مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها/ سال ۱۳۹۹/ دوره ۱۰/ شماره ۴/ صفحه ۱۸۱-۱۹۴

مجله علمی پژوهشی مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها

دانشگاه صنعتی شاهرود

DOI: 10.22044/jsfm.2020.9641.3174

ارتعاشات غیرخطی میکروتیر بر روی بستر وینکلر و تحت بار محوری با استفاده از نظریه تنش کوپل اصلاح شده

احمد مامندی[۱,*] و میلاد میرزایی قلعه[۲]

[۱] دانشیار، گروه مهندسی مکانیک، واحد پرند، دانشگاه آزاد اسلامی، پرند، ایران

[۲] کارشناس ارشد، گروه مهندسی مکانیک، واحد پرند، دانشگاه آزاد اسلامی، پرند، ایران

مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۲/۱۱؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۹/۰۵/۱۳؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۸/۱۱

چکیده

در این مقاله، تحلیل ارتعاشات غیرخطی میکروتیر بر روی بستر وینکلر و تحت تاثیر بار محوری فشاری در دو انتهای آن، مورد بررسی قرار گرفته‌است. معادله دیفرانسیل با مشتقات جزیی حاکم بر حرکت میکروتیر اویلر برنولی در راستای عرضی با در نظر گرفتن رابطه هوک بر اساس نظریه تنش کوپل اصلاح شده با استفاده از اصل هامیلتون استخراج شده است. معادله دیفرانسیل حاکم بر ارتعاشات جانبی با استفاده از روش گالرکین به یک معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل شده و سپس با بهره‌گیری از روش حل غیرخطی هی، جوابی تحلیلی برای پاسخ فرکانسی میکروتیر استخراج می‌شود. اثر تغییر پارامترهای مختلف شامل، پارامتر هندسی مقیاس اندازه میکروتیر، سفتی بستر وینکلر و بار محوری فشاری در فرکانس‌های طبیعی غیرخطی و خطی، مورد بررسی قرار گرفته‌اند. مشاهده گردید که با افزایش نیروی محوری فشاری، نسبت بی‌بعد فرکانس غیرخطی به فرکانس خطی افزایش می‌یابد و مقدار این نسبت برای میکروتیر با شرط مرزی دوسر مفصل، بیشتر از شرط مرزی دوسرگیردار است.

کلمات کلیدی: ارتعاشات غیرخطی؛ میکروتیر؛ بستر وینکلر؛ بار محوری فشاری؛ نظریه تنش کوپل اصلاح شده.

Nonlinear Vibration of a Microbeam on a Winkler Foundation and Subjected to an Axial Load using Modified Couple Stress Theory

A. Mamandi[1,*], M. Mirzaei ghaleh[2]

[1] Associate Professor, Department of Mechanical Engineering, Parand Branch, Islamic Azad University, Parand, Iran.

[2] M.Sc., Department of Mechanical Engineering, Parand Branch, Islamic Azad University, Parand, Iran.

Abstract

In this paper, nonlinear vibration analysis of a microbeam on Winkler type of foundation and subjected to an axial compressive load on its both ends is investigated. The partial differential governing equation of motion in transverse direction for the Euler-Bernoulli microbeam considering the Hook's law based on the couple stress theory and applying the Hamilton principle is derived. Using Galerkin method, the partial differential equation of vibration in lateral direction is converted to an ordinary differential equation and then is analytically solved using the He's nonlinear method to obtain frequency response of the microbeam. Effect of changes of various parameters such as geometrical size scale of microbeam, stiffness of Winkler foundation and axial compressive load on the nonlinear and linear natural frequencies are all investigated. It is seen that by increasing the axial compressive load, the dimensionless ratio of nonlinear frequency to linear frequency increases and the value of this ratio for the pinned-pinned microbeam is greater than the one for a clamped-clamped microbeam.

Keywords: Nonlinear Vibration; Microbeam; Winkler Foundation; Compressive Axial Load; Modified Couple Stress Theory.

* نویسنده مسئول؛ تلفن: ۹-۰۲۱-۵۶۷۳۳۰۰۱

آدرس پست الکترونیک: am_2001h@yahoo.com

۱- مقدمه

در کاربردهای مهندسی، سازه‌هایی را که یکی از ابعاد هندسی آن‌ها نسبت به دو بعد دیگر بسیار بزرگ باشد، به‌صورت تیر مدل می‌کنند. تیر یکی از اجزای اساسی در بسیاری از سازه‌ها است. بسیاری از سازه‌های پیچیده را می‌توان به عنوان تیر مدل کرد. تیرها تحت بارهای جانبی و محوری دچار خمش می‌شوند. ارتعاش تیرها با دامنه کوچک را می‌توان عموماً با استفاده از معادلات خطی بررسی کرد. با استفاده از اصل برهم نهی در سیستم‌های خطی، می‌توان حالت‌های پیچیده‌تر را به‌صورت ترکیبی از حالت‌های ساده‌تر در نظر گرفت. این موضوع سبب می‌شود که روش‌هایی قدرتمند و کلی برای بررسی سیستم‌های خطی وجود داشته باشد؛ اما زمانی که دامنه ارتعاشات کوچک نباشد یا رفتار ماده خطی نبوده و یا به‌دلیل وجود سایر عوامل موثر در سازه (مانند میرایی) نتوان به شکل خطی مدل کرد، مدل‌های خطی اعتبار خود را از دست می‌دهند. عواملی که می‌توانند باعث رفتار غیرخطی در سازه‌ها و سیستم‌های پیوسته گردند شامل، ارتعاشات با دامنه بزرگ و عوامل غیرخطی مادی، اینرسی و هندسی می‌باشند. اثرات غیرخطی مادی در موادی که رابطه بین تنش و کرنش را نتوان به‌صورت خطی و با استفاده از قانون هوک مدل کرد و اثرات غیرخطی اینرسی ناشی از وجود جرم‌های متمرکز و یا گسترده که در تابع انرژی جنبشی سیستم ظاهر می‌شود. اثرات غیرخطی هندسی به علت تغییرشکل‌های بزرگ و یا روابط هندسی غیرخطی بین اجزای سیستم به وجود می‌آیند و عموماً توسط رابطه غیرخطی بین کرنش- جابجایی بیان می‌شوند. اثرات غیرخطی هندسی در تابع انرژی پتانسیل سیستم ظاهر می‌شوند. در صورت وجود عوامل غیرخطی در سازه‌ها، رفتارهای فیزیکی جدیدی اتفاق می‌افتد که با نظریه سیستم‌های خطی قابل پیش بینی و توضیح نیست. از جمله ویژگی‌های سیستم غیرخطی، می‌توان به وابستگی فرکانس ارتعاش به دامنه، جهش[1]، ارتعاشات زیرهارمونیک[2] و فوق هارمونیک[3] اشاره کرد. این پدیده‌ها هم در سیستم‌های یک درجه آزادی و هم در سیستم‌های با بیش از یک درجه آزادی و پیوسته امکان وقوع دارند.

ارتعاشات هندسی غیرخطی را می‌توان به دو دسته کلی ارتعاشات با تغییر شکل بزرگ اما کرنش کوچک[4] و ارتعاشات تحت کرنش محدود[5] تقسیم کرد. طبق فرضیات فون‌کارمن تنها جملات غیرخطی ناشی از خیز عرضی (جانبی) تیر در روابط کرنش-تغییر مکان در نظر گرفته می‌شوند و از جملات غیرخطی ناشی از تغییر شکل طولی صرف‌نظر می‌شود؛ اما مدل فون‌کارمن تمام اثرات غیرخطی هندسی را مدل نمی‌کند و کرنش‌ها در این مدل هم چنان کوچک فرض می‌شوند. روش‌های مختلفی برای بررسی رفتار سازه تحت کرنش محدود وجود دارد. در اینجا دو دسته از پرکاربردترین این روش‌ها ذکر می‌شود؛ روش اول بر پایه تبدیل وضعیت تغییر شکل یافته به وضعیت اولیه با استفاده از روابط هندسی است؛ روش دوم بر پایه استفاده از رابطه ساختاری هوک بین تانسور کرنش گرین[6] و تانسور تنش پیولای نوع دوم[7] است. مطالعات بسیاری با فرضیات متفاوتی روی ارتعاشات غیرخطی هندسی تیرها انجام شده است. عمده مطالعات انجام شده با فرض تغییر شکل بزرگ و یا کرنش کوچک، بر پایه فرضیات فون‌کارمن انجام شده است [۱ و ۲]. در این بخش مروری مختصر بر مطالعات انجام گرفته در زمینه تغییر شکل بزرگ با کرنش کوچک و مطالعات انجام گرفته با فرض کرنش محدود انجام می‌شود. از کارهای انجام شده به روش اول می‌توان به مقاله رایزنر اشاره کرد [۳]. در مقاله او، یک مدل استاتیکی برای تیر یک بعدی در حالت کرنش محدود ارائه شده است. سایمو [۴]، روش رایزنر را به حالت دینامیکی و سه‌بعدی توسعه داده است. سایمو و وو-کوک [۵]، یک مدل سه‌بعدی المان محدود بر پایه مدل سایمو ارایه داده‌اند. کارهای نسبتاً زیادی برمبنای کار سایمو و روش المان محدود برای بررسی تغییر شکل تیر تحت کرنش محدود ارائه شده است. کرسپوداسیلوا [۶ و ۷]، معادلات ارتعاش غیرخطی را برای تیر اویلر- برنولی که امکان خمش در دو راستای محورهای اصلی، پیچش و کشش طولی را دارد، به‌دست

[1] Jump
[2] Subharmonic
[3] Superharmonic

[4] Large Deformation but Small Strain
[5] Finite Strain
[6] Green Strain Tensor
[7] Second Piola Stress Tensor

آورده است. در استخراج معادلات ارتعاشی فرض شده که کرنش‌ها کوچک بوده، اما محدودیتی روی بزرگی دامنه ارتعاش وجود ندارد. با تقریب زدن پاسخ مکانی حرکت، معادلات دیفرانسیل جزیی حرکت به یک معادله دیفرانسیل معمولی با متغیر زمان تبدیل شده و این معادلات برای تیر دو سر گیردار و یکسر گیردار-یکسر تکیه‌گاه ساده به روش اختلال حل شده است. نشان داده شد که اثرات غیرخطی هندسی نسبت به اثرات غیرخطی اینرسی، تأثیر بیشتری بر پاسخ دارند و می‌توان از اثرات غیرخطی اینرسی صرف‌نظر کرد. سینق و دیگران [۸]، ارتعاشات آزاد تیر با دامنه بزرگ را به روش المان محدود بررسی کرده‌اند. لواندوفسکی [۹]، ارتعاشات آزاد غیرخطی تیر اویلر-برنولی با فرضیات فون‌کارمن را با استفاده از روش المان محدود بررسی کرده است. فودا [۱۰]، ارتعاش آزاد غیرخطی تیر تیموشنکو با دامنه بزرگ را با استفاده از روش مقیاس‌های چندگانه[1] بررسی کرده و با مقایسه پاسخ با حالت تیر اویلر برنولی نشان داده که تأثیر تغییر شکل برشی در دامنه‌های بزرگ بیشتر از اینرسی دورانی است. ریبرو و پتیت [۱۱]، ارتعاشات غیرخطی آزاد و اجباری تیر اویلر-برنولی با فرضیات فون‌کارمن را با روش المان محدود و هارمونیک بالانس بررسی کرده‌اند؛ همچنین وجود پدیده تشدید داخلی برای تیر دو سر گیردار و دو سر تکیه‌گاه ساده را نشان داده‌اند. پتل و گاناپادی [۱۲]، ارتعاشات آزاد غیرخطی پیچشی و رفتار میرایی یک تیر چند لایه با هسته ویسکوالاستیک و سطح مقطع مستطیل شکل را بررسی کرده‌اند. لوزکو [۱۳]، ارتعاش صفحه‌ای غیرخطی تیرهای مستقیم و منحنی را با در نظر گرفتن مدل تیر تیموشنکو بررسی کرده است. اتارد [۱۴]، چند مساله در زمینه تغییر شکل تیر تحت کرنش محدود را با در نظر گرفتن تابع انرژی کرنش و به‌دست آوردن معادله ساختاری با استفاده از این تابع، بررسی و نتایج حاصل را با روش‌های دیگر مقایسه کرده است. برای مثال به سه روش در بررسی کمانش تیر در حالت کرنش محدود اشاره کرده است؛ روش اول تحت عنوان روش انگسر و روش دوم، تحت عنوان روش رایزنر، هر دو جز روش‌های هندسی هستند. روش سوم بر اساس معادله ساختاری هوک بین تانسور کرنش گرین و تانسور تنش پیولای نوع دوم است. آگراوال و دیگران [۱۵]، ارتعاش با دامنه بزرگ را برای یک تیر از جنس مواد مرکب با در نظر گرفتن مدل تیر تیموشنکو به روش المان محدود بررسی کرده‌اند. در تحلیل دینامیکی از فرضیات غیرخطی فون‌کارمن استفاده شده است؛ همچنین پاسخ استاتیکی یک تیر معمولی را با در نظر گرفتن مولفه‌های غیرخطی تانسور کرنش گرین به‌دست آورده‌اند. ماتا و دیگران [۱۶]، روش سایمو را به تیرهای خمیده و موادی با معادله ساختاری غیرخطی گسترش داده‌اند. گوپتا و دیگران [۱۷]، روش المان محدود جدیدی برای بررسی ارتعاش غیرخطی تیر اویلر-برنولی تحت فرضیات فون‌کارمن ارایه داده و با این روش مساله را برای شرایط مرزی مختلف بررسی کرده‌اند. استویکوف و ریبرو [۱۸]، ارتعاشات اجباری و تغییر شکل استاتیکی تیر با مقطع مستطیل شکل را با در نظر گرفتن تغییر شکل خمشی، پیچشی و طولی با استفاده از روش المان محدود بررسی کرده‌اند. هر دو مدل تیر اویلر-برنولی و تیر تیموشنکو مورد بررسی قرار گرفته است. پاسخ استاتیکی تیر تیموشنکو یک بار با استفاده از تانسور کرنش گرین و یک بار مطابق فرضیات فون‌کارمن محاسبه شده است. کی [۱۹]، تحلیل دینامیکی و پایداری یک میکروتیر از جنس ماده مدرج تابعی را بر اساس نظریه تنش کوپل مورد تحقیق قرارداد. سیمسک [۲۰-۲۲]، به تحلیل کمانش غیرخطی نانوتیر تیموشنکو بر اساس نظریه غیرمحلی، کمانش میکروتیر از جنس ماده مدرج تابعی با بهره‌گیری از نظریه تنش کوپل و تحلیل ارتعاشات آزاد غیرخطی میکروتیر روی بستر الاستیک با استفاده از روش هی پرداخته است. بررسی ارتعاشات غیرخطی میکروتیر با روش گرادیان کرنش در منبع [۲۳] انجام شده است. برخی از کاربردهای میکروتیرها در مراجع [۲۴ و ۲۵] مطالعه شده‌اند. برداشت انرژی لوله دوسرگیردار حاوی سیال تحت بار تحریک خارجی در مدل تیر اویلر-برنولی با سفتی غیرخطی و میرایی خطی توسط ممقانی و همکارانش [۲۶] بررسی شده است. کنترل ارتعاشات غیر فعال تیر اویلر-برنولی غوطه‌ور در سیال با در نظر گرفتن فنر غیرخطی و میرایی خطی و تحت تحریک به‌صورت جریان سینوسی توسط ممقانی و همکارانش [۲۷] مطالعه شده است. تحلیل ارتعاشات و بررسی انشعاب هاپف و زین اسبی یک تیر اویلر-برنولی دوسرگیردار متصل به چاه غیرخطی انرژی در

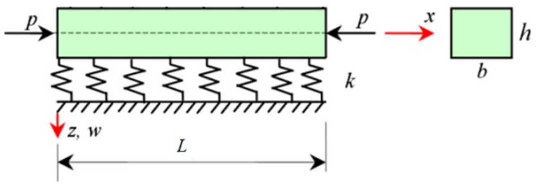
[1] Multiple Scales

مقاطع مختلف تحت تحریک هارمونیک توسط ممقانی و همکارانش [۲۸] بررسی شده است. با به‌کارگیری روش گالرکین و مقادیر ویژه برای بررسی پایداری در مدل تحلیل دینامیکی جریان دوفاز در یک لوله عمودی [۲۹]، تحلیل دینامیکی نانولوله از ماده FG حاوی نانوسیال تحت میدان مغناطیسی طولی با درنظر گرفتن اثر اندازه [۳۰] و تحلیل ارتعاشی ماکرو/میکرو لوله‌های از ماده FG تحت تاثیر حرکت سیال [۳۱] توسط ممقانی و همکارانش انجام شده است.

در این مقاله، تحلیل ارتعاشات آزاد غیرخطی میکروتیر از ماده همگن و همسانگرد با فرض کرنش کوچک که روی بستر وینکلر و تحت تاثیر بار محوری فشاری قرار دارد، مورد بررسی قرار می‌گیرد. پس از استخراج روابط مربوط به انرژی کرنشی، انرژی جنبشی و کار نیروهای خارجی مربوط به سیستم با فرض مدل تیر اویلر-برنولی و در نظر گرفتن رابطه هوک در نظریه تنش کوپل، با استفاده از اصل هامیلتون، معادله دیفرانسیل پاره‌ای حاکم بر حرکت در راستای جانبی در سیستم مختصات دکارتی استخراج می‌شود. این معادله با استفاده از روش گالرکین به معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل می‌شود. سپس با استفاده از روش حل غیرخطی هی، جوابی تحلیلی برای سیستم استخراج می‌شود. با استفاده از نظریه تنش کوپل اصلاح شده، پاسخ سیستم شامل محاسبه نسبت فرکانس‌های طبیعی غیرخطی و خطی برحسب دامنه ارتعاشات تیر برای مقادیر متفاوت پارامترهای هندسی و مشخصات مکانیکی میکروتیر شامل، سفتی بستر، نیروی محوری فشاری و پارامتر مقیاس طول میکروتیر محاسبه می‌شوند.

۲- مدل ریاضی و تحلیل ارتعاشات آزاد غیرخطی میکروتیر روی بستر وینکلر و تحت تاثیر نیروی محوری فشاری

در شکل ۱، یک میکروتیر اویلر-برنولی با طول L و سطح مقطع $A=b\times h$ روی بستر وینکلر (الاستیک) با سفتی بستر k نشان داده شده است که در دو انتهای خود بار محوری p را تحمل می‌کند.



شکل ۱- میکروتیر با طول L بر روی بستر الاستیک با سفتی k و تحت تاثیر بار محوری فشاری p در دو انتها

در سیستم مختصات دکارتی (xyz) نشان داده شده در شکل ۱، محور x منطبق بر محور خنثی تیر بدون تغییر شکل، محور y عمود بر صفحه و راستای محور z به سمت پایین است. تغییر مکان‌های سه‌بعدی وابسته به زمان تیر در سه راستای مذکور به‌ترتیب عبارتند از u، v و w. برای مدل تیر اویلر-برنولی میدان جابجایی با رابطه (۱) است [۱ و ۲].

$$u(x,z,t)=-z\frac{\partial w(x,t)}{\partial x},v(x,z,t)=0,w(x,z,t)=w(x,t), \quad (۱)$$

در روابط (۱) فرض شده که جابجایی عرضی تیر تنها ناشی از خمش است. برای به‌دست آوردن معادلات حاکم بر حرکت از اصل هامیلتون استفاده می‌شود. در نظریه الاستیسیته سه‌بعدی، تانسور کرنش غیرخطی گرین-لاگرانژ به‌صورت رابطه (۲) تعریف می‌شود.

$$E_{ij}=\frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}+\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\frac{\partial u_m}{\partial x_j}), \quad (۲)$$

که مولفه‌های آن برای تیر اویلر-برنولی با فرض جابجایی درون صفحه‌ای به‌صورت رابطه (۳) می‌باشند.

$$\varepsilon_{xx}=-z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2,\ \varepsilon_{yy}=\varepsilon_{zz}=\varepsilon_{xy}=\varepsilon_{yz}=\varepsilon_{xz}=0, \quad (۳)$$

تغییرات اولین مولفه تانسور کرنش غیرخطی گرین-لاگرانژ عبارت است از:

$$\delta\varepsilon_{xx}=-z\frac{\partial^2\delta w}{\partial x^2}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial\delta w}{\partial x}, \quad (۴)$$

مولفه‌های بردار چرخش (θ) در سطح مقطع عمود بر تار خنثی تیر با استفاده از رابطه $\theta=\frac{1}{2}curl\,u$ (u بردار جابجایی است) به‌صورت رابطه (۵) به‌دست می‌آیند.

$$\theta_x=\theta_z=0,\ \theta_y=-\frac{\partial w}{\partial x}, \quad (۵)$$

با قرار دادن مولفه‌های بردار چرخش (۵) در تانسور انحنای χ با رابطه $\chi=\frac{1}{2}[\nabla\theta+(\nabla\theta)^T]$، مولفه‌های انحنای سطح مقطع تیر به‌دست می‌آیند.

$$\chi_{xy}=-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ \chi_{yz}=0, \tag{۶}$$

قانون هوک در حالت تنش صفحه‌ای برای مواد همسانگرد به شکل رابطه (۷) است.

$$\begin{Bmatrix}\sigma_{xx}\\ \sigma_{yy}\\ \sigma_{xy}\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}Q_{11} & Q_{12} & 0\\ Q_{21} & Q_{22} & 0\\ 0 & 0 & Q_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\varepsilon_{xx}\\ \varepsilon_{yy}\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix}, \tag{۷}$$

که ماتریس Q_{ij} ماتریس سفتی نامیده می‌شود و مولفه‌های آن برای مواد همسانگرد به‌صورت رابطه (۸) تعریف می‌شوند.

$$Q_{11}=Q_{22}=\frac{E}{1-\nu^2},\ Q_{12}=Q_{21}=\frac{\nu E}{1-\nu^2},Q_{66}=G_{12}=\frac{E}{2(1+\nu)}, \tag{۸}$$

که E، ν و G به‌ترتیب مدول الاستیسیته، نسبت پواسون و مدول برشی ماده می‌باشند. ماتریس سفتی در این نوع ماده شامل، دو ثابت الاستیک مستقل است. از روابط (۷)، تنش‌های کلاسیک به‌صورت رابطه (۹) به‌دست می‌آیند.

$$\sigma_{xx}=Q_{11}\varepsilon_{xx},\ \sigma_{yy}=Q_{12}\varepsilon_{xx},\ \tau_{xy}=0, \tag{۹}$$

همچنین، از رابطه تانسوری گشتاور به‌صورت $m=2\mu l^2\chi$ و رابطه (۶)، مولفه‌های تنش‌های کوپل به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند [۲۱]

$$m_{xy}=-\frac{1}{2}\beta\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=-\mu l^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ m_{xz}=m_{yz}=0, \tag{۱۰}$$

در روابط فوق $\beta=2\mu l^2$ است که $\mu=Q_{66}=G_{12}$ و l پارامتر مقیاس طول مادی است که برابر است با جذر نسبت انحنای تیر به مدول برشی که به تعبیر فیزیکی به عنوان خاصیت ماده برای به حساب آوردن اثر تنش کوپل است. حال با بهره‌گیری از اصل هامیلتون، معادله حاکم بر حرکت میکروتیر روی بستر الاستیک و تحت بار محوری استخراج می‌شود [۲]

$$\int_{t_1}^{t_2}\delta L dt=\int_{t_1}^{t_2}(\delta T+\delta W-\delta U)dt=0, \tag{۱۱}$$

که t_1 و t_2 دو زمان دلخواه و معلوم، L لاگرانژین سیستم که در آن T انرژی جنبشی، U انرژی پتانسیل (کرنشی) و W کار نیروهای خارجی سیستم است. با در نظر گرفتن حالت ارتعاش صفحه‌ای ($u_2=\dot{u}_2=0$) و صرف‌نظر کردن از انرژی جنبشی ناشی از ارتعاش طولی تیر (که منجر به صرف‌نظر نمودن از اثر اینرسی دورانی می‌شود)، اعمال وردش (تغییرات) روی عبارت‌های مربوط به انرژی جنبشی، انرژی کرنشی و کار نیروهای خارجی همراه با فرض اعمال کرنش غیرخطی فون‌کارمن، به‌دست می‌آید که

$$\begin{aligned}T&=\frac{1}{2}\int_v\rho(\dot{u}_1^{\,2}+\dot{u}_3^{\,2})dV,\Rightarrow\\ \delta T&=\int_{V_0}\rho_0 v_i\delta v_i dV_0=\int_v\rho(\dot{u}_1\delta\dot{u}_1+\dot{u}_3\delta\dot{u}_3)dV\\ &=\int_0^L\int_A\rho\left\{\left[-z\frac{\partial\dot{w}}{\partial x}\right]\left[-z\frac{\partial\delta\dot{w}}{\partial x}\right]+\left[\dot{w}\delta\dot{w}\right]\right\}dAdx,\end{aligned} \tag{۱۲}$$

$$\begin{aligned}U&=\frac{1}{2}\int_v(\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}+m_{ij}\chi_{ij})dV,\Rightarrow\\ \delta U&=\int_v(\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}+m_{ij}\delta\chi_{ij})dV=\int\left[(\sigma_{xx}\delta\varepsilon_{xx})+2(m_{xy}\delta\chi_{xy})\right]dV_0\\ &=\int_0^L\int_A\left\{\sigma_{xx}\left[-z\frac{\partial^2\delta w}{\partial x^2}+\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial\delta w}{\partial x}\right]+2m_{xy}\left[-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\delta w}{\partial x^2}\right]\right\}dAdx,\end{aligned} \tag{۱۳}$$

$$\begin{aligned}W&=\frac{1}{2}\int_v f_i u_i dV,\Rightarrow\\ \delta W&=\int_v f_i\delta u_i dV=\int_{V_0}(f_i\delta u_i)dV_0=\int\left[f_x\delta u_1+f_z\delta u_3\right]dV\\ &=\int_0^L\int_A\left\{q\delta w-kw\delta w-p\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\delta w\right\}dAdx,\end{aligned} \tag{۱۴}$$

که در روابط بالا، V_0 حجم ماده تغییر شکل نیافته و v_i (در رابطه (۱۲)) بردار سرعت ذرات ماده الاستیک است. با جایگذاری روابط (۱۲) الی (۱۴) در رابطه (۱۱)، معادله حاکم بر ارتعاشات میکروتیر به‌دست می‌آید. برای سهولت در انجام محاسبات با تعریف ممان اینرسی و منتجه‌های نیرو و گشتاورها به‌صورت

$$I_0=\int\rho dA,\ I_1=\int\rho z dA,\ I_2=\int\rho z^2 dA, \tag{۱۵}$$

$$N_x=\int\sigma_{xx}dA,\ M_x=\int\sigma_{xx}zdA, K_{xy}=\int m_{xy}dA, \tag{۱۶}$$

که N_x نیروی غشایی، M_x گشتاور خمشی و K_{xy} منتجه تنش کوپل می‌باشد. با جاگذاری روابط (۱۵) و (۱۶) در روابط (۱۲) و (۱۴) به‌دست می‌آید.

$$\delta T=\int_0^L\left\{\left[I_2\frac{\partial\dot{w}}{\partial x}\frac{\partial\delta\dot{w}}{\partial x}\right]+\left[I_0\dot{w}\delta\dot{w}\right]\right\}dx, \tag{۱۷}$$

$$\begin{aligned}\delta U&=\\ &\int_0^L\left\{N_x\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial\delta w}{\partial x}\right)-M_x\left(\frac{\partial^2\delta w}{\partial x^2}\right)-K_{xy}\left(\frac{\partial^2\delta w}{\partial x^2}\right)\right\}dx,\end{aligned} \tag{۱۸}$$

$$\delta W=\int_0^L\left\{q\delta w-kw\delta w-p\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\delta w\right\}dx, \tag{۱۹}$$

با انجام انتگرال‌گیری جزء به جزء نسبت به زمان و مکان به‌دست می‌آید.

$$\begin{aligned}
&\int_V \delta U dv = \\
&\int_0^L \left\{ N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \delta w}{\partial x}\right) - M_x\left(\frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2}\right) - K_{xy}\left(\frac{\partial^2\delta w}{\partial x^2}\right)\right\}dx \\
&= N_x\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\delta w\Big|_0^L - \int_0^L \frac{\partial}{\partial x}\left(N_x\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right)\delta w dx - M_x \frac{\partial \delta w}{\partial x}\Big|_0^L + \frac{\partial M_x}{\partial x}\delta w\Big|_0^L \\
&- \int_0^L \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}\delta w dx - K_{xy}\frac{\partial\delta w}{\partial x}\Big|_0^L + \frac{\partial K_{xy}}{\partial x}\delta w\Big|_0^L - \int_0^L\frac{\partial^2 K_{xy}}{\partial x^2}\delta w dx,
\end{aligned} \tag{۲۰}$$

$$\begin{aligned}
\int_V \delta T dv &= \int_{t_1}^{t_2}\int_0^L \left\{\left[I_2 \frac{\partial \dot w}{\partial x}\frac{\partial\delta\dot w}{\partial x}\right] + \left[I_0 \dot w \delta \dot w\right]\right\} dxdt \\
&= I_2 \frac{\partial \dot w}{\partial x}\delta \dot w\Big|_0^L - I_2 \frac{\partial^2 \dot w}{\partial x^2}\delta w\Big|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2}\int_0^L \left(I_2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial t^2}\right)\delta w dx dt \\
&+ I_0 \dot w\delta w\Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2}\int_0^L \left(I_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)\delta w dxdt,
\end{aligned} \tag{۲۱}$$

$$\begin{aligned}
\int_V \delta V dv &= \int_0^L \left\{ q\delta w - kw\delta w - p\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\delta w\right\}dx \\
&= \int_0^L q\delta w dx + \int_0^L kw\delta w dx - \int_0^L p\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\delta w dx,
\end{aligned} \tag{۲۲}$$

با جایگزینی عبارت‌های مربوط به وردش انرژی جنبشی و پتانسیل (روابط (۲۰) تا (۲۲)) در اصل هامیلتون (رابطه (۱۱))، معادله حاکم بر حرکت میکروتیر و شرایط مرزی به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند.

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}\left(N_x\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right) + \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 K_{xy}}{\partial x^2} + q - kw \\
&- p\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = I_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - I_2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2},
\end{aligned} \tag{۲۳}$$

و شرایط مرزی عبارتند از:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = 0 \text{ یا } M_x + K_{xy} = 0 \qquad \text{در: } x = 0, x = L \tag{۲۴}$$

$$w = 0 \text{ یا } \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial K_{xy}}{\partial x} = 0 \qquad \text{در: } x = 0, x = L \tag{۲۵}$$

با تعاریف ماتریس‌های سفتی زیر

$$\begin{aligned}
&[A]_{ij} = \int [Q]_{ij} dA, \quad [B]_{ij} = \int [Q]_{ij}\, z dA, \\
&[D]_{ij} = \int [Q]_{ij}\, z^2 dA, \quad [H]_{ij} = \int [\beta]_{ij} dA,
\end{aligned} \tag{۲۶}$$

که در آن، A_{ij} ماتریس سفتی محوری، B_{ij} ماتریس سفتی کوپل خمشی و محوری، D_{ij} ماتریس سفتی خمشی و H_{ij} ماتریس سفتی غیرکلاسیک است. برآیندهای نیرو و گشتاور در رابطه (۱۶) به شکل رابطه (۲۷) بازنویسی می‌شوند.

$$\begin{aligned}
N_x &= \int_A \sigma_{xx} dA = \int_A Q_{11}\{\varepsilon_{xx}\} dA \\
&= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{11}\left(-z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right) bdz = A_{11}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right) - B_{11}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right),
\end{aligned} \tag{۲۷}$$

$$\begin{aligned}
M_x &= \int_A \sigma_{xx} z dA = \int_A Q_{11}\{\varepsilon_{xx}\} z dA \\
&= \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} Q_{11} z\left(-z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right) bdz = B_{11}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right) - D_{11}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right),
\end{aligned} \tag{۲۸}$$

$$K_{xy} = \int_A m_{xy} dA = \int_A -\frac{\beta}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dA = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} -\frac{\beta}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} bdz = -\frac{H_{66}}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right), \tag{۲۹}$$

با استفاده از رابطه (۲۷)، (۲۸) و (۲۹) معادله حرکت و شرایط مرزی برحسب جابجایی w به‌صورت رابطه (۳۰) است.

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}\left(N_x\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(B_{11}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right) - D_{11}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right) + \\
&\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(-\frac{1}{2}H_{66}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right) + q - kw - p\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = I_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - I_2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial t^2},
\end{aligned} \tag{۳۰}$$

شرایط مرزی هندسی و طبیعی در $x = 0, x = L$ عبارتند از:

$$B_{11}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right) - D_{11}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = 0 \qquad \text{یا} \qquad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \tag{۳۱}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(B_{11}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right) - D_{11}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right) = 0 \qquad \text{یا} \qquad w = 0 \tag{۳۲}$$

نیروی محوری (غشایی) درون صفحه‌ای به‌صورت رابطه (۳۳) تعریف می‌شود.

$$N = \frac{A_{11}}{2L}\int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx, \; A_{11} = EA, \tag{۳۳}$$

با جایگذاری رابطه (۳۳) درون رابطه (۳۰)، معادله غیرخطی حاکم بر حرکت برحسب جابجایی عرضی به‌صورت رابطه (۳۴) به‌دست می‌آید.

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{A_{11}}{2L}\int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(B_{11}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right) - D_{11}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right) \\
&+ \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(-\frac{1}{2}H_{66}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right) + q - kw - p\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = I_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - I_2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial t^2},
\end{aligned} \tag{۳۴}$$

با صرف‌نظر کردن از جملات غیرخطی در معادله حرکت (۳۰) (که معادل با فرض تغییرشکل‌های کوچک است) و برای میکروتیر همسانگرد که در آن $B_{11}=0$ است، معادله حاکم بر ارتعاشات خطی میکروتیر اویلر-برنولی به‌صورت رابطه (۳۵) به‌دست می‌آید.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(-D_{11}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right)+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(-\frac{1}{2}H_{66}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right)+ \\ q-kw-p\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)=I_0\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-I_2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial t^2}, \qquad (۳۵)$$

با استفاده از روش گالرکین، پاسخ جابجایی میکروتیر را می‌توان به‌صورت رابطه (۳۶) در نظر گرفت.

$$w(x,t)=\varphi(x)Q(t), \qquad (۳۶)$$

که در رابطه بالا، $\varphi(x)$ تابع مکانی (شکل مود) است؛ به‌طوریکه شرایط مرزی میکروتیر را ارضا می‌کند و $Q(t)$ تابع زمانی است. تابع مکانی $\varphi(x)$ برای تیر در حالت کلی به‌صورت رابطه زیر است که در آن مقادیر C_1,C_2,C_3,C_4 و β با توجه به شرط مرزی تیر به‌دست می‌آیند.

$$\varphi(x)=C_1\left(\cos\eta x+\cosh\eta x\right)+C_1\left(\cos\eta x-\cosh\eta x\right) \\ C_3\left(\sin\eta x+\sinh\eta x\right)+C_4\left(\sin\eta x-\sinh\eta x\right), \qquad (۳۷)$$

لازم به ذکر است که می‌توان فرکانس طبیعی خطی را از رابطه (۳۸) به‌دست آورد.

$$\omega=\eta^2(\frac{EI}{\rho A})^{1/2}=\left(\eta L\right)^2(\frac{EI}{\rho AL^4})^{1/2}, \qquad (۳۸)$$

برای شرایط مرزی تکیه‌گاه ساده (مفصلی-مفصلی) و گیردار-گیردار، معادله مشخصه (معادله فرکانسی) و توابع شکل مود تیر در جدول ۱ ارائه شده‌اند [۲].

جدول ۱- معادلات فرکانسی و توابع شکل مود تیر برای شرایط مرزی مفصلی-مفصلی و گیردار-گیردار

شرایط تکیه‌گاهی	تابع شکل مود	معادله فرکانسی
مفصلی-مفصلی	$W_n(x)=C_n\sin\eta_n x$ $=C_n\sin\frac{n\pi x}{L},\ n=1,2,...$	$\sin(\eta L)=0$
گیردار-گیردار	$W_n(x)=C_n$ $[(\cos\eta_n x-\cosh\eta_n x)-$ $\frac{\cos\eta_n L-\cosh\eta_n L}{\sin\eta_n L-\sinh\eta_n L}$ $\times\left(\sin\eta_n x-\sinh\eta_n x\right)],\ n=1,2,...$	$\cos\eta L\cosh\eta L$ $-1=0$

با صرف‌نظر نمودن از بارگذاری خارجی q (ارتعاشات آزاد) و با جایگذاری شکل پاسخ تقریبی رابطه (۳۶) در رابطه (۳۴) و ضرب آن در تابع مکانی $\varphi(x)$ و انتگرال‌گیری روی دامنه (0-L) به‌دست می‌آید که

$$K_1\frac{d^2}{dt^2}Q(t)+K_2Q(t)+K_3Q^3(t)=0, \qquad (۳۹)$$

معادله (۳۹) معادله غیرخطی از نوع مکعبی (وجود جملات غیرخطی از درجه سه) است که در آن ضرایب K_1 و K_2 و K_3 به‌صورت رابطه (۴۰) بیان می‌شوند.

$$K_1=\int_0^L I_0\varphi^2dx-\int_0^L I_2\varphi''\varphi dx,\ \ K_3=-\int_0^L\frac{A_{11}}{2L}(\varphi')^2dx\int_0^L\varphi''\varphi dx, \\ K_2=\int_0^L p\varphi''\varphi dx+\int_0^L k\varphi^2dx+\frac{1}{2}\int_0^L H_{66}\varphi''''\varphi dx+\int_0^L D_{11}\varphi''''\varphi dx, \qquad (۴۰)$$

لازم به ذکر است که با قرار دادن $H_{66}=0$ در رابطه (۳۵)، معادله میکروتیر به معادله ماکروتیر تبدیل می‌شود؛ همچنین، با قرار دادن $K_3=0$ در رابطه (۳۹)، معادله ارتعاشات غیرخطی به معادله ارتعاشات خطی (۴۱) تبدیل می‌شود.

$$K_1\frac{d^2}{dt^2}Q(t)+K_2Q(t)=0, \qquad (۴۱)$$

۲-۱- حل نیمه تحلیلی با استفاده از روش هی برای استخراج فرکانس ارتعاشات آزاد غیرخطی میکروتیر

به‌طور عمومی برای حل معادلات دیفرانسیل غیرخطی از روش‌های تقریبی استفاده می‌شود. در این پژوهش، برای تحلیل غیرخطی میکروتیر از روش تغییراتی هی [۲۲] بهره گرفته شده است. در این روش شرایط اولیه برای میکروتیر به‌صورت رابطه (۴۲) در نظر گرفته می‌شوند.

$$Q(0)=\alpha,\ \dot{Q}(0)=0, \qquad (۴۲)$$

که در آن، α خیز استاتیکی میکروتیر است. در این صورت معادله غیرخطی (۳۹) به‌صورت زیر بازنویسی می‌شود.

$$\frac{d^2Q(t)}{dt^2}+g_1Q(t)+g_2Q^3(t)=0, \qquad (۴۳)$$

که در آن

$$g_1=K_2/K_1,\ \ g_2=K_3/K_1, \qquad (۴۴)$$

در حالت خطی معادله (۴۳) با رابطه (۴۳) نوشته می‌شود.

$$\frac{d^2Q(t)}{dt^2}+g_1Q(t)=0, \qquad (۴۵)$$

بر اساس روش هی و با استفاده از روش شبه معکوس، انتگرال فانکشنال معادله (۴۵) با رابطه (۴۶) به‌دست می‌آید [۲۱].

$$J(Q)=\int_0^{T/4}\left(-\frac{1}{2}\dot{Q}^2+g_1\frac{Q^2}{2}+g_2\frac{Q^4}{4}\right)dt, \qquad (۴۶)$$

که در رابطه بالا، T دوره تناوب ارتعاشات غیرخطی میکروتیر است. اکنون جوابی به‌صورت رابطه (۴۷) فرض می‌شود.

$$Q(t)=\alpha\cos(\omega t), \qquad (۴۷)$$

که ω فرکانس طبیعی غیرخطی می‌باشند. با جایگذاری رابطه (۴۷) در انتگرال فانکشنال (۴۶) به‌دست می‌آید که

$$J(\alpha,\omega)=$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2\omega}}\left(-\frac{\alpha^2\omega^2\sin^2\omega t}{2}+\frac{g_1\alpha^2\cos^2\omega t}{2}+\frac{g_2\alpha^4\cos^4\omega t}{4}\right)dt, \qquad (۴۸)$$

با استفاده از روش ریتز برای به‌دست آوردن فرکانس غیرخطی ω به‌صورت زیر

$$\frac{\partial J}{\partial\alpha}=0 \;\Rightarrow$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2\omega}}\left(-\alpha\omega^2\sin^2\omega t+g_1\alpha\cos^2\omega t+g_2\alpha^3\cos^4\omega t\right)dt=0, \qquad (۴۹)$$

با انجام محاسبات ریاضی به‌دست می‌آید که

$$\int_0^{\frac{\pi}{2\omega}}\left(-\alpha\omega^2\sin^2\omega t+g_1\alpha\cos^2\omega t+g_2\alpha^3\cos^4\omega t\right)dt=0,\Rightarrow$$
$$\alpha\omega^2\int_0^{\frac{\pi}{2\omega}}\sin^2\omega t\,dt=\alpha\int_0^{\frac{\pi}{2\omega}}\left(g_1\cos^2\omega t+g_2\alpha^2\cos^4\omega t\right)dt,$$
$$\Rightarrow\omega^2=\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2\omega}}\left(g_1\cos^2\omega t+g_2\alpha^2\cos^4\omega t\right)dt}{\int_0^{\frac{\pi}{2\omega}}\sin^2\omega t\,dt}, \qquad (۵۰)$$

با ساده‌سازی رابطه (۵۰)، فرکانس طبیعی غیرخطی میکروتیر به‌صورت رابطه (۵۱) به‌دست می‌آید.

$$\omega_{NL}=\left(g_1+\frac{3}{4}g_2\alpha^2\right)^{1/2}, \qquad (۵۱)$$

همچنین در رابطه (۵۱) با مساوی صفر قرار دادن مقدار g_2، فرکانس طبیعی خطی میکروتیر به‌صورت رابطه (۵۲) به‌دست می‌آید.

$$\omega_L=\sqrt{g_1}, \qquad (۵۲)$$

۳- تحلیل نتایج ارتعاشات غیرخطی میکروتیر بر روی بستر وینکلر و تحت بار محوری

در این بخش به کمک کد کامپیوتری نوشته در محیط نرم‌افزار ریاضی Maple برای محاسبه دامنه و فرکانس‌های خطی و غیرخطی از روابط (۳۴)، (۳۹)، (۵۱) و (۵۲) به صحت‌سنجی نتایج به‌دست آمده با نتایج گزارش شده در منابع در حالت‌های خاص موجود شامل میکروتیر خطی و میکروتیر بدون بستر پرداخته می‌شود. سپس در ادامه، نتایج تحلیل ارتعاشات آزاد غیرخطی میکروتیر روی بستر وینکلر (الاستیک) تحت بار محوری ارائه شده و اثر تغییر پارامترهای مختلف هندسی و فیزیکی در نتایج مورد بررسی و بحث قرار می‌گیرند.

۳-۱- صحت سنجی نتایج

برای صحه‌گذاری نتایج به‌دست آمده از تحلیل با استفاده از روش غیرخطی هی با نتایج ذکر شده در منابع چاپ شده قبلی و همچنین با برنامه‌های کامپیوتری نوشته شده، ارتعاشات آزاد غیرخطی میکروتیر همسانگرد ($H_{66}=0$) بر مبنای فرض فون‌کارمن در روابط (۳۴) و (۳۵) بررسی شده و نتایج در جداول ۲ الی ۴ ارائه شده‌اند. طبق فرض فون‌کارمن، تنها جملات غیرخطی ناشی از تغییر شکل عرضی تیر در روابط کرنش-تغییر مکان در نظر گرفته می‌شود؛ یعنی به‌صورت $\varepsilon_x=\partial u/\partial x+\frac{1}{2}(\partial w/\partial x)^2$ فرض می‌شود.

۳-۱-۱- ارتعاشات آزاد غیرخطی میکروتیر دو سر مفصل

با جایگذاری تابع شکل مود تیر دوسر مفصل از جدول ۱ در رابطه (۳۴)، مقادیر نسبت فرکانس طبیعی غیرخطی (رابطه (۵۱)) نسبت به فرکانس خطی (رابطه (۵۲)) در ارتعاش آزاد میکروتیر به‌دست می‌آیند که نتایج برای مقایسه در جدول ۲ آورده شده‌اند. در جدول ۲، کمیت R^* نشان دهنده شعاع ژیراسیون میکروتیر است که از رابطه $R^*=\sqrt{I/A}$ محاسبه می‌شود. از جدول ۲ مشاهده می‌شود که در حالت تیر دو سر مفصل، خطاها برای مقادیر مختلف $W_{\max}/R^*$ کوچک هستند. این مطلب نشان‌دهنده دقت بالای روش هی است. لازم به ذکر است که ارتعاشات غیرخطی تابعی از خیز استاتیکی تیر (یا بیشینه دامنه ارتعاش) است؛ بنابراین ورودی

محاسبات α است و خروجی محاسبات فرکانس غیرخطی ω_{NL} است. در جدول ۲ مقدار α که همان شرط اولیه یعنی خیز استاتیکی است، برابر با مقادیر شعاع ژیراسیون قرار داده شده تا فرکانس‌های غیرخطی ω_{NL} به‌دست آیند. در ارتعاشات خطی فرکانس طبیعی فقط بستگی به نوع شرایط مرزی دارد، ولی در ارتعاشات غیرخطی، فرکانس طبیعی تابعی از هر دوی شرایط مرزی و شرایط اولیه است؛ بنابراین، در ارتعاشات غیرخطی مقدار $\alpha = W_{\max}$ قرار داده شده‌است. بدین ترتیب فرکانس طبیعی غیرخطی ω_{NL} به‌دست می‌آید. کمیت ω_{NL} / ω_L نسبت فرکانس غیرخطی به فرکانس خطی بی‌بعد است.

۳-۱-۲- ارتعاشات آزاد غیرخطی میکروتیر دو سر گیردار

با جایگذاری تابع شکل مود تیر دوسر گیردار از جدول ۱ در رابطه (۳۴)، برای ارتعاش آزاد غیرخطی میکروتیر، مقادیر نسبت فرکانس طبیعی غیرخطی از رابطه (۵۱) به فرکانس خطی از رابطه (۵۲) به‌دست می‌آیند که نتایج برای میکروتیر بر اساس فرض فون‌کارمن برای مقایسه در جدول ۳ آورده شده‌اند.

۳-۱-۳- نتایج تحلیل ارتعاشات آزاد خطی میکروتیر

با جایگذاری تابع شکل مود تیر با شرط مرزی مفصلی-مفصلی از جدول ۱ در رابطه (۳۵)، مقادیر فرکانس طبیعی خطی از رابطه (۵۲) به‌دست می‌آیند که این نتایج با توسعه کدهای کامپیوتری تهیه شده برای میکروتیر FGM با تکیه‌گاه‌های ساده در جدول ۴ ارائه شده‌اند.

۳-۲- نتایج تحلیل ارتعاشات آزاد غیرخطی میکروتیر روی بستر وینکلر و تحت بار محوری

در این بخش، بر مبنای معادلات حاکم بر ارتعاشات غیرخطی میکروتیر (رابطه (۳۴)) نتایج تحلیل ارتعاشات غیرخطی برای میکروتیر با شرایط مرزی دو سر مفصل و دو سر گیردار روی بستر وینکلر (الاستیک) و تحت بار محوری فشاری ارائه می‌شود. مشخصات هندسی و مکانیکی میکروتیر مورد بررسی به‌صورت زیر است [۱۹].

$$\rho = 900\, kg/m^3,\ E = 1.44GPa,\ \nu = 0.38,\ l = 17.6\mu m,$$
$$b = 1,\ L/h = 100,$$

جدول ۲- نسبت ω_{NL} / ω_L برای میکروتیر با شرط مرزی مفصلی-مفصلی بر اساس فرض فون‌کارمن

مرجع	ω_{NL} / ω_L			
	$\frac{W_{\max}}{R^*} = 1$	$\frac{W_{\max}}{R^*} = 2$	$\frac{W_{\max}}{R^*} = 3$	$\frac{W_{\max}}{R^*} = 4$
تحقیق کنونی	۱/۰۸۹۱	۱/۳۱۷۷	۱/۶۲۵۶	۱/۹۹۳
مرجع [۲۲]	۱/۰۸۹۷	۱/۳۲۲۸	۱/۶۳۹۳	۲/۰۰
٪ اختلاف پژوهش کنونی با [۲۱]	-۰/۰۶	-۰/۳۹	۰-/۸۴	-۰/۳۵

جدول ۳- نسبت ω_{NL} / ω_L برای میکروتیر با شرط مرزی گیردار-گیردار بر اساس فرض فون‌کارمن

مرجع	ω_{NL} / ω_L			
	$\frac{W_{\max}}{R^*} = 1$	$\frac{W_{\max}}{R^*} = 2$	$\frac{W_{\max}}{R^*} = 3$	$\frac{W_{\max}}{R^*} = 4$
تحقیق کنونی	۱/۰۲۲۲	۱/۰۸۶۲	۱/۱۸۵۲	۱/۳۱۱۲
مرجع [۲۲]	۱/۰۲۳۱	۱/۰۸۹۷	۱/۱۹۲۴	۱/۳۲۲۸
٪ اختلاف پژوهش کنونی با [۲۱]	-۰/۰۹	-۰/۳۲	-۰/۶۰	-۰/۸۸

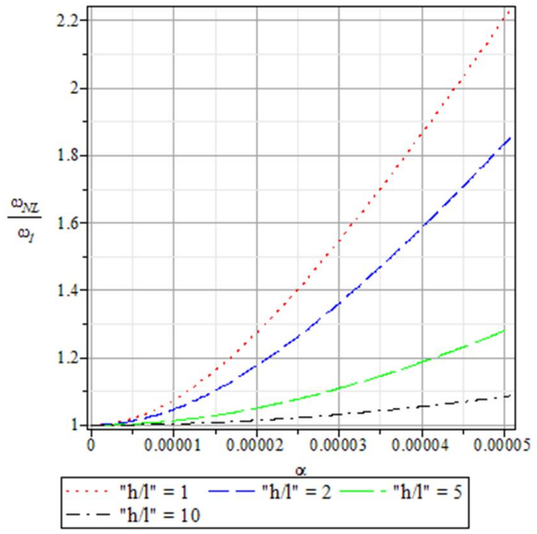
جدول ۴- فرکانس‌های خطی میکروتیر با شرط مرزی مفصلی-مفصلی برای h/lهای مختلف

مرجع	$\omega_l(MHz)$ $h/l=3.33$	$h/l=5$	$h/l=10$
تحقیق کنونی	۰/۱۲۱۸	۰/۰۷۵۲	۰/۰۳۵۷
مرجع [۱۹]	۰/۱۱۸۰	۰/۰۷۶۳۶	۰/۰۳۷۴۶
مرجع [۲۳]	۰/۱۲۲۷	۰/۰۷۷۸۲	۰/۰۳۷۸۰
٪ اختلاف پژوهش کنونی با [۱۹]	۳/۲۲	-۱/۵۲	-۴/۷
٪ اختلاف پژوهش کنونی با [۲۳]	-۰/۷۳	-۳/۳۷	-۵/۶

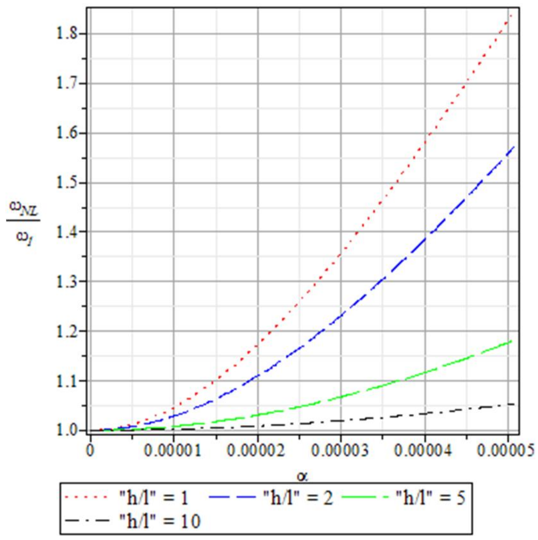
در شکل ۲-الف و شکل ۲-ب، تغییرات نسبت فرکانس غیرخطی به فرکانس خطی بی‌بعد ω_{NL}/ω_L برحسب پارامتر α برای مقادیر مختلف پارامتر مقیاس طول h/l برای میکروتیر به‌ترتیب با شرط مرزی دوسر مفصل و گیردار-گیردار با فرض $k=p=0$ رسم شده‌اند. با توجه به نتایج به‌دست آمده از شکل ۲-الف و شکل ۲-ب مشاهده می‌شود که با افزایش پارامتر مقیاس طول بی‌بعد (h/l)، نسبت فرکانس غیرخطی به خطی میکروتیر کاهش می‌یابد و هر چه ضخامت تیر (h) زیاد می‌شود، سفتی نیز افزایش یافته و فرکانس کم می‌شود. علت را می‌توان اینگونه توضیح داد که با افزایش پارامتر مقیاس طول بی‌بعد، رفتار دینامیکی میکروتیر (تیر با مقیاس کوچک) به دینامیک تیر کلاسیک نازک اویلر-برنولی (تیر با مقیاس بزرگ) میل می‌نماید که در این صورت فرکانس غیرخطی میکروتیر به فرکانس غیرخطی ماکروتیر نزدیک می‌شود؛ به‌طوری‌که مقدار اختلاف آن نسبت به فرکانس خطی میکروتیر به‌دلیل کاهش اثر حضور پارامتر مقیاس طول و افزایش سفتی سیستم کاهش یافته و در نتیجه نسبت آنها کاهش می‌یابد. از سوی دیگر، با توجه به نتایج به‌دست آمده از جدول ۴ مشاهده می‌شود که با افزایش پارامتر مقیاس طول بی‌بعد میکروتیر فرکانس طبیعی خطی میکروتیر کاهش می‌یابد؛ بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که با افزایش پارامتر مقیاس طول بی‌بعد، سرعت (یا نرخ) کم شدن فرکانس غیرخطی از سرعت کم شدن فرکانس خطی بیشتر است. لازم به ذکر است که به‌طور کلی جملات غیرخطی در معادلات حرکت و شرایط مرزی اثر سخت‌شوندگی در رفتار سازه داشته و با افزایش دامنه ارتعاش، فرکانس نیز افزایش می‌یابد.

در شکل ۳-الف و شکل ۳-ب، تغییرات نسبت فرکانسی غیرخطی بی‌بعد ω_{NL}/ω_L برای مقادیر مختلف نیروی محوری فشاری p به‌ترتیب برای میکروتیر با شرط مرزی دو سر مفصل و دو سر گیردار با فرض $k=0$ و $h/l=1$ برحسب پارامتر α رسم شده‌اند. از شکل ۳-الف و شکل ۳-ب می‌توان نتیجه گرفت که با افزایش نیروی محوری فشاری در میکروتیر، نسبت فرکانس غیرخطی به فرکانس خطی افزایش می‌یابد.

در شکل ۴-الف و شکل ۴-ب، تغییرات نسبت فرکانس غیرخطی به فرکانس خطی بی‌بعد ω_{NL}/ω_L برحسب پارامتر α برای مقادیر مختلف ضریب سفتی بستر وینکلر (الاستیک) (k (= k_v به‌ترتیب برای شرط مرزی دو سر مفصل و دو سر گیردار برای $p=0$ و $h/l=1$ رسم شده‌اند. از شکل ۴-الف و شکل ۴-ب مشاهده می‌شود که با افزایش ضریب سفتی بستر الاستیک k نسبت فرکانس غیرخطی به خطی میکروتیر کاهش می‌یابد؛ همچنین مشاهده می‌شود که مقادیر نسبت ω_{NL}/ω_L برای شرط مرزی دوسر مفصل، بیشتر از شرط مرزی دوسرگیردار است. علت را می‌توان اینگونه توضیح داد که در هر مود ارتعاشی فرکانس‌های طبیعی تیر درهر دو حالت خطی و غیرخطی با شرایط مرزی گیردار-گیردار به علت بیشتر بودن سفتی سیستم در مقایسه یک به یک با فرکانس‌های طبیعی تیر با شرط مرزی مفصلی-مفصلی بیشتر می‌باشند. از سوی دیگر، کمیت ω_{NL}/ω_L نشان دهنده این



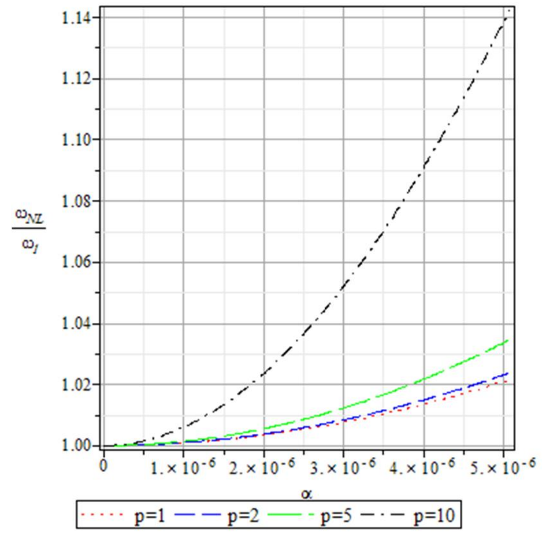
(الف)



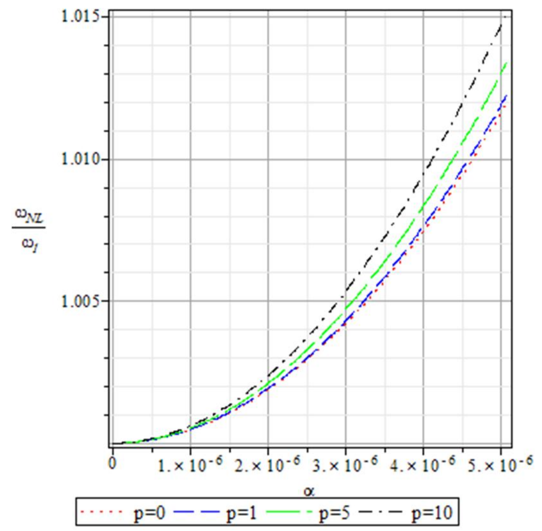
(ب)

شکل ۲- تغییرات ω_{NL}/ω_L برحسب پارامتر α برای مقادیر مختلف پارامتر مقیاس طول h/l برای میکروتیر با شرط مرزی، (الف) مفصلی-مفصلی (ب) گیردار-گیردار

نسبت تغییرات است که چون در حالت شرط مرزی دوسر مفصل به‌دلیل کمتر بودن سفتی سیستم دامنه تغییرات فرکانس غیرخطی ω_{NL} و خطی ω_L نسبت به حالت شرط مرزی گیردار-گیردار بیشتر است؛ بنابراین تغییرات نسبت آنها یعنی ω_{NL}/ω_L برای میکروتیر با شرایط مرزی دوسر مفصل بیشتر از نسبت مذکور برای



(الف)

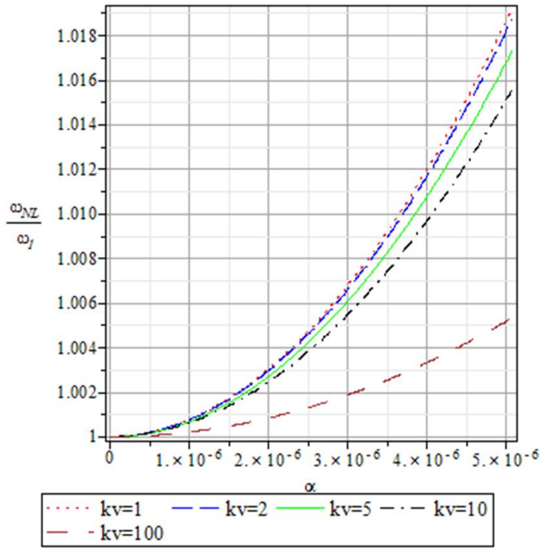


(ب)

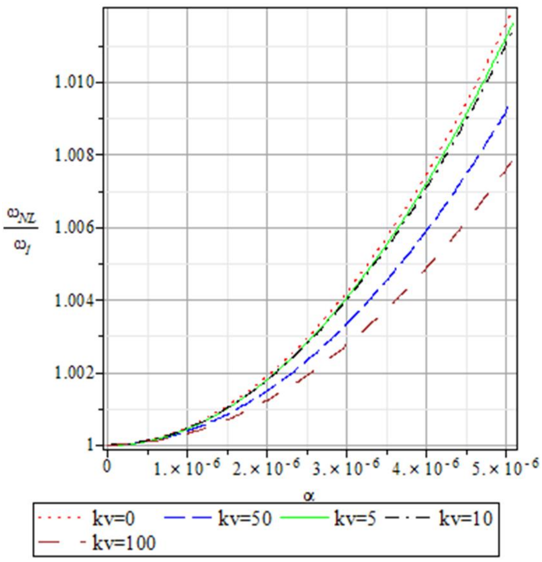
شکل ۳- تغییرات ω_{NL}/ω_L برحسب پارامتر α برای مقادیر مختلف نیروی محوری فشاری p برای میکروتیر با شرط مرزی، (الف) مفصلی-مفصلی (ب) گیردار-گیردار

میکروتیر با شرایط مرزی دوسر گیردار است؛ به عبارت دیگر $\omega_{NL}/\omega_L\big|_{pinned-pinned} > \omega_{NL}/\omega_L\big|_{clamped-clamped}$.

در شکل ۵، تغییرات نسبت فرکانسی بی‌بعد ω_{NL}/ω_L برحسب مقادیر مختلف ضریب بستر الاستیک k و برای h/l های مختلف برای میکروتیر با شرط مرزی دوسر مفصل (لولا) برای $p=0$ و $\alpha = R^*$ نشان داده شده است. از این شکل



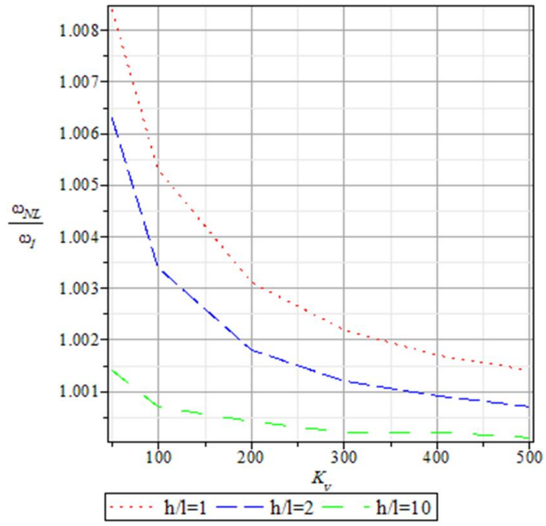
(الف)



(ب)

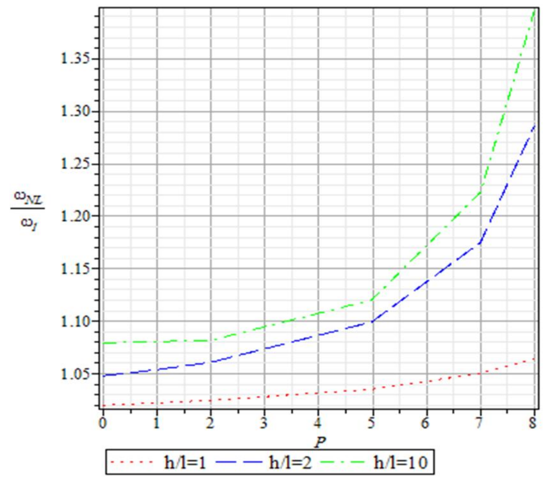
شکل ۴- تغییرات ω_{NL}/ω_L برحسب پارامتر α برای مقادیر مختلف ضریب سفتی بستر الاستیک k برای میکروتیر با شرط مرزی، (الف) مفصلی-مفصلی و (ب) گیردار-گیردار

نتیجه گرفته می‌شود که با افزایش ضریب بستر الاستیک k نسبت فرکانسی غیرخطی کاهش می‌یابد؛ به‌طوری‌که انتظار می‌رود با افزایش هر چه بیشتر مقدار k مقدار فرکانس طبیعی غیرخطی برابر با مقدار فرکانس طبیعی خطی میکروتیر گردد.



شکل ۵- تغییرات ω_{NL}/ω_L برحسب ضریب بستر الاستیک k و h/lهای مختلف برای میکروتیر با شرط مرزی دوسر مفصل برای $p=0, \alpha=R^*$

در شکل ۶، تغییرات نسبت فرکانسی بی‌بعد ω_{NL}/ω_L برحسب h/l برای مقادیر مختلف نیروی محوری فشاری p برای میکروتیر باشرایط مرزی دوسر مفصل برای $k=0$ و $\alpha=R^*$ رسم شده است. با مشاهده شکل ۶ نتیجه گرفته می‌شود که با افزایش نیروی محوری فشاری در دو انتهای میکروتیر نسبت فرکانسی افزایش می‌یابد. این روند صعودی در نیروهای بزرگ‌تر، بیشتر می‌شود و سخت شوندگی سیستم افزایش می‌یابد. علت افزایش رفتار سخت‌شوندگی میکروتیر با افزایش نسبت ω_{NL}/ω_L برحسب نیروی محوری فشاری را اینگونه می‌توان توجیه کرد که فرکانس طبیعی سیستم با سفتی سیستم نسبت مستقیم دارد (برای مثال در سیستم‌های خطی و مثال جرم فنر $\omega_n=\sqrt{k/m}$) و هر چقدر سفتی بیشتر گردد، فرکانس طبیعی افزوده می‌شود. از سوی دیگر، با افزایش نیروی محوری فشاری، سفتی کاهش می‌یابد؛ در نتیجه فرکانس طبیعی کاهش می‌یابد؛ ولی با توجه به نمودارهای شکل ۶، مشاهده می‌شود که رفتار تغییرات نسبت بی‌بعد ω_{NL}/ω_L برحسب نیروی محوری فشاری تابعی غیرخطی (تابعی صعودی شبیه سهمی) است. بر این اساس می‌توان نتیجه گرفت که به ازای هر مقدار نیروی فشاری p مقدار $\omega_n|_{nonlinear} > \omega_n|_{linear}$ بوده و دینامیک سیستم رفتار سخت‌شوندگی از خود نشان می‌دهد.



شکل ۶- تغییرات ω_{NL}/ω_L بر حسب نیروی محوری فشاری p برای مقادیر مختلف h/l برای میکروتیر باشرایط مرزی دوسر مفصل و $k=0, \alpha=R^*$

۴- نتیجه گیری

در این مقاله، تحلیل ارتعاشات آزاد غیرخطی یک میکروتیر از جنس ماده همگن و همسانگرد روی بستر الاستیک تحت تاثیر بار محوری فشاری، مورد بررسی قرار گرفت. در این راستا، معادله دیفرانسیل با مشتقات پاره‌ای حاکم بر حرکت در راستای عرضی میکروتیر با استفاده از روش گالرکین به معادله دیفرانسیل معمولی تبدیل شد. سپس با استفاده از روش هی، جوابی تحلیلی-تقریبی برای ارتعاشات غیرخطی میکروتیر استخراج گردید. با استفاده از نظریه تنش کوپل اصلاح شده، پاسخ سیستم شامل محاسبه دامنه ارتعاشات و فرکانس‌های طبیعی خطی و غیرخطی میکروتیر استخراج شدند. خلاصه‌ای از نتایج به‌دست آمده عبارتند از:

۱- مشاهده گردید که با افزایش پارامتر مقیاس طول بی‌بعد h/l رفتار دینامیکی میکروتیر به دینامیک ماکروتیر نزدیک می‌شود به‌طوریکه مقدار نسبت فرکانس غیرخطی نسبت به فرکانس خطی میکروتیر به‌دلیل کاهش اثر حضور پارامتر مقیاس طول و افزایش سفتی سیستم کاهش می‌یابد.

۲- با افزایش نیروی محوری فشاری میکروتیر نسبت بی‌بعد ω_{NL}/ω_L افزایش می‌یابد که این موجب افزایش سخت‌شوندگی میکرو تیر می‌شود؛ زیرا فرکانس طبیعی سیستم با سفتی سیستم نسبت مستقیم دارد و هر چقدر سفتی بیشتر گردد، فرکانس طبیعی افزوده می‌شود. از سوی دیگر، مشاهده می‌شود که تغییرات نسبت بی‌بعد فرکانس غیرخطی به خطی برحسب نیروی محوری فشاری تابعی غیرخطی است؛ به این معنا که به ازای هر مقدار نیروی فشاری p مقدار $\omega_n|_{nonlinear} > \omega_n|_{linear}$ است. پس دینامیک سیستم رفتار سخت‌شوندگی از خود نشان می‌دهد.

۳- با افزایش ضریب سفتی بستر الاستیک k نسبت بی‌بعد ω_{NL}/ω_L میکروتیر کاهش می‌یابد.

۴- مقادیر نسبت بی‌بعد ω_{NL}/ω_L برای شرط مرزی دوسر مفصل، بیشتر از شرط مرزی دوسرگیردار است؛ زیرا در حالت شرط مرزی دوسر مفصل به‌دلیل کمتر بودن سفتی سیستم، دامنه تغییرات نسبت بی‌بعد فرکانس غیرخطی به خطی نسبت به دامنه تغییرات آن در شرط مرزی گیردار-گیردار بیشتر است؛ بنابراین تغییرات نسبت ω_{NL}/ω_L برای میکروتیر با شرایط مرزی دوسر مفصل، بیشتر از نسبت مذکور برای میکروتیر با شرایط مرزی دوسر گیردار است؛ یعنی $\omega_{NL}/\omega_L|_{pinned-pinned} > \omega_{NL}/\omega_L|_{clamped-clamped}$.

۵- مراجع

[1] Nayfeh AH, Mook DT (1995) Nonlinear oscillation. Wiley, New York, USA.

[2] Nayfeh AH, Pai PF (2004) Linear and nonlinear structural mechanics.Wiley, New Jersey, USA.

[3] Reissner E (1972) On one dimensional finite strain beam theory, the plane problem. J Appl Mech Tech Phy 23(5): 795-894.

[4] Simo JC (1985) A finite strain beam formulation, the three dimensional dynamic problem, part I, computational methods. Appl Mech Eng 49: 55-70.

[5] Simo JC, Vu-quoc L (1986) A three dimensional finite-strain rod model. part II, Ccmputational aspects, computational methods. Appl Mech Eng 58: 79-116.

[6] Crespodasilva MRM (1988) Nonlinear flexural-flexural-torsional-extensional dynamics of beams-I. Int J Solids Struct 24(12): 1225-1234.

[7] Crespodasilva MRM (1988) Nonlinear flexural-flexural-torsional-extensional dynamics of beams-

II, responses analysis. Int J Solids Struct 24(12): 1235-1242.

[8] Singh G, Rao GV, and Iyengar NGR (1990) Re-investigation of large-amplitude free vibrations of beams using finite element. J Sound Vib 143(2): 351-355.

[9] Lewandowski R (1994) Nonlinear free vibration of beams by the finite element and continuation method. J Sound Vib 170(5): 577-593.

[10] Foda MA (1999) Influence of shear deformation and rotary inertia on nonlinear free vibration of beam with pinned ends. Comput Struct 71: 663-670.

[11] Ribeiro P, Petyt M (1999) Nonlinear vibration of beams with internal resonance by the hierarchical and finite element method. J Sound Vib 244(4) 591-624.

[12] Patel BP, Ganapathi M (2001) Nonlinear torsional vibration and damping analysis of sandwich beams. J Sound Vib 240(2): 385-393.

[13] Luczko J (2002) Bifurcations and internal resonances in space curved Rrods. Comput Methods Appl Mech Eng 191: 3271-3296.

[14] Attard MM (2003) Finite strain beam-theory. Int J Solids Struct 40(17): 4563-4584.

[15] Agrawal S, Chakraborty A, Gopaluhrishnan S, (2006) Large deformation analysis for anisotropic and inhomogeneous beams using exact linear static solution. Compos Struct 72: 91-104.

[16] Mata P, Oller S, Barbat AH (2008) Dynamic analysis of beam structures considering geometric and constitutive nonlinearity, computational Mmethod. Appl Mech Eng 197: 857-878.

[17] Gupta RK, Balou GJ, Janardhan GR, Rao GV (2009) Relatively simple finite element formulation for the large amplitude free vibrations of uniform beam. Finite Elem Anal Des 45: 624-631.

[18] Stoykov S, Ribeiro P (2010) Nonlinear forced vibrations and static deformations of 3D beams with rectangular cross sections, the influence of warping, shear deformation and longitudinal displacement. Int J Mech Sci 52(11): 1505-1521.

[19] Ke L-L (2011) Size effect on dynamic stability of functionally graded microbeams based on a modified couple stress theory. Compos Struct 93: 342-350.

[20] Simsek M, Yurtcu HH (2013) Analytical solutions for bending and buckling of functionally graded nanobeams based on the nonlocal Timoshenko beam theory. Composite Structures 97: 378-386.

[21] Simsek M, Reddy JN (2013) A unified higher order beam theory for buckling of a functionally graded microbeam embedded in elastic medium using modified couple stress theory. Compos Struct 101: 47-58.

[22] Simsek M (2014) Nonlinear static and free vibration analysis of microbeams based on the nonlinear elastic foundation using modified couple stress theory and He’s variational method. Compos Struct 112: 264-272.

[23] Zhang B, He Y, Liu D, Gan Z, Shen L (2013) A novel size-dependent functionally graded curved mircobeam model based on the strain gradient elasticity theory. Compos Struct 106: 374-392.

[۲۴] عطار ع، طهماسبی پور م، دهقان محمد (۱۳۹۷) بررسی تاثیر پارامترهای هندسی بر جابه‌جایی خارج از صفحه میکروتیر پیزوالکتریکی با سطح مقطع T شکل. *مجله علمی پژوهشی مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها* ۹-۱ :(۴)۸.

[۲۵] سام‌پور س، معین خواه ح، رحمانی ح (۱۳۹۸) حل تحلیلی پاسخ گذرای غیرخطی میکروتیر ویسکوالاستیک با تحریک الکتریکی بر اساس تئوری الاستیسیته ریز قطبی. *مجله علمی پژوهشی مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها* ۱۳۸-۱۲۵ :(۳)۹.

[26] Mamaghani AE, Khadem SE, Bab S (2016) Vibration control of a pipe conveying fluid under external periodic excitation using a nonlinear energy sink. Nonlinear Dyn 86(3): 1761-1795.

[27] Mamaghani AE, Khadem SE, Bab S (2018) Irreversible passive energy transfer of an immersed beam subjected to a sinusoidal flow via local nonlinear attachment. Int J Mech Sci 138: 427-447

[28] Ebrahimi-Mamaghani A, Khadem SE (2016) Vibration analysis of a beam under external periodic excitation using anonlinear energy sink. Modares Mechanical Engineering 16(9): 186-194. (in Persian)

[29] Ebrahimi-Mamaghani A, Sotudeh-ghrebagh R, Zarghami R, Mostoufi N (2019) Dynamics of two-phase flow in vertical pipes. J Fluid Struct 87: 150-173.

[30] Ebrahimi-Mamaghani A, Mirtalebi SH, Ahmadian MT, Mostoufi N (2020) Magneto-mechanical stability of axially functionally graded supported nanotubes. Mater Res Express 6(12): 1250c5.

[31] Mirtalebi SH, Ebrahimi-Mamaghani A, Ahmadian MT, Mostoufi N (2019) Vibration control and manufacturing of intelligibly designed axially functionally graded cantilevered macro/micro-tubes. IFAC-PapersOnLine 52(10): 382-387.