



DOR:

## پاسخ معادلات مشخصه فرکانسی پانل‌های ساندویچی نوع لوی با هسته لانه‌زنبوری آگزتیک بر اساس تئوری بهبود یافته مرتبه سوم ردی

علیرضا پاکرویان<sup>۱</sup>، پیمان یوسفی<sup>۲\*</sup>، کوروش خورشیدی<sup>۳</sup>، محمد مهدی نجفی زاده<sup>۴</sup> و علیرضا نظام آبادی<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup>دانشجوی دکتری، گروه مهندسی مکانیک، واحد اراک، دانشگاه آزاد اسلامی، اراک، ایران

<sup>۲</sup>استادیار، گروه مهندسی مکانیک، واحد اراک، دانشگاه آزاد اسلامی، اراک، ایران

<sup>۳</sup>دانشیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه اراک، اراک، ایران

<sup>۴</sup>استاد، گروه مهندسی مکانیک، واحد اراک، دانشگاه آزاد اسلامی، اراک، ایران

یادداشت پژوهشی، تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۶/۲۷؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۹/۱۰/۰۶؛ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۰/۰۱/۰۷

### چکیده

در این مقاله، به منظور بررسی ارتعاشات آزاد عرضی پانل‌های ساندویچی مستطیلی با شرایط مرزی نوع لوی، معادلات حرکت براساس تئوری بهبود یافته تغییر شکل برشی مرتبه سوم همراه با ضرایب تصحیح برشی استخراج شده‌اند. تئوری مرتبه سوم ردی برای محاسبه تنش برشی عرضی در راستای ضخامت ورق، یک توزیع سهموی را اختصاص داده و برای ورق‌های تک لایه نازک تا نسبتاً ضخیم مناسب است؛ لیکن برای ورق‌های ساندویچی، در تئوری ردی شرط پیوستگی تنش‌های برشی بین لایه‌ها ارضاء نمی‌گردد. این نقیصه با افزودن ضرایب تصحیح برشی و فقط از لحاظ انرژی اصلاح می‌شود. پانل ساندویچی شامل رویه‌های ایزوتروپ و هسته لانه‌زنبوری آگزتیک از جنس همان رویه‌ها است. خواص موثر هسته لانه‌زنبوری، مطابق جدیدترین مدل اصلاح شده گیبسون و بر اساس تئوری تیر تیموشنکو محاسبه شده‌اند. برای اعتبارسنجی روش حل، به مقایسه نتایج حاضر با برخی گزارش‌های موجود در مقالات و نرم افزار اجزاء محدود انسیس پرداخته شده است. نتایج اعتبارسنجی نشان‌دهنده تأثیر بسزای ضرایب تصحیح برشی مناسب در کاهش خطا می‌باشند. سرانجام اثرات شرایط مرزی، نسبت ضخامت به طول پانل، نسبت ضخامت هسته به ضخامت کل پانل و پارامترهای هندسی سلول شش‌ضلعی درون روی فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد، مورد بررسی قرار گرفته و نتایج در قالب چند نمودار ارائه شده‌اند.

**کلمات کلیدی:** ارتعاش آزاد؛ شرایط مرزی لوی؛ پانل ساندویچی آگزتیک؛ تئوری بهبود یافته مرتبه سوم ردی؛ ضرایب تصحیح برشی.

## Solution of the Characteristic Frequency Equations of Levy-type Sandwich Panels with Auxetic Honeycomb Core based on the Improved Reddy's Third-order Theory

A.R. Pakrooyan<sup>1</sup>, P. Yousefi<sup>2\*</sup>, K. Khorshidi<sup>3</sup>, M.M. Najafizadeh<sup>4</sup>, A.R. Nezamabadi<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Ph.D. Candidate., Mech. Eng., Arak branch, Islamic Azad Univ., Arak, Iran.

<sup>2</sup> Assis. Prof., Mech. Eng., Arak branch, Islamic Azad Univ., Arak, Iran.

<sup>3</sup> Assoc. Prof., Mech. Eng., Arak Univ., Arak, Iran.

<sup>4</sup> Prof., Mech. Eng., Arak branch, Islamic Azad Univ., Arak, Iran.

### Abstract

In this paper, the equations of motion are derived based on the improved third-order shear deformation theory with shear correction factors to investigate the free transverse vibration of rectangular sandwich panels having Levy boundary conditions. Reddy's third-order theory devote a parabolic distribution for transverse shear stress along the thickness of plate and is suitable for thin to relatively thick single-layer plates. However, for the case of sandwich panels, in Reddy's theory, the continuity condition of inter-laminar surfaces is not satisfied. This defect is improved by adding shear correction factors only in the energy viewpoint. Sandwich panel consist of isotropic facesheets and an auxetic honeycomb core making from the same facesheet's material. The effective properties of honeycomb core were derived from the newest revised Gibson model based on Timoshenko beam theory. For validation, some comparison study is carried out to compare the current solution with the results reported in literature and also finite element ANSYS software. The results of validation indicates the important effect of suitable shear correction factors to decrease error percentage. Finally, the effect of boundary conditions, panel thickness to length ratio, core thickness to panel thickness ratio and geometrical parameters of the reentrant hexagon cell on the non-dimensional natural frequencies were investigated and the results were presented in some graphs.

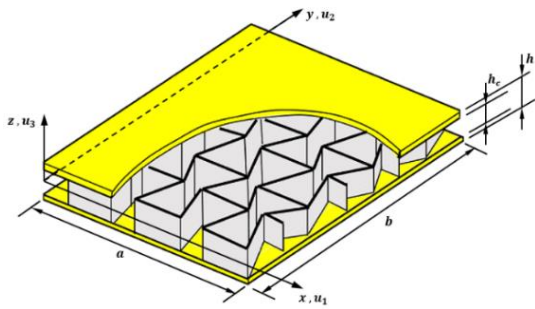
**Keywords:** Free Vibration; Levy Boundary Conditions; Auxetic Sandwich Panel; Improved Reddy's Third-Order Theory; Shear Correction Factors.

## ۱- مقدمه

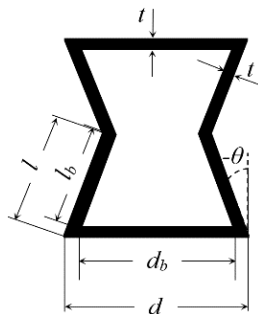
پانل‌های ساندویچی لانه‌زنبوری، نوعی سازه کامپوزیتی هستند که به دلیل داشتن نسبت‌های سفتی به وزن و استحکام به وزن بالا نسبت به سایر مواد و ویژگی‌هایی از قبیل سادگی فرآیند ساخت، قابلیت بالای جذب انرژی، عایق حرارتی و عایق صوتی، در صنایع هواپیمایی، خودروسازی، دریایی و مهندسی عمران کاربردهای فراوانی دارند [۱]. این پانل‌ها شامل دو رویه و یک هسته لانه‌زنبوری هستند که هسته شامل ردیفی از سلول‌ها است. معمولاً شکل این سلول‌ها به صورت شش‌ضلعی بوده لیکن سلول‌های با اشکال دیگر نیز وجود دارد [۲]. گیبسون و همکاران [۳]، ساختاری لانه‌زنبوری دارای ضریب پواسون منفی متشکل از سلول‌های شش‌ضلعی درون‌رو پیشنهاد دادند. اوانس و همکاران [۴]، به منظور ساده‌سازی عبارت طولانی «ضریب پواسون منفی»، این مواد را اصطلاحاً «آگرتیک» نام‌گذاری کردند. آگرتیک‌ها دسته‌ای از فرا مواد هستند که نسبت به مواد معمولی، خصوصیات مکانیکی بهتر از جمله مقاومت برشی، چقرمگی شکست و مقاومت فرورفتگی بیشتری را دارا می‌باشند. در حال حاضر انواع زیادی از توپولوژی‌های با ضریب پواسون منفی وجود دارد و تلاش برای یافتن توپولوژی‌های جدید آگرتیک دارای ضریب پواسون منفی بالاتر، به یک موضوع تحقیقی تبدیل شده است. ساختار لانه‌زنبوری درون‌رو، دسته‌ای از مواد سلولی آگرتیک است که به طور وسیعی در حوزه‌های مختلف مهندسی کاربرد دارد؛ به همین دلیل شناخت کافی از خواص مکانیکی آن، برای محققان بسیار ضروری است [۵-۷]. گیبسون و اشبی [۸]، روابط پارامتری معادل هسته لانه‌زنبوری درون‌رو را ارائه دادند. این روابط ساده بوده، ولی دارای نواقص عمده‌ای می‌باشند. آن‌ها با در نظر گرفتن جداره سلول به صورت غشاء فقط خیز را در نظر گرفته و انبساط و انقباض جداره سلول را نادیده گرفته‌اند. به همین دلیل روابط گیبسون دقیق نیستند. مالک و گیبسون [۹]، با در نظر تغییر شکل‌های انبساطی جداره سلول و نیز در نظر گرفتن اثر نقاط موجود در محل تقاطع عضوهای افقی و مورب و بر اساس تئوری تیر تیموشنکو، روابط گیبسون و اشبی را بهبود دادند. غزنوی اسگوئی و شرعیات [۱۰]، با ارائه تئوری محلی-عمومی اصلاح شده با استفاده از روابط سه‌بعدی الاستیسیته به مطالعه رفتار تنش‌ی و جابجایی در

راستای ضخامت ورق‌های ساندویچی ضخیم با هسته تغییر شکل‌پذیر آگرتیک تحت بارهای استاتیکی پرداختند. تئوری کلاسیک توسط کرشلف [۱۱ و ۱۲] ارائه شد. این تئوری فرض می‌کند که خط عمود بر سطح میانی ورق قبل از تغییر شکل، پس از تغییر شکل به صورت خط راست و نیز عمود بر سطح میانی باقی می‌ماند. در واقع این تئوری از اثرات تغییر شکل برشی عرضی صرف‌نظر کرده و برای ورق‌های نازک مناسب است. قدیریان و همکاران [۱۳]، با استفاده از تئوری کلاسیک، ارتعاشات و پایداری ورق‌های مرکب چند لایه را بررسی کردند. ریسنر و میندلین [۱۴] و [۱۵] با در نظر گرفتن اثر تغییر شکل برشی عرضی، تئوری مرتبه اول تغییر شکل برشی را ارائه دادند. در تئوری میندلین، تنش برشی ثابتی در راستای ضخامت در نظر گرفته شده و به همین دلیل شرایط عاری از تنش در سطوح بالا و پایین ورق ارضاء نشده، لذا نیازمند ضریب تصحیح برشی است. از جمله کارهای انجام شده با استفاده از تئوری مرتبه اول، می‌توان به خورشیدی و عنصری‌نژاد [۱۶] و خورشیدی و همکاران [۱۷] اشاره کرد. به منظور حصول نتایج دقیق‌تر و همین‌طور عدم استفاده از ضریب تصحیح برشی، تئوری‌های مرتبه بالای تغییر شکل برشی توسط ردی [۱۸] و خورشیدی و کریمی [۱۹]، پیشنهاد داده شدند. علاوه بر این موارد، خورشیدی و همکاران [۲۰]، خورشیدی و فلاح [۲۱] و خورشیدی و کریمی [۲۲]، برای محاسبه میدان جابجایی از تئوری‌های بهبود یافته تغییر شکل برشی از قبیل تئوری‌های نمایی، مثلثاتی و هذلولوی استفاده کردند. تئوری مرتبه سوم ردی برای محاسبه تنش برشی عرضی در راستای ضخامت ورق، یک توزیع سهموی را اختصاص داده و برای ورق‌های تک لایه نازک تا نسبتاً ضخیم مناسب است. از جمله کارهای انجام شده با استفاده از این تئوری می‌توان به خورشیدی و همکاران [۲۳] اشاره کرد؛ لیکن برای ورق‌های ساندویچی، در تئوری ردی شرط پیوستگی تنش‌های برشی بین لایه‌ها ارضاء نمی‌شود. این نقیصه با افزودن ضرایب تصحیح برشی و فقط از لحاظ انرژی اصلاح می‌شود.

هدف مقاله حاضر، بررسی ارتعاشات آزاد پانل ساندویچی مستطیلی با هسته لانه‌زنبوری آگرتیک متشکل از سلول‌های شش‌ضلعی درون‌رو بر اساس تئوری بهبود یافته مرتبه سوم همراه با ضرایب تصحیح برشی، توسعه داده شده توسط



شکل ۱- پانل ساندویچی با هسته لانه‌زنبوری آگزتیک



شکل ۲- پارامترهای هندسی سلول درون‌رو

در روابط (۲)،  $k = 1, 3$  نمایانگر رویه‌های بالایی و پایینی بوده که از ماده ایزوتروپ با مدول‌های الاستیسیته و برشی  $E_0$  و  $G_0$ ، ضریب پواسون  $\nu_0$  و چگالی  $\rho_0$  ساخته شده‌اند.  $k = 2$  نیز نشان‌دهنده هسته لانه‌زنبوری آگزتیک است، به طوری که در این مقاله، مقادیر  $\nu_{12}^{(2)}$  و  $\nu_{21}^{(2)}$  منفی می‌باشند.  $\kappa_{13}$  و  $\kappa_{23}$  نیز ضرایب تصحیح برشی هستند که با توجه به روش ارائه شده در بخش ۳ تعیین می‌شوند. در این مقاله خواص موثر هسته با توجه به جدیدترین مدل اصلاح شده گیبسون [۹]، براساس تئوری تیر تیموشنکو و با در نظر گرفتن تغییرشکل‌های خمشی و انبساطی جداره سلول‌ها و نیز در نظر گرفتن اثر نقاط موجود در محل تقاطع عضوهای مورب و افقی، مطابق روابط موجود در ضمیمه (الف) محاسبه می‌شوند.

۳-۲- تئوری تغییرشکل برشی مرتبه سوم ردی  
با توجه به این تئوری، میدان جابجایی به صورت زیر نوشته می‌شود [۱۸]:

$$u_1(x, y, z, t) = g(z) \frac{\partial w}{\partial x} + f(z) \zeta(x, y, t) \quad (3)$$

هوانگ [۲۴] است که بدین منظور از روش حل تحلیلی ارائه شده توسط دی و مائو [۲۵] استفاده شده است. برای استخراج معادلات حاکم بر حرکت و شرایط مرزی از اصل همپلتون استفاده شده و پانل ساندویچی دارای شرایط مرزی لوی است. پس از اعتبارسنجی نتایج حاضر با مراجع موجود و نرم افزار اجزاء محدود انسیس، به بررسی اثرات شرایط مرزی، نسبت ضخامت به طول پانل، نسبت ضخامت هسته به ضخامت کل پانل و پارامترهای هندسی سلول درون‌رو روی فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد پانل ساندویچی پرداخته شده و نتایج در قالب چند نمودار ارائه شده‌اند.

## ۲- استخراج معادلات حاکم

### ۲-۱- مدل هندسی

مدل هندسی مورد مطالعه در این مقاله به صورت یک پانل ساندویچی سه‌لایه شامل رویه‌های آلومینیومی و هسته لانه‌زنبوری آگزتیک متشکل از سلول‌های شش‌ضلعی درون‌رو در نظر گرفته شده، به طوری که جنس هسته از همان آلومینیوم رویه‌ها است (شکل ۱). پارامترهای هندسی سلول درون‌رو در شکل ۲ نشان داده شده است. مطابق شکل ۲، اگر زاویه سلول مثبت باشد، ساختار سلولی از نوع شش‌ضلعی معمولی خواهد بود.

### ۲-۲- روابط ساختاری و خواص ماده آگزتیک

پانل ساندویچی با هسته آگزتیک یک ورق لایه‌ای ارتوتروپیک است که روابط ساختاری آن به صورت زیر است [۱۸]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{Bmatrix} Q_{11}^{(k)} \varepsilon_{xx} + Q_{12}^{(k)} \varepsilon_{yy} \\ Q_{21}^{(k)} \varepsilon_{xx} + Q_{22}^{(k)} \varepsilon_{yy} \\ Q_{44}^{(k)} \gamma_{yz} \\ Q_{55}^{(k)} \gamma_{xz} \\ Q_{66}^{(k)} \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

که در آن

$$\begin{aligned} Q_{11}^{(k)} &= E_{11}^{(k)} / (1 - \nu_{12}^{(k)} \nu_{21}^{(k)}) \\ Q_{22}^{(k)} &= E_{22}^{(k)} / (1 - \nu_{12}^{(k)} \nu_{21}^{(k)}) \\ Q_{12}^{(k)} &= \nu_{21}^{(k)} E_{11}^{(k)} / (1 - \nu_{12}^{(k)} \nu_{21}^{(k)}) \\ Q_{21}^{(k)} &= Q_{12}^{(k)} \quad , \quad Q_{66}^{(k)} = G_{12}^{(k)} \\ Q_{55}^{(k)} &= \kappa_{13} G_{13}^{(k)} \quad , \quad Q_{44}^{(k)} = \kappa_{23} G_{23}^{(k)} \end{aligned} \quad (2)$$

$$U_s = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \int_{V^{(k)}} [\sigma_{xx}^{(k)} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}^{(k)} \varepsilon_{yy} + \tau_{xy}^{(k)} \gamma_{xy} + \tau_{xz}^{(k)} \gamma_{xz} + \tau_{yz}^{(k)} \gamma_{yz}] dV^{(k)} \quad (15)$$

به‌طوریکه  $V^{(k)}$  بیانگر حجم لایه  $k$  ام است. با جایگذاری روابط (۱۴) و (۱۵) در رابطه (۱۳) و انجام عملیات انتگرال‌گیری جزء به جزء و مساوی صفر قرار دادن ضرایب  $\delta w$ ،  $\delta \zeta$  و  $\delta \psi$ ، معادلات حاکم و شرایط مرزی بر حسب منته‌های تنش به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$\delta w \Rightarrow \sum_{k=1}^3 \left[ -\frac{\partial^2 S_{xx}^{(k)}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 S_{xy}^{(k)}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 S_{yy}^{(k)}}{\partial y^2} + \frac{\partial T_{xz}^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yz}^{(k)}}{\partial y} - I_1^{(k)} \ddot{w} + I_2^{(k)} \left( \frac{\partial^2 \ddot{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \ddot{w}}{\partial y^2} \right) + I_4^{(k)} \left( \frac{\partial \ddot{\zeta}}{\partial x} + \frac{\partial \ddot{\psi}}{\partial y} \right) \right] = 0 \quad (16)$$

$$\delta \zeta \Rightarrow \sum_{k=1}^3 \left[ \frac{\partial P_{xx}^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial P_{xy}^{(k)}}{\partial y} - Q_{xz}^{(k)} - I_4^{(k)} \frac{\partial \ddot{w}}{\partial x} - I_3^{(k)} \ddot{\zeta} \right] = 0 \quad (17)$$

$$\delta \psi \Rightarrow \sum_{k=1}^3 \left[ \frac{\partial P_{xy}^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yy}^{(k)}}{\partial y} - Q_{yz}^{(k)} - I_4^{(k)} \frac{\partial \ddot{w}}{\partial y} - I_3^{(k)} \ddot{\psi} \right] = 0 \quad (18)$$

به‌طوری‌که ممان‌های اینرسی جرمی  $I_r$  ( $r = 1, \dots, 4$ ) و منته‌های تنش  $S_{ij}$ ،  $P_{ij}$  و  $Q_{iz}$  ( $i, j = x, y$ ) به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{Bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{Bmatrix}^{(k)} = \int_{z_{k-1}}^{z_k} \rho^{(k)} \begin{Bmatrix} 1 \\ g^2(z) \\ f^2(z) \\ f(z)g(z) \end{Bmatrix} dz \quad (19)$$

$$\begin{Bmatrix} S_{xx} \\ S_{xy} \\ S_{yy} \end{Bmatrix}^{(k)} = \int_{z_{k-1}}^{z_k} g(z) \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \sigma_{yy} \end{Bmatrix}^{(k)} dz \quad (20)$$

$$\begin{Bmatrix} P_{xx} \\ P_{xy} \\ P_{yy} \end{Bmatrix}^{(k)} = \int_{z_{k-1}}^{z_k} f(z) \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \sigma_{yy} \end{Bmatrix}^{(k)} dz \quad (21)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_{xz} \\ Q_{yz} \end{Bmatrix}^{(k)} = \int_{z_{k-1}}^{z_k} f'(z) \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}^{(k)} dz \quad (22)$$

$$u_2(x, y, z, t) = g(z) \frac{\partial w}{\partial y} + f(z) \psi(x, y, t) \quad (4)$$

$$u_3(x, y, z, t) = w(x, y, t) \quad (5)$$

به‌طوری‌که

$$g(z) = -\frac{4}{3h^2} z^3, \quad f(z) = z + g(z) \quad (6)$$

#### ۴-۲- روابط کرنش-جابجایی

با فرض کوچک بودن تغییر شکل‌ها، مولفه‌های کرنش خطی به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند [۱۸]:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_1}{\partial x} = g(z) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + f(z) \frac{\partial \zeta}{\partial x} \quad (8)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_2}{\partial y} = g(z) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + f(z) \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \\ &= 2g(z) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + f(z) \left( \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial x} = [1 + g'(z)] \frac{\partial w}{\partial x} + f'(z) \zeta \quad (11)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial u_3}{\partial y} = [1 + g'(z)] \frac{\partial w}{\partial y} + f'(z) \psi \quad (12)$$

#### ۵-۲- استخراج معادلات حاکم و شرایط مرزی

در این مقاله برای استخراج معادلات حاکم بر حرکت و شرایط مرزی از اصل همپلتون مطابق رابطه (۱۳) استفاده شده است [۱۸]:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta(T - U_s) dt = 0 \quad (13)$$

به‌طوری‌که در رابطه فوق،  $\delta$  عملگر تغییراتی بوده و  $T$  و  $U_s$  به‌ترتیب بیانگر انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل کرنشی پانل هستند که مطابق روابط زیر به‌دست می‌آیند [۱۸]:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \rho^{(k)} \int_{V^{(k)}} \left[ \left( \frac{\partial u_1}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_2}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_3}{\partial t} \right)^2 \right] dV^{(k)} \quad (14)$$

$$\sum_{k=1}^3 S_{yy}^{(k)} = 0 \quad (۳۷)$$

$$\sum_{k=1}^3 P_{xy}^{(k)} = 0 \quad (۳۸)$$

$$\sum_{k=1}^3 P_{yy}^{(k)} = 0 \quad (۳۹)$$

با استفاده از روابط (۱)، (۸) تا (۱۲) و (۲۰) تا (۲۳)،  
منتجه‌های تنش را می‌توان با روابط (۴۰-۴۹) بیان کرد:

$$S_{xx}^{(k)} = A_2^{(k)} w_{,xx} + B_2^{(k)} w_{,yy} + A_1^{(k)} \zeta_{,x} + B_1^{(k)} \psi_{,y} \quad (۴۰)$$

$$S_{xy}^{(k)} = 2D_2^{(k)} w_{,xy} + D_1^{(k)} (\zeta_{,y} + \psi_{,x}) \quad (۴۱)$$

$$S_{yy}^{(k)} = B_2^{(k)} w_{,xx} + C_2^{(k)} w_{,yy} + B_1^{(k)} \zeta_{,x} + C_1^{(k)} \psi_{,y} \quad (۴۲)$$

$$P_{xx}^{(k)} = A_1^{(k)} w_{,xx} + B_1^{(k)} w_{,yy} + A_3^{(k)} \zeta_{,x} + B_3^{(k)} \psi_{,y} \quad (۴۳)$$

$$P_{xy}^{(k)} = 2D_1^{(k)} w_{,xy} + D_3^{(k)} (\zeta_{,y} + \psi_{,x}) \quad (۴۴)$$

$$P_{yy}^{(k)} = B_1^{(k)} w_{,xx} + C_1^{(k)} w_{,yy} + B_3^{(k)} \zeta_{,x} + C_3^{(k)} \psi_{,y} \quad (۴۵)$$

$$Q_{xz}^{(k)} = (E_3 + E_6)^{(k)} w_{,x} + E_5^{(k)} \zeta \quad (۴۶)$$

$$Q_{yz}^{(k)} = (F_3 + F_6)^{(k)} w_{,y} + F_5^{(k)} \psi \quad (۴۷)$$

$$T_{xz}^{(k)} = (E_1 + 2E_2 + E_4)^{(k)} w_{,x} + (E_3 + E_6)^{(k)} \zeta \quad (۴۸)$$

$$T_{yz}^{(k)} = (F_1 + 2F_2 + F_4)^{(k)} w_{,y} + (F_3 + F_6)^{(k)} \psi \quad (۴۹)$$

روابط مربوط به ثوابت  $E_j^{(k)}$ ,  $D_i^{(k)}$ ,  $C_i^{(k)}$ ,  $B_i^{(k)}$ ,  $A_i^{(k)}$  و  $F_j^{(k)}$  به‌طوریکه  $(i = 1, \dots, 3; j = 1, \dots, 6)$  در ضمیمه (ب) موجود است.

با جایگذاری روابط (۴۰) تا (۴۹) در روابط (۱۶) تا (۱۸)، معادلات حاکم بر حسب مولفه‌های جابجایی به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$L_{11}w(x, y, t) + L_{12}\zeta(x, y, t) + L_{13}\psi(x, y, t) = 0 \quad (۵۰)$$

$$\begin{Bmatrix} T_{xz} \\ T_{yz} \end{Bmatrix}^{(k)} = \int_{z_{k-1}}^{z_k} (1 + g'(z)) \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}^{(k)} dz \quad (۲۳)$$

همچنین با پیاده‌سازی اصل همیلتون، شرایط مرزی اساسی و طبیعی در لبه‌های پانل ساندویچی به‌دست می‌آیند.

در این مقاله، لبه‌های  $x = a$  و  $x = 0$  دارای شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده در نظر گرفته شده‌اند، از این‌رو روابط (۲۴) تا (۲۷) برای این لبه‌ها برقرار است:

$$w = 0 \quad (۲۴)$$

$$\psi = 0 \quad (۲۵)$$

$$\sum_{k=1}^3 S_{xx}^{(k)} = 0 \quad (۲۶)$$

$$\sum_{k=1}^3 P_{xx}^{(k)} = 0 \quad (۲۷)$$

به‌همین ترتیب شرایط مرزی مختلف در لبه‌های  $y = 0$  و  $y = b$  به‌صورت زیر می‌باشند:

(۱) شرط مرزی گیردار:

$$w = 0 \quad (۲۸)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (۲۹)$$

$$\zeta = 0 \quad (۳۰)$$

$$\psi = 0 \quad (۳۱)$$

(۲) شرط مرزی ساده:

$$w = 0 \quad (۳۲)$$

$$\zeta = 0 \quad (۳۳)$$

$$\sum_{k=1}^3 S_{yy}^{(k)} = 0 \quad (۳۴)$$

$$\sum_{k=1}^3 P_{yy}^{(k)} = 0 \quad (۳۵)$$

(۳) شرط مرزی آزاد:

$$\sum_{k=1}^3 \left( 2 \frac{\partial S_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial S_{yy}}{\partial y} - T_{yz} - I_2 \frac{\partial \ddot{w}}{\partial y} - I_4 \ddot{\psi} \right)^{(k)} = 0 \quad (۳۶)$$

$$\begin{bmatrix} L'_{12} & L'_{13} \\ L'_{22} & L'_{23} \end{bmatrix} Z_m(y) = - \begin{bmatrix} L'_{11} & L'_{13} \\ L'_{21} & L'_{23} \end{bmatrix} W_m(y) \quad (۶۰)$$

$$\begin{bmatrix} L'_{12} & L'_{13} \\ L'_{22} & L'_{23} \end{bmatrix} \Psi_m(y) = \begin{bmatrix} L'_{11} & L'_{12} \\ L'_{21} & L'_{22} \end{bmatrix} W_m(y) \quad (۶۱)$$

با توجه به روابط موجود در ضمیمه (ج)، رابطه (۵۹) را می‌توان به صورت معادله دیفرانسیل (۶۲) ساده‌سازی کرد:

$$K_8^{(m)} \frac{d^8 W_m(y)}{dy^8} + K_6^{(m)} \frac{d^6 W_m(y)}{dy^6} + K_4^{(m)} \frac{d^4 W_m(y)}{dy^4} + K_2^{(m)} \frac{d^2 W_m(y)}{dy^2} + K_0^{(m)} W_m(y) = 0 \quad (۶۲)$$

روابط ضرایب ( $r = 0, 2, \dots, 8$ ) در ضمیمه (ج) آورده شده است.

پاسخ معادله (۶۲)، به صورت (۶۳) قابل بیان است [۲۵]:

$$W_m(y) = [c_1 \dots c_8]^{(m)} \begin{Bmatrix} e^{\lambda_1 y} \\ \vdots \\ e^{\lambda_8 y} \end{Bmatrix} \quad (۶۳)$$

به طوری که  $c_r^{(m)}$  ( $r = 1, 2, \dots, 8$ ) ضرایب مجهول هستند.

با توجه به روابط (۶۲) و (۶۳)، معادله مشخصه (۶۴) به دست می‌آید:

$$K_8^{(m)} \lambda_m^8 + K_6^{(m)} \lambda_m^6 + K_4^{(m)} \lambda_m^4 + K_2^{(m)} \lambda_m^2 + K_0^{(m)} = 0 \quad (۶۴)$$

همچنین پس از جایگذاری رابطه (۶۳) در معادلات (۶۰) و (۶۱) و مرتب‌سازی، معادلات دیفرانسیل (۶۵-۶۶) به دست می‌آیند:

$$g_5^{(m)} \frac{d^5 Z_m(y)}{dy^5} + g_3^{(m)} \frac{d^3 Z_m(y)}{dy^3} + g_1^{(m)} \frac{d Z_m(y)}{dy} = (\xi_4 \xi_6 - \xi_1 \xi_{10})^{(m)} \frac{d^5 W_m(y)}{dy^5} + (\xi_4 \xi_7 + \xi_5 \xi_6 - \xi_2 \xi_{10})^{(m)} \frac{d^3 W_m(y)}{dy^3} + (\xi_5 \xi_7 - \xi_3 \xi_{10})^{(m)} \frac{d W_m(y)}{dy} \quad (۶۵)$$

$$g_5^{(m)} \frac{d^5 \Psi_m(y)}{dy^5} + g_3^{(m)} \frac{d^3 \Psi_m(y)}{dy^3} + g_1^{(m)} \frac{d \Psi_m(y)}{dy} = (\xi_1 \xi_8)^{(m)} \frac{d^6 W_m(y)}{dy^6}$$

$$L_{21} w(x, y, t) + L_{22} \zeta(x, y, t) + L_{23} \psi(x, y, t) = 0 \quad (۵۱)$$

$$L_{31} w(x, y, t) + L_{32} \zeta(x, y, t) + L_{33} \psi(x, y, t) = 0 \quad (۵۲)$$

به طوری که روابط اپراتورهای ( $i, j = 1, \dots, 3$ ) در ضمیمه (پ) آورده شده است.

### ۲-۶- تعیین معادله فرکانسی

با توجه به این که شرایط مرزی در لبه‌های  $x = a$  و  $x = 0$  به صورت تکیه‌گاه ساده در نظر گرفته شده است، توابع مجهول  $w$ ،  $\zeta$  و  $\psi$  را می‌توان به گونه‌ای ساده کرد که شرایط مرزی اساسی (روابط (۲۴) و (۲۵)) را ارضاء نمایند.

$$w(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} W_m(y) \sin(\alpha_m x) e^{-i\omega_m t} \quad (۵۳)$$

$$\zeta(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} Z_m(y) \cos(\alpha_m x) e^{-i\omega_m t} \quad (۵۴)$$

$$\psi(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \Psi_m(y) \sin(\alpha_m x) e^{-i\omega_m t} \quad (۵۵)$$

به طوری که  $\alpha_m = m\pi/a$  بوده و  $m$  شماره نیم موج طولی است.  $\omega_m$  نیز بیانگر فرکانس طبیعی است.

از جایگذاری روابط (۵۳) تا (۵۵) در روابط (۵۰) تا (۵۲)، معادلات (۵۶-۵۸) به دست می‌آیند:

$$L'_{11} W_m(y) + L'_{12} Z_m(y) + L'_{13} \Psi_m(y) = 0 \quad (۵۶)$$

$$L'_{21} W_m(y) + L'_{22} Z_m(y) + L'_{23} \Psi_m(y) = 0 \quad (۵۷)$$

$$L'_{31} W_m(y) + L'_{32} Z_m(y) + L'_{33} \Psi_m(y) = 0 \quad (۵۸)$$

روابط مربوط به اپراتورهای ( $i, j = 1, \dots, 3$ ) در ضمیمه (ت) موجود است.

مطابق ضمیمه (ث)، دستگاه معادلات فوق را می‌توان به صورت روابط (۵۹) تا (۶۱)، جداسازی کرد:

$$\begin{bmatrix} L'_{11} & L'_{12} & L'_{13} \\ L'_{21} & L'_{22} & L'_{23} \\ L'_{31} & L'_{32} & L'_{33} \end{bmatrix} W_m(y) = 0 \quad (۵۹)$$

$$+(\xi_2\xi_9 + \xi_3\xi_8 - 2\xi_4\xi_5)^{(m)}[\Lambda]^{(m)^2} + (\xi_3\xi_9 - \xi_5^2)^{(m)}[I] \quad (74)$$

به طوریکه [I] ماتریس همانی بوده و [Λ] نیز ماتریس قطری شامل، عناصر روی قطر  $\lambda_r^{(m)} (r = 1, 2, \dots, 8)$  است.

به منظور تعیین فرکانس‌های طبیعی پانل ساندویچی با هسته لانه‌زنبوری آگرتیک تحت شرایط مرزی مختلف، روابط (۶۳)، (۶۸) و (۶۹) به صورت مجزا در هر کدام از مجموعه روابط (۲۸) تا (۳۱)، (۳۲) تا (۳۵) و (۳۶) تا (۳۹) برای لبه‌های  $y = 0$  و  $y = b$  جایگذاری می‌شود. پس از مرتب‌سازی، یک دستگاه ۸ معادله (دولبه، هر لبه شامل ۴ معادله) با ۸ مجهول به فرم رابطه (۷۵) حاصل می‌شود.

$$\sum_{j=1}^8 R_{ij}^{(m)} c_j^{(m)} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, 8 \quad (75)$$

برای این‌که دستگاه معادلات (۷۵) دارای جواب غیر بدیهی باشد، لازم است که دترمینان ماتریس ضرایب برابر صفر قرار داده شود.

$$\det([R_{ij}^{(m)}]) = 0 \quad i, j = 1, 2, \dots, 8 \quad (76)$$

### ۳- محاسبه ضرایب تصحیح برشی

در این مقاله، به منظور اصلاح اثر شرط پیوستگی تنش‌های برشی میان لایه‌ها، از روش توسعه داده شده توسط هوانگ [۲۴] استفاده شده است. انرژی‌های کرنشی برشی عرضی برای پانل ساندویچی به صورت (۷۷-۷۸) به دست می‌آیند:

$$U_{S_{13}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 Q_{55}^{(k)} \int_{\psi^{(k)}} \gamma_{xz}^2 d\psi^{(k)} \quad (77)$$

$$U_{S_{23}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 Q_{44}^{(k)} \int_{\psi^{(k)}} \gamma_{yz}^2 d\psi^{(k)} \quad (78)$$

معادلات الاستیسیته سه‌بعدی بر حسب مولفه‌های تنش مطابق روابط (۷۹-۸۰) می‌باشند:

$$\sigma_{xx,x} + \tau_{xy,y} + \tau_{xz,z} = \rho \ddot{u}_1 \quad (79)$$

$$\tau_{xy,x} + \sigma_{yy,y} + \tau_{yz,z} = \rho \ddot{u}_2 \quad (80)$$

با توجه به معادلات (۷۹) و (۸۰)، تنش‌های برشی عرضی برای لایه‌های پانل ساندویچی به دست می‌آیند:

$$+(\xi_1\xi_9 + \xi_2\xi_8 - \xi_4^2)^{(m)} \frac{d^4 W_m(y)}{dy^4} + (\xi_2\xi_9 - \xi_3\xi_8 - 2\xi_4\xi_5)^{(m)} \frac{d^2 W_m(y)}{dy^2} + (\xi_3\xi_9 - \xi_5^2)^{(m)} W_m(y) \quad (66)$$

به طوری‌که ضرایب  $\xi_r^{(m)} (r = 1, 2, \dots, 12)$  در ضمیمه (ت) تعریف شده‌اند. ضرایب  $g_r^{(m)} (r = 1, 3, 5)$  نیز مطابق رابطه (۶۷) به دست می‌آیند.

$$\begin{Bmatrix} g_1 \\ g_3 \\ g_5 \end{Bmatrix}^{(m)} = \begin{Bmatrix} \xi_5\xi_{10} - \xi_7\xi_9 \\ \xi_4\xi_{10} - \xi_6\xi_9 - \xi_7\xi_8 \\ -\xi_6\xi_8 \end{Bmatrix}^{(m)} \quad (67)$$

پاسخ معادلات دیفرانسیل (۶۵) و (۶۶) به ترتیب مطابق روابط (۶۸) و (۶۹) تقریب زده شده‌اند [۲۵]:

$$Z_m(y) = [\bar{c}_1 \dots \bar{c}_8]^{(m)} \begin{Bmatrix} e^{\lambda_{1y}} \\ \vdots \\ e^{\lambda_{8y}} \end{Bmatrix}^{(m)} \quad (68)$$

$$\Psi_m(y) = [\bar{c}_1 \dots \bar{c}_8]^{(m)} \begin{Bmatrix} e^{\lambda_{1y}} \\ \vdots \\ e^{\lambda_{8y}} \end{Bmatrix}^{(m)} \quad (69)$$

از جایگذاری روابط (۶۳)، (۶۸) و (۶۹) در معادلات (۶۵) و (۶۶)، ضرایب  $\bar{c}_r^{(m)}$  و  $\bar{c}_r^{(m)}$  به ترتیب مطابق روابط (۷۰) و (۷۱) بر حسب ضرایب  $c_r^{(m)} (r = 1, 2, \dots, 8)$  تعیین می‌شوند.

$$[\bar{c}_1 \dots \bar{c}_8]^{(m)} [G]^{(m)} = [c_1 \dots c_8]^{(m)} [A]^{(m)} \quad (70)$$

$$[\bar{c}_1 \dots \bar{c}_8]^{(m)} [A]^{(m)} [G]^{(m)} = [c_1 \dots c_8]^{(m)} [B]^{(m)} \quad (71)$$

به طوری‌که ماتریس‌های [G]، [A] و [B]، ماتریس‌های مربعی  $8 \times 8$  بوده که به صورت روابط (۷۲) تا (۷۴) تعریف می‌شوند.

$$[G]^{(m)} = g_5^{(m)} [\Lambda]^{(m)^4} + g_3^{(m)} [\Lambda]^{(m)^2} + g_1^{(m)} [I] \quad (72)$$

$$[A]^{(m)} = (\xi_4\xi_6 - \xi_1\xi_{10})^{(m)} [\Lambda]^{(m)^4} + (\xi_4\xi_7 + \xi_5\xi_6 - \xi_2\xi_{10})^{(m)} [\Lambda]^{(m)^2} + (\xi_5\xi_7 - \xi_3\xi_{10})^{(m)} [I] \quad (73)$$

$$[B]^{(m)} = (\xi_1\xi_8)^{(m)} [\Lambda]^{(m)^6} + (\xi_1\xi_9 + \xi_2\xi_8 - \xi_4^2)^{(m)} [\Lambda]^{(m)^4}$$

#### ۴-۱- اعتبارسنجی نتایج عددی

ابتدا در جدول ۲، با استفاده از تئوری تغییر شکل برشی مرتبه سوم ردی فرکانس طبیعی بی‌بعد  $\tilde{\omega}$  پنج مود اول برای ورق مربعی ایزوتروپیک با نسبت ضخامت به طول ۰/۱ دارای شرایط مرزی لوی محاسبه شده و نتایج به‌دست آمده با پاسخ مقاله‌های حسینی هاشمی و ارسنجانی [۲۶] (دقیق مبتنی بر تئوری مرتبه اول میندلین) و حسینی هاشمی و همکاران [۲۷] (دقیق مبتنی بر تئوری مرتبه سوم ردی) مقایسه شده است. ورق از جنس آلومینیوم بوده و خواص آن مطابق جدول ۱ است. نتایج جدول ۲ حاکی از دقت مناسب و کارایی روش حل حاضر برای ورق نسبتاً ضخیم است.

جدول ۱- خواص ورق آلومینیومی

$E_0(GPa)$	$\nu_0$	$\rho_0(kg/m^3)$
۶۹	۰/۳	۲۷۰۰

در ادامه در جدول ۳، شش فرکانس طبیعی یک پانل ساندویچی لانه‌زنبوری دارای شرایط مرزی SSSS با استفاده از تئوری‌های ردی و بهبود یافته ردی محاسبه شده و با نتایج کارهای راویله و ونگ [۲۸] (تجربی) و راتو و دسائی [۲۹] (تئوری‌های لایه‌ای و تک لایه معادل) مقایسه شده است. طول و عرض پانل ساندویچی به ترتیب برابر ۱/۸۲۸۸ متر و ۱/۲۱۹۲ متر و ضخامت کل پانل و ضخامت هسته به ترتیب برابر ۷/۱۶۲۸ میلی‌متر و ۶/۳۵ میلی‌متر بوده و مدول یانگ، ضریب پواسون و چگالی آلومینیوم به‌کار رفته نیز به ترتیب برابر ۶۸/۹۴۸ GPa، ۰/۳۳ و ۲۷۶۸ kg/m<sup>3</sup> می‌باشند. برای هسته لانه‌زنبوری نیز مقادیر مدول‌های برشی  $G_{23}^{(2)}$  و  $G_{13}^{(2)}$  به ترتیب برابر ۱۳۴/۴۵ MPa و ۵۱/۷۱ MPa و چگالی نیز برابر ۱۲۱/۸۳ kg/m<sup>3</sup> است؛ همچنین به‌منظور سازگاری با مراجع، سفتی‌های نرمال و برشی درون‌صفحه‌ای برابر صفر در نظر گرفته شده‌اند. مطابق جدول ۳، تطابق خوبی بین نتایج به‌دست آمده با روش ارائه شده در این مقاله و سایر مقالات وجود دارد. علاوه بر این مشاهده می‌شود که تئوری بهبود یافته ردی همراه با ضرایب تصحیح برشی، به‌ازاء شش مود اول نتایجی بسیار نزدیک به تئوری لایه‌ای را پیش‌بینی می‌نماید.

$$\hat{t}_{xz}^{(k)} = \int_{z_{k-1}}^z (\rho^{(k)} \ddot{u}_1 - \sigma_{xx,x}^{(k)} - \tau_{xy,y}^{(k)}) dz + \hat{t}_{xz}^{(k-1)} \quad (۸۱)$$

$$\hat{t}_{yz}^{(k)} = \int_{z_{k-1}}^z (\rho^{(k)} \ddot{u}_2 - \tau_{xy,x}^{(k)} - \sigma_{yy,y}^{(k)}) dz + \hat{t}_{yz}^{(k-1)} \quad (۸۲)$$

به‌طوری‌که علامت (\*) بیانگر مقادیری است که از معادلات الاستیسیته سه‌بعدی به‌دست آمده‌اند. با توجه به معادلات (۸۱) و (۸۲)، انرژی‌های کرنشی به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$\hat{U}_{S_{13}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \frac{1}{Q_{55}^{(k)}} \int_{\psi^{(k)}} \hat{t}_{xz}^{(k)2} dV^{(k)} \quad (۸۳)$$

$$\hat{U}_{S_{23}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 \frac{1}{Q_{44}^{(k)}} \int_{\psi^{(k)}} \hat{t}_{yz}^{(k)2} dV^{(k)} \quad (۸۴)$$

ضرایب تصحیح برشی  $K_{23}$  و  $K_{13}$  به‌ترتیب با مقایسه روابط (۷۷) با (۸۳) و (۷۸) با (۸۴) به‌دست می‌آیند. با این وجود به‌علت تأثیر قابل توجه این ضرایب روی فرکانس‌های طبیعی، در این مقاله از یک فرآیند تکراری (مطابق روابط (۸۵) و (۸۶)) برای تعیین ضرایب تصحیح برشی پانل ساندویچی با هسته آگرتیک استفاده شده است. در این روابط  $i$  شمارنده تکرار است. این فرآیند تا حصول همگرایی مطلوب تکرار می‌شود.

$$K_{13}^{i+1} = \frac{U_{S_{13}}^i}{\hat{U}_{S_{13}}^i} \quad (۸۵)$$

$$K_{23}^{i+1} = \frac{U_{S_{23}}^i}{\hat{U}_{S_{23}}^i} \quad (۸۶)$$

#### ۴- اعتبارسنجی و بحث و بررسی نتایج عددی

در این بخش نتایج حاصل از تحلیل ارتعاشات آزاد پانل ساندویچی با هسته آگرتیک ارائه شده است. در ادامه به‌منظور حذف اثر جنس ماده اصلی، به‌جای فرکانس طبیعی، پارامتر فرکانس طبیعی بی‌بعد به‌صورت رابطه (۸۷) محاسبه شده است [۲۵]:

$$\tilde{\omega} = \omega \frac{a^2}{h} \sqrt{\frac{12\rho_0(1-\nu_0^2)}{E_0}} \quad (۸۷)$$



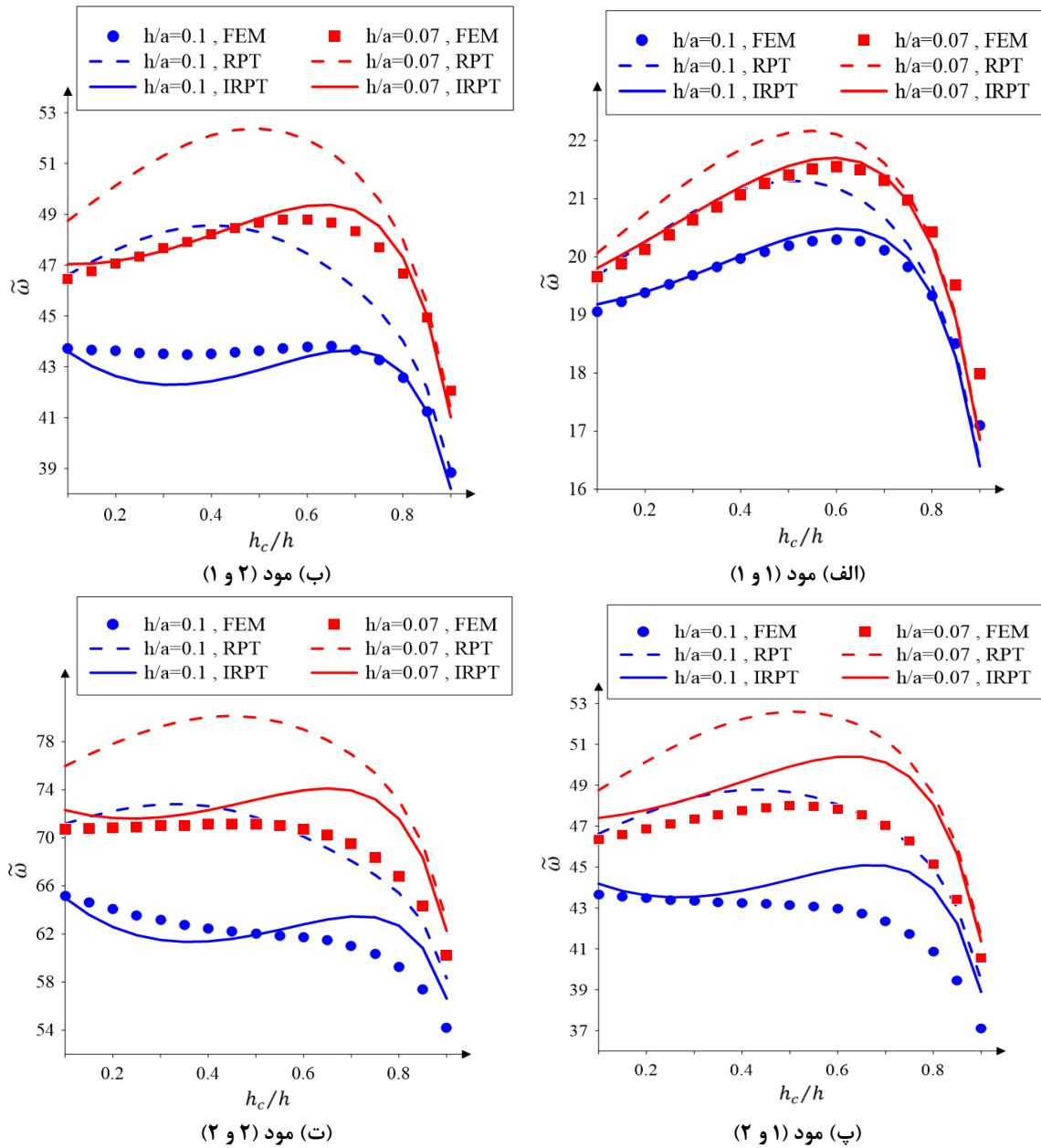
جدول ۲- مقایسه فرکانس طبیعی بی بعد پنج مود اول ورق مربعی ایزوتروپیک با نسبت ضخامت ۰/۱

شرایط مرزی	روش حل	مود ۱	مود ۲	مود ۳	مود ۴	مود ۵
	حل دقیق، تئوری میندلین [۲۶]	۱۹/۰۸۴	۴۵/۵۸۴۵	۴۵/۵۸۴۵	۷۰/۰۲۱۹	۸۵/۳۶۵۴
SSSS	حل دقیق، تئوری ردی [۲۷]	۱۹/۰۶۵۳	۴۵/۴۸۶۹	۴۵/۴۸۶۹	۶۹/۸۰۹۳	۸۵/۰۸۴۶
	کار حاضر، تئوری ردی	۱۹/۰۶۵۳	۴۵/۴۸۷	۴۵/۴۸۹۲	۶۹/۸۱۰۷	۸۵/۰۸۴۶
	حل دقیق، تئوری میندلین [۲۶]	۲۲/۴۲۶	۴۷/۲۲۴۵	۵۲/۳۲۴۷	۷۴/۴۰۱۹	۸۶/۲۱۹۱
SSSC	حل دقیق، تئوری ردی [۲۷]	۲۲/۴۰۱۸	۴۷/۱۳۰۶	۵۲/۲۳۲۴	۷۴/۲۲۵۲	۸۵/۹۳۱۹
	کار حاضر، تئوری ردی	۲۲/۳۱۲۴	۴۷/۰۶۶۴	۵۱/۹۹۸۳	۷۴/۰۴۶۷	۸۵/۱۹۰۱
	حل دقیق، تئوری میندلین [۲۶]	۲۶/۷۳۶۹	۴۹/۲۶۰۶	۵۹/۴۸۰۱	۷۹/۱۹۵۱	۸۷/۲۰۷۲
SCSC	حل دقیق، تئوری ردی [۲۷]	۲۶/۷۰۸۴	۴۹/۱۷۵۶	۵۹/۴۱۵۹	۷۹/۰۷۸۳	۸۶/۹۳۹۷
	کار حاضر، تئوری ردی	۲۶/۴۶۶۹	۴۹/۰۱۴۸	۵۸/۸۹۹۹	۷۸/۶۸۶	۸۶/۸۴۹۶
	حل دقیق، تئوری میندلین [۲۶]	۱۱/۳۸۱	۲۶/۱۹۱	۳۸/۳۶۱	۵۳/۳۸۵۲	۵۵/۷۶۲
SFSS	حل دقیق، تئوری ردی [۲۷]	۱۱/۳۷۳۷	۲۶/۱۵۷۶	۳۸/۲۹۰۴	۵۳/۲۵۷۵	۵۵/۶۳۴۶
	کار حاضر، تئوری ردی	۱۱/۶۱۵۱	۲۷/۵۵	۳۸/۴۷۲۲	۵۳/۹۲۳۳	۵۷/۹۸۶۴
	حل دقیق، تئوری میندلین [۲۶]	۹/۴۴۵۸	۱۵/۴۰۵۴	۳۳/۹۱۶	۳۶/۴۲۴۶	۴۲/۸۸۷
SFSF	حل دقیق، تئوری ردی [۲۷]	۹/۴۴۱۷	۱۵/۳۹۱۵	۳۳/۸۶۷۵	۳۶/۳۴۸۵	۴۲/۸۰۰۶
	کار حاضر، تئوری ردی	۹/۵۱۸۹۴	۱۶/۵۶۲۱	۳۷/۲۶۷۴	۳۶/۴۷۷۷	۴۳/۴۱۴۳
	حل دقیق، تئوری میندلین [۲۶]	۱۲/۲۶۰۶	۳۰/۴۷۴۳	۳۸/۷۱۲۸	۵۵/۹۷۳۶	۶۲/۹۵۲۷
SFSC	حل دقیق، تئوری ردی [۲۷]	۱۲/۲۵۱۹	۳۰/۴۳۷۲	۳۸/۶۴۲۵	۵۵/۸۵۶۵	۶۲/۸۴۸۱
	کار حاضر، تئوری ردی	۱۲/۵۸۳۲	۳۱/۹۷۵۲	۳۸/۸۳۷۱	۵۶/۵۳۹۶	۶۵/۰۲۷۵

جدول ۳- مقایسه فرکانسی طبیعی (هرتز) شش مود اول پانل ساندویچی لانه زنبوری با شرایط مرزی چهار طرف تکیه گاه ساده

مرجع	مود ۱	مود ۲	مود ۳	مود ۴	مود ۵	مود ۶
نتایج تجربی [۲۸]	-	۴۵	۶۹	۷۸	۹۲	۱۲۵
تئوری لایه ای [۲۹]	۲۳/۳۶	۴۴/۷۷	۷۰/۵۵	۸۰/۱۶	۹۱/۴۲	۱۲۵/۹۴
تئوری تک لایه معادل [۲۹]	۲۳/۲۵	۴۴/۶۱	۷۰/۷۷	۷۹/۹۷	۹۱/۷۸	۱۲۶/۵۹
کار حاضر، تئوری ردی	۲۳/۴۶۴۲	۴۵/۰۳۸۷	۷۱/۷۱۷۵	۸۰/۸۱۷	۹۳/۰۶	۱۲۸/۴۵۷
کار حاضر، تئوری بهبود یافته (۰/۳۴۷ و ۰/۵۶۵)*	۲۳/۳۵۶۴	۴۴/۷۷۰۴	۷۰/۵۳۷۹	۸۰/۱۵۴۶	۹۱/۴۱۵۷	۱۲۵/۹۲۹

\* اعداد داخل پرانتز به ترتیب از چپ بیانگر  $K_{13}$  و  $K_{23}$  هستند.

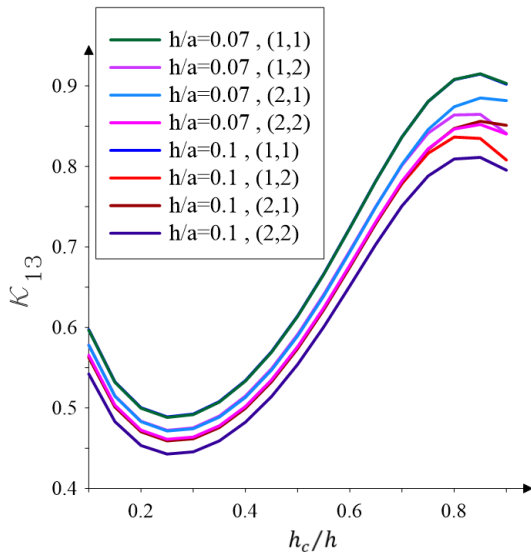


شکل ۳- منحنی تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد پانل ساندویچی آگرتیک دارای شرایط مرزی SSSS برحسب نسبت  $h_c/h$

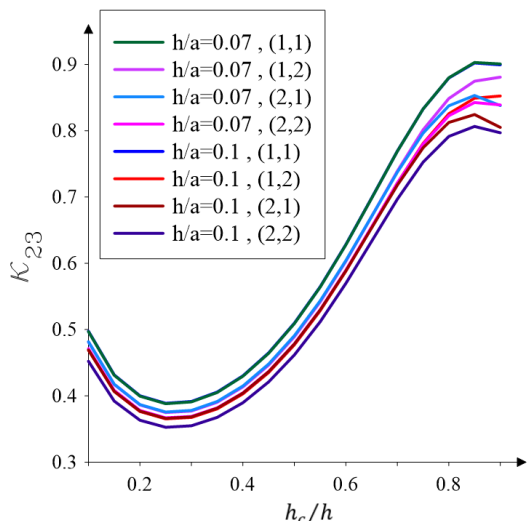
بهبودیافته ردی (IRPT) رسم و مقایسه شده‌اند. به‌منظور حل از روش اجزاء محدود از نرم افزار *Ansys* استفاده شده و المان‌های به‌کار رفته از نوع المان ۱۰ گره‌ای *Solid 187* هستند. سازه در نظر گرفته شده، یک پانل ساندویچی مربعی سه لایه شامل، رویه‌های آلومینیومی و هسته لانه‌زنبوری آگرتیک از جنس همان آلومینیوم رویه‌ها است. طول ورق

علاوه بر این‌ها، در شکل ۳، برای پانل ساندویچی با هسته لانه‌زنبوری آگرتیک دارای شرایط مرزی SSSS، منحنی‌های تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد چهار مود اول برحسب نسبت ضخامت هسته به ضخامت کل پانل، به‌ازاء دو مقدار مختلف  $0.1$  و  $0.07$  برای نسبت ضخامت به طول پانل، با استفاده از روش اجزاء محدود، تئوری مرتبه سوم ردی (RPT) و تئوری

بازه ۰/۱ تا ۰/۲۵ (پانل‌هایی با جنبه کاربردی پایین) کاهش یافته و پس از آن افزایش می‌یابند؛ با این وجود، این ضرایب به‌ازاء مقادیر بیشتر از ۰/۸۵ برای نسبت  $h_c/h$  کاهش می‌یابند. همچنین افزایش نسبت  $h/a$  و شماره مود اثری کاهشی روی این ضرایب دارند.



شکل ۴- منحنی تغییرات  $K_{13}$  مودهای مختلف پانل ساندویچی آگزتیک دارای شرایط مرزی SSSS با دو نسبت مختلف  $h/a$  بر حسب نسبت  $h_c/h$



شکل ۵- منحنی تغییرات  $K_{23}$  مودهای مختلف پانل ساندویچی آگزتیک دارای شرایط مرزی SSSS با دو نسبت مختلف  $h/a$  بر حسب نسبت  $h_c/h$

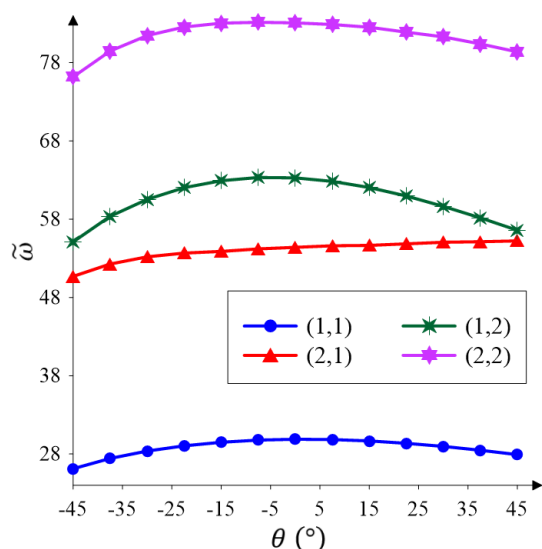
مربعی ۱ متر و پارامترهای هندسی سلول شش ضلعی درون‌رو شامل، زاویه سلول و نسبت‌های  $d/l$ ،  $l/a$  و  $t/l$  به‌ترتیب ۳۰-درجه، ۰/۱، ۲ و ۰/۰۵ می‌باشند. از شکل ۳ مشاهده می‌شود که تئوری بهبودیافته مرتبه سوم ردی، نتایجی نزدیک‌تر به روش اجزاء محدود ارائه داده، تئوری مرتبه سوم ردی نمی‌تواند نتایج قابل قبولی را برای پانل‌های ساندویچی با هسته لانه‌زنبوری آگزتیک ارائه کند. به‌عنوان مثال زمانی که نسبت‌های  $h/a$  و  $h_c/h$  به‌ترتیب برابر ۰/۰۷ و ۰/۵ باشند، مقادیر درصد خطای نسبی بین نتایج حاصل از تئوری مرتبه سوم ردی و روش اجزاء محدود برای مودهای (۱و۱)، (۱و۲)، (۲و۱) و (۲و۲) به‌ترتیب برابر با ۳/۳۷٪، ۷/۶۱٪، ۹/۶۲٪ و ۱۲/۴۸٪ می‌باشند، به‌طوری‌که در همین حالت درصد خطای نسبی بین نتایج حاصل از تئوری بهبودیافته مرتبه سوم ردی و روش اجزاء محدود برای چهار مود اول به‌ترتیب برابر با ۰/۱۷۱٪، ۰/۹۳٪، ۴/۴۹٪ و ۴/۰۳٪ هستند. یکی از دلایل این امر، این است که تئوری مرتبه سوم ردی، یک توزیع پیوسته تکه‌ای برای تنش برشی عرضی در راستای ضخامت را در نظر گرفته که نمی‌تواند منجر به ارائه نتایج دقیق شود. همین‌طور از نتایج ارائه شده در شکل ۳ می‌توان نتیجه گرفت که فرکانس بی‌بعد مود اول با افزایش نسبت  $h_c/h$  تا مقداری مشخص، افزایش یافته و پس از آن با شیب تندی کاهش می‌یابد. به‌طوری‌که مقدار بیشینه آن در بازه ۰/۵۵ تا ۰/۶۵ برای این نسبت، رخ می‌دهد. همین‌طور با توجه به منحنی‌های مربوط به تئوری بهبودیافته ردی برای نسبت ضخامت ۰/۱، مشاهده می‌شود که فرکانس بی‌بعد مودهای دوم تا چهارم بر حسب نسبت  $h_c/h$  روندی نزولی-صعودی-نزولی دارند. بعلاوه مشاهده می‌شود که با افزایش نسبت  $h/a$  فرکانس طبیعی مودهای مختلف افزایش می‌یابند.

#### ۴-۲- اثرات نسبت ضخامت بر ضرایب تصحیح برشی

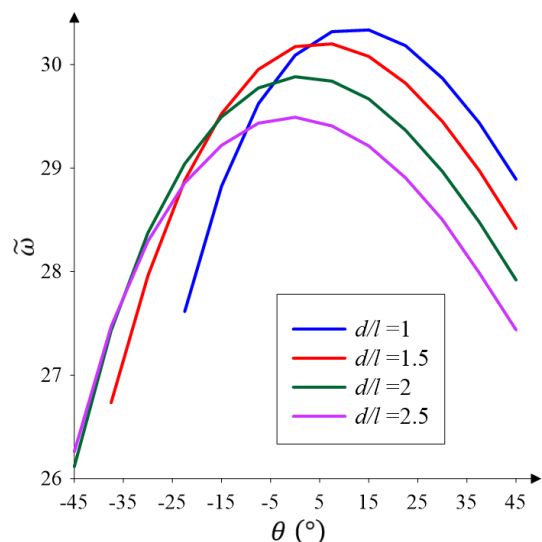
منحنی‌های تغییرات ضرایب تصحیح برشی  $K_{13}$  و  $K_{23}$  بر حسب نسبت ضخامت هسته به ضخامت کل پانل، به‌ازاء دو مقدار مختلف ۰/۰۷ و ۰/۱ برای نسبت نسبت ضخامت به طول پانل، به‌ترتیب در شکل‌های ۴ و ۵ نمایش داده شده‌اند. سایر خواص پانل ساندویچی مطابق فرضیات شکل ۳ موجود در قسمت قبل در نظر گرفته شده‌اند. از شکل‌های ۴ و ۵ مشاهده می‌شود که این ضرایب با افزایش نسبت  $h_c/h$  در

پانل ساندویچی با هسته شش‌ضلعی درون‌رو نسبت به هسته با ساختار شش‌ضلعی معمولی است.

در شکل ۸، منحنی‌های تغییرات پارامتر فرکانسی بی‌بعد پانل ساندویچی آگزتیک دارای شرایط مرزی SCSC بر حسب



شکل ۵- تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد مودهای مختلف پانل ساندویچی آگزتیک دارای شرایط مرزی SCSC بر حسب زاویه سلول



شکل ۶- تغییرات فرکانس طبیعی پایه بی‌بعد پانل ساندویچی آگزتیک دارای شرایط مرزی SCSC با نسبت‌های مختلف  $d/l$  بر حسب زاویه سلول

### ۳-۴ اثر پارامترهای هندسی سلول شش‌ضلعی درون‌رو بر فرکانس‌های طبیعی

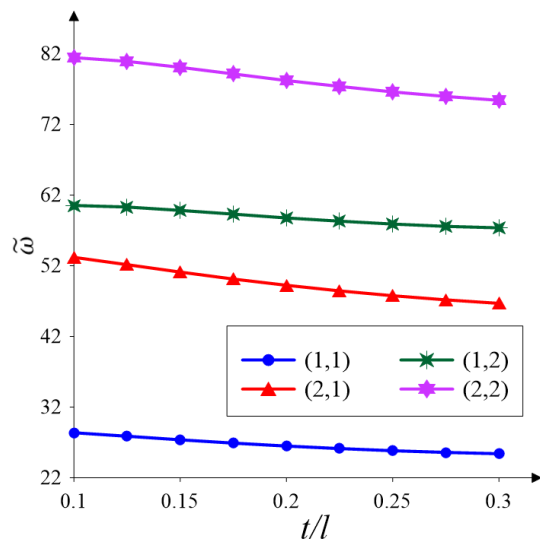
در این قسمت با استفاده از تئوری بهبودیافته تغییر شکل برشی مرتبه سوم ردی فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد پانل ساندویچی سه لایه با هسته لانه‌زنبوری آگزتیک ارائه شده است. در این قسمت، خواص مادی با توجه به جدول ۱ و خواص هندسی به جز پارامترهای مورد بررسی مطابق جدول ۴ در نظر گرفته شده‌اند.

شکل ۶، منحنی تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد چهار مود اول پانل ساندویچی آگزتیک بر حسب زاویه سلول را نمایش می‌دهد. همان‌گونه که مشاهده می‌شود، برای مودهای اول، سوم و چهارم، با پایین آمدن زاویه منفی سلول و تبدیل شدن ساختار هسته به شش‌ضلعی معمولی، فرکانس بی‌بعد تا زاویه‌ای مشخص افزایش و پس از آن کاهش می‌یابد؛ به طوری که مقدار بیشینه این فرکانس‌ها در محدوده ۵- تا ۱۰+ درجه رخ می‌دهند. همین‌طور مشاهده می‌شود که شیب تغییرات مودهای سوم و چهارم بیشتر از مود اول است. برای مود دوم نیز مشاهده می‌شود که با کاهش زاویه منفی سلول، فرکانس بی‌بعد با شیب کمی افزایش می‌یابد.

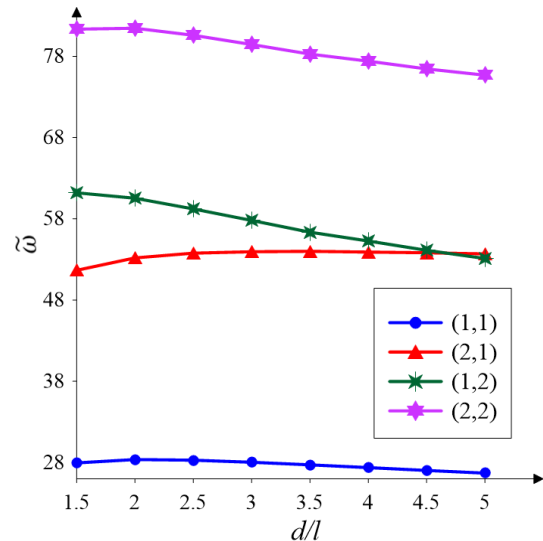
در پانل‌های ساندویچی آگزتیک، افزایش نسبت  $d/l$  تا مقدار ۲، تا قبل از زاویه‌ای مشخص (۱۵- درجه) موجب افزایش فرکانس و همین‌طور کاهش دامنه تغییرات فرکانس بر حسب زاویه سلول می‌شود که این روند را می‌توان در شکل ۷ برای شرایط مرزی SCSC مشاهده کرد؛ همچنین مشاهده می‌شود که افزایش این نسبت در ساختار شش‌ضلعی معمولی برای بعد از زاویه‌ای مشخص (۵+ درجه)، نتیجه‌ای عکس آنچه ذکر شد را به دست می‌دهد. با این وجود در محدوده ۱۵- تا ۵+ نمی‌توان روندی قطعی را مشخص کرد. علاوه بر این مشاهده می‌شود که با پایین آمدن زاویه منفی سلول، فرکانس طبیعی پایه در ابتدا افزایش و سپس کاهش می‌یابد؛ به طوری که در محدوده ۰ تا ۱۰+ درجه، مقدار فرکانس طبیعی بیشینه است که این امر حاکی از انعطاف‌پذیرتر بودن

جدول ۴- خواص هندسی در نظر گرفته شده

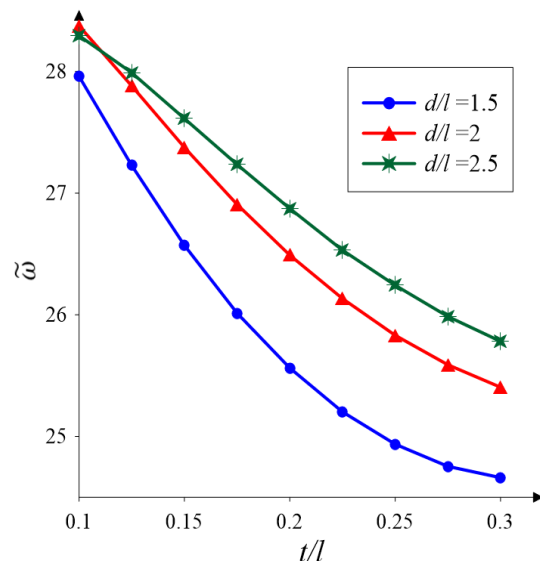
هندسه سلول درون‌رو				هندسه کل پانل			
$t/l$	$d/l$	$l/a$	$\theta(^{\circ})$	$h_c/h$	$h/a$	$b/a$	$a$ (m)
۰/۱	۲	۰/۱	-۳۰	۰/۷	۰/۰۷	۱	۱



شکل ۹- تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد مودهای مختلف پانل ساندویچی آگزتیک دارای شرایط مرزی SCSC بر حسب نسبت  $t/l$



شکل ۸- تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد مودهای مختلف پانل ساندویچی آگزتیک دارای شرایط مرزی SCSC بر حسب نسبت  $d/l$



شکل ۱۰- تغییرات فرکانس طبیعی پایه بی‌بعد پانل ساندویچی آگزتیک دارای شرایط مرزی SCSC با نسبت‌های مختلف  $t/l$  بر حسب نسبت  $d/l$

حالی که به‌ازاء مقادیر کمتر از ۲ برای این نسبت، مقدار کاهش فرکانس بیشتر است؛ همچنین مشاهده می‌شود که با کاهش نسبت  $d/l$ ، شیب تغییرات فرکانس بر حسب نسبت  $t/l$ ، افزایش می‌یابد.

نسبت  $d/l$  و به‌ازاء چهار مود اول رسم شده است. از شکل ۸ مشخص است که با افزایش نسبت  $d/l$ ، فرکانس طبیعی مودهای اول و چهارم روندی صعودی-نزولی و مود سوم روندی کاملاً نزولی دارد؛ به‌گونه‌ای که کمترین و بیشترین شیب قسمت نزولی منحنی‌ها به‌ترتیب مربوط به مودهای (۱و۱) و (۲و۲) می‌باشند. همین‌طور برای مود (۲و۱) مشاهده می‌شود که با افزایش نسبت  $d/l$ ، فرکانس این مود ارتعاشی با شیب نسبتاً زیادی افزایش می‌یابد. به‌گونه‌ای که بیشترین شیب افزایش فرکانس در محدوده  $\frac{d}{l} < 2$  است.

شکل ۹، منحنی تغییرات فرکانس طبیعی بی‌بعد چهار مود اول پانل ساندویچی آگزتیک بر حسب نسبت  $t/l$  را نشان می‌دهد. از این شکل مشاهده می‌شود که نسبت  $t/l$  اثری کاهشی بر فرکانس مودهای مختلف دارد که این مسأله ناشی از کاهش سفتی ورق است؛ همچنین مشاهده می‌شود که منحنی‌های مربوط به مودهای (۲و۱) و (۲و۲) با شیب بیشتری کاهش می‌یابند.

شکل ۱۰، تغییرات فرکانس طبیعی پایه بی‌بعد پانل ساندویچی آگزتیک دارای شرایط مرزی SCSC به‌ازاء نسبت‌های مختلف  $d/l$  را بر حسب نسبت  $t/l$  نمایش می‌دهد. مشاهده می‌شود که با کاهش نسبت  $d/l$ ، به‌علت کاهش سفتی ورق، فرکانس طبیعی پایه کاهش می‌یابد؛ در

انبساطی جداره سلول‌ها و نیز در نظر گرفتن اثر نقاط موجود در محل تقاطع عضوهای مورب و افقی استفاده شده است. معادلات مشخصه فرکانسی بر حسب تمام شرایط مرزی ممکن در شرط مرزی لوی استخراج شده‌اند. با حل تحلیلی این معادلات، فرکانس‌های طبیعی بی‌بعد به‌دست آمده‌اند. پس از اعتبارسنجی با مقالات موجود در زمینه پژوهشی و نیز نرم افزار اجزاء محدود انسیس، اثرات پارامترهای هندسی پانل و سلول شش‌ضلعی درون‌رو روی فرکانس‌های طبیعی مورد بررسی قرار گرفته است.

مهم‌ترین نتایج حاصل از این پژوهش به‌صورت مختصر و موردی عبارتند از:

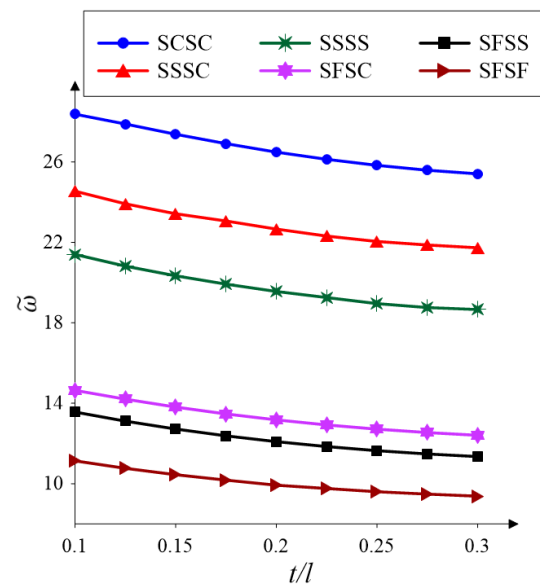
(۱) برای پانل ساندویچی با هسته آگزتیک، تئوری

مرتبه سوم ردی، یک توزیع پیوسته تکه‌ای برای تنش برشی عرضی در راستای ضخامت را در نظر می‌گیرد، به‌همین دلیل این تئوری قادر به ارائه نتایج دقیق برای چنین سازه‌هایی نمی‌باشد؛ درحالی‌که در تئوری بهبود یافته ردی از طریق محاسبه ضرایب تصحیح برشی، این نقیصه حداقل از لحاظ انرژی اصلاح شده و مطابق مطالب بیان شده در قسمت اعتبارسنجی این مقاله، در کاهش خطا کاملاً موثر بوده و نتایجی نزدیک‌تر به پاسخ‌های واقعی ارائه می‌دهد.

(۲) منحنی‌های تغییرات ضرایب تصحیح برشی  $K_{13}$  و  $K_{23}$  بر حسب نسبت ضخامت هسته به ضخامت کل پانل، روندی نزولی-صعودی-نزولی را نشان داده، به‌طوری‌که قسمت نزولی ابتدایی به‌ازاء مقادیر خیلی کم نسبت  $h_c/h$  بوده و برای کاربردهای واقعی‌تر پانل، می‌توان این منحنی‌ها را صعودی-نزولی در نظر گرفت. همچنین این ضرایب با افزایش نسبت  $h/a$  و شماره مود، کاهش می‌یابند.

(۳) در بررسی نمودارهای مربوطه مشاهده شد که منحنی‌های تغییرات فرکانس برای مود اول روندی صعودی-نزولی، و در پانل‌های ضخیم‌تر برای مودهای بالاتر روندی نزولی-صعودی-نزولی را بر حسب نسبت  $h_c/h$  نشان می‌دهند.

در شکل ۱۱، منحنی‌های تغییرات فرکانس پایه بی‌بعد بر حسب نسبت  $t/l$  برای شرایط مرزی مختلف نوع لوی برای پانل ساندویچی آگزتیک رسم شده است. مشابه نتایج ارائه شده در شکل‌های ۹ و ۱۰، از شکل ۱۱ مشخص است که نسبت  $t/l$  اثری کاهشی روی پارامتر فرکانسی دارد و این بدان معنی است که نسبت  $t/l$  پانل ساندویچی آگزتیک را انعطاف‌پذیرتر می‌کند. از طرفی دیگر مشاهده می‌شود که این اثر کاهشی، برای پانل‌هایی بیشتر است که دارای شرایط مرزی مقیدتر باشند. به‌عبارتی کمترین و بیشترین اثر کاهشی نسبت  $t/l$ ، به‌ترتیب برای پانل ساندویچی با شرایط مرزی SFSF و SCSC است.



شکل ۱۱- تغییرات فرکانس طبیعی پایه بی‌بعد پانل ساندویچی آگزتیک بر حسب نسبت  $t/l$  برای شرایط مرزی مختلف

## ۵- نتیجه‌گیری

در این پژوهش به بررسی ارتعاشات آزاد پانل ساندویچی با هسته لانه‌زنبوری آگزتیک با استفاده از تئوری بهبود یافته تغییرشکل برشی مرتبه سوم ردی همراه با ضرایب تصحیح برشی پرداخته شده است. به‌طوری‌که برای تعیین این ضرایب از یک فرآیند تکراری تا رسیدن به همگرایی مطلوب استفاده شده است؛ همچنین به‌منظور تعیین خواص موثر هسته، از جدیدترین مدل اصلاح شده گیبسون براساس تئوری تیر تیموشنکو و با در نظر گرفتن تغییرشکل‌های خمشی و

بیشتر است. همین‌طور با بررسی نمودار مربوطه مشاهده شده که هر چه نسبت  $d/l$  کمتر باشد، اثر کاهشی  $t/l$  نیز بیشتر خواهد بود.

(۷) روابط اصلاح شده گیبسون، از نسبت  $l/a$  مستقل بوده، لذا این نسبت تأثیری روی فرکانس‌های طبیعی ندارد.

(۸) روش تحلیلی مورد استفاده ابزاری کارآمد و آسان برای تحلیل ارتعاشات آزاد عرضی ورق‌های ارتوتروپیک دارای شرایط مرزی لوی است. نتایج حاصل از اعتبارسنجی نشان داد که این روش با روش‌های دقیق موجود در مقالات منتشر شده قبلی و نیز روش اجزاء محدود، تطابق مناسبی دارد.

#### ۶- ضمایم

##### ۶-۱- ضمیمه (الف)

خواص موثر هسته لانه‌زنبوری آگرتیک مطابق جدیدترین مدل اصلاح شده گیبسون بر اساس تئوری تیر تیموشنکو و با در نظر گرفتن اثر نقاط موجود در محل تقاطع عضوهای مورب و افقی، به‌صورت روابط زیر محاسبه می‌شوند [۹]:

$$E_{11}^{(2)} = E_0 \frac{\left(\frac{d}{l} + \sin\theta\right) \sec^3\theta}{\left(\frac{l_b}{2t}\right)^3 \left[1 + \left(\frac{2t}{l_b}\right)^2 (2.4 + 1.5\nu_0 + \tan^2\theta + 2\frac{d_b}{l_b} \sec^2\theta)\right]} \quad \text{(الف-۱)}$$

$$E_{22}^{(2)} = E_0 \frac{\cos\theta}{\left(\frac{d}{l} + \sin\theta\right) \left(\frac{l_b}{2t}\right)^3 \sin^2\theta \left[1 + \left(\frac{2t}{l_b}\right)^2 (2.4 + 1.5\nu_0 + \cot^2\theta)\right]} \quad \text{(الف-۲)}$$

$$G_{12}^{(2)} = E_0 \frac{2t}{l_b} \left(\frac{2t}{d_b}\right)^2 \left(\frac{d}{l} + \sin\theta\right) \sec\theta \bar{G} \quad \text{(الف-۳)}$$

به‌طوری‌که

$$\bar{G} = 1 + 2\frac{d_b}{l_b} + \left(\frac{2t}{d_b}\right)^2 \left[\frac{d_b}{l_b} (2.4 + 1.5\nu_0) \left(2 + \frac{d}{l} + \sin\theta\right) + \left(\frac{d}{l} + \sin\theta\right) \left[\left(\frac{d}{l} + \sin\theta\right) \tan^2\theta + \sin^2\theta\right]\right] \quad \text{(الف-۴)}$$

$$G_{13}^{(2)} = G_0 \frac{\frac{2t}{l} \left[\frac{d_b}{2l} + \frac{l_b}{l} \sin^2\theta + \frac{3t}{2l} \tan\theta - \frac{t}{l} (2\sin\theta - 1) \sin\theta \tan\theta\right]}{\cos\theta \left(\frac{d}{l} + \sin\theta\right)} \quad \text{(الف-۵)}$$

(۴) پایین آمدن زاویه منفی سلول، تأثیری متفاوت روی فرکانس طبیعی موده‌های مختلف می‌گذارد.

به‌طوری‌که برای موده‌های اول، سوم و چهارم منجر به روندی صعودی-نزولی و برای مود دوم منجر به روند صعودی با شیب نسبتاً کم می‌شود؛ البته روندهای گفته شده، به‌طور قابل توجهی به مقدار نسبت  $d/l$  وابسته هستند؛ همچنین این فرکانس‌ها برای زاویه سلول بین ۵- تا ۱۰+ درجه بیشینه می‌شود که این امر حاکی از انعطاف‌پذیرتر بودن هسته با ساختار لانه‌زنبوری درون‌رو نسبت به ساختار لانه‌زنبوری معمولی است.

(۵) از بررسی نمودار منحنی‌های تغییرات فرکانس طبیعی چهار مود اول بر حسب نسبت  $d/l$ ، مشاهده شد که این منحنی‌ها برای موده‌های ارتعاشی اول و چهارم روندی صعودی-نزولی، برای مود سوم روندی نزولی و برای مود دوم روندی صعودی را نشان می‌دهند؛ به‌طوری‌که شیب تغییرات موده‌های دوم و سوم نسبتاً زیاد است.

(۶) بالا رفتن نسبت  $t/l$  در سلول درون‌رو، منجر به کاهش سفتی پانل ساندویچی و در نتیجه کاهش فرکانس‌های طبیعی آن می‌شود، به‌طوری‌که این اثر کاهشی برای موده‌های دارای دو نیم‌موج در راستای طولی و نیز برای شرایط مرزی مقیدتر

$$G_{23}^{(2)} = G_0 \frac{\frac{2t}{l} \left[ \frac{l_b}{l} \cos^2 \theta + \frac{3t}{2l} \tan \theta - \frac{t}{l} (2 \sin \theta - 1) \cos \theta \right]}{\cos \theta \left( \frac{d}{l} + \sin \theta \right)} \quad (\text{الف-۶})$$

$$v_{12}^{(2)} = \frac{\left( \frac{d}{l} + \sin \theta \right) \sin \theta \sec^2 \theta \left[ 1 + \left( \frac{2t}{l_b} \right)^2 (1.4 + 1.5v_0) \right]}{1 + \left( \frac{2t}{l_b} \right)^2 (2.4 + 1.5v_0 + \tan^2 \theta + 2 \frac{d_b}{l_b} \sec^2 \theta)} \quad (\text{الف-۷})$$

$$v_{21}^{(2)} = \frac{\cos \theta \cot \theta \left[ 1 + \left( \frac{2t}{l_b} \right)^2 (1.4 + 1.5v_0) \right]}{\left( \frac{d}{l} + \sin \theta \right) \left[ 1 + \left( \frac{2t}{l_b} \right)^2 (2.4 + 1.5v_0 + \cot^2 \theta) \right]} \quad (\text{الف-۸})$$

$$\rho^{(2)} = \rho_0 \left[ 1 - \frac{l_b \frac{d_b}{l} + \frac{l_b}{l} \sin \theta}{\frac{d}{l} + \sin \theta} \right] \quad (\text{الف-۹})$$

به طوری که در روابط فوق،  $l_b$  و  $d_b$  به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

$$l_b = l - t \sec \theta, \quad d_b = d - 2t \sec \theta (1 - \sin \theta) \quad (\text{الف-۱۰})$$

۲-۶- ضمیمه (ب)

$$\begin{Bmatrix} A_1, A_2, A_3 \\ B_1, B_2, B_3 \\ C_1, C_2, C_3 \\ D_1, D_2, D_3 \end{Bmatrix}^{(k)} = \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} Q_{11} \\ Q_{12} \\ Q_{22} \\ Q_{66} \end{Bmatrix}^{(k)} \{f(z)g(z), g^2(z), f^2(z)\} dz \quad (\text{ب-۱})$$

$$\begin{Bmatrix} E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6 \\ F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6 \end{Bmatrix}^{(k)} = \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} Q_{55} \\ Q_{44} \end{Bmatrix}^{(k)} \{1, g'(z), f'(z), g'^2(z), f'^2(z), f'(z)g'(z)\} dz \quad (\text{ب-۲})$$

۳-۶- ضمیمه (پ)

$$L_{11} = \sum_{k=1}^3 \left[ -A_2 \frac{\partial^4}{\partial x^4} - C_2 \frac{\partial^4}{\partial y^4} - 2(B_2 + 2D_2) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + (E_1 + 2E_2 + E_4) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (F_1 + 2F_2 + F_4) \frac{\partial^2}{\partial y^2} - I_1 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + I_2 \left( \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial t^2} \right) \right]^{(k)} \quad (\text{پ-۱})$$

$$L_{12} = \sum_{k=1}^3 \left[ -A_1 \frac{\partial^3}{\partial x^3} - (B_1 + 2D_1) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + (E_3 + E_6) \frac{\partial}{\partial x} + I_4 \frac{\partial^3}{\partial x \partial t^2} \right]^{(k)} = -L_{21} \quad (\text{پ-۲})$$

$$L_{13} = \sum_{k=1}^3 \left[ -C_1 \frac{\partial^3}{\partial y^3} - (B_1 + 2D_1) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + (F_3 + F_6) \frac{\partial}{\partial y} + I_4 \frac{\partial^3}{\partial y \partial t^2} \right]^{(k)} = L_{31} \quad (\text{پ-۳})$$



$$L_{22} = \sum_{k=1}^3 \left[ A_3 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + D_3 \frac{\partial^2}{\partial y^2} - I_3 \frac{\partial^2}{\partial t^2} - E_5 \right]^{(k)} \quad (۴-پ)$$

$$L_{23} = \sum_{k=1}^3 (B_3 + D_3)^{(k)} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} = -L_{32} \quad (۵-پ)$$

$$L_{33} = \sum_{k=1}^3 \left[ -D_3 \frac{\partial^2}{\partial x^2} - C_3 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + I_3 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + F_5 \right]^{(k)} \quad (۶-پ)$$

۴-۶- ضمیمه (ت)

$$L'_{11}{}^{(m)} = \sum_{k=1}^3 \left[ -A_2 \left( \frac{m\pi}{a} \right)^4 - C_2 \frac{d^4}{dy^4} + 2(B_2 + 2D_2) \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \frac{d^2}{dy^2} - (E_1 + 2E_2 + E_4) \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + (F_1 + 2F_2 + F_4) \frac{d^2}{dy^2} + I_1 \omega_m^2 + I_2 \omega_m^2 \left( \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 - \frac{d^2}{dy^2} \right) \right]^{(k)} = \xi_1^{(m)} \frac{d^4}{dy^4} + \xi_2^{(m)} \frac{d^2}{dy^2} + \xi_3^{(m)} \quad (۱-ت)$$

$$L'_{12}{}^{(m)} = L'_{21}{}^{(m)} = \sum_{k=1}^3 \left[ -A_1 \left( \frac{m\pi}{a} \right)^3 + (B_1 + 2D_1) \frac{m\pi}{a} \frac{d^2}{dy^2} - (E_3 + E_6) \frac{m\pi}{a} + I_4 \frac{m\pi}{a} \omega_m^2 \right]^{(k)} = \xi_4^{(m)} \frac{d^2}{dy^2} + \xi_5^{(m)} \quad (۲-ت)$$

$$L'_{13}{}^{(m)} = L'_{31}{}^{(m)} = \sum_{k=1}^3 \left[ -C_1 \frac{d^3}{dy^3} + (B_1 + 2D_1) \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \frac{d}{dy} + (F_3 + F_6) \frac{d}{dy} - I_4 \omega_m^2 \frac{d}{dy} \right]^{(k)} = \xi_6^{(m)} \frac{d^3}{dy^3} + \xi_7^{(m)} \frac{d}{dy} \quad (۳-ت)$$

$$L'_{22}{}^{(m)} = \sum_{k=1}^3 \left[ -A_3 \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 + D_3 \frac{d^2}{dy^2} + I_3 \omega_m^2 - E_5 \right]^{(k)} = \xi_8^{(m)} \frac{d^2}{dy^2} + \xi_9^{(m)} \quad (۴-ت)$$

$$L'_{23}{}^{(m)} = L'_{32}{}^{(m)} = \sum_{k=1}^3 (B_3 + D_3)^{(k)} \frac{m\pi}{a} \frac{d}{dy} = \xi_{10}^{(m)} \frac{d}{dy} \quad (۵-ت)$$

$$L'_{33}{}^{(m)} = \sum_{k=1}^3 \left[ D_3 \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 - C_3 \frac{d^2}{dy^2} - I_3 \omega_m^2 + F_5 \right]^{(k)} = \xi_{11}^{(m)} \frac{d^2}{dy^2} + \xi_{12}^{(m)} \quad (۶-ت)$$

۵-۶- ضمیمه (ث)

معادلات (۵۶) و (۵۷) را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$L'_{12}{}^{(m)} Z_m(y) + L'_{13}{}^{(m)} \Psi_m(y) = -L'_{11}{}^{(m)} W_m(y)$$

$$L'_{22}{}^{(m)} Z_m(y) + L'_{23}{}^{(m)} \Psi_m(y) = -L'_{21}{}^{(m)} W_m(y)$$

با اعمال قانون کرامر روی معادلات فوق، روابط زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{vmatrix} L'_{12} & L'_{13} \\ L'_{22} & L'_{23} \end{vmatrix} Z_m(y) = \begin{vmatrix} -L'_{11} W_m(y) & L'_{13} \\ -L'_{21} W_m(y) & L'_{23} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} L'_{11} & L'_{13} \\ L'_{21} & L'_{23} \end{vmatrix} W_m(y) \quad (1-ث)$$

$$\begin{vmatrix} L'_{12} & L'_{13} \\ L'_{22} & L'_{23} \end{vmatrix} \Psi_m(y) = \begin{vmatrix} L'_{12} & -L'_{11} W_m(y) \\ L'_{22} & -L'_{21} W_m(y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} L'_{11} & L'_{12} \\ L'_{21} & L'_{22} \end{vmatrix} W_m(y) \quad (2-ث)$$

با جایگذاری روابط (1-ث) و (2-ث) در معادله (58) می‌توان نتیجه گرفت:

$$\begin{aligned} & \left( L'_{31} + L'_{32} \frac{- \begin{vmatrix} L'_{11} & L'_{13} \\ L'_{21} & L'_{23} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} L'_{12} & L'_{13} \\ L'_{22} & L'_{23} \end{vmatrix}} + L'_{33} \frac{\begin{vmatrix} L'_{11} & L'_{12} \\ L'_{21} & L'_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} L'_{12} & L'_{13} \\ L'_{22} & L'_{23} \end{vmatrix}} \right) W_m(y) = 0 \\ \Rightarrow & \left( L'_{31} \begin{vmatrix} L'_{12} & L'_{13} \\ L'_{22} & L'_{23} \end{vmatrix} - L'_{32} \begin{vmatrix} L'_{11} & L'_{13} \\ L'_{21} & L'_{23} \end{vmatrix} + L'_{33} \begin{vmatrix} L'_{11} & L'_{12} \\ L'_{21} & L'_{22} \end{vmatrix} \right) W_m(y) = 0 \\ \Rightarrow & \begin{vmatrix} L'_{11} & L'_{12} & L'_{13} \\ L'_{21} & L'_{22} & L'_{23} \\ L'_{31} & L'_{32} & L'_{33} \end{vmatrix} W_m(y) = 0 \quad (3-ث) \end{aligned}$$

#### 6-6- ضمیمه (ج)

$$K_8^{(m)} = \xi_1^{(m)} \xi_8^{(m)} \xi_{11}^{(m)} - \xi_8^{(m)} \xi_6^{(m)2} \quad (1-ج)$$

$$\begin{aligned} K_6^{(m)} = & \xi_1^{(m)} (\xi_8 \xi_{12} + \xi_9 \xi_{11})^{(m)} + \xi_2^{(m)} \xi_8^{(m)} \xi_{11}^{(m)} + 2\xi_4^{(m)} \xi_6^{(m)} \xi_{10}^{(m)} - 2\xi_6^{(m)} \xi_7^{(m)} \xi_8^{(m)} \\ & - \xi_9^{(m)} \xi_6^{(m)2} - \xi_1^{(m)} \xi_{10}^{(m)2} - \xi_{11}^{(m)} \xi_4^{(m)2} \quad (2-ج) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_4^{(m)} = & \xi_1^{(m)} \xi_9^{(m)} \xi_{12}^{(m)} + \xi_2^{(m)} (\xi_8 \xi_{12} + \xi_9 \xi_{11})^{(m)} + \xi_3^{(m)} \xi_8^{(m)} \xi_{11}^{(m)} + 2\xi_{10}^{(m)} (\xi_4 \xi_7 + \xi_5 \xi_6)^{(m)} \\ & - \xi_8^{(m)} \xi_7^{(m)2} - 2\xi_6^{(m)} \xi_7^{(m)} \xi_9^{(m)} - \xi_2^{(m)} \xi_{10}^{(m)2} - \xi_{12}^{(m)} \xi_4^{(m)2} - 2\xi_4^{(m)} \xi_5^{(m)} \xi_{11}^{(m)} \quad (3-ج) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_2^{(m)} = & \xi_2^{(m)} \xi_9^{(m)} \xi_{12}^{(m)} + \xi_3^{(m)} (\xi_8 \xi_{12} + \xi_9 \xi_{11})^{(m)} + 2\xi_5^{(m)} \xi_7^{(m)} \xi_{10}^{(m)} - \xi_9^{(m)} \xi_7^{(m)2} - \xi_3^{(m)} \xi_{10}^{(m)2} \\ & - \xi_{11}^{(m)} \xi_5^{(m)2} - 2\xi_4^{(m)} \xi_5^{(m)} \xi_{12}^{(m)} \quad (4-ج) \end{aligned}$$

$$K_0^{(m)} = \xi_3^{(m)} \xi_9^{(m)} \xi_{12}^{(m)} - \xi_{12}^{(m)} \xi_5^{(m)2} \quad (5-ج)$$

[2] Bitzer T (1997) Honeycomb technology. 1st edn. C&H, London.

[3] Gibson LJ, Ashby MF, Schajer GS, Robertson CI (1982) The mechanics of two-dimensional

[1] Peters ST (1998) Composite material handbook. 2nd edn. C&H, London.

#### 7- مراجع

- [۱۷] خورشیدی کوروش، بلالی محمد، قدیمی علی اصغر (۱۳۹۴) کنترل ارتعاشات اجباری ورق مستطیلی لایه‌ای مرکب مستقر بر بستر خطی. مهندسی مکانیک مدرس ۱۵(۹): ۹۵-۱۰۴
- [18] Reddy JN (2003) Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis. 2nd edn. CRC press, Boca Raton, Florida.
- [19] Khorshidi K, Karimi M (2019) Analytical modeling for vibrating piezoelectric nanoplates in interaction with inviscid fluid using various modified plate theories. Ocean Eng 181: 267-280.
- [۲۰] خورشیدی ک، قاسمی م، فلاح ا (۱۳۹۷) تحلیل کماتش میکروصفحه مستطیلی تابعی مدرج بر اساس تئوری تغییرشکل برشی نمایی با بکارگیری تئوری تنش کوپل اصلاح شده. مجله مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها ۱۹۶-۱۷۹:۴(۴)
- [21] Khorshidi K, Fallah A (2017) Analytical approach for thermo-electro-mechanical vibration of piezoelectric nanoplates resting on elastic foundations based on nonlocal theory. Mech. Adv. Compos. Struct. 6(2): 117-129.
- [22] Khorshidi K, Karimi M (2019) Free vibration analysis of size-dependent, functionally graded, rectangular nano/micro-plates based on modified nonlinear couple stress shear deformation plate theories. Mech. Adv. Compos. Struct. 4(2): 127-137.
- [۲۳] خورشیدی ک، بخششی ع، قدیریان ح (۱۳۹۵) بررسی تأثیرات محیط حرارتی بر ارتعاشات آزاد ورق مستطیلی از جنس مواد تابعی مدرج دوبعدی مستقر بر بستر پسترناک. مجله مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها ۱۴۷-۱۳۷:۳(۳)
- [24] Huang N (1994) Influence of shear correction factors in the higher order shear deformation laminated shell theory. Int J Solids Struct 31(9): 1263-1277.
- [25] Di K, Mao XB (2016) Free flexural vibration of honeycomb sandwich plate with negative Poisson's ratio simply supported on opposite edges. Acta Mat Compos Sin 33(4): 910-920.
- [26] Hosseini-Hashemi Sh, Arsanjani M (2005) Exact characteristic equations for some of classical boundary conditions of vibrating moderately thick rectangular plates. Int J Solids Struct 42(3-4): 819-853.
- [27] Hosseini-Hashemi Sh, Fadaee M, Taher HRD (2011) Exact solutions for free flexural vibration of Levy-type rectangular thick plates via third-order cellular materials. Proc R Soc London, Ser. A 382: 25-42.
- [4] Evans KE, Nkansah MA, Hutchinson IJ, Rogers SC (1991) Molecular network design. Nature 353(6340): 124.
- [5] Lakers R (1991) Deformation mechanisms in negative Poisson's ratio materials: Structural aspects. J Mater Sci 26(9): 2287-2292.
- [6] Yang ZC, Deng QT (2011) Mechanical property and application of materials and structures with negative Poisson's ratio. Adv Mech 41(3): 335-350.
- [7] Sun Y, Pugno Nm (2013) In plane stiffness of multifunctional hierarchical honeycombs with negative Poisson's ratio sub-structures. Compos Struct 106: 681-689.
- [8] Gibson LJ, Ashby MF (1999) Cellular solids: Structure and properties. CUP, Cambridge.
- [9] Malek S, Gibson LJ (2015) Effective elastic properties of periodic hexagonal honeycombs. Mech Mater 91: 226-240.
- [۱۰] غزنوی اسگوئی آ، شرعیات م (۱۳۹۸) تحلیل تنش و جابجایی ورق‌های ساندویچی ضخیم دارای هسته آگرتیک تغییرشکل‌پذیر به کمک تئوری عمومی-محلی مرتبه سه به‌بود یافته. مجله مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها ۱۲۲-۱۰۹:۲(۲)
- [11] Kirchhoff G (1850) Uber das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe. J Reine Angew Math 40: 51-88.
- [12] Kirchhoff G (1850) Uber die Schwingungen einer kreisförmigen elastischen Scheibe. Ann Phys 157(10): 258-264.
- [۱۳] قدیریان ح، قضاوی م، خورشیدی ک (۱۳۹۵) تحلیل ارتعاشات و پایداری ورق‌های مرکب چندلایه تحت اثر رطوبت و دما. مجله مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها ۱۶۶-۱۵۵:۲(۲)
- [14] Reissner E (1945) The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. J Appl Mech A69-A77.
- [15] Mindlin RD (1951) Influence of rotary inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates. J Appl Mech 18: 31-38.
- [۱۶] خورشیدی ک، عنصری‌نژاد س (۱۳۹۵) تحلیل دقیق ارتعاش آزاد ورق‌های قطاعی کوپل شده با لایه پیزوالکتریک با بکارگیری تئوری تغییرشکل برشی مرتبه اول. مجله مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها ۱۳۸-۱۲۵:۴(۴)

- [29] Rao MK, Desai YM (2004) Analytical solutions for vibrations of laminated and sandwich plates using mixed theory. *Compos Struct* 63(3-4): 361-373.
- [28] Raville ME, Ueng CES (1967) Determination of natural frequencies of vibration of a sandwich plate. *Appl Exp Mech* 7(11): 490-493.
- shear deformation plate theory. *Appl Math Model* 35(2): 708-727.