



بررسی ارتعاشات غیر خطی و خطای خطی سازی در میکرو حسگرهای فشار رزونانسی

مسعود رهائی فرد*

دانشیار گروه مهندسی مکانیک، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه اردکان، اردکان، ایران

یادداشت تحقیقاتی، تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۲/۱۷؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۹/۰۹/۰۸؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۹/۱۷

چکیده

در پژوهش حاضر، یک مدل دینامیکی به منظور بررسی ارتعاشات غیر خطی میکرو حسگرهای فشار رزونانسی ارائه شده است. میکرو حسگر به صورت یک میکرو ورق دایره‌ای تحت تحریک الکترواستاتیک است. اختلاف فشار در دو سمت ورق، موجب جابجایی ورق در میدان الکتریکی و تغییر فرکانس طبیعی آن می‌شود و این تغییر فرکانس طبیعی می‌تواند مبنای تخمین فشار اعمالی باشد. به منظور مدل‌سازی میکرو حسگر، با فرض تغییر شکل متقارن محوری معادله حاکم بر رفتار دینامیکی میکرو ورق در مختصات قطبی استخراج شده است. با استفاده از روش کاهش مرتبه، معادله حاکم به یک معادله دیفرانسیل معمولی غیر خطی کاهش داده شده و با به کارگیری روش لیندستد-پوانکاره، فرکانس طبیعی ارتعاشات غیر خطی میکرو ورق استخراج گردیده است. در بخش نتایج، اثر ولتاژ اعمالی و همچنین فشار محیط روی فرکانس طبیعی میکرو حسگر بررسی شده است. نتایج این پژوهش نشان می‌دهد که تخمین فشار بر اساس فرکانس خطی و صرفنظر از اثرات غیر خطی، می‌تواند منجر به خطای اندازه‌گیری قابل ملاحظه‌ای شود و با افزایش دامنه ارتعاشات میکرو ورق، این خطا افزایش می‌یابد.

کلمات کلیدی: میکرو حسگر فشار رزونانسی؛ ارتعاشات غیر خطی؛ فرکانس طبیعی؛ خطای اندازه‌گیری.

Investigation of the Nonlinear Vibration and Linearization Error in Resonant Pressure Micro Sensors

M. Rahaeifard*

Assoc. Prof., Mech. Eng., Ardakan Univ., Ardakan, Iran.

Abstract

In the present paper, a dynamic model is presented to investigate the nonlinear vibration of resonant pressure micro sensors. The device is considered as a circular micro plate under electrostatic actuation. Due to external pressure, the micro plate deflects and moves in the electric field. This motion changes the natural frequency of the micro plate and this frequency change is used to estimate the external pressure. To model the micro sensor, the equation governing the axisymmetric deflection of the micro plate is derived in polar coordinate system. This equation is reduced to a nonlinear ODE and solved utilizing Lindstedt-Poincaré method. The nonlinear natural frequency of the micro sensor is calculated and effects of applied voltage and pressure on this frequency are studied. Findings of this work reveal that estimating the external pressure based on the linear natural frequency may result in a considerable measurement error which increases as the amplitude of plate vibration increases.

Keywords: Resonant Pressure Micro Sensor; Nonlinear Vibration; Natural Frequency; Measurement Error.

۱- مقدمه

سیستم‌های میکرو الکترومکانیکی^۱ تجهیزاتی کاربردی هستند که از ترکیب اجزای کوچک مکانیکی (مانند میکرو تیر و میکرو صفحه) با مدارهای الکترونیکی حاصل می‌شوند. امروزه این سیستم‌ها به عنوان حسگر و یا عملگر در تجهیزات مختلف کاربرد دارند. میکرو حسگرهای دما [۱]، میکرو حسگرهای فشار [۲]، میکرو شتاب سنجها [۳]، حسگرهای آشکار ساز امواج مادون قرمز [۴] و میکرو ژيروسکوپها [۵]، نمونه‌هایی از حسگرهای میکرو الکترومکانیکی هستند که در بسیاری از وسایل و تجهیزات جدید به کار برده می‌شوند. این حسگرها مزایای متعددی نسبت به نمونه‌های ماکرو دارند که از جمله آنها می‌توان به وزن کم، سرعت بالا، مصرف انرژی اندک و قیمت ارزان اشاره کرد [۶ و ۷].

بخش مهم سیستم‌های میکرو الکترومکانیکی، یک میکرو سازه انعطاف پذیر مانند میکرو تیر یا میکرو ورق است. اساس کار حسگرهای میکرو الکترومکانیکی، خیز استاتیکی و یا تغییر پارامترهای دینامیکی این میکرو سازه است [۸، ۹]. در حالت اول، پارامترهای محیطی مانند دما، فشار، شتاب و غیره، موجب ایجاد خیز استاتیکی در میکرو سازه می‌شود و با اندازه‌گیری خیز استاتیکی میکرو سازه، می‌توان مقدار پارامتر محیطی (دما، فشار، شتاب و غیره) را تخمین زد. در حالت دوم، پارامترهای محیطی موجب تغییر فرکانس طبیعی میکرو سازه می‌شود و با اندازه‌گیری تغییرات فرکانس طبیعی سازه، می‌توان اندازه پارامتر محیطی را حساب کرد.

در اغلب میکرو حسگرهای فشار نیز روش کار به همین صورت است. این حسگرها به طور معمول از یک میکرو ورق انعطاف پذیر تشکیل شده‌اند که یک محیط خلاء را از فضای اطراف جدا می‌کند و تحت فشار محیط تغییر شکل می‌دهد. بسته به شیوه عملکرد، عمده این میکرو حسگرها می‌توانند به سه دسته خازنی [۱۰]، پیزوالکتریک [۱۱] و رزونانسی [۱۲] تقسیم شوند.

در میکرو حسگرهای خازنی و پیزوالکتریک، اساس کار سیستم خیز استاتیکی میکرو ورق است. در این حالت، خیز با استفاده از ظرفیت خازنی و یا لایه‌های پیزو الکتریک نصب شده روی میکرو ورق اندازه‌گیری می‌شود. از آنجا که خیز

ایجاد شده در ورق متناسب با اختلاف فشار دو سمت آن است، با دانستن خیز می‌توان مقدار فشار محیط را تخمین زد.

در میکرو حسگرهای فشار رزونانسی، تغییرات فرکانس طبیعی میکرو ورق اندازه‌گیری می‌شود و این پارامتر مبنای تخمین فشار محیط قرار می‌گیرد.

هرچند عمده حسگرهای فشار در یکی از این سه دسته قرار می‌گیرند، نمونه‌هایی دیگری هم از حسگرهای فشار طراحی و ساخته شده است. به عنوان مثال می‌توان حسگرهای ترکیبی ارتعاشی-پیزوالکتریک را نام برد [۱۳]، [۱۴].

میکرو حسگرهای فشار به گستردگی در صنایع مختلف مورد استفاده قرار می‌گیرند و نمونه‌های متنوعی از آنها طراحی و ساخته شده است. به عنوان مثال، آرفین و همکاران، یک نمونه میکرو حسگر فشار خازنی را طراحی نموده و ساختند [۱۵]. ایشان نشان دادند، حسگر ساخته شده علاوه بر مصرف انرژی کم و دقت بالا، در محدوده قابل توجهی از فشار، رفتاری خطی دارد. بالاولد و همکاران، یک میکرو حسگر فشار خازنی با محدوده کاری وسیع طراحی کردند [۱۶]. ایده اصلی کار ایشان، استفاده از چهار میکرو ورق با ضخامت‌های مختلف بود. هر میکرو ورق در محدوده‌ای از فشار قابل استفاده بود و مجموعه آنها، طیف وسیعی از فشار را اندازه‌گیری می‌کرد. پاراتاساراتی و ملارویژی یک میکرو حسگر فشار خازنی جهت سنجش ارتفاع در هواپیماها و احسام پرنده طراحی کردند [۱۷]. ایشان همچنین روشی برای ساخت این حسگر فشار پیشنهاد دادند. میسرا و همکاران، یک نمونه میکرو حسگر فشار خازنی جهت اندازه‌گیری فشار خون، طراحی کردند [۱۸]. اندازه‌گیری فشار خون با انواع دیگر میکرو حسگرهای فشار نیز انجام می‌شود. به عنوان نمونه، پانوار و همکاران یک میکرو حسگر فشار پیزو الکتریک بدین منظور طراحی کردند [۱۹]. سئو و همکاران از این نوع حسگرهای فشار برای اندازه‌گیری سرعت سیال در دمای بالای ۱۰۰۰ درجه سانتیگراد استفاده کردند [۲۰] و [۲۱].

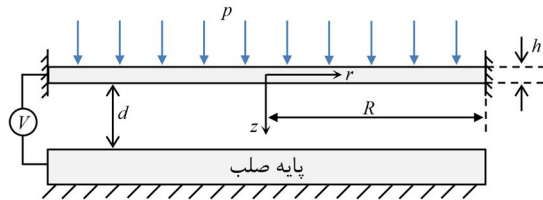
میکرو حسگرهای فشار رزونانسی نیز کاربردهای مختلفی در صنایع گوناگون دارند و نمونه‌های متنوعی از آنها طراحی و تولید شده است. یک نمونه از این میکرو حسگرهای فشار،

^۱ MicroElectroMechanical Systems (MEMS)

۲- مدل سازی میکرو حسگر فشار رزونانسی

۲-۱- استخراج معادله حاکم

در شکل ۱ یک میکرو حسگر فشار رزونانسی نشان داده شده است.



شکل ۱- یک میکرو حسگر فشار رزونانسی

قابل ذکر است، شکل ۱ نمای برش خورده میکرو حسگر را نشان می‌دهد. سیستم از یک میکرو ورق دایره‌ای به شعاع R تشکیل شده است که یک فاصله اولیه از یک پایه صلب دارد. در اثر اعمال فشار و همچنین نیروی الکترواستاتیک، میکرو ورق تغییر شکل می‌دهد و فرکانس طبیعی آن نیز تغییر می‌کند. به منظور محاسبه فرکانس طبیعی میکرو ورق، نخست معادلات حاکم بر حرکت دینامیکی سیستم استخراج می‌شود. رابطه حاکم بر حرکت دینامیکی یک ورق به صورت رابطه (۱) است [۲۵، ۲۶].

$$D\nabla^4 w + \rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(r, \theta, t) \quad (1)$$

در رابطه بالا، w خیز ورق، ρ چگالی حجمی ورق، h ضخامت ورق، q بار گسترده بر واحد سطح ورق، ∇^4 عملگر گرادیان و D سفتی خمشی ورق و به صورت رابطه (۲) است.

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2)$$

با توجه به تقارن هندسه و بارگذاری، خیز ورق به صورت متقارن محوری در نظر گرفته می‌شود. در این حالت، گرادیان مرتبه چهارم (∇^4) در مختصات قطبی به صورت رابطه (۳) قابل بیان است [۲۷ و ۲۸].

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} \quad (3)$$

و معادله حاکم بر خیز دینامیکی میکرو ورق به شرح رابطه (۴) به دست می‌آید.

$$D \left(\frac{\partial^4}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} \right) w(r, t) + \rho h \frac{\partial^2 w(r, t)}{\partial t^2} = q(r, t) \quad (4)$$

توسط ژو و همکاران ساخته شده است [۲۲]. ایشان نشان دادند حسگر ساخته شده در محدوده قابل توجهی از فشار (از ۲۰ تا ۲۶۰ کیلو پاسکال) قابل استفاده است. ین و همکاران، یک میکرو حسگر فشار رزونانسی با حساسیت کم به دما طراحی کردند [۲۳]. حسگر طراحی شده توسط ایشان در محدوده وسیعی از دما (از ۴۵- تا ۶۵ درجه سانتیگراد) قابل استفاده است. بانرجی و همکاران یک طرح بهینه به منظور بهبود حساسیت و ضریب کیفیت میکرو حسگرهای فشار رزونانسی ارائه کردند و نمونه‌ای از طرح بهینه را ساختند [۲۴].

به طور معمول، در میکرو حسگرهای فشار رزونانسی، فرض می‌شود ارتعاشات میکرو ورق خطی است و فشار محیط بر اساس فرکانس رزونانس خطی تخمین زده می‌شود. از طرفی، بدون تحلیل ارتعاشات غیر خطی میکرو ورق و تعیین خطای خطی سازی نمی‌توان در مورد اعتبار این فرض اظهار نظر کرد. از این رو، در پژوهش حاضر، ارتعاشات غیر خطی و خطای حاصل از خطی سازی در یک میکرو حسگر فشار رزونانسی بررسی شده است. حسگر از یک میکرو ورق دایره‌ای تحت تحریک الکترواستاتیک تشکیل شده است. در اثر اختلاف فشار بین دو سمت صفحه ایجاد شده و فرکانس طبیعی آن تغییر می‌کند. به منظور مدل سازی ارتعاشات میکرو حسگر، معادله حاکم بر حرکت دینامیکی ورق در مختصات قطبی نوشته شده است. با استفاده از روش کاهش مرتبه، معادله حاکم به یک معادله دیفرانسل معمولی غیر خطی کاهش داده شده است. این معادله غیر خطی با استفاده از روش لیندشتد-پوانکاره^۱ حل شده و فرکانس طبیعی ارتعاشات غیر خطی میکرو ورق استخراج گردیده است. برای حالت های خاص، نتایج روش حاضر با نتایج موجود در منابع مقایسه شده و دقت یافته‌های این پژوهش نشان داده شده است. در نهایت اثر پارامترهای مختلف مانند، ولتاژ اعمالی و فشار خارجی روی فرکانس طبیعی میکرو حسگر بررسی و در مورد خطای خطی سازی (خطای حاصل از تخمین فشار بر اساس فرکانس طبیعی خطی) بحث شده است.

¹ Lindstedt-Poincaré Method

است که به صورت مستقیم قابل حل نیست. برای حل این معادله از یک روش مبتنی بر تکرار استفاده شده است. بر این اساس، نخست خیز ورق و مشتقات اول تا سوم آن برابر صفر در نظر گرفته می‌شود. در ادامه با معلوم بودن مقدار فشار و ولتاژ، سمت راست معادله (۸) و در نتیجه مشتق چهارم خیز به صورت رابطه (۹) قابل محاسبه است.

$$w_s''''(r) = \frac{1}{D} \left(p + \frac{\varepsilon_0 V^2}{2d^2} \right) \quad (9)$$

با چهار بار انتگرال گیری عددی از معادله (۹) و ارضای شرایط مرزی بیان شده در معادله (۷)، یک حدس اولیه برای خیز و مشتقات اول تا سوم آن به دست می‌آید. با استفاده از این حدس اولیه می‌توان سمت راست معادله (۸) را دوباره حساب کرد و با انتگرال گیری عددی و ارضای شرایط مرزی، حدس دومی برای خیز و مشتقات اول تا سوم آن به دست آورد. این روند ادامه پیدا می‌کند تا زمانی که خیز همگرا شود. معیار همگرایی خیز، تغییر ناچیز خیز بیشینه ورق با ادامه روند محاسبات است. از نظر ریاضی، معیار همگرایی به صورت رابطه (۱۰) در نظر گرفته شده است.

$$\left| \frac{w_s(0)|_{i+1} - w_s(0)|_i}{d} \right| < 10^{-8} \quad (10)$$

که i تعداد دفعات تکرار محاسبات است.

۲-۳- محاسبه فرکانس طبیعی میکرو ورق

به منظور محاسبه فرکانس طبیعی، خیز کلی میکرو ورق به صورت مجموع خیز استاتیکی و حرکت دینامیکی (ارتعاشی) حول تعادل استاتیکی در نظر گرفته می‌شود. بنابراین

$$w(r, t) = w_s(r) + w_d(r, t) \quad (11)$$

با قرار دادن رابطه (۱۱) در معادله (۶) و بسط تیلور بار الکترواستاتیک حول تعادل استاتیکی ورق (حول $w_d = 0$) معادله (۱۲) حاصل می‌شود.

$$D \left(\frac{\partial^4}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} \right) (w_s + w_d) + \rho h \frac{\partial^2 w_d}{\partial t^2} = p + \varepsilon_0 V^2 \left(\frac{1}{2(d - w_s)^2} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(j+1)(w_d)^j}{2(d - w_s)^{j+2}} \right) \quad (12)$$

بار گسترده وارد بر ورق از دو بخش فشار (p) و بار الکترواستاتیک (f_e) تشکیل شده است. بار الکترواستاتیک بر واحد سطح ورق از رابطه (۵) قابل محاسبه است [۲۹].

$$f_e = \frac{\varepsilon_0 V^2}{2(d - w)^2} \quad (5)$$

در رابطه بالا، پارامتر V بیانگر ولتاژ اعمالی بین ورق و پایه، d بیانگر فاصله اولیه بین ورق و پایه و ε_0 ضریب گذردهی خلاء است ($\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{C}^2 \text{N}^{-1} \text{m}^{-2}$).

در نهایت، معادله (۴) به صورت رابطه (۶) نوشته می‌شود.

$$D \left(\frac{\partial^4}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} \right) w(r, t) + \rho h \frac{\partial^2 w(r, t)}{\partial t^2} = p + \frac{\varepsilon_0 V^2}{2(d - w)^2} \quad (6)$$

برای یک ورق دایره‌ای متقارن با تکیه گاه ثابت در اطراف و بدون بار نقطه‌ای در مرکز، شرایط مرزی به صورت زیر قابل بیان است [۲۶].

$$\left. \frac{\partial w}{\partial r} \right|_{r=0} = \left(r \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} + \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) \Big|_{r=0} = 0$$

$$w(R) = \left. \frac{\partial w}{\partial r} \right|_{r=R} = 0 \quad (7)$$

اساس کار حسگرهای رزونانسی، حرکت دینامیکی ورق حول خیز استاتیکی (تعادل استاتیکی) است. در این حالت، با تغییر فشار خارجی، خیز استاتیکی و فرکانس طبیعی ارتعاشات میکرو ورق حول تعادل استاتیکی تغییر می‌کند و همین تغییر فرکانس به عنوان شاخصی برای تخمین فشار خارجی استفاده می‌شود. در اینجا نخست تعادل استاتیکی میکرو ورق تحت فشار خارجی و بار الکترواستاتیک بررسی شده و در ادامه ارتعاشات میکرو ورق حول تعادل استاتیکی مطالعه گردیده است.

۲-۲- محاسبه خیز استاتیکی میکرو ورق

با حذف جمله مربوط به اینرسی از معادله (۶) و انجام چند عمل ریاضی ساده، معادله حاکم بر خیز استاتیکی میکرو ورق به صورت رابطه (۸) نوشته می‌شود.

$$w_s'''' = \frac{1}{D} \left(p + \frac{\varepsilon_0 V^2}{2(d - w_s)^2} \right) - \frac{2w_s''''}{r} + \frac{w_s''}{r^2} - \frac{w_s'}{r^3} \quad (8)$$

در معادله بالا، w_s خیز استاتیکی و علامت پریم ($'$) بیانگر مشتق نسبت به r است. رابطه (۸) یک معادله غیر خطی

صرفنظر کرد و فرکانس طبیعی ارتعاشات خطی میکرو حسگر را به صورت رابطه (۱۸) محاسبه کرد.

$$\Omega_L = \sqrt{\frac{K - a_1}{M}} \quad (18)$$

۲-۴- بررسی ارتعاشات غیر خطی میکرو ورق

در بخش ۲-۳، به منظور محاسبه فرکانس طبیعی خطی میکرو ورق، از جملات غیر خطی معادله (۱۷) صرفنظر شد. حال به منظور بررسی اعتبار این خطی سازی، نیاز است با در نظر گرفتن جملات غیر خطی، رفتار دینامیکی سیستم بررسی گردد تا معلوم شود فرض ارتعاشات خطی تا چه اندازه معتبر است. تنها با بررسی ارتعاشات غیر خطی سیستم می‌توان مشخص کرد که در چه محدوده‌ای از حرکت، اثرات جملات غیر خطی ناچیز است.

در این بخش برای بررسی ارتعاشات غیر خطی ورق، از روش لیندشتد-پوانکاره [۳۰-۳۲] استفاده می‌شود. با تعریف زمان بی بعد T ، معادله (۱۷) شکل بی بعد زیر نوشته می‌شود.

$$\frac{d^2\gamma}{dT^2} + \gamma = \frac{1}{M\Omega_L^2} (a_2\gamma^2 + a_3\gamma^3 + \dots), \quad T = \frac{t}{t^*}, t^* = \frac{1}{\Omega_L} \quad (19)$$

از رابطه (۱۸) محاسبه می‌شود. بر اساس روش لیندشتد-پوانکاره، متغیر τ به صورت رابطه (۲۰) تعریف می‌شود.

$$\tau = (1 + \varepsilon\beta_1 + \varepsilon^2\beta_2 + \dots)T = (1 + \varepsilon\beta_1 + \varepsilon^2\beta_2 + \dots)\Omega_L t \quad (20)$$

که β ها اعدادی ثابت و ε یک پارامتر بی بعد و کوچک است. بر این اساس، مشتق مرتبه دوم زمانی به صورت زیر به مشتق نسبت به τ مرتبط می‌شود.

$$\frac{d^2}{dT^2} = (1 + \varepsilon\beta_1 + \varepsilon^2\beta_2 + \dots)^2 \frac{d^2}{d\tau^2} \quad (21)$$

همچنین تابع γ به شکل زیر بسط داده می‌شود.

$$\gamma(t) = \varepsilon\gamma_1(\tau) + \varepsilon^2\gamma_2(\tau) + \dots \quad (22)$$

با جایگذاری معادلات (۲۱) و (۲۲) در رابطه (۱۹) و جداسازی ضرایب توان‌های مشابه ε ، معادلات زیر به دست می‌آید.

$$\text{order } \varepsilon^1: \ddot{\gamma}_1 + \gamma_1 = 0 \quad (23)$$

$$\text{order } \varepsilon^2: \ddot{\gamma}_2 + \gamma_2 = -2\beta_1 \dot{\gamma}_1 + \frac{a_2\gamma_1^2}{M\Omega_L^2} \quad (24)$$

با جایگذاری مشتق چهارم خیز استاتیکی از رابطه (۸) در معادله (۱۲)، این معادله به صورت رابطه (۱۳) ساده می‌شود.

$$D \left(\frac{\partial^4 w_d}{\partial r^4} + \frac{2}{r} \frac{\partial^3 w_d}{\partial r^3} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w_d}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial w_d}{\partial r} \right) + \rho h \frac{\partial^2 w_d}{\partial t^2} = \varepsilon_0 V^2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(j+1)(w_d)^j}{2(d-w_s)^{j+2}} \quad (13)$$

در ادامه، خیز دینامیکی میکرو ورق به صورت رابطه (۱۴) فرض می‌شود.

$$w_d(r, t) = w_s(r)\gamma(t) \quad (14)$$

بنابراین، رابطه (۱۳) به شکل (۱۵) بازنویسی می‌شود.

$$D \left(\frac{d^4 w_s}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 w_s}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 w_s}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dw_s}{dr} \right) \gamma + (\rho h w_s) \frac{d^2 \gamma}{dt^2} = \varepsilon_0 V^2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(j+1)(w_s)^j}{2(d-w_s)^{j+2}} \quad (15)$$

شکل مد اول ارتعاشات عرضی ورق دایره‌ای متقارن به صورت رابطه (۱۶) است [۲۵].

$$\psi(r) = I_0(\eta R)J_0(\eta r) - J_0(\eta R)I_0(\eta r) \quad (16)$$

که I_0 و J_0 به ترتیب توابع بسل و بسل تعمیم یافته نوع اول هستند. با ضرب شکل مد ورق در معادله (۱۵) و انتگرال گیری از رابطه حاصل روی سطح ورق، معادله حاکم بر ارتعاشات میکرو ورق و همچنین جرم و سفتی معادل سازه به صورت رابطه (۱۷) به دست می‌آید.

$$M \frac{d^2 \gamma}{dt^2} + K \gamma = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \gamma^j = a_1 \gamma + O(\gamma^2)$$

$$M = \rho h \int_0^R w_s \psi r dr$$

$$K = D \int_0^R \left(w_s'''' + \frac{2w_s''''}{r} - \frac{w_s''}{r^2} + \frac{w_s''''}{r^3} \right) \psi r dr$$

$$a_j = \frac{(j+1)\varepsilon_0 V^2}{2} \int_0^R \frac{(w_s)^j \psi}{(d-w_s)^{j+2}} r dr \quad (17)$$

در نهایت، با فرض ارتعاشات کوچک حول تعادل استاتیکی میکرو ورق، می‌توان از جملات مرتبه دو و بالاتر γ

با داشتن $\gamma(t)$ و با استفاده از رابطه (۱۴) می‌توان پاسخ دینامیکی سیستم را محاسبه کرد. بیشترین تغییر شکل دینامیکی در ورق زمانی اتفاق می‌افتد که تابع $\gamma(t)$ بیشینه گردد. در این صورت

$$w_d = \varepsilon A_0 w_s(r) \quad (35)$$

حال اگر در این حالت خیز دینامیکی نقطه وسط ورق (دامنه نوسان نقطه وسط ورق) برابر با λ باشد، آنگاه

$$\lambda = \varepsilon A_0 w_s(0) \Rightarrow \varepsilon A_0 = \frac{\lambda}{w_s(0)} \quad (36)$$

و معادله حرکت دینامیکی ورق به شکل زیر حاصل می‌شود.

$$w_d(r, t) = \frac{\lambda w_s(r)}{w_s(0)} \cos(\Omega_{NL} t + \varphi_0) + O(\varepsilon^2) \quad (37)$$

که Ω_{NL} فرکانس طبیعی غیر خطی سیستم است و طبق روابط (۳۴) و (۳۶) به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\Omega_{NL} = \Omega_L \left[1 - \left(\frac{\lambda}{w_s(0)} \right)^2 \left(\frac{5a_2^2}{12M^2\Omega_L^4} + \frac{3a_3}{8M\Omega_L^2} \right) \right] \quad (38)$$

از رابطه بالا نتیجه می‌شود که فرکانس طبیعی، تابع دامنه حرکت است که این مسئله نتیجه ذات غیر خطی سیستم است. در سیستم‌های غیر خطی، سفتی سیستم تابع جابجایی است. به عبارت دیگر در این سیستم‌ها رابطه بین نیرو و جابجایی غیر خطی است. از این رو، با تغییر دامنه حرکت، سفتی سیستم و در نتیجه فرکانس طبیعی عوض می‌شود؛ بنابراین در این سیستم‌ها فرکانس طبیعی تابع دامنه حرکت خواهد بود. در میکرو ورق حاضر، نیروی الکترواستاتیک رابطه غیر خطی با جابجایی ورق دارد و همین عامل موجب ایجاد رفتار غیر خطی و وابستگی سفتی و فرکانس طبیعی به دامنه می‌شود. اگر دامنه ارتعاش بسیار کوچک باشد، اختلاف بین فرکانس طبیعی خطی و غیر خطی سیستم ناچیز می‌شود. مسأله مهم این است که این دامنه باید چه مقدار کوچک باشد تا بتوان فشار را بر مبنای فرکانس طبیعی خطی تخمین زد.

۳- نتایج و بحث

به منظور استخراج نتایج عددی یک میکرو حسگر فشار با مشخصات ارایه شده در جدول ۱ در نظر گرفته می‌شود.

$$\text{order } \varepsilon^3: \ddot{\gamma}_3 + \gamma_3 = -(\beta_1^2 + 2\beta_2) \dot{\gamma}_1 - 2\beta_1 \dot{\gamma}_2 + \frac{2a_2\gamma_1\gamma_2 + a_3\gamma_1^3}{M\Omega_L^2} \quad (25)$$

که نقطه در بالای پارامترها ($\dot{\gamma}$) بیانگر مشتق نسبت به τ است. پاسخ معادله (۲۳) به صورت زیر است.

$$\gamma_1(\tau) = A_0 \cos(\tau + \varphi_0) \quad (26)$$

که A_0 و φ_0 دامنه و فاز ارتعاشات هستند. با قرار دادن معادله (۲۶) در رابطه (۲۴)، معادله (۲۷) حاصل می‌شود.

$$\ddot{\gamma}_2 + \gamma_2 = 2A_0\beta_1 \cos(\tau + \varphi_0) + \frac{a_2 A_0^2}{2M\Omega_L^2} \{1 + \cos(2\tau + 2\varphi_0)\} \quad (27)$$

صفر کردن جملات دیرپا^۱ (ضرایب $\cos(\tau + \varphi_0)$) در معادله (۲۷) رابطه زیر را به دست می‌دهد.

$$2A_0\beta_1 = 0 \Rightarrow \beta_1 = 0 \quad (28)$$

در ادامه پاسخ خصوصی معادله (۲۴) به شکل زیر به دست می‌آید.

$$\gamma_2(\tau) = \frac{a_2 A_0^2}{6M\Omega_L^2} \{3 - \cos(2\tau + 2\varphi_0)\} \quad (29)$$

با قرار دادن روابط (۲۶)، (۲۸) و (۲۹) در معادله (۲۵) و ساده سازی رابطه حاصل و در نهایت صفر قراردادن جملات دیرپا، معادله (۳۰) به دست می‌آید.

$$A_0^3 \left(\frac{10a_2^2}{M^2\Omega_L^4} + \frac{9a_3}{M\Omega_L^2} \right) + 24A_0\beta_2 = 0 \quad (30)$$

که نتیجه می‌دهد:

$$\beta_2 = -A_0^2 \left(\frac{5a_2^2}{12M^2\Omega_L^4} + \frac{3a_3}{8M\Omega_L^2} \right) \quad (31)$$

قرار دادن معادله (۳۱) در معادله (۲۰) می‌دهد:

$$\tau = \left\{ 1 - \varepsilon^2 A_0^2 \left(\frac{5a_2^2}{12M^2\Omega_L^4} + \frac{3a_3}{8M\Omega_L^2} \right) \right\} \Omega_L t + O(\varepsilon^3) \quad (32)$$

بر اساس معادله (۲۲) می‌توان نوشت:

$$\gamma(t) = \varepsilon \gamma_1(\tau) + O(\varepsilon^2) \quad (33)$$

و با توجه به معادلات (۳۲) و (۲۶) رابطه زیر به دست می‌آید.

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= \varepsilon A_0 \cos \left\{ \Omega_L \left[1 - \varepsilon^2 A_0^2 \left(\frac{5a_2^2}{12M^2\Omega_L^4} + \frac{3a_3}{8M\Omega_L^2} \right) \right] t + \varphi_0 \right\} \\ &+ O(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (34)$$

^۱ Secular Terms

۳-۱- اعتبار سنجی

در این بخش، به منظور بررسی درستی و دقت روش حل ارائه شده، نتایج کار حاضر در حالت خاص با نتایج موجود در منابع مقایسه شده است. نخست الگوریتم ارائه شده برای محاسبه خیز استاتیکی میکرو ورق بررسی می‌شود. خیز استاتیکی یک ورق دایره‌ای با تکیه گاه ثابت و تحت فشار یکنواخت p ، با رابطه (۳۹) قابل محاسبه است [۲۶ و ۳۳].

$$w_s(r) = \frac{p}{64D} (R^2 - r^2)^2 \quad (39)$$

در شکل ۲ نتایج روش حاضر با نتایج رابطه (۳۹) مقایسه شده است.

همانگونه که در شکل دیده می‌شود، یافته‌های این پژوهش، تطبیق بسیار خوبی با نتایج رابطه (۳۹) دارد که این تطبیق بیانگر دقت بالای روش عددی ارائه شده در این مقاله است.

در ادامه، فرکانس طبیعی میکرو ورق با نتایج تحلیلی مقایسه می‌شود. فرکانس پایه ارتعاشات خطی ورق دایره‌ای با تکیه گاه ثابت (بر حسب رادیان بر ثانیه) از رابطه (۴۰) قابل محاسبه است [۲۶].

$$\Omega_L = \frac{10.2158}{R^2} \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \quad (40)$$

در جدول ۲، فرکانس خطی میکرو ورق بر اساس رابطه (۴۰) محاسبه گردیده و با یافته‌های پژوهش حاضر مقایسه شده است.

قابل ذکر است، در روش ارائه شده در این پژوهش، جرم و سفتی مودال با انتگرال گیری از خیز استاتیکی محاسبه می‌شود؛ بنابراین، به منظور ایجاد خیز استاتیکی بار اندکی بر روی ورق فرض شده است. مقدار بار بسیار کوچک در نظر گرفته شده تا تاثیر قابل توجهی بر فرکانس طبیعی نداشته باشد.

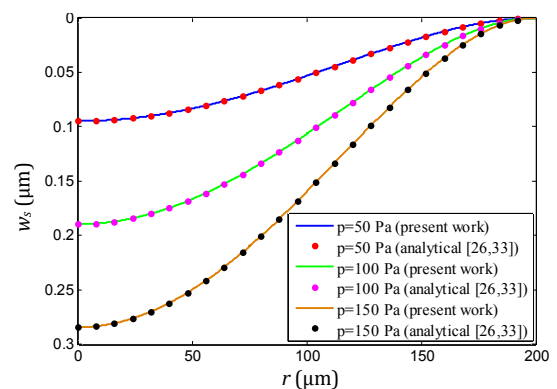
مطابق جدول ۲، نتایج پژوهش حاضر در هر سه حالت بارگذاری کوچک با نتایج تحلیلی (که مربوط به ورق بدون بار گذاری است) حدود ۰/۰۱ درصد اختلاف دارد؛ بنابراین می‌توان گفت، روش حاضر با دقت بسیار خوبی فرکانس طبیعی ورق را محاسبه می‌کند.

۳-۲- فرکانس طبیعی خطی میکرو ورق

در شکل ۳، فرکانس طبیعی خطی میکرو ورق بر حسب فشار اعمالی و به ازای ولتاژهای مختلف نشان داده شده است. این نمودار، مهمترین مشخصه میکرو حسگرهای فشار رزونانسی است و شیوه کارکرد میکرو حسگر را می‌توان به خوبی در این شکل دید. مطابق این نمودار، با اعمال فشار فرکانس طبیعی میکرو ورق کاهش می‌یابد و همین کاهش فرکانس طبیعی می‌تواند در تخمین فشار مورد استفاده قرار گیرد؛ همچنین

جدول ۱- مشخصات میکرو حسگر فشار رزونانسی

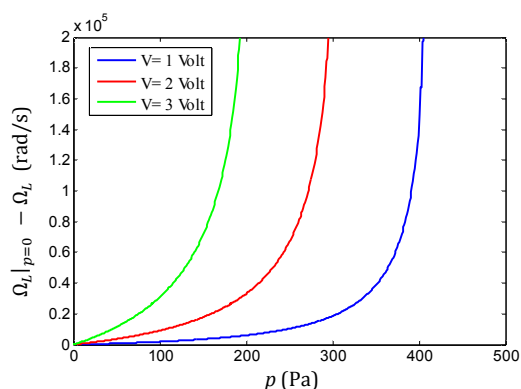
مقدار	مشخصه
۲۰۰ μm	شعاع میکرو ورق (R)
۱ μm	ضخامت میکرو ورق (h)
۱۵۰ GPa	مدول الاستیک (E)
۲۳۰۰ kg/m^3	چگالی (ρ)
۰/۲۳	نسبت پواسون (ν)
۱ μm	فاصله اولیه ورق و پایه (d)



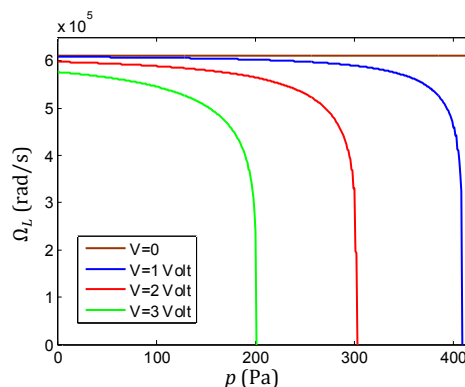
شکل ۲- مقایسه خیز استاتیکی میکرو ورق با نتایج تحلیلی

جدول ۲- مقایسه فرکانس طبیعی ورق با نتایج تحلیلی

ولتاژ (ولت)	فشار (پاسکال)	فرکانس طبیعی (پژوهش حاضر)	فرکانس طبیعی (تحلیلی [۲۶])
۰	۰/۰۱	۶۱۱۸۶۴/۰ rad/s	
۰/۰۱	۰	۶۱۱۸۶۳/۹ rad/s	۶۱۱۷۹۴/۵ rad/s
۰/۰۱	۰/۰۱	۶۱۱۸۶۳/۷ rad/s	

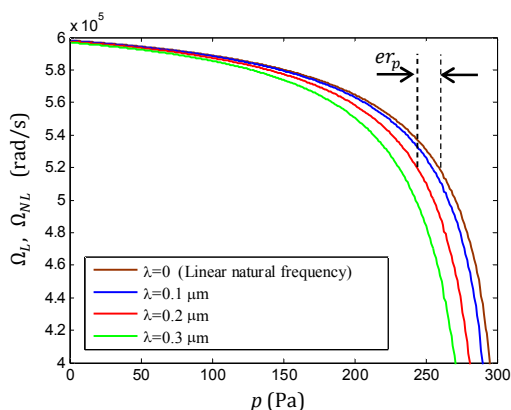


شکل ۴- تغییرات فرکانس طبیعی خطی میکرو ورق در اثر اعمال فشار



شکل ۳- فرکانس طبیعی خطی میکرو ورق بر حسب فشار

۳-۳- فرکانس طبیعی غیر خطی و خطای اندازه گیری همانگونه که از رابطه (۳۸) استنباط می‌شود، فرکانس طبیعی غیرخطی میکرو ورق از فرکانس خطی کمتر است و با افزایش دامنه نوسان، فرکانس طبیعی غیر خطی کاهش می‌یابد. این پدیده، رفتار غیر خطی نیروی الکترواستاتیک است. این نیرو هم جهت با خیز سازه است و با افزایش خیز، مقدار آن افزایش می‌یابد. به بیان دیگر این نیرو یک سفتی منفی در سیستم ایجاد می‌کند که اندازه آن با افزایش دامنه نوسان افزایش می‌یابد. از این رو، با بزرگ شدن دامنه نوسان، سفتی کل سیستم (مجموع سفتی سازه‌ای و سفتی حاصل از بار الکترواستاتیک) کاهش می‌یابد و همین امر موجب کاهش فرکانس طبیعی غیر خطی می‌شود. به منظور مقایسه مقادیر این دو فرکانس، در شکل ۵، با فرض ولتاژ ۲ ولت، فرکانس



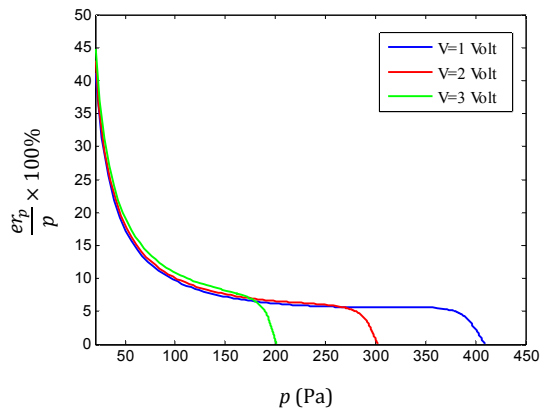
شکل ۵- مقایسه فرکانس طبیعی خطی و غیر خطی میکرو ورق

اثر اعمال ولتاژ نیز در این شکل قابل مشاهده است. در حالتی که ولتاژی به سیستم اعمال نشود، اختلاف فشار تغییری در فرکانس طبیعی سیستم ایجاد نمی‌کند، اما در حضور ولتاژ، اعمال فشار کاهش قابل توجهی در فرکانس طبیعی ایجاد می‌کند. در واقع دلیل کاهش فرکانس، جابجایی میکرو ورق در میدان الکتریکی و کاهش پتانسیل الکتریکی آن است.

با افزایش فشار اعمالی به سیستم، فرکانس کاهش بیشتری می‌یابد تا جایی که مقدار آن صفر می‌شود. این نقطه، فشار ناپایداری سیستم است و از نظر فیزیکی میکرو ورق به سمت پایه ثابت حرکت می‌کند و با آن تماس پیدا می‌کند و در این حالت عملکرد سیستم متوقف می‌شود. این مساله باید در به کارگیری میکرو حسگرهای فشار در نظر گرفته شود و فشار کاری سیستم باید فاصله قابل قبولی با فشار ناپایداری داشته باشد.

همانگونه که گفته شد، پارامتر مهم در این شکل، اختلاف میان فرکانس طبیعی میکرو ورق قبل و پس از اعمال فشار است. در شکل ۴، اندازه این اختلاف فرکانس (قدر مطلق اختلاف فرکانس) نمایش داده شده است.

در شکل دیده می‌شود که در ولتاژهای بالاتر، اعمال فشار موجب تغییرات بزرگتری در فرکانس طبیعی می‌شود. این بدان معنا است که اندازه‌گیری فشار در ولتاژهای بالاتر راحت‌تر است و می‌توان فشار را با دقت بیشتری تخمین زد. از طرفی، با افزایش ولتاژ، فشار ناپایداری (و به تبع آن محدوده کاری سیستم) کاهش می‌یابد؛ بنابراین افزایش ولتاژ اعمالی از یک طرف دقت اندازه‌گیری را بالاتر می‌برد و از طرفی موجب کاهش محدوده کاری سیستم می‌شود.



شکل ۶- خطای نسبی تخمین فشار بر مبنای فرکانس طبیعی خطی

در این حالت فرکانس خطی را مبنای تخمین فشار قرار داد. خطای نسبی در فشارهای کم مقدار بالایی است؛ همچنین در محدوده وسیعی از دامنه کاری سیستم، خطای اندازه‌گیری بین ۵٪ تا ۱۵٪ است که مقادیر زیادی هستند.

در شکل مشاهده می‌شود که در بخش عمده دامنه کاری سیستم، تغییر ولتاژ اعمالی اثر قابل ملاحظه‌ای بر خطای نسبی ندارد، اما افزایش فشار موجب کاهش خطای نسبی می‌شود. قابل ذکر است، آنچه در شکل ۶ نمایش داده شده، خطای نسبی (نسبت خطای تخمین فشار به اندازه فشار) است، نه مقدار مطلق خطا؛ بنابراین اگرچه خطای نسبی با افزایش فشار کاهش می‌یابد، ممکن است خطای مطلق افزایش یابد.

در بسیاری از موارد، بیشینه خطای مطلق کمیت مهمی در حسگرها است. برای یک میکرو حسگر فشار، یک پارامتر مهم بیشینه خطای مطلق در محدوده کاری سیستم است. این پارامتر همان دقت اندازه‌گیری میکرو حسگر است. در شکل ۷، بیشینه خطای اندازه‌گیری (با به عبارتی دقت میکرو حسگر) بر حسب دامنه نوسان مرکز میکرو ورق نمایش داده شده است.

در شکل دیده می‌شود که ولتاژ اعمالی اثر قابل توجهی بر بیشینه خطا دارد. بر اساس این شکل می‌توان حداکثر دامنه نوسان میکرو ورق را به گونه‌ای تعیین کرد که خطای اندازه‌گیری (اختلاف میان تخمین فشار بر اساس فرکانس خطی میکرو ورق و فشار واقعی) از مقدار مشخصی کمتر باشد. به عنوان نمونه میکرو حسگر تحت ولتاژ ۲ ولت فرض

طبیعی غیر خطی میکرو ورق بر حسب فشار اعمالی ترسیم شده و با فرکانس طبیعی خطی مقایسه گردیده است.

در شکل دیده می‌شود که با افزایش دامنه نوسان نقطه وسط میکرو ورق (λ)، اختلاف میان فرکانس‌ها افزایش می‌یابد. همچنین با افزایش فشار نیز این اختلاف زیاد می‌شود. همان گونه که پیشتر گفته شد، افزایش دامنه نوسان و یا خیز میکرو ورق، موجب بزرگتر شدن اندازه سفتی حاصل از بار الکترواستاتیک می‌شود. با توجه به منفی بودن این سفتی، می‌توان نتیجه گرفت که افزایش دامنه نوسان و یا افزایش خیز میکرو ورق (در اثر فشار اعمالی)، موجب کاهش سفتی کلی سیستم و در نتیجه کاهش فرکانس طبیعی غیر خطی می‌شود. از آنجا که فرکانس طبیعی غیر خطی کمتر از فرکانس طبیعی خطی است، این دو عامل (افزایش دامنه نوسان و افزایش فشار) موجب افزایش اختلاف میان این دو فرکانس می‌شود.

از طرفی، در این میکرو حسگرها، فشار محیط بر اساس فرکانس طبیعی میکرو ورق تخمین زده می‌شود و این اختلاف فرکانس می‌تواند منجر به خطای اندازه‌گیری گردد. به عنوان نمونه فرض می‌شود که فرکانس طبیعی میکرو ورق برابر ۵۲۰۰۰۰ رادیان بر ثانیه و دامنه نوسان مرکز ورق هم 0.2 میکرو متر ($\lambda=0.2 \mu\text{m}$) باشد. با توجه به شکل ۵، بر اساس تحلیل غیر خطی، فشار وارد به ورق ۲۴۴ پاسکال است. حال اگر فرکانس خطی مبنای تخمین فشار قرار گیرد، فشار وارد به ورق ۲۵۹ پاسکال محاسبه می‌شود. به عبارتی، خطی سازی خطایی معادل ۱۵ پاسکال در تخمین فشار ایجاد کرده است (این خطا در نمودار با ep_p نشان داده شده است). در واقع فرض ارتعاشات خطی ورق و نادیده گرفتن رفتار غیر خطی میکرو سازه، موجب ایجاد این خطا در اندازه‌گیری فشار شده است. حال اگر دامنه ارتعاش ورق کوچک شود، مقدار خطا کاهش و اگر دامنه ارتعاش بیشتر شود مقدار آن افزایش می‌یابد.

به منظور بررسی دقیق تر این موضوع، در شکل ۶، با در نظر گرفتن $\lambda=0.2 \mu\text{m}$ ، خطای نسبی اندازه‌گیری فشار (بر حسب درصد) به ازای مقادیر مختلف ولتاژ ترسیم شده است.

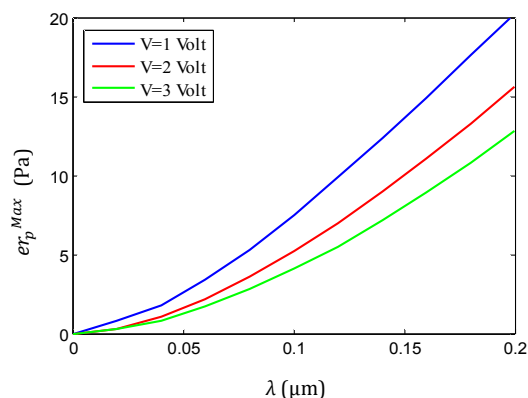
با توجه به شکل می‌توان نتیجه گرفت که خطای اندازه‌گیری در حالت $\lambda=0.2 \mu\text{m}$ قابل توجه است و نمی‌توان

سفتی پیش بینی شده بر اساس نظریه‌های رایج باشد [۳۴ و ۳۵]. برخی نظریه‌های جدید مانند نظریه گرادیان کرنش و نظریه کوپل تنش اصلاح شده می‌توانند اثرات اندازه را در مدل‌سازی میکرو سازه‌ها لحاظ نمایند [۳۴ و ۳۵]. بر اساس این نظریه‌ها، پارامتر جدیدی به نام مقیاس طول^۱ برای هر ماده تعریف می‌گردد. پژوهش‌ها نشان می‌دهد، در صورتی که ضخامت ورق در حدود مقیاس طول ماده تشکیل دهنده آن باشد، اثرات اندازه مهم هستند؛ اما اگر ضخامت ورق به میزان قابل توجهی بزرگتر مقیاس طول باشد (مثلاً حدود ده برابر یا بیشتر باشد)، می‌توان با تقریب خوبی از اثرات اندازه صرف‌نظر کرد [۳۴]؛ بنابراین نتایج این پژوهش در مواردی دارای اعتبار است که ضخامت ورق به مقدار قابل توجهی بزرگتر از مقیاس طول ماده تشکیل دهنده ورق باشد.

پ) سازه ای که در اینجا بررسی شده است، یک ورق دایره ای تحت بار الکترواستاتیک است. قطر این ورق ۴۰۰ میکرومتر است و بیشینه خیز ورق در حالت پایدار ۰/۵ میکرومتر (حدود یک هشتم ضخامت ورق) است؛ بنابراین خیز در مقایسه با ابعاد سازه بسیار کوچک است و می‌توان میکرو ورق را خطی فرض کرد. از طرفی بار الکترواستاتیک رابطه‌ای غیر خطی با خیز دارد، همین مساله موجب رفتار غیر خطی سیستم می‌شود. در این حالت سیستم به صورت یک سازه خطی تحت بار غیر خطی خواهد بود [۳۶ و ۳۷]. بدیهی است، اگر خیز میکرو ورق بزرگ باشد ممکن است، سازه نیز وارد محدوده غیر خطی گردد. در این صورت باید با در نظر گرفتن خیز بزرگ، معادله حاکم را بازنویسی کرد.

۴- نتیجه گیری

در این مقاله، رفتار دینامیکی و ارتعاشات غیر خطی میکرو حسگرهای فشار رزونانسی مورد بررسی قرار گرفت. حسگر به صورت یک میکرو ورق دایره‌ای تحت تحریک الکترواستاتیک



شکل ۷- بیشینه خطای تخمین فشار بر حسب دامنه نوسان مرکز ورق

می‌شود. اگر فرکانس طبیعی خطی ملاک اندازه‌گیری فشار باشد و دقت اندازه‌گیری معادل ۲ پاسکال مد نظر باشد، باید دامنه ارتعاشات میکرو ورق (λ) کمتر از ۰/۰۶ میکرومتر باشد. به همین صورت می‌توان دامنه ارتعاشات مجاز را برای دیگر مقادیر ولتاژ و دقت حسگر به دست آورد. بر اساس این نمودار می‌توان محدوده مجاز ارتعاشات میکرو ورق را تعیین کرد، به گونه‌ای که بتوان با فرض ارتعاشات خطی، فشار را با دقت قابل قبولی تخمین زد.

۳-۴- محدودیت‌های مدل ارایه شده

مدل ارایه شده در این مقاله، مبتنی بر سه فرض مهم به شرح زیر است.

الف) خیز دینامیکی میکرو ورق به صورت متقارن محوری فرض شده است. این فرض بر اساس تقارن بار و هندسه میکرو ورق اتخاذ گردیده است. اگر این موارد در سیستم برقرار نباشد، مودهای ارتعاشی غیر متقارن نیز فعال خواهند شد و این مودها دارای فرکانس‌های طبیعی متفاوتی هستند؛ بنابراین، در صورتی که ارتعاش میکرو ورق نامتقارن باشد، نمی‌توان نتایج حاضر را به کار گرفت.

ب) در پژوهش حاضر از اثرات اندازه در مدل‌سازی میکرو ورق صرف‌نظر شده است. پژوهش‌های انجام شده در سال‌های اخیر نشان داده است که در ابعاد کوچک ممکن است، سفتی میکرو سازه‌ها بیشتر از

¹ Length Scale Parameter

[7] Gomez M, Moulton DE, Vella D (2017) Delayed pull-in transitions in overdamped MEMS devices. *J Micromech and Microeng* 28(1): 015006.

[8] Sun Y, Nelson BJ (2007) MEMS capacitive force sensors for cellular and flight biomechanics. *Biomed Mater* 2(1): S16.

[9] Bouchaala A, Nayfeh AH, Younis MI (2017) Analytical study of the frequency shifts of micro and nano clamped-clamped beam resonators due to an added mass. *Meccanica* 52(1-2): 333-348.

[10] Park SW, Das PS, Chhetry A, Park JY (2017) A flexible capacitive pressure sensor for wearable respiration monitoring system. *IEEE Sens J* 17(20): 6558-6564.

[11] Karumuthil SC, Singh K, Valiyaneerilakkal U, Akhtar J, Varghese S (2020) Fabrication of poly (vinylidene fluoride-trifluoroethylene)-Zinc oxide based piezoelectric pressure sensor. *Sens Actuators A* 303: 111677.

[12] Fu X, Xu L (2019) Multi-field coupled chaotic vibration for a micro resonant pressure sensor. *Appl Math Modell* 72: 470-485.

[13] Sujan Y, Uma G, Umapathy M (2016) Design and testing of piezoelectric resonant pressure sensor. *Sens Actuators A* 250: 177-186.

[14] Yenuganti S, Gandhi U, Umapathy M (2017) Piezoelectric microresonant pressure sensor using aluminum nitride. *J Micro/Nanolithogr, MEMS MOEMS* 16(2): 025001.

[15] Arefin MS, Redouté JM, Yuce MR (2016) A low-power and wide-range MEMS capacitive sensors interface IC using pulse-width modulation for biomedical applications. *IEEE Sens J* 16(17): 6745-6754.

[16] Balavalad KB, Sheeparamatti B, Math VB (2017) Design and simulation of MEMS capacitive pressure sensor array for wide range pressure measurement. *Int J Comput Appl* 163(6): 39-46.

[17] Parthasarathy E, Malarvizhi S (2018) Modeling analysis and fabrication of MEMS capacitive differential pressure sensor for altimeter application. *J Chin Inst Eng* 41(3): 206-215.

[18] Mishra RB, Kumar SS, Mukhiya R (2019) Design and simulation of capacitive pressure sensor for blood pressure sensing application. *Recent Trends in Communication, Computing, and Electronics*. Springer, Singapore.

[19] Panwar LS, Kala S, Panwar V, Panwar SS, Sharma S (2017) Design of MEMS piezoelectric blood pressure sensor. *Proc IEEE 3rd Int Conf Adv Comp Commun Autom (ICACCA)*.

[20] Seo Y, Kim D, Hall NA (2019) Piezoelectric pressure sensors for hypersonic flow measurements at high-temperatures. *J Acoust Soc Am* 146(4): 2997-2997.

و فشار خارجی است. نخست معادله حاکم بر حرکت میکرو ورق در مختصات قطبی استخراج گردید و با استفاده از روش کاهش مرتبه به یک معادله دیفرانسیل معمولی غیر خطی کاهش داده شد. با حل این معادله، فرکانس طبیعی غیر خطی میکرو حسگر استخراج شد و با فرکانس طبیعی خطی مقایسه گردید. در ادامه اثرات تغییر ولتاژ روی دقت سیستم و محدود کاری آن بررسی گردید. در نهایت خطای خطی سازی (خطای حاصل از محاسبه فشار بر اساس فرکانس طبیعی خطی) بررسی شد و حداکثر دامنه مجاز ارتعاشات سیستم به منظور کنترل خطا در یک محدوده قابل قبول محاسبه گردید.

۵- مراجع

[1] Kose, T, Azgin, K, Akin, T (2016) Design and fabrication of a high performance resonant MEMS temperature sensor. *J Micromech Microeng* 26(4): 045012.

[۲] سید کاظم ویلیانی ن، هاشمی م، وادی زاده هف پوررستمی ح، مصطفوی س م، هاشمی زاده ف (۱۳۹۳) مدل سازی و بررسی تجربی فشارسنج میکرو الکترومکانیکی پیژومقاومتی بر اساس الزامات عملکرد صنعت پتروشیمی. *مهندسی مکانیک مدرس* ۱۴(۱۶): ۳۴۹-۳۵۷

[3] Chen F, Zhao Y, Wang J, Zou H, Kraft M, Li X (2017) A single-side fabricated triaxis (111)-silicon microaccelerometer with electromechanical sigma-delta modulation. *IEEE Sen J* 18(5): 1859-1869.

[۴] عبداللهی ح، سمائی فر ف، حق نگهدار ا (۱۳۹۴) بررسی اثر به کارگیری SiO₂/Al در بالا بردن حساسیت آشکارسازهای مادون قرمز بر پایه میکروکانتیلیور و مقایسه آن با Si₃N₄/Au. *مجله مکانیک سازه ها و شاره ها* ۱۶۳۷-۱۵۱ (۳): ۵.

[۵] مجاهدی م، بینا ر (۱۳۹۷) بررسی ناپایداری و رفتار ارتعاشی میکروتیرژیروسکوپی با در نظر گرفتن گستردگی جرم گواه. *مجله مکانیک سازه ها و شاره ها* ۹۳-۱۰۶ (۲): ۸.

[۶] اکرمی نیا، اختراعی طوسی ح (۱۳۹۹) تاثیر انحنای میکروتیر و الکتروود بر ناپایداری های جذب و اسنپ-ترو. *مهندسی مکانیک امیرکبیر* ۱۴۱-۱۵۰ (۸): ۲۲.

- micro-plates actuated by a distributed electrostatic force. *J Micromech Microeng* 16(5): 986.
- [30] Nayfeh AH, Mook DT (1979) *Nonlinear oscillations*. John Wiley & Sons, USA.
- [31] Nayfeh AH (1993) *Introduction to perturbation techniques*. John Wiley & Sons, USA.
- [32] Nayfeh AH (1973) *Perturbation methods*. John Wiley & Sons, USA.
- [33] Timoshenko SP, Woinowsky-Krieger S (1959) *Theory of plates and shells*. 2nd edn. McGraw-hill, USA.
- [34] Ke LL, Wang YS, Yang J, Kitipornchai S (2012) Free vibration of size-dependent Mindlin microplates based on the modified couple stress theory. *J Sound Vib* 331(1): 94-106.
- [35] Thai CH, Ferreira AJM, Phung-Van P (2020) Free vibration analysis of functionally graded anisotropic microplates using modified strain gradient theory. *Eng Anal Bound Elem* 117: 284-298.
- [36] Ahmad B, Pratap R (2010) Elasto-electrostatic analysis of circular microplates used in capacitive micromachined ultrasonic transducers. *IEEE Sens J* 10(11): 1767-1773.
- [37] Li Z, Zhao L, Jiang Z, Ye Z, Zhao Y (2014) An improved method for the mechanical behavior analysis of electrostatically actuated microplates under uniform hydrostatic pressure. *J Microelectromech Syst* 24(2): 474-485.
- [21] Seo Y, Kim D, Hall NA (2019) Piezoelectric pressure sensors for hypersonic flow measurements. *J Microelectromech Sys* 28(2): 271-278.
- [22] Zhu L, Xing Y, Xie B, Xiang C, Lu Y, Chen D, Wang J, Chen J (2017) A high-quality resonant pressure micro sensor with through-silicon-via electrical interconnections. *Proc. IEEE 19th Int. Conf. Solid-State. Sens. Actuators. Microsys (TRANSDUCERS)*. 82-85.
- [23] Yan P, Lu Y, Xiang C, Wang J, Chen D, Chen J (2019) A temperature-insensitive resonant pressure micro sensor based on silicon-on-glass vacuum packaging. *Sensors* 19(18): 3866.
- [24] Banerji S, Michalik P, Fernández D, Madrenas J, Mola A, Montanyà J (2017) CMOS-MEMS resonant pressure sensors: optimization and validation through comparative analysis. *Micros Technol* 23(9): 3909-3925.
- [25] Rao SS (2007) *Vibration of continuous systems*. John Wiley & Sons, New Jersey.
- [26] Reddy JN (2006) *Theory and analysis of elastic plates and shells*. 2nd edn. CRC press, New York.
- [27] Lai WM, Rubin DH, Krempl E, Rubin D (2009) *Introduction to continuum mechanics*. 4th edn. Butterworth-Heinemann, London.
- [28] Reddy JN (2007) *An introduction to continuum mechanics*. Cambridge university press, New York.
- [29] Chao PC, Chiu C, Tsai C (2006) A novel method to predict the pull-in voltage in a closed form for