



## بررسی گسترده‌ی وسیعی از خانواده‌ی ای-یو-اس-ام (AUSM) در جریان‌های ناپایای یک و دوبعدی

محمد حسن جوارشکیان<sup>۱\*</sup> و عدنان محمدی<sup>۲</sup>

<sup>۱</sup>استاد، دانشکده‌ی مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد

<sup>۲</sup>دانشجوی دکتری، دانشکده‌ی مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد

مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۲/۰۲؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۹/۰۶/۳۰؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۸/۱۱

### چکیده

در این پژوهش خانواده طرح AUSM در یک کد بر مبنای روش حجم محدود و ساختار ذخیره‌سازی بی‌سازمان مورد مقایسه قرار گرفته‌اند. ارزیابی طرح‌های حل جریان تراکم پذیر در جریان‌های ناپایا به دلیل پیچیدگی‌های وابسته به زمان، می‌تواند در شناسایی و تبیین نقاط ضعف و قوت آن‌ها کارآمد و روشن‌تر باشد. از این رو جهت شناسایی طرح (طرح‌های) کارآمدتر در خانواده AUSM به لحاظ پیش‌بینی دقیق ویژگی‌های میدان جریان ناپایا، این خانواده در آزمایش‌های لوله حاوی موج‌ضربه‌ای یک‌بعدی و دوبعدی، مورد بررسی قرار گرفتند. نکته متمایزکننده این تحقیق، بررسی اکثریت اصلاحات مطرح انجام‌شده در طرح AUSM در آزمایش‌های ناپایای یک و دوبعدی در جهت دستیابی و معرفی طرحی کارآمدتر و دقیق‌تر است. در بررسی‌های صورت گرفته‌شده معین گردید که در حالت یک‌بعدی روش‌های مبتنی بر SLAU، توانمندی بهتری را نسبت به اصلاحات صورت گرفته بر طرح AUSM در پیش‌بینی امواج انبساطی و تراکمی دارا هستند. علاوه اینکه از میان اصلاحات انجام‌شده که بر مبنای خانواده AUSM هستند، روش‌های AUSM+M و AUSMSV نتایج بهتری دارند. در آزمایش لوله حاوی موج‌ضربه‌ای دوبعدی طرح‌های AUSM+، AUSM+FVS و AUSM+PW که در حالت یک‌بعدی بدون لرزش یا دارای لرزش‌های اندکی هستند، بشدت تحت تاثیر قرار می‌گیرند و نوسانات شدیدتری را دارند.

**کلمات کلیدی:** جریان تراکم پذیر؛ جریان ناپایا؛ لوله موج‌ضربه‌ای یک‌بعدی و دوبعدی؛ طرح AUSM.

## Investigation of a Broadcategory of AUSM Family in the 1D and 2D Unsteady Flows

M.H. Javareshkian<sup>1,\*</sup>, A. Mohammadi<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Prof., Mech. Eng., Ferdowsi University of Mashhad, Iran.

<sup>2</sup> Ph.D. Student, Aero. Eng., Ferdowsi University of Mashhad, Iran.

### Abstract

The comparison of AUSM (Advection Upstream splitting Method) family through the Control volume method and an unstructured data storage strategy is conducted in this research. Evaluation of the compressible-flow scheme solutions in unsteady flows, due to their time-dependence complications can provide an insight into such solutions to recognize and explain their strengths and weaknesses. Accordingly, in order to identify the more efficient methods in the broad category of the AUSM family in terms of accurate prediction of the characteristics of unsteady flow fields, the AUSM family was evaluated by performing 1D and 2D shock tube tests. Distinctively, the present work evaluates a majority of the legendary modifications proposed to the AUSM scheme, in the 1D and 2D unsteady tests to formulate the most efficient yet accurate solution strategy. Based on the analysis, it was found that, in the 1D test, the SLAU (Simple Low-Dissipation AUSM)-based methods, rather than the modified AUSM schemes, offered better potentials for predicting the expansion and compressive waves. It was further revealed that, among the various modifications made to the AUSM, the AUSM+M and AUSMSV led to better outcomes. In the 2D shock tube test, the AUSM+, AUSM+FVS, and AUSMPW, which exhibited no or merely subtle vibrations in the 1D test, were found to be strongly affected and exhibited intensive instabilities.

**Keywords:** Compressible Flow; Unsteady Flow; One and Two Dimensional Shock Tube; AUSM Scheme.

## ۱- مقدمه

امروزه دینامیک سیالات محاسباتی به یک تکنیک مهم در آنالیز و طراحی در علوم هوافضا و هوانوردی تبدیل شده است. با گسترش فزاینده دینامیک سیالات محاسباتی قابلیت اطمینان این روش‌ها، در علوم کاربردی مهندسی بیش از پیش مورد توجه قرار گرفته است. در میان روش‌های دینامیک سیالات محاسباتی، طرح‌های بالادستی به علت سادگی در پیاده‌سازی و هزینه محاسباتی معقول به‌طور گسترده‌ای توسعه یافته‌اند. طرح‌های بالادستی به دودسته تقسیم می‌شوند: تقسیم تفاضل شار<sup>۱</sup> و تقسیم بردار شار<sup>۲</sup>. بر اساس ساختار امواج روش‌های تقسیم تفاضل شار را می‌توان به دودسته، روش‌های کامل و غیر کامل مسئله ریمان تقسیم کرد. روش‌های حل کامل مسئله ریمان، مانند روش Roe<sup>۳</sup> [۱] و HLLC<sup>۴</sup> [۲] هستند. هرچند این روش‌ها دارای توانایی فوق‌العاده‌ای در پیش‌بینی ناپیوستگی تماسی و لایه مرزی و امواج ضربه‌ای ثابت هستند، اما در وسایل ابرصوتی دچار لرزش موج ضربه‌ای یا پدیده کربونسل [۳] می‌شوند. در مقابل روش‌های حل غیر کامل مسئله ریمان، پایداری فوق‌العاده‌ای در پدیده کربونسل از خود نشان داده‌اند، هرچند دارای دقت کم و نتایج هموار در ناپیوستگی تماسی هستند. روش‌های تقسیم بردار شار، دارای پیچیدگی الگوریتمی و هزینه محاسباتی کمتری هستند. عمدتاً این روش‌ها مشتمل بر طرح هایون لیر [۴] و استیگر-وارمینگ [۵] هستند. روش‌های تقسیم بردار شار، دارای پایداری مناسبی در امواج تراکمی هستند، اما نمی‌توانند ناپیوستگی تماسی را به‌خوبی پیش‌بینی کنند. لیو و استفان [۶]، برای اولین بار دو گروه تقسیم تفاضل شار و تقسیم بردار شار را ترکیب و خانواده AUSM<sup>۵</sup> را پایه‌گذاری کرده‌اند. در این روش شار غیر لزج به دو سیستم مجزای فشاری و جابجایی تقسیم می‌شود. این روش مزیت و پایداری روش‌های تقسیم بردار شار در امواج تراکمی و دقت روش‌های تقسیم تفاضل شار در ناپیوستگی تماسی را با هم دارد. به علت عملکرد بسیار مطلوب این روش

با کمینه اتلافات لازم و پایداری مطلوب آن در امواج ضربه‌ای، خانواده این روش AUSM<sup>+</sup> [۷] و AUSMPW [۸] و AUSM<sup>+</sup>UP [۹] توسعه پیدا کردند.

به‌عنوان نمونه روش AUSM<sup>+</sup>UP که آخرین نسخه خانواده AUSM است، با معرفی ترم‌های کنترل اتلافات فشاری و جابجایی توانست یک طرح برای تمامی سرعت‌ها معرفی کند.

بعد از لیو و در راستای اصلاح ترم‌های محاسبه شار فشاری و جرمی جهت فائق آمدن بر مشکلاتی نظیر، پارامترهای کنترلی، لرزش در پدیده کربونسل، شیما [۱۰] نسخه اصلاح‌شده AUSM، با نام SLAU<sup>۶</sup> را پیشنهاد داد که بعد از آن در نسخه‌های SLAU2 و SDLSLAU اصلاحاتی جهت افزایش دقت در جریان‌ات سرعت بالا روی آن شکل گرفت.

طرح SLAU2 پایداری SLAU را بهبود بخشید و می‌تواند به عنوان گزینه مناسبی برای کاربرد در طیف گسترده‌ای از اعداد ماخ باشد، با این وجود SLAU در مواجهه با امواج ضربه‌ای قوی دچار نوسان می‌شود [۱۱ و ۱۲] در این راستا و جهت برطرف کردن مشکلات موجود در روش AUSM<sup>+</sup>UP و SLAU، روش AUSM<sup>+</sup>M با اصلاحاتی روی ترم‌های اتلافی شار فشاری و سرعت مطرح گردید.

در این پژوهش در راستای بررسی دقیق اصلاحات انجام‌شده بر خانواده AUSM، طیف وسیعی از ویرایش‌های معرفی‌شده در یک نرم‌افزار سلول‌مبنا<sup>۷</sup> و با ساختار ذخیره‌سازی بی‌سازمان توسعه داده‌شده‌اند. برنامه تنظیم‌شده در زبان فرترن و به‌صورت صریح و در یک‌روند تکرار و با استفاده از روش حجم محدود مقادیر مجهول معادلات بقا را گزارش می‌دهد. نکته متمایزکننده این پژوهش نقد و بررسی غالب اصلاحات مطرح خانواده‌ی AUSM به‌صورت یکپارچه در آزمایش‌های ناپایای یک و دوبعدی است که در تحقیقات پیشین بررسی و نقد آن‌ها به‌صورت یکپارچه کمتر، مورد بررسی و واکاوی قرار گرفته است. در دیدگاهی دقیق‌تر میزان پخش و پراش تکنیک‌های عددی جهت شناسایی و تشخیص دقیق بهترین طرح در خانواده AUSM به منزله داشتن

<sup>1</sup> Flux Difference Splitting

<sup>2</sup> Flux Vector Splitting

<sup>3</sup> Roe Approximate Riemann Solver

<sup>4</sup> Harten, Lax and Van-Leer Scheme

<sup>5</sup> Advection Upstream splitting Method

<sup>6</sup> Simple Low-Dissipation AUSM

<sup>7</sup> Cell-base

$$M_p = -\frac{K_p}{f_a} \max(1 - \sigma \bar{M}^2, 0) \frac{P_R - P_L}{\bar{\rho} c_{\frac{1}{2}}^2}$$

$$K_p = 0.25, \sigma = 1.0,$$

$$f_a(M_O) = M_O(2 - M_O)$$

$$M_O^2 = \text{Min}(1, \text{Max}(\bar{M}^2, \bar{M}_{co}^2))$$

$$\bar{M}^2 = \frac{Vn^{+2} + Vn^{-2}}{2C_{\frac{1}{2}}^2} \quad (10)$$

$$c_{1/2} = \min(\tilde{c}_L, \tilde{c}_R) \quad (11)$$

$$\tilde{c}_L = c^{*2} / \max(c^*, Vn^+)$$

$$\tilde{c}_R = c^{*2} / \max(c^*, -Vn^-) \quad (12)$$

$$c^{*2} = \frac{2(\gamma - 1)}{(\gamma + 1)} H \quad (13)$$

در رابطه (۱۰) پارامتری کنترلی از مرتبه ماخ ورودی است. در رابطه (۱۲)،  $Vn^+$  و  $Vn^-$  سرعت عمود بر هر وجه در طرف چپ یا راست هستند.

$$(\tilde{p})_{AUSM+UP} = P^+ p_L + P^- p_R + p_u \quad (14)$$

$$p_u = -k_u P^+ \cdot P^- (\rho_L + \rho_R) (f_a c_{1/2}) (Vn^- - Vn^+) \quad (15)$$

$$P^\pm(M) = \begin{cases} \frac{1}{M} \mathcal{M}_{(1)}^\pm & \text{if } |M| \geq 1, \\ \mathcal{M}_{(1)}^\pm [(\pm 2 - M) \mp 16\alpha M \mathcal{M}_{(2)}^\mp] & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\mathcal{M}_{(1)}^\pm(M) = \frac{1}{2} (M \pm |M|),$$

$$\mathcal{M}_{(2)}^\pm(M) = \pm \frac{1}{4} (M \pm 1)^2$$

$$\alpha = \frac{3}{16} (-4 + 5f_a^2) \quad (16)$$

#### ۴- محاسبه شار غیر لزج در طرح AUSM+

در این روش، محاسبه شار جرمی طبق رابطه (۸) محاسبه می‌شود، ترم  $M_p$  صفر است، برای محاسبه شار فشاری طبق رابطه، ترم  $p_u$  حذف می‌شود و ترم‌های  $P^\pm$  عبارت‌اند از:

حداقل میزان اتلافات عددی (پخش و پراش) و در قالب آزمایش‌های مطروحه و بررسی موشکافانه علل ضعف و نقصان اعضای این خانواده مفصلاً در این پژوهش بررسی خواهد شد. در تحقیقات سابق چنین جامعیت و بررسی همه جانبه‌ای کمتر دیده شده است.

#### ۲- معادلات حاکم

معادلات حاکم بر میدان جریان غیر لزجتراکم پذیر عبارت است از:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial F_k}{\partial x_k} = 0 \quad (1)$$

$$Q = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u_l \\ \rho E \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$F_k = \begin{bmatrix} \rho u_k \\ \rho u_l u_k + P \delta_{lk} \\ \rho u_k H \end{bmatrix} \quad (3)$$

در روابط فوق  $Q$  بردار مقادیر بقایی و  $\rho$  نشان‌دهنده چگالی است.  $u_i$  مؤلفه‌های بردار سرعت در مختصات کارتزین و  $E$  انرژی کل،  $P$  فشار و  $H = e + \frac{p}{\rho}$  آننتالپی کل است. معادله (۱) با روش حجم محدود گسسته شده است و در فرم معادله (۴) به صورت رابطه (۴) قابل بازنویسی است:

$$\frac{A_i}{\Delta t} \Delta Q_i + \sum_j F_{i,j} S_{i,j} = 0 \quad (4)$$

در رابطه فوق  $A_i$  مساحت هر سلول،  $\Delta t$  گام زمانی و  $\Delta Q_i$  تغییر مقادیر بقایی و  $F_{i,j}$  شار غیرلزج عبوری از هر وجه و  $S_{i,j}$  بردار عمود بوجه جداکننده سلول و زااست.

#### ۳- محاسبه شار غیر لزج در طرح AUSM+UP

$$F_{AUSM+up} = \frac{\dot{m} + |\dot{m}|}{2} \Psi^+ + \frac{\dot{m} - |\dot{m}|}{2} \Psi^- + \tilde{p} N \quad (5)$$

$$\Psi = (1, u, v, H)^T, N = (0, n_x, n_y, 0)^T \quad (6)$$

$$(\dot{m})_{AUSM+up} = M_{1/2} C_{1/2} \begin{cases} \rho_L & \text{if } M_{1/2} > 0 \\ \rho_R & \text{otherwise} \end{cases} \quad (7)$$

$$M_{1/2} = M^+ + M^- + M_p \quad (8)$$

$$M^\pm = \begin{cases} \frac{1}{2} (M \pm |M|) & \text{if } |M| \geq 1 \\ \pm \frac{1}{4} (M + 1)^2 \pm \frac{1}{8} (M^2 - 1)^2, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (9)$$

جزئیات محاسبه  $|\bar{V}_n|^+$ ،  $|\bar{V}_n|^-$ ،  $X$ ،  $P^+|_{\alpha=0}$  و  $P^-|_{\alpha=0}$  در [۱۳] ارائه شده است.

#### ۷- محاسبه‌ی شار غیرلزج در طرح SLAU2

در روش SLAU-2 شار فشاری به شرح زیر تصحیح گردید:

$$\tilde{p} = \frac{p_L + p_R}{2} + \frac{P^+|_{\alpha=0} - P^-|_{\alpha=0}}{2} (p_L - p_R) + \sqrt{\frac{u_L^2 + v_L^2 + w_L^2 + u_R^2 + v_R^2 + w_R^2}{2}} (P^+|_{\alpha=0} - P^-|_{\alpha=0} - 1) \tilde{p} c_{1/2} \quad (23)$$

#### ۸- محاسبه شار غیرلزج در طرح SD-SLAU

در این روش نحوه محاسبه شار SLAU جرمی به صورت زیر تصحیح می‌شود:

$$\dot{m} = \frac{1}{2} \{(\rho V_n)^+ + (\rho V_n)^- - |\bar{V}_n| \Delta \rho - f_p \frac{\Delta \rho}{c}\} \quad (24)$$

$$f_p = \min \left( 1, \left( \frac{C_{SD2} |\Delta p| / \bar{P} + C_{SD1}}{|\Delta p|_{max} / \bar{P} + C_{SD1}} \right)^2 \right) \quad (25)$$

جهت جزئیات محاسبه  $f_p$  به [۱۴] مراجعه شود.

#### ۹- محاسبه شار غیرلزج در طرح Hybrid-SLAU

در این روش اصلاحیه انجام شده تنها برای معادله‌ی شار جرمی مومنوم است و معادلات انرژی و پیوستگی مشابه روش SLAU حل می‌شوند:

$$\left\{ \mathbf{F}_{1/2}^{(\rho, \rho h)} \right\}_H = \left\{ \mathbf{F}_{1/2}^{(\rho, \rho h)} \right\}_S$$

$$\left\{ \mathbf{F}_{\frac{1}{2}}^{(\rho, \rho h)} \right\}_H = \frac{1}{2} (\dot{m})_s [ \quad +^{(v)} \quad -^{(v)} ] - \frac{1}{2} (D_m)_H [ \quad +^{(v)} \quad -^{(v)} ] + (\tilde{p})_S N \quad (26)$$

$$(D_m)_H = (1 - \omega_p) (D_m)_{VL} + \omega_p (D_m)_S \quad (27)$$

در روابط (۲۶) و (۲۷) جهت تعیین جزئیات به [۱۵] مراجعه شود.

#### ۱۰- محاسبه‌ی شار غیرلزج در طرح AD-AUSM

در این روش شار جرمی و فشاری عبارت است از:

$$P^\pm = \begin{cases} \frac{1}{4} (M \pm 1)^2 (2 \mp M) \pm \frac{3}{16} M (M^2 - 1)^2, & |M| \leq 1 \\ \frac{1}{2} (1 \pm \text{sign}(M)), & |M| > 1 \end{cases} \quad (17)$$

همچنین رابطه (۱۱) که در تعریف سرعت صوت استفاده می‌شود، عبارت است از:

$$c_{1/2} = \min(\tilde{c}_L, \tilde{c}_R)$$

$$\tilde{c}_L = c^{*2} / \max(c^*, |V_n|)$$

$$\tilde{c}_R = c^{*2} / \max(c^*, |V_n|)$$

$$c^{*2} = \frac{2(\gamma - 1)}{(\gamma + 1)} H \quad (18)$$

#### ۵- محاسبه‌ی شار غیرلزج در طرح AUSM

در روش AUSM روند محاسبه شار جرمی و فشاری به صورت رابطه (۱۹) تغییر می‌کند:

$$M_{1/2} = M^+ + M^-$$

$$M^\pm = \begin{cases} \frac{1}{2} (M \pm |M|) & \text{if } |M| \geq 1 \\ \pm \frac{1}{4} (M + 1)^2, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (19)$$

همچنین برای محاسبه شار فشاری داریم:

$$(\tilde{p})_{AUSM} = P^+ p_L + P^- p_R$$

$$P^\pm(M) = \begin{cases} \frac{1}{M} \times \frac{1}{2} \times (M \pm |M|) & \text{if } |M| \geq 1, \\ \pm 0.25 (M \pm 1) [(\pm 2 - M)] & \text{otherwise} \end{cases} \quad (20)$$

#### ۶- محاسبه شار غیرلزج در طرح SLAU

$$(\dot{m})_{SLAU} = \frac{1}{2} \{ \rho_L (V_{nL} + |\bar{V}_n|^+) + \rho_R (V_{nR} + |\bar{V}_n|^-) - \frac{X}{c} \Delta p \} \quad (21)$$

$$(\tilde{p})_{SLAU} = \frac{p_L + p_R}{2} + \frac{P^+|_{\alpha=0} - P^-|_{\alpha=0}}{2} (p_L - p_R) + (1 - X) \times (P^+|_{\alpha=0} - P^-|_{\alpha=0} - 1) \frac{(p_L - p_R)}{2} \quad (22)$$

$$\begin{aligned}
 p_{ux} &= -g \cdot \frac{\gamma(P_L + P_R)}{2c_{1/2}^2} \Psi_L^+ \Psi_R^- (u_R - u_L), \\
 p_{uy} &= -g \cdot \frac{\gamma(P_L + P_R)}{2c_{1/2}^2} \Psi_L^+ \Psi_R^- (v_R - v_L) \\
 P_s &= \frac{P_L + P_R}{2} + (\Psi_L^+ - \Psi_R^-) \frac{P_L + P_R}{2} \\
 &+ f_{0.} (\Psi_L^+ + \Psi_R^- - 1) \frac{P_L + P_R}{2} \quad (33)
 \end{aligned}$$

### ۱۳- محاسبه شار غیرلزج در طرح AUSMSV

$$\begin{aligned}
 F_{1/2}^{AUSM+SV}(Q_L, Q_R) &= F_{1/2}^{AUSM}(Q_L, Q_R) + SV \\
 SV &= -g \cdot \frac{1}{2} \tilde{\rho} \tilde{\alpha} \Delta V \cdot \varphi \cdot (0, -n_y, n_x, \tilde{V})^T \quad (34)
 \end{aligned}$$

در رابطه ارائه شده جهت محاسبه شار از روش AUSMSV استفاده شده که جزئیات دقیق روابط در [۱۹] قابل پیگیری است.

### ۱۴- محاسبه شار غیرلزج در طرح AUSMPW

$$\begin{aligned}
 (\vec{F}_c)_{i+1/2,j} &= \bar{M}_L^+ c_{i+1/2,j} \vec{\Phi}_L \\
 &+ \bar{M}_R^- c_{i+1/2,j} \vec{\Phi}_R + p_{i+1/2,j} \\
 P_s &= P_{(5)}^+(M_L) P_L + P_{(5)}^-(M_R) P_R \\
 \begin{cases} \bar{M}_L^+ = M_{(4)}^+(M_L) + M_{(4)}^-(M_R) - \\ M_{(4)}^-(M_R) \times \omega \times (1 + f_R) + \\ + (f_L M_{(4)}^+(M_L) + f_R M_{(4)}^-(M_R)) \end{cases} & \text{for } m_{i+1/2,j} \geq 0, \\
 \bar{M}_R^- &= M_{(4)}^-(M_R) \times \omega \times (1 + f_R) \quad (35)
 \end{aligned}$$

در روابط ارائه شده جهت تعیین شار غیر لزج، از روش AUSMPW استفاده شده که جزئیات پارامترهای ثابت در [۲۰] ارائه شده است.

### ۱۵- روش حل

معادلات دیفرانسیل حاکم بر مسئله توسط روش حجم محدود گسسته شده و شارها توسط روابط اشاره در روشهای مختلف محاسبه می‌شود، در شکل ۱ فلوچارت کلی برنامه تدوین شده نشان داده شده است.

$$\begin{aligned}
 f_c &= \overline{U\phi} - d_c \\
 p_{1/2} &= \bar{p} - d_p \quad (28)
 \end{aligned}$$

$$d_c = \max(|U_L|, |U_R|) \frac{\Delta\varphi}{2} + c_{1/2} M_P \varphi_u \quad (29)$$

$$\begin{aligned}
 d_p &= \frac{1}{2} (P_L^+ - P_R^-) \\
 &+ \{(1 - P_L^+ - P_R^-) \bar{p}\} (M_0(2 - M_0)) \quad (30)
 \end{aligned}$$

در روابط (۲۹) و (۳۰) جهت تعیین جزئیات به [۱۶] مراجعه شود.

### ۱۱- محاسبه شار غیرلزج در طرح AUSM+FVS

در این طرح شار فشاری مطابق روش AUSM+ محاسبه می‌شود و برای محاسبه شار جرمی داریم:

$$\begin{aligned}
 F_{1/2} &= F_{a1} + F_{a2} + F_b \\
 &= a_{1/2} (\bar{M}_L^+ \Phi_L + \bar{M}_R^- \Phi_R) + P_L^+ P_L + P_R^- P_R \\
 \begin{cases} \bar{M}_L^+ = M_L^+ + (1 - \beta) M_R^- \\ \bar{M}_R^- = \beta M_R^- \end{cases} & M_{1/2} \geq 0 \\
 \begin{cases} \bar{M}_L^+ = \beta M_L^+ \\ \bar{M}_R^- = M_R^- + (1 - \beta) M_L^+ \end{cases} & \text{Otherwise} \quad (31)
 \end{aligned}$$

در رابطه (۳۱) جهت تعیین جزئیات به [۱۷] مراجعه شود.

### ۱۲- محاسبه شار غیرلزج در طرح AUSM+M

این روش، اصلاحی بر روش AUSM+UP است که در روابط ارائه شده جهت محاسبه شار از طرح AUSM+M استفاده شده که جزئیات دقیق روابط در [۱۸] قابل پیگیری است.

$$\begin{aligned}
 M_P &= -\frac{1}{2} (1 - f) \cdot \frac{\Delta p}{\rho_{1/2}^2 c_{1/2}^2} \cdot (1 - g), \Delta p = p_R - p_L \\
 & \quad (32)
 \end{aligned}$$

$$f = \frac{1 - \cos(\pi M)}{2},$$

$$M = \min(1.0, \max(|M_L|, |M_R|))$$

$$P_{1/2} = \begin{bmatrix} 0 \\ P_s \cdot n_x + p_{ux} \\ P_s \cdot n_y + p_{uy} \\ 0 \end{bmatrix}$$



در مسئله لوله موج ضربه‌ای ساد، هر دو انتهای لوله بسته است. طول لوله ضربه ۴۴ متر و تعداد سلول‌ها ۷۰۰ است. دیافراگم در وسط لوله ضربه‌ای قرار دارد و هدف مسئله، بررسی وضعیت جریان در این لوله، در زمان ۰/۰۱۹۶ ثانیه بعد از پاره شدن دیافراگم است. شرایط اولیه جریان در دو طرف دیافراگم مطابق روابط (۳۶) و (۳۷) در نظر گرفته شده است:

$$T_4 = 413.86 \text{ K}, \quad p_4 = 2 \times 10^6 \text{ Pa}, \quad u_4 = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (36)$$

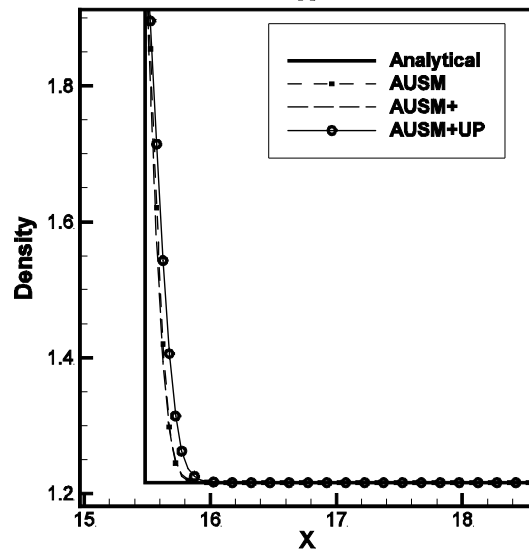
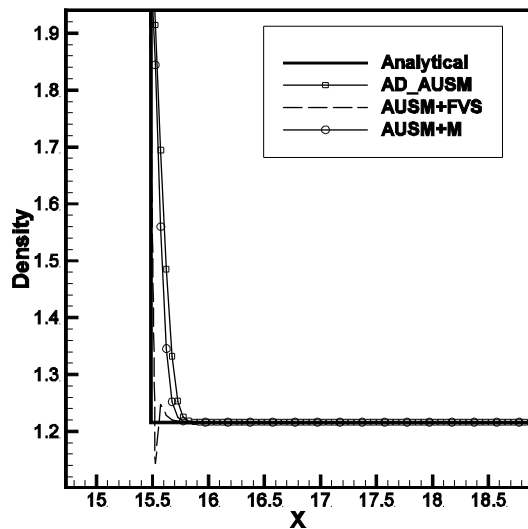
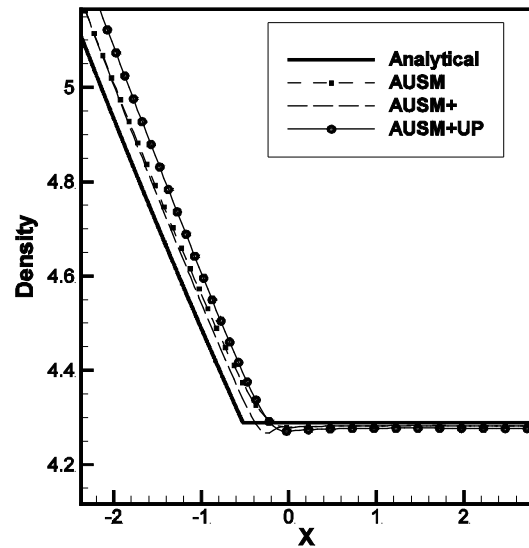
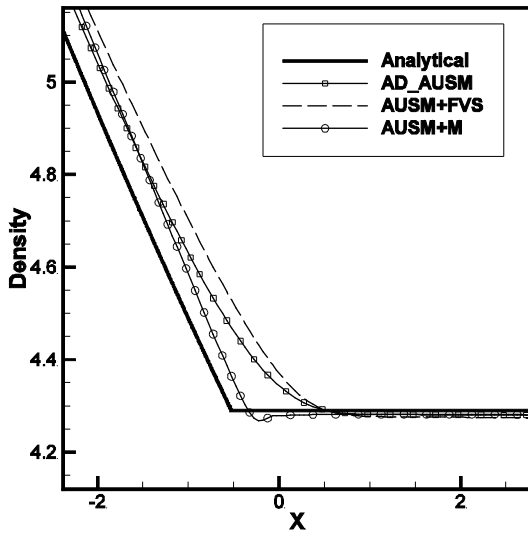
$$T_1 = 300 \text{ K}, \quad p_1 = 0.2 \times 10^6 \text{ Pa}, \quad u_1 = 0 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (37)$$

شکل ۳ توزیع چگالی در محدوده امواج انبساطی و موج ضربه ای را نشان می‌دهد. از مقایسه سه روش ارائه شده (طرح‌های AUSM+، AUSM+UP و AUSM+UP)، در شکل ۳-ب روش‌های AUSM+ و AUSM+ دارای دقت مشابهی در پیش‌بینی موج ضربه‌ای هستند، در این میان روش AUSM+UP، هرچند ممکن است با تغییر پارامترهای کنترلی‌اش جواب بهتری را ارائه دهد، اما با پارامترهای پیش‌فرض معرفی شده توسط مبتکر روش، جواب‌ها دارای استهلاک بالایی هستند. بعلاوه اینکه روش AUSM+ دارای نوسانات اندکی در پاسخ‌های ارائه شده است (شکل ۳-الف). عبارتی رابطه (۱۷) که در آن پارامتر  $\alpha$  ثابت فرض شده است، نتوانسته است، مقدار اتلاف عددی مناسب جهت کنترل نوسانات موج ضربه‌ای در این آزمایش را داشته باشد و تکمیل این اصلاحات در روش AUSM+UP با وابسته کردن ترم‌های اتلافی به عدد ماخ محلی جریان نیازمند ایجاد آزمایش‌های متعدد جهت دستیابی به ترم کنترلی متناسب با مساله و فیزیک داده شده است. با توجه به این مطالب روش AUSM بدون اصلاحات انجام شده نسبت به دو روش دیگر، پاسخ‌های مناسب‌تری را ارائه می‌دهد.



## ۱۶- بحث و بررسی نتایج

ابتدا طرح‌های معرفی شده در لوله حاوی موج ضربه ای یک‌بعدی، مورد آزمایش قرار داده شده است تا توانمندی آن‌ها در پیش‌بینی موج ضربه‌ای و امواج انبساطی یک بعدی مورد بررسی قرار گیرد. شماتیکی از لوله موج ضربه در شکل ۲ آورده شده است. در این مسئله جریان غیر لزج و ناپایا و یک‌بعدی فرض شده است.



شکل ۴- الف) نمای نزدیک به موج انبساطی و مقایسه توزیع چگالی روش‌های AD\_AUSM، AUSM+FVS و AUSM+M و ب) نمای نزدیک به موج ضربه‌ای و مقایسه توزیع چگالی روش‌های AD\_AUSM، AUSM+FVS و AUSM+M

شکل ۳- الف) نمای نزدیک توزیع چگالی به موج انبساطی و مقایسه روش‌های AUSM، AUSM+ و AUSM+UP و ب) نمای نزدیک به موج ضربه‌ای و مقایسه توزیع چگالی روش‌های AUSM، AUSM+ و AUSM+UP

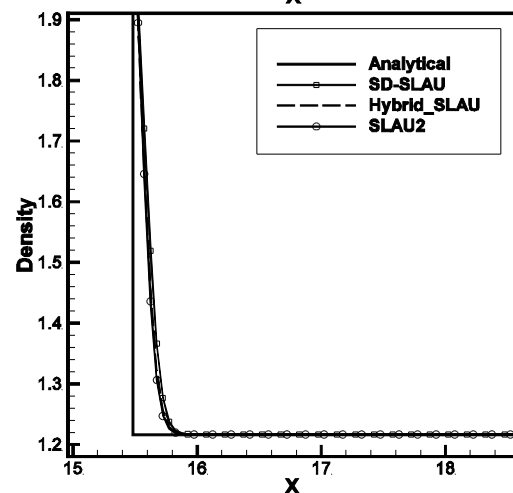
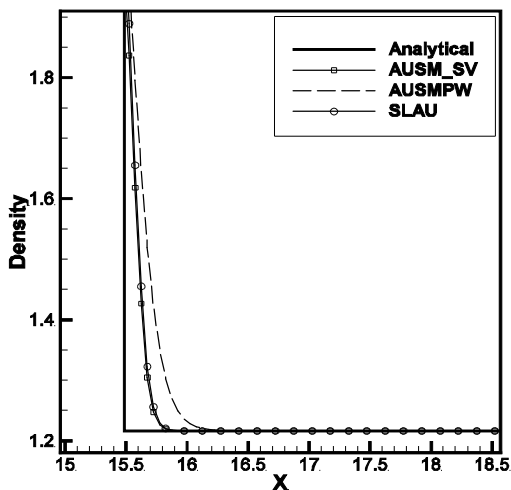
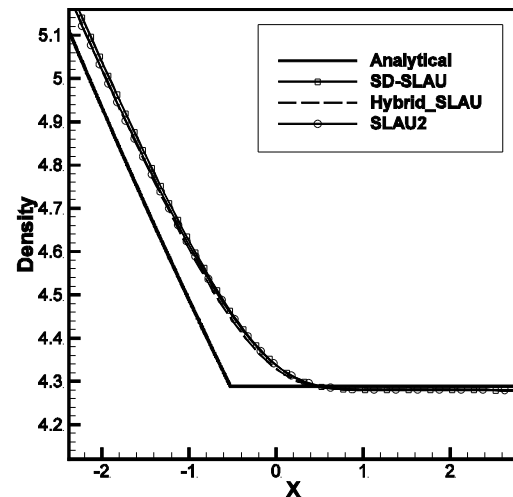
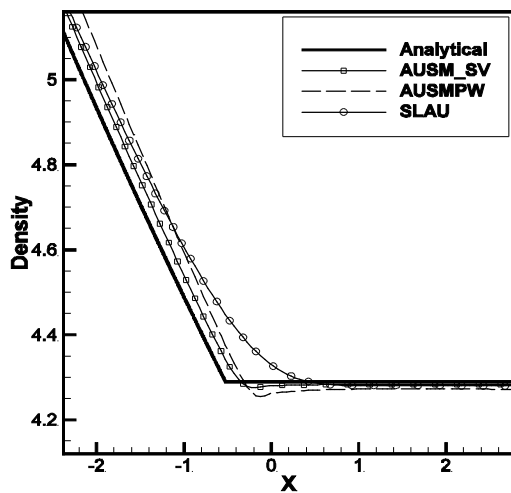
به شکل ۴- الف این روش در پیش‌بینی امواج انبساطی نیز به مراتب بهتر عمل می‌کند؛ همچنین روش AUSM+FVS در محل موج‌ضربه‌ای دارای نوسانات مشهودی است که این مساله عمدتاً از سویچ در نظر گرفته شده در رابطه (۳۱) نشأت می‌گیرد، با تنظیم  $\beta$  دقیق‌تر و تطبیق‌پذیر با عدد ماخ محلی جریان می‌توان امکان دستیابی به پاسخ‌های دقیق‌تر در این روش را فراهم کرد. بعلاوه اینکه روش AD-AUSM

شکل ۴ توزیع چگالی در لوله حاوی موج ضربه‌ای را برای طرح‌های AD\_AUSM، AUSM+FVS و AUSM+M نشان می‌دهد. در این شکل مقایسه در نزدیک موج ضربه‌ای مشاهده می‌شود. نتایج نشان می‌دهد که روش AUSM+M در پیش‌بینی موج‌ضربه‌ای بدون نوسان با توجه به استفاده از اتلافات عددی دقیق‌تر (روابط (۳۲) و (۳۳))، نتایج بهتری نسبت به طرح ADAUSM ارائه می‌دهد، بعلاوه اینکه با توجه

طرح‌های AUSMSV، SLAU و AUSMPW با نتایج تحلیلی در شکل ۶ مقایسه شده است. روش AUSMSV در تسخیر موج ضربه‌ای و امواج انبساطی نسبت به دو روش AUSMPLUS و SLAU نتایج بهتری را ارائه می‌دهد، این روش در پیش‌بینی امواج انبساطی دارای نوسانات اندکی است. روش SLAU هرچند در پیش‌بینی امواج ضربه‌ای نتایج بسیار مطلوبی را ارائه می‌دهد، اما در تسخیر امواج انبساطی دارای اتلافات بیش از حدی است، به طوری که پاسخ ارائه شده از این روش، بسیار هموارتر از دو روش AUSMSV و AUSMPW است.

علت داشتن اتلافات عددی بیش‌ازحد دارای نتایج هموارتری نسبت به دو روش دیگر دارد.

شکل ۵ توزیع چگالی برای طرح‌های HybridSLAU، SLAU2 و SDSLAU را نشان می‌دهد. با بررسی شکل‌های ۵-الف و ب در تسخیر امواج انبساطی و امواج ضربه‌ای، می‌توان اذعان داشت که روش SLAU2 نسبت به روش‌های SD-SLAU و Hybrid-SLAU نتایج بهتری را ارائه می‌دهد، علت این مسئله در تصحیح ترم شار فشاری (رابطه ۲۳) است که باعث می‌شود، ترم اتلافی در محاسبه شار فشاری با دقت بالاتری اعمال شود.



شکل ۶-الف) نمای نزدیک به موج انبساطی در مقایسه توزیع چگالی روش‌های AUSMSV، SLAU و AUSMPW و ب) نمای نزدیک به موج ضربه‌ای و مقایسه توزیع چگالی روش‌های AUSMSV، SLAU و AUSMPW

شکل ۵-الف) نمای نزدیک به موج انبساطی و مقایسه توزیع چگالی روش‌های HybridSLAU، SLAU2 و SDSLAU و ب) نمای نزدیک به موج ضربه‌ای و مقایسه توزیع چگالی روش‌های HybridSLAU، SLAU2 و SDSLAU



هوشمندانه‌تر کردن اتلافات مرتبط با شار جرمی و فشاری و تعریف دقیق سرعت صوت منجر به این شده است که با از دست دادن کمترین میزان دقت و با تزریق صحیح اتلافات عددی بهترین پاسخ حاصل گردد.

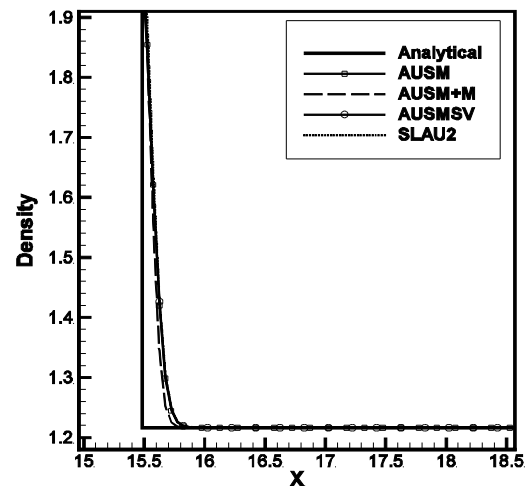
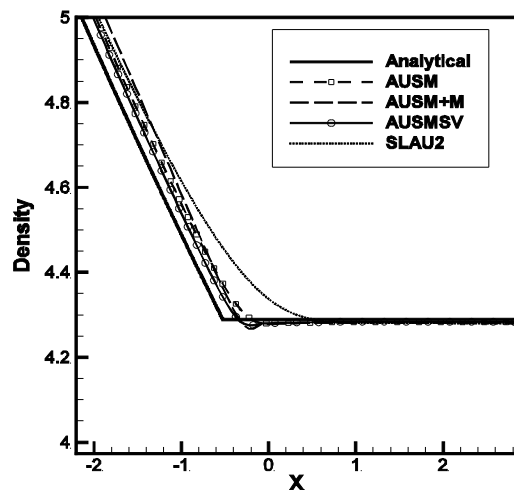
روش SLAU2 هرچند در تسخیر امواج تراکمی دقت بالایی دارد، اما در پیش‌بینی امواج انبساطی نسبت به روش‌های دیگر، دارای پاسخ‌های هموارتری است. با بازبینی روش محاسبه شار جرمی در روش‌های SLAU مینا و اصلاح‌های ترم‌های اتلافی در محاسبه این شار با الهام‌گیری از خانواده AUSM، می‌توان میزان اتلافات ترم‌های تشکیل‌دهنده شارجرمی را دقیق‌تر تنظیم کرد تا بدین وسیله امکان دستیابی به پاسخ‌های دقیق‌تر در محل امواج‌انبساطی فراهم گردد. هر چند میزان اتلافات معرفی شده در این روش در روابط (۲۱) و (۲۲) و (۲۳) جهت پیش‌بینی امواج‌ضربه‌ای با دقت بالایی عمل می‌کنند.

در ادامه و در آزمایش دوم پیکربندی لاکس، برای بررسی نمونه‌های مختلف جریان‌ات به وجود آمده پیچیده در این قسمت، مورد بررسی قرار گرفته است. برخورد موج ضربه‌ای، امواج انبساطی و شرایط تماسی با یکدیگر از انواع نمونه‌هایی است که در این آزمایش مورد بررسی قرار می‌گیرد.

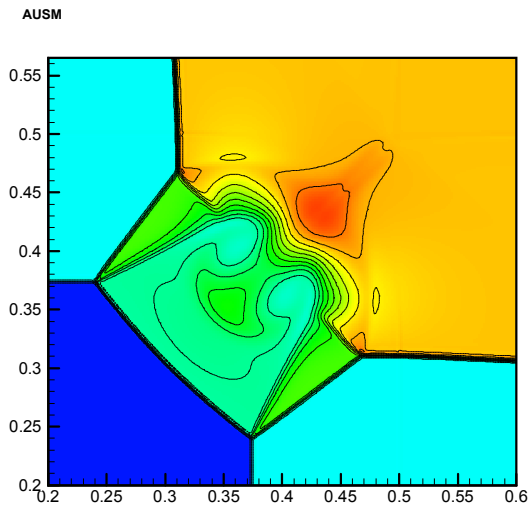
همان‌طور که در شکل ۸ مشاهده می‌شود، بازه‌صفر تا یک در دو بعد عمودی و افقی به دو قسمت تقسیم شده است که منجر به ایجاد چهار قسمت مجزا برای اعمال شرایط اولیه می‌شود.

در این تصویر پنجره‌گون زمانی که دیافراگم‌ها پاره می‌شوند، با توجه به شرایط طرفین آن‌ها امواجی به اطراف به حرکت درمی‌آیند. تداخل این امواج، شرایط پیچیده‌ای را به وجود می‌آورد که بررسی آن‌ها در دستور کار این قسمت قرار دارد. شرایط اولیه در شکل ۸ نشان داده شده است. سه ماخ با قدرت‌های مختلف در نقطه مرکزی با یک جریان ساکن در منطقه اول برخورد کرده و جریان پیچیده‌ای را به وجود می‌آورند. عبارت دقیق‌تر در این سیستم چهار موج ضربه‌ای با یکدیگر برخورد کرده و یک الگوی پیچیده مشتعل بر انعکاس‌های منظم و نامنظم و خطوط لغزشی در نقاط سه‌گانه را ایجاد می‌کنند. تداخل دو خط لغزش قویتر منتج به رشد یک جت قارچ-گون که رشد آن تا منطقه چپ-تحتانی ادامه داشته می‌شود.

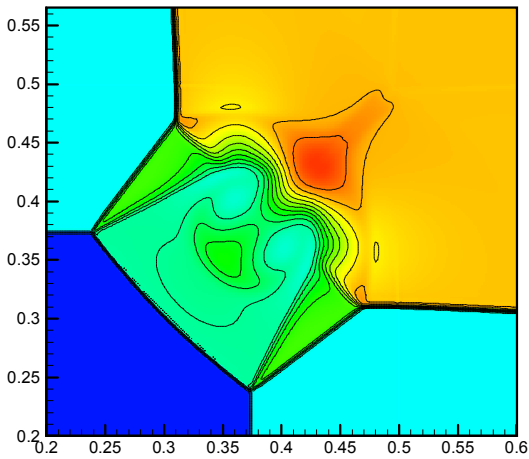
در قسمت‌های پیشین طرح‌های توسعه داده شده در چهار گروه که هر کدام مشتمل بر سه طرح بودند، با هم مقایسه شدند و بهترین طرح در هر گروه معین گردید. در این قسمت برگزیدگان هر چهار دسته در آزمایش مورد نظر مقایسه شده‌اند. شکل ۷ نتایج چهار روش AUSM، AUSMSV، SLAU2 و AUSM+M را نشان می‌دهد. نتایج مقایسه این روش‌ها نشان می‌دهد که روش AUSM+M دقیق‌ترین پیش‌بینی لازم را در امواج ضربه‌ای و انبساطی دارد، اصلاحات صورت گرفته شده در این روش در راستای



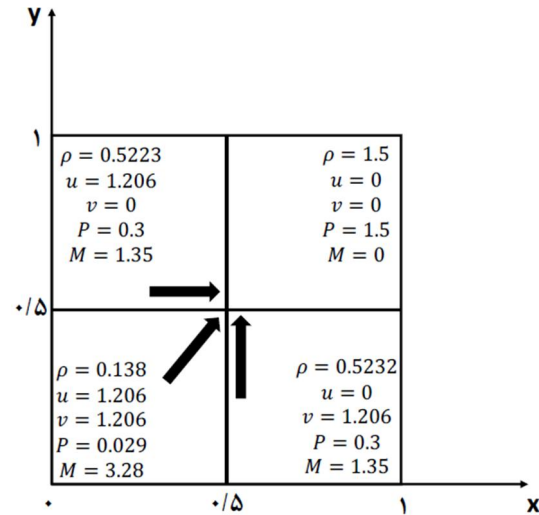
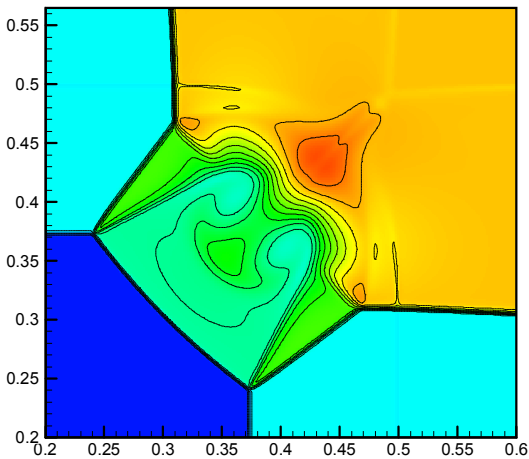
شکل ۷- الف) نمای نزدیک به موج انبساطی و مقایسه توزیع چگالی روش‌های AUSM، AUSMSV، SLAU2 و AUSM+M و ب) نمای نزدیک به موج ضربه‌ای و مقایسه توزیع چگالی روش‌های AUSM، AUSM+M و SLAU2، AUSMSV



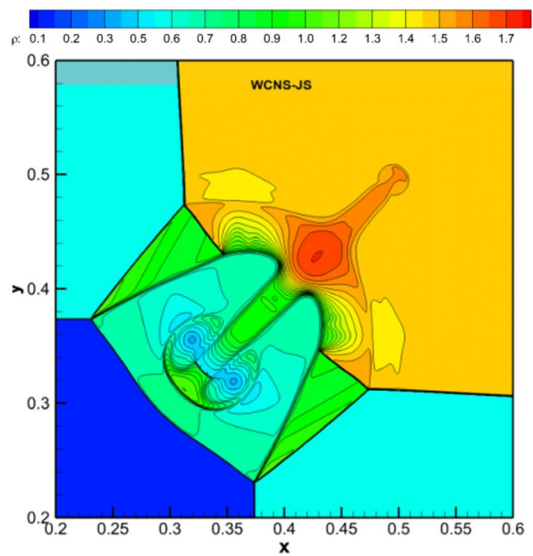
AUSM+M



AUSM+up

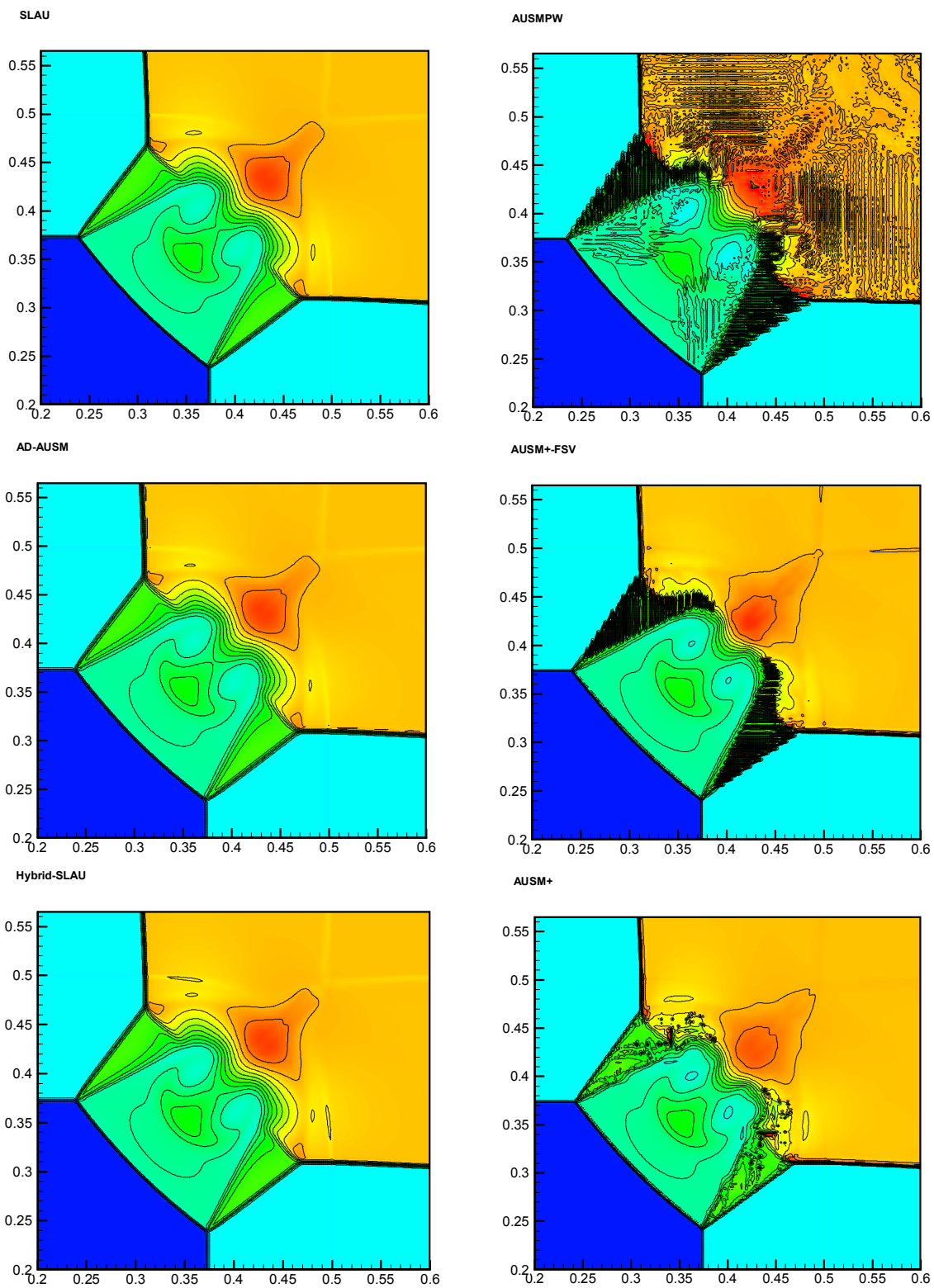


شکل ۸- شرایط اولیه در پیکربندی لاکس در ابعاد بدون بعد



شکل ۹- کانتور چگالی در نمای نزدیک شده [۹]

در این حالت دو ماخ با قدرت یکسان به سمت مثبت محور افقی و عمودی و یک ماخ با قدرت بیشتر با زاویه ۴۵ به سمت ناحیه اول در حال حرکت است که این سه رژیم با سیال ساکن برخورد می‌کنند. شرط مرزی روی تمامی دیواره‌ها غیر انعکاسی در نظر گرفته شده است. شبکه‌بندی مورد استفاده برای این آزمایش، ۴۰۰ سلول افقی و ۴۰۰ سلول عمودی در نظر گرفته شده است. از آنجا که در دو بعد مانند روش‌های یک‌بعدی لوله ضربه، حل تحلیلی موجود نمی‌باشد، به منظور اعتبار سنجی طرح‌های توسعه داده شده



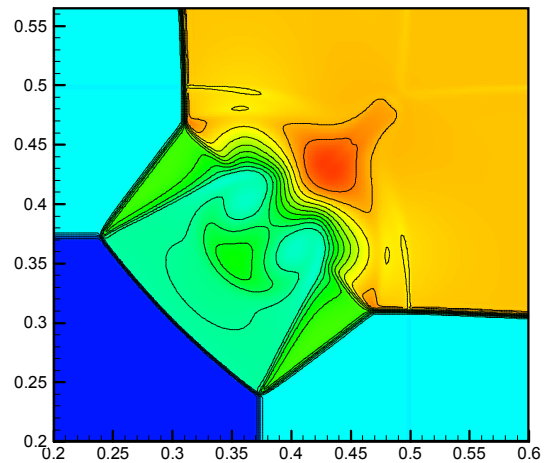
### ۱۵- نتیجه گیری

در این پژوهش جهت شناسایی طرح (طرح‌های) کارآمدتر در خانواده AUSM به لحاظ پیش‌بینی دقیق ویژگی‌های میدان جریان ناپایا، این خانواده در آزمایش‌های لوله حاوی موج ضربه‌ای یک‌بعدی و دوبعدی، مورد بررسی قرار گرفتند. بر اساس آزمایش‌های انجام‌شده معین گردید که در جریان ناپایای یک‌بعدی روش AUSM+M، بهترین عملکرد را در تسخیر امواج ضربه‌ای و انبساطی دارد. بعلاوه اینکه در اصلاحات SLU مینا طرح SLAU2 توانسته است تا کمترین اتلافات عددی را در پیش‌بینی ناپیوستگی‌ها نمایش دهد؛ همچنین طرح‌های AUSM+ و AUSM+M و AUSM+M و AUSM+M دارای لرزش‌های مشهودی در محل ناپیوستگی‌ها هستند. معین گردید که نوسانات ایجاد شده در حالت یک‌بعدی، در حالت دوبعدی می‌توانند شدت پیدا کنند و پاسخ مورد نظر را بشدت تحت‌الشعاع قرار دهند که این مسئله در طرح‌های AUSM+، AUSM+M و AUSM+M مشهود است. در پیش‌بینی خطوط لغزشی در نقاط سه‌گانه، طرح‌های AUSM+M و SLAU، دارای کمترین لرزش هستند؛ همچنین در تداخل خطوط لغزشی قوی بوجود آمده در حالت دوبعدی، طرح‌های SLAU مینا عملکرد بهتری دارند؛ بنابراین فریم طراحی شده در طرح‌های SLAU منتج به نتایج بهتری در محل ناپیوستگی‌های لغزشی شده است Y اما در نهایت می‌توان بر اساس دقت‌های گزارش شده در پیش‌بینی نتایج در حالت یک بعدی و دو بعدی در محل‌های رخداد موج ضربه‌ای، موج انبساطی و خطوط لغزشی طرح AUSM+M را بهترین طرح در نظر گرفت. هرچند طرح‌های SLAU مینا در محل رخداد خطوط لغزشی یا تداخل آن‌ها عملکرد بهتری دارند.

### ۱۶- مراجع

- [1] Roe PL (1981) Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes. J Comput Phys 43(2): 357-372.
- [2] Toro EF, Spruce M, Speares W (1994) Restoration of the contact surface in the HLL-Riemann solver. Shock Waves 4(1): 25-34.
- [3] Peery K, Imlay S (1988) Blunt-body flow simulations. In 24th Joint Propulsion Conference.

SLAU2



شکل ۱۰- کانتور چگالی طرح‌های توسعه داده‌شده در نمای نزدیک شده

نتایج حاصل با نتایج منتشرشده مقایسه شده است. در این راستا کانتور چگالی حاصل از طرح‌های موجود و [۲۱] در لحظه  $t=0.3s$  مورد مقایسه قرار گرفته‌اند.

با مقایسه شکل‌های ۹ و ۱۰، روش‌های AUSM و AUSM+M و AUSM+M هرچند در آزمایش لوله حاوی موج ضربه‌ای یک‌بعدی بدون نوسان یا با نوسانات ناچیز هستند، در این آزمایش نوسانات شدیدتر و محسوس‌تری دارند. پاسخ‌های خانواده مبتنی بر SLAU نسبت به AUSM دارای کیفیت مطلوب‌تر و بهتری هستند، یعنی محل رخداد امواج تراکمی را با لرزش کمتری پیش‌بینی می‌کنند که از میان آن‌ها روش SLAU، به مراتب نوسانات کمتری دارد. بعلاوه اینکه این دسته در پیش‌بینی تداخل خطوط لغزش قوی و نحوه نمایش جت قارچ‌گون بوجود آمده دارای اتلافات پخشی کمتری هستند. در محل‌های ساقه یا سه‌گانه که خطوط لغزش حضور دارند، طرح‌های SLU و AUSM+M کیفیت‌های بالاتری در نمایش نتایج دارند و در نحوه نمایش نتایج این قسمت کمترین لرزش را دارا هستند؛ همچنین در خانواده مبتنی بر روش AUSM روش AUSM+M، دارای کیفیت بالاتری در تسخیر سایر پارامترهای مورد انتظار از جمله پیش‌بینی دقیق انعکاس‌های موجود در این آزمایش نسبت به سایر روش‌های این خانواده است.

- In 47th AIAA Aerospace Sciences Meeting Including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition.
- [14] Shima E, Kitamura K (2009) On AUSM-family scheme for all speeds with shock detection for carbuncle-fix. In 19th AIAA Computational Fluid Dynamics.
- [15] Zhang F, Liu J, Chen B, Zhong W (2017) A robust low-dissipation AUSM-family scheme for numerical shock stability on unstructured grids. *Int J Numer Methods Fluids* 84(3): 135-151.
- [16] Singh R, Holmes G (2012) Evaluation of an artificial dissipation and AUSM based flux formulation: AD-AUSM. In 42nd AIAA Fluid Dynamics Conference and Exhibit.
- [17] Guo S, Tao WQ (2018) A hybrid flux splitting method for compressible flow. *Numer Heat Tr B-Fund* 73(1): 33-47.
- [18] Chen SS, Cai FJ, Xue HC, Wang N, Yan C (2020) An improved AUSM-family scheme with robustness and accuracy for all Mach number flows. *Appl Math Model* 77: 1065-1081.
- [19] Chen SS, Yan C, Lin BX, Liu LY, Yu J (2018) Affordable shock-stable item for Godunov-type schemes against carbuncle phenomenon. *J Comput Phys* 373: 662-672.
- [20] Kim KH, Kim C, Rho OH (2001) Methods for the accurate computations of hypersonic flows: LAUSMPW+ scheme. *J Comput Phys* 174(1): 38-80.
- [21] Tian Z, Wang G, Zhang F, Zhang H (2020) A third-order compact nonlinear scheme for compressible flow simulations. *Int J Numer Methods Fluids*.
- [4] Van Leer B (1997) Flux-vector splitting for the Euler equation. In *Upwind and High-Resolution Schemes* (pp. 80-89). Springer, Berlin, Heidelberg.
- [5] Steger JL, Warming RF (1981) Flux vector splitting of the inviscid gasdynamic equations with application to finite-difference methods. *J Comput Phys* 40(2): 263-293.
- [6] Liou MS, Steffen Jr CJ (1993) A new flux splitting scheme. *J Comput Phys* 107(1): 23-39.
- [7] Meng-Sing L (1996) A sequel to AUSM: AUSM+. *Journal of Computational Physics* 129(1): 12-16.
- [8] Kim KH, Kim C, Rho OH (2001) Methods for the accurate computations of hypersonic flows: LAUSMPW+ scheme. *J Comput Phys* 174(1): 38-80.
- [8] Kim KH, Kim C, Rho OH (2001) Methods for the accurate computations of hypersonic flows: LAUSMPW+ scheme. *J Comput Phys* 174(1): 38-80.
- [9] Liou MS (2006) A sequel to AUSM, Part II: AUSM+ up for all speeds. *J Comput Phys* 214(1): 137-170.
- [10] Shima E, Kitamura K (2011) Parameter-free simple low-dissipation AUSM-family scheme for all speeds. *AIAA J* 49(8): 1693-1709.
- [11] Chakravarthy K, Chakraborty D (2014) Modified SLAU2 scheme with enhanced shock stability. *Comput Fluids* 100: 176-184.
- [12] Chen SS, Yan C, Lin BX, Liu LY, Yu J (2018) Affordable shock-stable item for Godunov-type schemes against carbuncle phenomenon. *J Comput Phys* 373: 662-672.
- [13] Shima E, Kitamura K (2009) On new simple low-dissipation scheme of AUSM-family for all speeds.