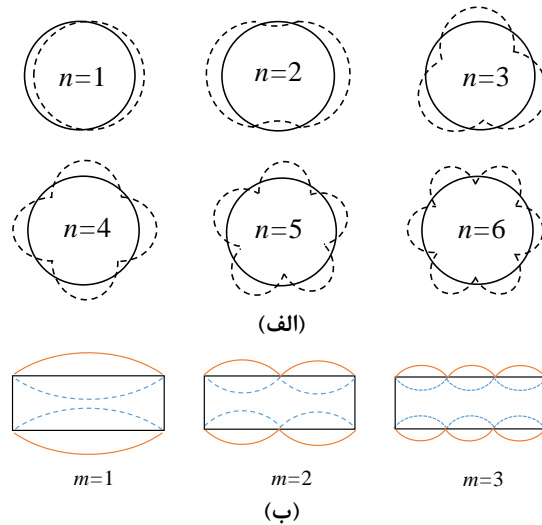
در رابطه بالا x محور مختصات در راستای طول استوانه و θ مختصات انحنایی حول محیط پوسته استوانه و R فاصله مرکز پوسته استوانه‌ای تا صفحه میانی آن است. (شکل ۱)

روابط تنش- کرنش طبق تئوری الاستیسیته برای پوسته استوانه‌ای متقارن محوری برابر رابطه (۳) می‌باشند [۴]:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} [(1-\nu)\epsilon_x + \nu\epsilon_\theta + \nu\epsilon_n] \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} [(1-\nu)\epsilon_\theta + \nu\epsilon_x + \nu\epsilon_n] \\ \sigma_n &= \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} [(1-\nu)\epsilon_n + \nu\epsilon_\theta + \nu\epsilon_x] \\ \tau_{xn} &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma_{xn}\end{aligned}\quad (3)$$



شکل ۱- مختصات انحنایی بر روی پوسته استوانه‌ای (L طول استوانه)



شکل ۱- مدهای ارتعاشی پوسته استوانه‌ای؛ الف) مدهای پیرامونی و ب) مدهای محوری

۲- تئوری مسئله

میدان جابه‌جایی برای پوسته استوانه‌ای متقارن محوری با استفاده از تئوری مرتبه بالا با رابطه (۱) بیان می‌شود:

$$U(\alpha_1, \alpha_2, z) = u(\alpha_1, \alpha_2) + z\psi(\alpha_1, \alpha_2)$$

$$V(\alpha_1, \alpha_2, z) = 0$$

$$\begin{aligned}W(\alpha_1, \alpha_2, z) &= w(\alpha_1, \alpha_2) + zw_1(\alpha_1, \alpha_2) \\ &+ \frac{z^2}{2} w_2(\alpha_1, \alpha_2)\end{aligned}\quad (1)$$

در رابطه (۱) α_1 و α_2 مختصات انحنایی، u و w مختصات نقاط روی صفحه میانی پوسته استوانه‌ای، U ، V و W مختصات هر نقطه دلخواه روی پوسته استوانه‌ای، z فاصله هر نقطه تا محور میانی و ψ دوران محور عمود بر صفحه میانی حول محور α_2 است؛ همچنین w_1 و w_2 مجهولات جابه‌جایی عرضی می‌باشند. همان‌طور که بیان شد، هدف از این پژوهش به دست آوردن فرکانس‌های متقارن محوری برای پوسته استوانه‌ای است، بنابراین تغییرات در راستای محور V برابر صفر در نظر گرفته شده است.

روابط کرنش- تغییر مکان برای پوسته استوانه‌ای متقارن محوری با در نظر گرفتن این فرضیه که تغییر مکان‌ها، کرنش‌ها و دوران حول محورها کوچک در نظر گرفته شده‌اند، به صورت رابطه (۲) بیان می‌شوند [۴].

$$\begin{aligned} N_x &= \int_z \sigma_x \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz, \quad N_\theta = \int_z \sigma_\theta dz \\ M_x &= \int_z \sigma_x z \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz, \quad M_\theta = \int_z \sigma_\theta z dz \\ Q_x &= \int_z \tau_{xn} \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz, \quad P_\theta = \int_z \sigma_\theta \frac{z^2}{2} dz \\ S_x &= \int_z \tau_{xn} z \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz, \quad B = \int_z \sigma_n z \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz \\ A &= \int_z \sigma_n \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz, \quad T_x = \int_z \tau_{xn} \frac{z^2}{2} \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz \end{aligned} \quad (5)$$

با جایگذاری روابط تنش-جابه‌جایی در منته‌های تنش و اعمال انتگرال روی ضخامت پوسته استوانه‌ای منته‌های تنش برحسب جابه‌جایی‌ها به دست خواهند آمد. این روابط در بخش ضمایم آورده شده است.

برای به دست آوردن معادلات حرکت از اصل همپیتون استفاده شده است [۸]:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0 \quad (6)$$

در رابطه (۶) $L=U-K$ است که U انرژی کرنشی و K انرژی جنبشی سازه است.

انرژی کرنشی در حالت کلی برابر است با:

$$U = \int_V \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV \quad (7)$$

با توجه به روابط (۲) و (۴)، تغییرات انرژی کرنشی برای پوسته استوانه‌ای متقارن محوری به صورت رابطه (۸) به دست می‌آید،

$$\delta U = \int_V (\sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_\theta \delta \epsilon_\theta + \sigma_n \delta \epsilon_n + \tau_{xn} \delta \gamma_{xn}) dV \quad (8)$$

المان حجم برای پوسته استوانه‌ای متقارن محوری برابر است با:

$$dV = R \left(1 + \frac{z}{R}\right) dz dx d\theta \quad (9)$$

با جایگذاری روابط (۲)، (۵) و (۹) در رابطه (۸) و محاسبه انتگرال روی ضخامت پوسته داریم:

$$\begin{aligned} \delta U &= 2\pi R \int_{x_1}^{x_2} \left\{ N_x \frac{\partial \delta u}{\partial x} + M_x \frac{\partial \delta \psi}{\partial x} + \frac{N_\theta \delta w}{R} \right. \\ &\quad \left. + \frac{M_\theta \delta w_1}{R} + \frac{P_\theta \delta w_2}{R} + A \delta w_1 + B \delta w_2 \right\} \end{aligned}$$

در رابطه (۱) ν ضریب پواسون^۱ و E مدول یانگ^۲ می‌باشند. با جایگذاری روابط (۲) در روابط (۳)، روابط تنش-جابه‌جایی برای پوسته استوانه‌ای متقارن محوری به صورت روابط (۴) محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left\{ \left[(1-\nu) \frac{\partial u}{\partial x} + \nu w' \right] \right. \\ &\quad \left. + z \left[(1-\nu) \frac{\partial \psi}{\partial x} + \nu w'' \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{1+\frac{z}{R}} \left(\frac{\nu w}{R} + z \frac{\nu w'}{R} + \frac{z^2 \nu w''}{2R} \right) \right\} \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left\{ \frac{(1-\nu)}{R \left(1+\frac{z}{R}\right)} \left[w + z w' + \frac{z^2}{2} w'' \right] \right. \\ &\quad \left. + \nu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + w' \right) + \nu z \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} + w'' \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\tau_{x\theta} = 0$$

$$\tau_{xn} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\psi + \frac{\partial w}{\partial x} + z \frac{\partial w'}{\partial x} + \frac{z^2}{2} \frac{\partial w''}{\partial x} \right)$$

$$\tau_{\theta n} = 0$$

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left\{ \left[\nu \frac{\partial u}{\partial x} + (1-\nu) w' \right] \right. \\ &\quad \left. + z \left[\nu \frac{\partial \psi}{\partial x} + (1-\nu) w'' \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{\nu}{R \left(1+\frac{z}{R}\right)} \left(w + z w' + \frac{z^2}{2} w'' \right) \right\} \end{aligned}$$

$$\tau_{x\theta} = 0$$

$$\tau_{xn} = \frac{E}{2(1+\nu)} \left(\psi + \frac{\partial w}{\partial x} + z \frac{\partial w'}{\partial x} + \frac{z^2}{2} \frac{\partial w''}{\partial x} \right)$$

$$\tau_{\theta n} = 0 \quad (4)$$

منتجه‌های تنش برای پوسته استوانه‌ای متقارن محوری به صورت روابط (۵) می‌باشند [۴]:

¹ Poisson's Ratio
² Young's Modulus

با یک بار گرفتن انتگرال جزء به جزء از رابطه (۱۵) نسبت به زمان و حذف ترم‌های مرزی، تغییرات انرژی جنبشی به صورت رابطه (۱۶) به دست می‌آید:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta K dt = 2\pi R \rho \int_{x_1}^{x_2} \int \left\{ \left(\ddot{u} + \frac{h^3}{12R} \ddot{\psi} \right) \delta u + \left(\frac{h^3}{12R} \ddot{u} + \frac{h^3}{12} \ddot{\psi} \right) \delta \psi + \left(\ddot{w} + \frac{h^3}{12R} \ddot{w}_1 + \frac{h^3}{24} \ddot{w}_2 \right) \delta w + \left(\frac{h^3}{12R} \ddot{w} + \frac{h^3}{12} \ddot{w}_1 + \frac{h^5}{160R} \ddot{w}_2 \right) \delta w_1 + \left(\frac{h^3}{24} \ddot{w} + \frac{h^5}{160R} \ddot{w}_1 + \frac{h^5}{320} \ddot{w}_2 \right) \delta w_2 \right\} dx dt \quad (16)$$

حال با قرار دادن تغییرات انرژی کرنشی (رابطه (۱۱)) و تغییرات انرژی جنبشی (رابطه (۱۶)) در اصل همیلتون (رابطه (۶))، معادلات حرکت برای یک المان از پوسته استوانه‌ای متقارن محوری به صورت رابطه (۱۷) به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} - \rho h \left(\ddot{u} + \frac{h^2}{12R} \ddot{\psi} \right) &= 0 \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} - Q_x - \rho h^3 \left(\frac{\ddot{u}}{12R} + \frac{\ddot{\psi}}{12} \right) &= 0 \\ -\frac{N_\theta}{R} + \frac{\partial Q_x}{\partial x} - \rho h \left(\ddot{w} + \frac{h^2}{12R} \ddot{w}' + \frac{h^2}{24} \ddot{w}'' \right) &= 0 \\ -\frac{M_\theta}{R} - A + \frac{\partial S_x}{\partial x} - \rho h^3 \left(\frac{\ddot{w}}{12R} + \ddot{w}' + \frac{h^2}{160R} \ddot{w}'' \right) &= 0 \\ -\frac{P_\theta}{R} - B + \frac{\partial T_x}{\partial x} - \rho h^3 \left(\frac{\ddot{w}}{24} + \frac{h^2}{160R} \ddot{w}' + \frac{h^2}{320} \ddot{w}'' \right) &= 0 \end{aligned} \quad (17)$$

همچنین شرایط مرزی روابط بالا (معادلات حرکت) از صفر قرار دادن ترم‌های مرزی در اصل همیلتون به دست می‌آیند، این روابط به صورت رابطه (۱۸) می‌باشند:

$$\begin{aligned} N_x \delta u|_0^l &= 0, \quad M_x \delta \psi|_0^l = 0 \\ Q_x \delta w|_0^l &= 0, \quad T_x \delta w''|_0^l = 0 \\ S_x \delta w'|_0^l &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

$$+ Q_x \delta \psi + Q_x \frac{\partial \delta w}{\partial x} + S_x \frac{\partial \delta w_1}{\partial x} + T_x \frac{\partial \delta w_2}{\partial x} \Big\} dx \quad (10)$$

با انتگرال گیری جزء به جزء از رابطه (۱۰) و حذف ترم‌های مرزی، تغییرات انرژی کرنشی برابر می‌شود با:

$$\begin{aligned} \delta U &= -2\pi R \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \frac{\partial N_x}{\partial x} \delta u + \left(\frac{\partial M_x}{\partial x} - Q_x \right) \delta \psi + \left(-\frac{N_\theta}{R} + \frac{\partial Q_x}{\partial x} \right) \delta w + \left(-\frac{M_\theta}{R} - A + \frac{\partial S_x}{\partial x} \right) \delta w_1 + \left(-\frac{P_\theta}{R} - B + \frac{\partial T_x}{\partial x} \right) \delta w_2 \right\} dx \end{aligned} \quad (11)$$

انرژی جنبشی در حالت کلی برابر است با:

$$K = \int_V \frac{1}{2} \rho \dot{u}_i \dot{u}_i dV \quad (12)$$

با توجه به رابطه (۱)، تغییرات انرژی کرنشی برای پوسته استوانه‌ای به صورت رابطه (۳) به دست می‌آید،

$$\delta K = \int_V \rho (\dot{U} \delta \dot{U} + \dot{W} \delta \dot{W}) dV \quad (13)$$

با جایگذاری روابط (۱) در تغییرات انرژی کرنشی (رابطه (۱۳)) داریم:

$$\begin{aligned} \delta K &= \rho \int_{x_1}^{x_2} \int_{-h/2}^{h/2} 2\pi R \left(1 + \frac{z}{R} \right) \left\{ (\dot{u} + z\dot{\psi}) \delta (\dot{u} + z\dot{\psi}) + \left(\dot{w} + z\dot{w}_1 + \frac{z^2}{2} \dot{w}_2 \right) \delta \left(\dot{w} + z\dot{w}_1 + \frac{z^2}{2} \dot{w}_2 \right) \right\} dz dx \end{aligned} \quad (14)$$

با محاسبه انتگرال روی ضخامت از رابطه (۱۴)، رابطه (۱۵) به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \delta K &= 2\pi R \rho \int_{x_1}^{x_2} \left\{ \dot{u} \delta \dot{u} + \frac{h^3}{12} \dot{\psi} \delta \dot{\psi} + \frac{h^3}{12R} \dot{u} \delta \dot{\psi} + \frac{h^3}{12R} \dot{\psi} \delta \dot{u} + \dot{w} \delta \dot{w} + \frac{h^3}{24} \dot{w} \delta \dot{w}_2 + \frac{h^3}{12} \dot{w}_1 \delta \dot{w}_1 + \frac{h^3}{24} \dot{w}_2 \delta \dot{w} + \frac{h^5}{320} \dot{w}_2 \delta \dot{w}_2 + \frac{h^3}{12R} \dot{w} \delta \dot{w}_1 + \frac{h^3}{12R} \dot{w}_1 \delta \dot{w} + \frac{h^5}{160R} \dot{w}_1 \delta \dot{w}_2 + \frac{h^5}{160R} \dot{w}_2 \delta \dot{w}_1 \right\} dx \end{aligned} \quad (15)$$

$$\int_{V^{(e)}} \left(\frac{\partial N_x}{\partial x} - \rho h \left[\ddot{u} + \frac{h^2}{12R} \ddot{\psi} \right] \right) N_l R \left(1 + \frac{z}{R} \right) dz dx d\theta$$

$$= 2\pi R h \int_0^l \left(\frac{\partial N_x}{\partial x} \right) N_l dx$$

$$- 2\pi R h \int_0^l \left(\rho h \left[\ddot{u} + \frac{h^2}{12R} \ddot{\psi} \right] \right) N_l dx = 0 \quad (23)$$

با یک‌بار انتگرال‌گیری جزء‌به‌جزء از رابطه (۲۳) و جایگذاری روابط (۱۸) و N_x از قسمت ضمایم، ماتریس‌های سختی و جرم مربوط به این رابطه مانند رابطه (۲۴) به دست می‌آیند:

$$k^{(i)} = \int_0^l \left\{ \frac{dN'}{dx} \right\} \left(D_1 \left\langle \frac{dN'}{dx} \right\rangle^{(e)} + D_2 \left\langle \frac{dN''}{dx} \right\rangle^{(e)} \right. \\ \left. + D_3 \langle N''' \rangle^{(e)} + R D_3 \langle N^{iv} \rangle^{(e)} + D_4 \langle N^v \rangle^{(e)} \right) dx, \\ m^{(i)} = \rho h \int_0^l \{ N' \} \left(\langle N' \rangle + \frac{\rho h^3}{12R} \langle N'' \rangle \right) dx \quad (24)$$

در رابطه (۲۴) D_i and $i = 1:11$ در قسمت ضمایم آورده شده است.

به همین ترتیب با اعمال گلرکین روی بقیه معادلات حرکت (رابطه (۱۷)) و تکرار روند بالا، ماتریس‌های سختی و جرم به دست می‌آیند. ماتریس‌های سختی و جرم استخراج شده از معادله دوم حرکت:

$$k^{(ii)} = \int_0^l \left\{ \frac{dN''}{dx} \right\} \left(D_2 \left\langle \frac{dN'}{dx} \right\rangle^{(e)} + R D_2 \left\langle \frac{dN''}{dx} \right\rangle^{(e)} \right. \\ \left. + \frac{4}{3} D_4 \langle N^{iv} \rangle^{(e)} + \frac{2}{3} R D_4 \langle N^v \rangle^{(e)} \right. \\ \left. + \{ N'' \} \left[D_5 \langle N'' \rangle^{(e)} + D_5 \left\langle \frac{dN'''}{dx} \right\rangle^{(e)} \right. \right. \\ \left. \left. + D_6 \left\langle \frac{dN^{iv}}{dx} \right\rangle^{(e)} + \frac{R}{2} D_6 \left\langle \frac{dN^v}{dx} \right\rangle^{(e)} \right] \right) dx, \\ m^{(ii)} = \rho \frac{h^3}{12} \int_0^l \{ N'' \} \left(\frac{1}{R} \langle N' \rangle + \langle N'' \rangle \right) dx \quad (25)$$

ماتریس‌های سختی و جرم استخراج شده از معادله سوم حرکت:

حال برای حل المان محدود پوسته استوانه‌ای به روش مانده وزنی گلرکین^۱ می‌بایست از فرم قوی^۲ که همان معادلات حرکت (روابط (۱۷)) است، به‌گونه‌ای به فرم ضعیف^۳ رسید که تمام شرایط مرزی (روابط (۱۸)) را ارضا کند. به این منظور، برای هر یک از مجهولات تقریب‌های زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$u(x) = \langle N' \rangle^{(e)} \{ \zeta \}^{(e)}, \quad \psi(x) = \langle N'' \rangle^{(e)} \{ \zeta \}^{(e)}$$

$$w(x) = \langle N''' \rangle^{(e)} \{ \zeta \}^{(e)}, \quad w'(x) = \langle N^{iv} \rangle^{(e)} \{ \zeta \}^{(e)}$$

$$w''(x) = \langle N^v \rangle^{(e)} \{ \zeta \}^{(e)} \quad (19)$$

در رابطه بالا، $\langle N^{(i)} \rangle^{(e)}$ ماتریس تابع شکل^۴ و $\{ \zeta \}^{(e)}$ بردار جابه‌جایی المان است و به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\langle N' \rangle^{(e)} = [N_1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad N_2 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$\langle N'' \rangle^{(e)} = [0 \quad N_1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad N_2 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$\langle N''' \rangle^{(e)} = [0 \quad 0 \quad N_1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad N_2 \quad 0 \quad 0]$$

$$\langle N^{iv} \rangle^{(e)} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad N_1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad N_2 \quad 0]$$

$$\langle N^v \rangle^{(e)} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad N_1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad N_2]$$

$$(20)$$

$$\{ \zeta \}^{(e)} = [u^1 \quad \psi^1 \quad w^1 \quad w_1^1 \quad w_2^1 \quad u^2 \quad \psi^2 \quad w^2 \quad w_1^2 \quad w_2^2]^T \quad (21)$$

تابع شکل‌های تعریف شده در رابطه (۲۰) از نوع خطی می‌باشند و در ادامه آورده شده‌اند [۴]:

$$N_1 = 1 - \frac{x}{l}, \quad N_2 = 1 + \frac{x}{l} \quad (22)$$

و l طول المان است؛ همچنین در رابطه (۲۱) بالانویس‌ها نشان‌دهنده شماره گره^۵ می‌باشند.

با اعمال گلرکین روی معادله حرکت اول رابطه (۲۳) به دست می‌آید:

$$\int_{V^{(e)}} \left(\frac{\partial N_x}{\partial x} - \rho h \left[\ddot{u} + \frac{h^2}{12R} \ddot{\psi} \right] \right) N_l dV = 0$$

¹ Galerkin
² Strong Formulation
³ Weak Formulation
⁴ Shape Function
⁵ Node

$$+RD_6 \left\langle \frac{dN^{iv}}{dx} \right\rangle^{(e)} + D_{10} \left\langle \frac{dN^v}{dx} \right\rangle^{(e)} \Bigg] dx$$

$$m^{(iv)} = \rho \frac{h^3}{12} \int_0^l \{N^{iv}\} \left(\frac{1}{R} \langle N'''' \rangle^{(e)} + \langle N^{iv} \rangle^{(e)} \right. \\ \left. + \frac{3h^2}{40R} \langle N^v \rangle^{(e)} \right) dx \quad (27)$$

$$k^{(v)} = \int_0^l \left\{ \{N^v\} \left(D_4 \left\langle \frac{dN'}{dx} \right\rangle^{(e)} + \frac{2}{3} RD_4 \left\langle \frac{dN''}{dx} \right\rangle^{(e)} \right. \right. \\ \left. \left. + D_8 \langle N'''' \rangle^{(e)} + D_9 \langle N^{iv} \rangle^{(e)} + D_{11} \langle N^v \rangle^{(e)} \right) \right. \\ \left. + \left\langle \frac{dN^v}{dx} \right\rangle \left(\frac{R}{2} D_6 \langle N'' \rangle^{(e)} + \frac{R}{2} D_6 \left\langle \frac{dN''''}{dx} \right\rangle^{(e)} \right. \right. \\ \left. \left. + D_{10} \left\langle \frac{dN^{iv}}{dx} \right\rangle^{(e)} + \frac{D_{10}}{2} \left\langle \frac{dN^v}{dx} \right\rangle^{(e)} \right) \right\} dx$$

$$m^{(v)} = \rho \frac{h^3}{24} \int_0^l \{N^v\} \left(\langle N'''' \rangle^{(e)} + \frac{3h^2}{20R} \langle N^{iv} \rangle^{(e)} \right. \\ \left. + \frac{3h^2}{40} \langle N^v \rangle^{(e)} \right) dx \quad (28)$$

با همبندی ماتریس‌های سختی و جرم و حل مسئله مشخصه، فرکانس‌های محوری و شکل مدهای متناسب با آن‌ها به دست خواهد آمد. روابط (۲۹) و (۳۰) ماتریس‌های سختی و جرم برای یک المان از سازه را نشان می‌دهد.

$$M^e = \begin{bmatrix} 2H_1 & H_1 & 0 & 0 & 0 & 2H_1 & H_1 & 0 & 0 & 0 \\ & H_2/3 & 0 & 0 & 0 & H_3/6 & H_2/3 & 0 & 0 & 0 \\ & & 2H_1 & H_3/6 & H_2/12 & 0 & 0 & 2H_1 & H_3/6 & H_2/12 \\ & & & H_2/3 & H_4/120 & 0 & 0 & H_3/6 & H_2/3 & H_4/120 \\ & & & & H_5/120 & 0 & 0 & H_2/12 & H_4/120 & H_5/120 \\ & & & & & 2H & H_1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & H_2/3 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & 2H_1 & H_3/6 & 0 \\ & & & & & & & & H_2/3 & H_4/120 \\ & & & & & & & & & H_5/120 \end{bmatrix}$$

symmetric

(۲۹)

$$k^{(iii)} = \int_0^l \left(\left\langle \frac{dN''''}{dx} \right\rangle \left[D_5 \langle N'' \rangle^{(e)} + D_5 \left\langle \frac{dN''''}{dx} \right\rangle^{(e)} \right. \right. \\ \left. \left. + D_6 \left\langle \frac{dN^{iv}}{dx} \right\rangle^{(e)} + \frac{R}{2} D_6 \left\langle \frac{dN^v}{dx} \right\rangle^{(e)} \right] \right. \\ \left. + \{N''''\} \left[D_3 \left\langle \frac{dN'}{dx} \right\rangle^{(e)} + \frac{h}{R} HD_1 \langle N'''' \rangle^{(e)} \right. \right. \\ \left. \left. + D_7 \langle N^{iv} \rangle^{(e)} + D_8 \langle N^v \rangle^{(e)} \right] \right) dx$$

$$m^{(iii)} = \rho h \int_0^l \{N''''\} \left(\langle N'''' \rangle^{(e)} + \frac{h^2}{12R} \langle N^{iv} \rangle^{(e)} \right. \\ \left. + \frac{h^2}{24} \langle N^v \rangle^{(e)} \right) dx \quad (26)$$

در رابطه (۲۶) H به صورت

$$H = \ln \frac{\left(1 + \frac{h}{2R}\right)}{\left(1 - \frac{h}{2R}\right)}$$

تعریف می‌شود. ماتریس‌های سختی و جرم استخراج شده از معادلات چهارم و پنجم حرکت نیز به ترتیب در روابط (۲۷) و (۲۸) آورده شده‌اند.

$$k^{(iv)} = \int_0^l \left\{ [N^{iv}] \left[RD_3 \left\langle \frac{dN'}{dx} \right\rangle^{(e)} + \frac{2}{3} D_4 \left\langle \frac{dN''}{dx} \right\rangle^{(e)} \right. \right. \\ \left. \left. + D_7 \langle N'''' \rangle^{(e)} + hRD_1 H \langle N^{iv} \rangle^{(e)} + D_9 \langle N^v \rangle^{(e)} \right] \right. \\ \left. + \left\langle \frac{dN^{iv}}{dx} \right\rangle \left[D_6 \langle N'' \rangle^{(e)} + D_6 \left\langle \frac{dN''''}{dx} \right\rangle^{(e)} \right] \right\}$$

$$M^e = \begin{bmatrix} \frac{D_1}{L} & \frac{D_2}{L} & -\frac{D_3}{2} & -\frac{RD_3}{2} & -\frac{d_4}{2} & -\frac{D_1}{L} & -\frac{D_2}{L} & -\frac{D_3}{2} & -\frac{RD_3}{2} & -\frac{D_4}{2} \\ \frac{RD_2}{L} + \frac{D_5 L}{3} & -\frac{D_5}{2} & -\frac{D_4}{3} - \frac{D_6}{2} & -\frac{RD_6}{4} - \frac{RD_4}{3} & -\frac{RD_6}{4} - \frac{RD_4}{3} & -\frac{D_2}{L} & \frac{D_5 L}{6} - \frac{RD_2}{L} & \frac{D_5}{2} & \frac{D_6}{2} - \frac{D_4}{3} & \frac{RD_6}{4} - \frac{RD_4}{3} \\ \frac{D_5}{L} + \frac{hHD_1 L}{3R} & \frac{D_6}{L} + \frac{D_7 L}{3} & \frac{RD_6}{2L} + \frac{D_8 L}{3} & \frac{D_3}{2} - \frac{D_5}{2} & \frac{D_3}{2} - \frac{D_5}{2} & \frac{D_3}{L} & \frac{D_5}{6} - \frac{D_6}{L} & \frac{hHD_1 L}{6R} - \frac{D_5}{L} & \frac{D_7 L}{6} - \frac{D_6}{L} & \frac{D_8 L}{6} - \frac{RD_6}{2L} \\ \frac{hRD_1 HL}{3} + \frac{RD_6}{L} & \frac{D_9 L}{3} + \frac{D_{10}}{L} & \frac{D_9 L}{3} + \frac{D_{10}}{L} & \frac{RD_3}{2} & \frac{RD_3}{2} & \frac{D_4}{3} - \frac{D_6}{2} & \frac{D_4}{3} - \frac{D_6}{2} & \frac{D_7 L}{6} - \frac{D_6}{L} & \frac{hRD_1 HL}{6} - \frac{RD_6}{L} & \frac{D_9 L}{6} - \frac{D_{10}}{L} \\ \frac{D_{11} L}{3} + \frac{D_{10}}{2L} & \frac{D_4}{2} & \frac{D_4}{2} & \frac{RD_4}{3} - \frac{RD_6}{4} & \frac{RD_4}{3} - \frac{RD_6}{4} & \frac{D_8 L}{6} - \frac{RD_6}{2L} & \frac{D_8 L}{6} - \frac{RD_6}{2L} & \frac{D_9 L}{6} - \frac{D_{10}}{L} & \frac{D_{11} L}{6} - \frac{D_{10}}{2L} & \frac{D_{11} L}{6} - \frac{D_{10}}{2L} \\ \frac{D_1}{L} & \frac{D_2}{L} & \frac{D_3}{L} & \frac{RD_3}{2} & \frac{RD_3}{2} & \frac{D_4}{3} & \frac{D_4}{3} & \frac{D_5}{2} & \frac{RD_6}{4} & \frac{D_4}{2} \\ \frac{RD_2}{L} + \frac{D_5 L}{3} & \frac{D_5}{L} & \frac{D_5}{L} & \frac{D_4}{3} + \frac{D_6}{2} & \frac{D_4}{3} + \frac{D_6}{2} & \frac{D_5}{2} & \frac{D_5}{2} & \frac{D_4}{3} + \frac{D_6}{2} & \frac{RD_6}{4} & \frac{RD_6}{4} + \frac{RD_4}{3} \\ \frac{D_5}{L} + \frac{hHD_1 L}{3R} & \frac{D_6}{L} + \frac{D_7 L}{3} & \frac{D_6}{L} + \frac{D_7 L}{3} & \frac{hRD_1 HL}{3} + \frac{RD_6}{L} & \frac{hRD_1 HL}{3} + \frac{RD_6}{L} & \frac{D_5}{L} + \frac{hHD_1 L}{3R} & \frac{D_5}{L} + \frac{hHD_1 L}{3R} & \frac{D_6}{L} + \frac{D_7 L}{3} & \frac{RD_6}{2L} + \frac{D_8 L}{3} & \frac{RD_6}{2L} + \frac{D_8 L}{3} \\ \frac{hRD_1 HL}{3} + \frac{RD_6}{L} & \frac{D_9 L}{3} + \frac{D_{10}}{L} & \frac{D_9 L}{3} + \frac{D_{10}}{L} & \frac{D_{11} L}{3} + \frac{D_{10}}{2L} & \frac{D_{11} L}{3} + \frac{D_{10}}{2L} & \frac{hRD_1 HL}{3} + \frac{RD_6}{L} & \frac{hRD_1 HL}{3} + \frac{RD_6}{L} & \frac{D_9 L}{3} + \frac{D_{10}}{L} & \frac{D_{11} L}{3} + \frac{D_{10}}{2L} & \frac{D_{11} L}{3} + \frac{D_{10}}{2L} \end{bmatrix}$$

(۳۰)

جدول ۱- مقایسه فرکانس‌های محوری پوسته استوانه‌ای با داده‌های آزمایشگاهی (Hz) و (n=1)

m	مرجع [۹]	پژوهش حاضر	درصد خطا
۱	۵۲۴/۱	۵۲۸/۳	۰/۸
۲	۷۸۳/۷	۷۸۹/۶	۰/۷۶
۳	۸۵۲/۸	۸۶۱/۸	۱/۰۴
۴	۸۹۴/۸	۹۰۱/۲	۰/۷۷
۵	۹۴۶/۲	۹۵۲/۳	۰/۶۳
۶	۱۰۲۱/۹	۱۰۲۸/۴	۰/۶۸
۷	۱۱۳۰/۴	۱۱۳۵/۶	۰/۴۴
۸	۱۲۷۶/۵	۱۲۸۵/۷	۰/۷

جدول ۲- مقایسه فرکانس‌های محوری پوسته استوانه‌ای با نتایج تئوری (Hz) و (n=1)

m	مرجع [۹] و [۱۳]	پژوهش حاضر	درصد خطا
۷	۴۸۶/۶	۴۸۳/۳	۰/۶۸
۸	۴۸۹/۶	۴۸۷/۶	۰/۴۳
۹	۵۴۶/۲	۵۴۳/۷	۰/۵۵
۱۰	۶۳۶/۸	۶۳۳	۰/۷۲

۳- اعتبار سنجی

از آنجایی که فرکانس‌های به‌دست آمده از این پژوهش فقط متناسب با مد محوری هستند، لذا برای صحت‌گذاری از فرکانس‌های مد محوری موجود در پژوهش‌های گذشته استفاده شده است. برای اعتبارسنجی پژوهش از دو مقاله متفاوت استفاده شده است. در مقایسه اول، نتایج با داده‌های آزمایشگاهی مرجع [۹] مقایسه شده است. این مقایسه برای شرایط تکیه‌گاهی ساده- ساده با نتایج موجود در مرجع [۹] در جدول ۱ نشان داده شده است. این نتایج، با استفاده از مقادیر زیر به‌دست آمده‌اند.

$$L=0.2 \text{ m}, R=0.1 \text{ m}, h=0.002 \text{ m}, E=0.45 \text{ GPa}, \nu=0.45, \rho=1452 \text{ Kg/m}^3$$

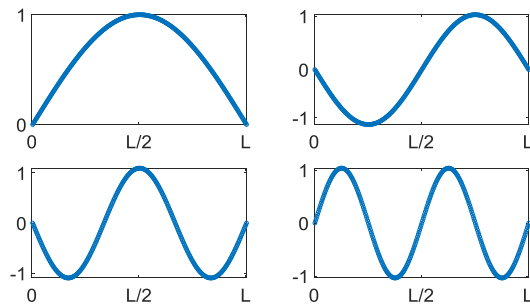
در مقایسه دوم از داده‌های موجود در مرجع [۱۳] استفاده شده است که داده‌های تئوری است. این داده‌ها برای شرایط تکیه‌گاهی ساده و با استفاده از مقادیر زیر به‌دست آمده است.

$$L=0.2 \text{ m}, R=0.1 \text{ m}, h=0.00247 \text{ m}, E=71.02 \text{ GPa}, \nu=0.31, \rho=2796 \text{ Kg/m}^3$$

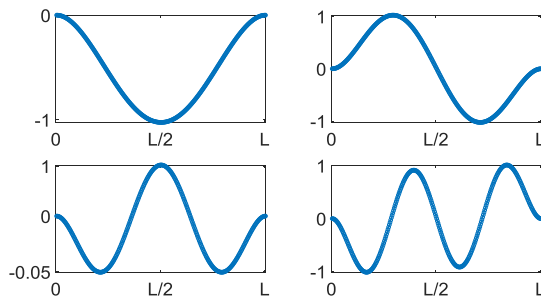
جدول ۲ آورده شده است. از آنجایی که این پژوهش به بررسی مدهای محوری پرداخته است، تنها فرکانس‌های محوری ۷ و ۸ و ۹ و ۱۰ در مرجع [۱۳] برای مقایسه وجود داشته است.

همان‌طور که از جدول ۱ مشخص است، روش حاضر از دقت قابل قبولی در فرکانس‌های محوری برخوردار است. همانگونه که از جدول ۱ مشخص است، درصد خطای همه

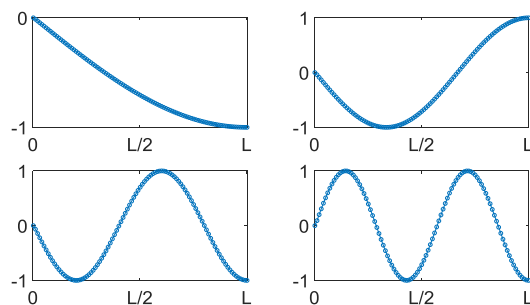
با استفاده از تئوری مرتبه بالا برای تقریب جابه‌جایی عرضی بوده است. به همین دلیل جابه‌جایی عرضی تا مرتبه سوم بسط داده شده است. از روش المان محدود و گلرکین برای به دست آوردن معادلات استفاده شد. ماتریس‌های سختی و جرم برای هر المان محاسبه شده و با همبندی روی تمام سازه ماتریس‌های جرم و سختی استخراج شده است. با حل معادله مشخصه، فرکانس‌های طبیعی و شکل مدهای متناظر با آن‌ها آورده شده است. با مقایسه نتایج این پژوهش با فرکانس‌های محوری به‌دست‌آمده از نتایج کارهای گذشته، اختلافی جزئی مشاهده شده است که نشان‌دهنده اعتبار این روش است.



شکل ۲- شکل مدهای تکیه‌گاه ساده- ساده



شکل ۳- شکل مدهای تکیه‌گاه گیردار- گیردار



شکل ۴- شکل مدهای تکیه‌گاه گیردار- آزاد

فرکانس‌های محوری به جز فرکانس سوم، زیر یک درصد است که نشان دهنده دقت بالای این تئوری به دلیل اضافه کردن ترم‌های مازاد در جابه‌جایی عرضی است. نتایج جدول ۲ نیز از اعتبار بسیار خوبی برخوردار است.

۴- نتایج

در ادامه ۱۰ فرکانس اول محوری برای شرایط تکیه‌گاهی گیردار- گیردار، ساده- ساده، گیردار و آزاد در جدول ۳ آورده شده است. شکل مدهای اول تا چهارم برای شرایط تکیه‌گاهی ساده- ساده، گیردار- گیردار و آزاد در شکل‌های ۳ و ۴ و ۵ رسم شده‌اند. این نتایج، با استفاده از مقادیر زیر به‌دست آمده‌اند.

$$L=0.2 \text{ m}, R=0.1 \text{ m}, h=0.002 \text{ m}, E=0.45 \text{ GPa}, \nu=0.45, \rho=1452 \text{ Kg/m}^3$$

۵- نتیجه‌گیری

همان‌طور که پیش از این نیز بیان شد، هدف از این پژوهش محاسبه فرکانس‌های محوری برای پوسته استوانه‌ای دایروی

جدول ۳- فرکانس‌های محوری (Hz) برای شرایط تکیه‌گاهی مختلف و ($n=1$)

m	گیردار-گیردار	ساده-گیردار	آزاد-گیردار
۱	۶۳۴/۰	۵۸۱/۱	۳۶۹/۸
۲	۹۴۷/۵	۸۶۸/۶	۵۵۲/۷
۳	۱۰۳۳/۲	۹۴۷/۱	۶۰۲/۷
۴	۱۰۸۱/۲	۹۹۱/۱	۶۳۰/۷
۵	۱۱۴۲/۴	۱۰۴۷/۲	۶۶۶/۴
۶	۱۲۳۳/۶	۱۱۳۰/۸	۷۱۹/۶
۷	۱۳۶۲/۰	۱۲۴۸/۵	۷۹۴/۵
۸	۱۵۴۲/۰	۱۴۱۳/۳	۸۹۹/۵
۹	۱۶۲۳/۶	۱۴۸۸/۳	۹۴۷/۱
۱۰	۱۷۰۵/۷	۱۵۶۳/۱	۹۹۴/۷

۶- ضمایم

$$N_x = \frac{Eh}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left\{ (1-\nu) \frac{\partial u}{\partial x} + (1-\nu) \frac{h^2}{12R} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\nu}{R} w + \nu w' + \frac{h^2 \nu}{8R} w'' \right\}$$

$$M_x = \frac{Eh^3}{12(1-2\nu)(1+\nu)} \left\{ \frac{1}{R} (1-\nu) \frac{\partial u}{\partial x} + (1-\nu) \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{2\nu}{R} w' + \nu w'' \right\}$$

$$Q_x = \frac{E}{2(1+\nu)} \left\{ \psi h + \frac{\partial w}{\partial x} h + \frac{h^3}{12R} \frac{\partial w'}{\partial x} + \frac{\partial w''}{\partial x} \frac{h^3}{24} \right\}$$

$$N_\theta = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left\{ \nu h \frac{\partial u}{\partial x} + (1-\nu) H w + [h - (1-\nu)RH] w' + \frac{(1-\nu)}{2} R(RH - h) w'' \right\}$$

$$M_\theta = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left\{ -(1-\nu)[RH - h]w + (1-\nu)R[RH - h]w' + \nu \frac{h^3}{12} \frac{\partial \psi}{\partial x} + w'' \left[\frac{(1+\nu)h^3}{2} \frac{1}{12} - \frac{(1-\nu)}{2} R^2(RH - h) \right] \right\}$$

$$S_x = \frac{E}{2(1+\nu)} \left\{ \frac{h^3}{12R} \psi + \frac{h^3}{12R} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{h^3}{12} \frac{\partial w'}{\partial x} + \frac{h^5}{160} \frac{\partial w''}{\partial x} \right\}$$

$$A = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left\{ \nu h \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{h^3}{12R} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\nu}{R} h w + (1-\nu) h w' + (3-2\nu) w'' \frac{h^3}{24R} \right\}$$

$$P_\theta = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left\{ \nu \frac{h^3}{24} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{(1-\nu)}{2} R[RH - h]w + \left[\frac{h^3}{24} - \frac{(1-\nu)}{2} R^2(RH - h) \right] w' + \frac{(1-\nu)}{4} R^3 \left[RH - h \left(1 + \frac{h^2}{12R^2} \right) \right] w'' \right\}$$

$$T_x = \frac{Eh^3}{2(1+\nu)} \left\{ \frac{1}{24} \psi + \frac{1}{24} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{h^2}{160R} \frac{\partial w'}{\partial x} + \frac{h^2}{320} \frac{\partial w''}{\partial x} \right\}$$

$$B = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \left\{ \nu \frac{h^3}{12R} \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{h^3}{12} \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{h^3}{12R} w' + (1-\nu) \frac{h^3}{12} w'' \right\}$$

$$D_1 = \frac{Eh(1-\nu)}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad D_2 = \frac{Eh^3(1-\nu)}{12R(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad D_3 = \frac{\nu Eh}{R(1-2\nu)(1+\nu)},$$

$$D_4 = \frac{\nu Eh^3}{8R(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad D_5 = \frac{Eh}{2(1+\nu)}, \quad D_6 = \frac{Eh^3}{24R(1+\nu)}$$

$$D_7 = \frac{E[h - (1-\nu)RH]}{R(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad D_8 = \frac{E(1-\nu)(RH - h)}{2(1-2\nu)(1+\nu)}$$

$$D_{10} = (Eh^5)/(320(1+\nu))$$

$$D_9 = \frac{E}{(1-2\nu)(1+\nu)R} \left[\frac{h^3}{24} (4-\nu) - \frac{(1-\nu)}{2} R^2(RH - h) \right]$$

$$D_{11} = [(E(1-\nu))/(4(1-2\nu)(1+\nu))][R^3 H - hR^2 + h^3/4]$$

- [7] Forsberg K (1969) Axisymmetric and beam-type vibrations of thin cylindrical shells. *AIAA J* 7(2): 221-227.
- [8] Chung H (1981) Free vibration analysis of circular cylindrical shells. *J Sound Vib* 74(3): 331-350.
- [9] Senjanović I, Čatipović I, Alujević N, Vladimir N, Čakmak D (2018) A finite strip for the vibration analysis of rotating cylindrical shells. *Thin Wall Struct* 122:158-72.
- [10] Cho M, Kim KO, Kim MH (1996) Efficient higher-order shell theory for laminated composites. *Compos Struct* 34(2): 197-212.
- [11] Senjanović I, Čatipović I, Alujević N, Vladimir N, Čakmak D (2018) A finite strip for the vibration analysis of rotating cylindrical shells 122: 158-172.
- [12] Sayyad AS, Ghugal YM (2019) Static and free vibration analysis of laminated composite and sandwich spherical shells using a generalized higher-order shell theory. *Compos Struct* 219(8).
- [13] Pellicano F (2007) Vibrations of circular cylindrical shells: Theory and experiments. *J Sound Vib* 303(1-2): 154-170.
- ۷- مراجع
- [1] Love AE. XVI (1888) The small free vibrations and deformation of a thin elastic shell. *Philos T R Soc Lond* 179: 491-546.
- [2] Timoshenko SP (1921) On the correction factor for shear of the differential equation for transverse vibrations of bars of uniform cross-section *Phil Mag*.
- [3] Reddy JN, Phan ND (1985) Stability and vibration of isotropic, orthotropic and laminated plates according to a higher-order shear deformation theory. *J Sound Vib* 98(2): 157-170.
- [4] Reddy JN (2006) *Theory and analysis of elastic plates and shells*. CRC press.
- [5] Dawe DJ (1975) High-order triangular finite element for shell analysis. *Int J Solids Struct* 11: 1097-1110.
- [6] Zhou J, Deng Z, Hou X (2010) Transient thermal response in thick orthotropic hollow cylinders with finite length: High order shell theory. *ACTA Mech Solida Sin* 23(2): 156-166.