



## تحلیل رزونانس مافوق هارمونیک پوسته جدار نازک مخروطی ناقص تقویت شده با سازه مشبک تحت تحریک نیروی خارجی عرضی

نازنین فاطمه اسدی زاده<sup>۱</sup>، امیر جلالی<sup>۲</sup> و سید مهدی حسینی فراش<sup>۳\*</sup>

<sup>۱</sup> دانش‌آموخته‌ی کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی مکانیک و مکاترونیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران

<sup>۲</sup> استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک و مکاترونیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران

<sup>۳</sup> استادیار، آزمایشگاه مکانیک مواد مرکب، دانشکده مهندسی مکانیک و مکاترونیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود، ایران

مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۱۲/۲۱؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۹/۰۶/۳۱؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۷/۱۹

### چکیده

در این مقاله رزونانس ثانویه مافوق هارمونیک پوسته مخروطی ناقص جدار نازکی با تقویت‌کننده‌های رینگی و طولی مطالعه شده است. نیروی هارمونیک به صورت عرضی بر پوسته وارد شده و معادلات غیرخطی حاکم بر حرکت پوسته استخراج گردیده است. معادلات حاکم، با استفاده از تئوری غیرخطی پوسته‌های نازک دائل-مشتی-ولاسف، با استفاده از تابع تنش ایری به صورت دو معادله‌ی کوپل به دست آمده است. برای حل این دو معادله کوپل، از روش گالرکین غیرخطی استفاده شده و پس از ساده‌سازی، معادله زمانی به دست آمده، از روش هموتوپیی پرتوربیشن حل گردیده است. با حل این معادله، رزونانس ثانویه مخروط به صورت پاسخ فرکانسی به دست آمده و نمودارهای پاسخ فرکانسی برای رزونانس مافوق هارمونیک، رسم و بررسی شده است. در نهایت تأثیر پارامترهای مختلف مطالعه شد که شامل، تغییر تعداد تقویت‌کننده‌های طولی، تغییر تعداد تقویت‌کننده‌های رینگی، تغییر ضخامت پوسته و تغییر زاویه رأس پوسته مخروطی است. نتایج تحلیل حاکی از آن است که در سازه مذکور، افزایش تعداد تقویت‌کننده‌های طولی و افزایش ضخامت پوسته، باعث انحراف بیشتر نمودار پاسخ فرکانسی به سمت راست شده که بیانگر صلبیت بیشتر سازه است؛ اما افزایش تعداد تقویت‌کننده‌های رینگی، باعث انحراف بیشتر نمودار پاسخ فرکانسی به سمت چپ گردیده است که بیانگر کاهش سخت‌شوندگی پوسته تقویت شده است.

**کلمات کلیدی:** ارتعاشات غیرخطی؛ رزونانس ثانویه؛ پوسته‌ی مخروطی ناقص؛ روش هموتوپیی پرتوربیشن.

## Superharmonic Resonance Analysis of a Grid Stiffened Truncated Conical Shell Subjected to External Transverse Force

N. F. Asadizadeh<sup>1</sup>, A. Jalali<sup>2</sup>, S. M. Hosseini Farrash<sup>3,\*</sup>

<sup>1</sup> M.Sc., Faculty of Mechanical and Mechatronics Engineering, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran.

<sup>2</sup> Asst. Prof., Faculty of Mechanical and Mechatronics Engineering, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran.

<sup>3</sup> Asst. Prof., Mechanics of Composite Materials Laboratory, Faculty of Mechanical and Mechatronics Engineering, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran.

### Abstract

In this research, secondary superharmonic frequency analysis of a truncated conical shell, reinforced with stringer and ring stiffeners, under external load is presented. The stiffened shell is subjected to the transverse harmonic external load and the nonlinear governing equations of motion are extracted. Using Donnell-Mushtari-Vlasov theory and Airy stress function, the governing differential equations of motion, which are a system of coupled nonlinear partial differential equations, are obtained. The nonlinear Galerkin method along with homotopy perturbation method (HPM) have been applied to solve the equations of motion. A parameter study is performed to show the effects of the various parameters, such as conic apex angle, thickness of the shell, number of rings and stringers, on the frequency responses of secondary resonances. Based on the results, increase of the number of stringers and increase of the shell thickness cause a deviation of frequency response to the right which indicates an increase in the amount of the rigidity of the structure. Further, increase of the number of rings leads to the deviation of frequency response to the left which reveals the reduction in the value of the rigidity of the stiffened shell.

**Keywords:** Nonlinear Vibration; Secondary Resonance; Truncated Conical Shell; Homotopy Perturbation Method.

## ۱- مقدمه

در سازه‌های هوایی و صنعت هوافضا، طراحی سازه از اهمیت فوق‌العاده‌ای برخوردار است. این مسئله طراحی سازه‌هایی با مقاومت بالا و وزن کم را با اهمیت کرده است. استفاده از پوسته‌های نازک تقویت شده در بخش‌های مختلف سازه‌های هوا فضایی به دلیل وزن پایین و مقاومت بالا در مقابل بارهای محوری، بسیار متداول است. در میان پوسته‌ها، پوسته‌های مخروطی ناقص، از جمله پرکاربردترین پوسته‌ها در صنعت می‌باشند که در تمامی این موارد سازه در معرض بارهای استاتیکی و دینامیکی گوناگون قرار دارد. از این رو مطالعه رفتار سیستم و بررسی ارتعاشات سازه می‌تواند باعث جلوگیری از خسارات سنگین، از جمله شکست و ناپایداری در سازه‌های مختلف شود.

با توجه به اهمیت و کاربرد موضوع، ارتعاشات پوسته‌های مخروطی توسط پژوهشگران زیادی مطالعه و بررسی شده است [۱-۶]. سوفیف ارتعاشات غیرخطی یک پوسته مخروطی ناقص از جنس مواد تابعی هوشمند را با در نظر گرفتن تغییر شکل‌های بزرگ بررسی کرد [۷]. داک و همکاران، کمانش غیرخطی پوسته ساندویچی مخروطی ناقص در محیط‌های حرارتی و قرار گرفته بر بستر الاستیک را مطالعه کردند [۸ و ۹]. نظام الاسلامی و اسماعیل‌زاده خادم، رفتار ارتعاشی پوسته‌های مشبک مخروطی کامپوزیتی تشکیل شده از ریب‌های مارپیچ<sup>۱</sup> را تحلیل نمودند [۱۰ و ۱۱]. استفاده از روش‌های تحلیلی-تقریبی و عددی نیز، در تحقیقات بسیاری مورد استفاده قرار گرفته است [۱۲-۲۰]. احسانی و رضایی پزند، به روش ریلی-ریتز<sup>۲</sup> به بررسی تأثیر ساختار شبکه بر رفتار کمانشی و ارتعاشی ورق‌های مشبک کامپوزیتی پرداختند [۲۱]. همتی و طالبی به کمک روش تفاضل مربعات<sup>۳</sup>، اثر شرایط مرزی، زاویه رأس و جنس هسته را بر ارتعاشات آزاد نوعی پوسته مخروطی ترکیبی بررسی کردند [۲۲]. ابریه و همکاران، ارتعاشات پوسته مخروطی ساکن با ضخامت متغیر را با استفاده از روش ماتریس انتقال مورد مطالعه قرار دادند [۲۳]. آن‌ها با استفاده از این روش،

پوسته‌هایی که ضخامتشان به صورت خطی، سهموی و نمایی تغییر می‌کنند را مطالعه کرده و تأثیر پارامترهایی از قبیل، زاویه رأس مخروط، طول مخروط و ضخامت را روی فرکانس‌های طبیعی پوسته بررسی کردند. سنکاراناریانان و همکاران [۲۴]، ارتعاشات پوسته مخروطی کامپوزیت با ضخامت متغیر را بر اساس روش ریلی-ریتز مورد مطالعه قرار دادند. سیواداس و گانسان [۲۵]، رفتار پوسته مخروطی یکسر گیردار همسانگرد دارای ضخامت متغیر را بررسی کردند. آن‌ها در مطالعه خود، از تئوری پوسته جدار نازک لاو<sup>۴</sup> و روش المان محدود<sup>۵</sup> استفاده کردند. آن‌ها در مقاله دیگری [۲۶]، پوسته مخروطی کامپوزیت با ضخامت متغیر را با همان روش قبلی مطالعه کرده و تأثیر پارامترهایی چون تعداد لایه‌های پوسته، زاویه رأس مخروط و نسبت طول به قطر را روی فرکانس‌های طبیعی پوسته مخروطی بررسی کردند. تانگ [۲۷]، در مقاله بسیار ارزشمندی به بررسی پوسته مخروطی کامپوزیت پرداخت. ارزش مقاله وی به نوع حل معادلات او برمی‌گردد. وی در حل معادلات پوسته از روش سری توانی استفاده کرد که بعد از آن مورد توجه پژوهشگران زیادی در تحلیل ارتعاشات انواع پوسته‌ها قرار گرفت. کنگ و لیسا [۲۸]، نیز برای تعیین فرکانس‌های طبیعی و شکل مدهای پوسته مخروطی با ضخامت متغیر، یک روش تحلیلی سه‌بعدی ارائه دادند. روش آن‌ها قابل اعمال به پوسته‌های جدار نازک، ضخیم و خیلی ضخیم است. لیو و همکاران [۲۹]، در تحلیل پوسته مخروطی جدار نازک از روش بدون مش کی-پی-ریتز<sup>۶</sup> استفاده کرده و تأثیر پارامترهایی از قبیل، زاویه رأس و شرایط مرزی مختلف را روی فرکانس‌های طبیعی آن بررسی کردند. سیوالک [۳۰ و ۳۱]، در تحلیل پوسته مخروطی کامپوزیت از روش DSC<sup>۷</sup> و تئوری‌های پوسته لاو و تغییر شکل برشی استفاده کرد. سپس به عنوان حالت‌های خاص پوسته مخروطی، پوسته‌های استوانه‌ای و دیسکی شکل را هم تحلیل کرد. وی در تحلیل پوسته‌های مخروطی همسانگرد نیز، از روش DSC استفاده کرد [۳۲]. لی و همکاران، نیز ارتعاشات آزاد و اجباری پوسته مخروطی را

<sup>4</sup> Love's Thin Shell Theory

<sup>5</sup> Finite Element Method

<sup>6</sup> Element-free kp-Ritz Method

<sup>7</sup> Discrete Singular Convolution

<sup>1</sup> Helical Ribs

<sup>2</sup> Rayleigh-Ritz Method

<sup>3</sup> Differential Quadrature Method (DQM)

## ۲- مدل‌سازی ریاضی مسئله، استخراج معادلات

### حاکم بر حرکت و روش حل

پوسته مخروطی ناقصی با ضخامت  $h$ ، طول  $l$ ، زاویه رأس  $\alpha$ ، با تقویت‌کننده‌های رینگی و تقویت‌کننده‌های طولی با ابعاد نشان داده شده در شکل ۱، مورد مطالعه قرار گرفته است. مشخصات هندسی و جنس پوسته یک در جدول ۱ آورده شده است [۳۷].

برای فرمول‌بندی مسئله از سیستم مختصات منحنی الخط<sup>۴</sup>  $(s, \theta, z)$  استفاده شده که در آن  $s$  در جهت یال مخروط،  $\theta$  در جهت محیط و  $z$  در جهت عمود بر ضخامت پوسته است.  $u$  و  $v$  به ترتیب، جابجایی در جهت  $s$  و  $\theta$  هستند. پوسته دو و سه همان مشخصات پوسته یک را دارا هستند، با این تفاوت که تعداد تقویت‌کننده‌های طولی برای این دو پوسته به ترتیب ۳ و ۶ عدد است.

### ۲-۱- روابط سینماتیکی، نیروها و گشتاورهای پوسته

#### مخروطی ناقص تقویت شده و استخراج معادلات حاکم

مطابق با روابط غیرخطی کرنش-جابجایی فون کارمن<sup>۵</sup>، مؤلفه‌های کرنش و انحنای سطح میانی به صورت روابط ۱ و ۲ استخراج گردیده‌اند [۳۹ و ۴۰]:

$$\{\epsilon_0\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_s^0 \\ \epsilon_\theta^0 \\ \epsilon_{s\theta}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial s} \right)^2 \\ \frac{1}{s} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{s} - \frac{w \cot(\alpha)}{s} + \frac{1}{2s^2} \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 \\ \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{v}{s} + \frac{1}{s} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{s} \frac{\partial w}{\partial s} \frac{\partial w}{\partial \theta} \end{Bmatrix} \quad (1)$$

که در روابط فوق،  $\{\epsilon_0\}$  کرنش‌های صفحه میانی و  $\{X\}$  انحنای متناظر است؛ همچنین در این روابط فرض شده است که  $\varnothing = \theta \sin(\alpha)$ .

با استفاده از اصل هامیلتون<sup>۱</sup> و روش ریلی-ریتز مورد مطالعه قرار دادند [۳۳]. جین و همکاران، به بررسی پوسته‌های مخروطی همسانگرد و ناهمسانگرد جدار ضخیم با شرایط مرزی الاستیک پرداختند [۳۴]. آن‌ها در فرمول‌بندی خود از روش‌های الاستیسیته سه‌بعدی و ریلی-ریتز استفاده کردند. آن‌ها توابع جابجایی در راستای محیطی را به صورت سری فوریه و در دو راستای دیگر، به صورت سری فوریه کسینوسی همراه با توابع کمکی در نظر گرفتند تا از همگرایی و سرعت بیشتر روش حل اطمینان حاصل شود. جین و همکاران در مقاله دیگری [۳۵]، برای بررسی پوسته مخروطی جدار نازک از روش سری فوریه بهبود یافته استفاده کردند. آن‌ها ضرایب بسط را با روش ریلی-ریتز محاسبه کرده و سپس دقت نتایج خود را با استفاده از نتایج موجود در مقالات و تحلیل المان محدود نشان دادند.

با توجه به اهمیت و کاربرد صنعتی سازه مورد بررسی و لزوم شناسایی کلیه پدیده‌ها در فاز طراحی، بررسی رفتار غیرخطی آن‌ها اجتناب ناپذیر است. از طرفی مرور مقالات نشان می‌دهد که اکثر تحلیل‌های انجام شده روی این سازه‌ها در حالت خطی بوده و یا تنها به بررسی رفتار رزونانس اولیه آن‌ها در حالت غیرخطی می‌پردازد. به علاوه، اکثر تحلیل‌های انجام شده عددی بوده و کمتر از روش‌های تحلیلی و یا نیمه تحلیلی استفاده شده است. بدین منظور در این مطالعه، تحلیل غیرخطی رزونانس‌های ثانویه<sup>۲</sup> [۳۶] مخروط ناقص با تقویت‌کننده‌های طولی و رینگی با استفاده از روش‌های نیمه‌تحلیلی مورد توجه قرار گرفته است. بدین منظور، معادلات حاکم بر سازه پوسته مخروطی تقویت شده با استفاده از تئوری دائل<sup>۳</sup> استخراج شده و با به کار گرفتن تئوری اغتشاشات، تأثیر پارامترهای مختلف بر میزان سخت‌شوندگی سازه در اثر اعمال بار خارجی عرضی مورد بررسی قرار گرفته است.

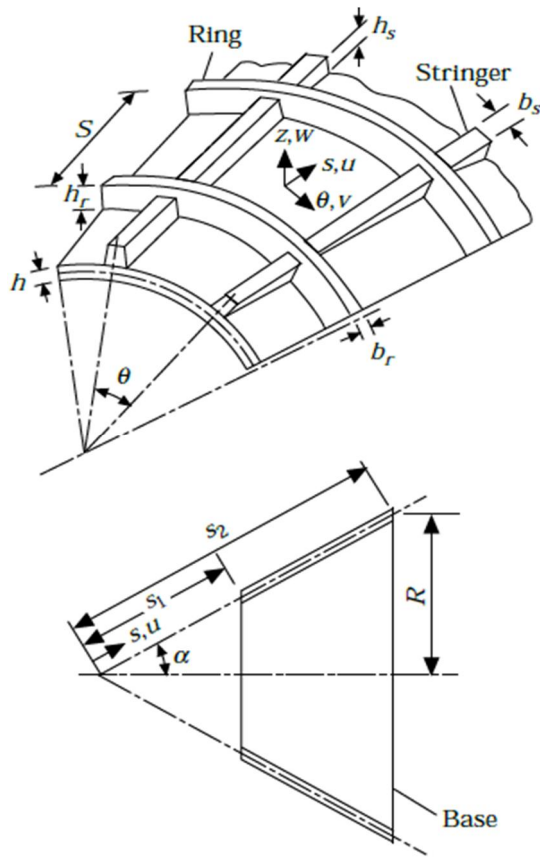
<sup>1</sup> Hamilton's Principle

<sup>2</sup> Secondary Resonances

<sup>3</sup> Donnell Theory

<sup>4</sup> Curvilinear Coordinate System

<sup>5</sup> Von Karman



شکل ۱- نمای پوسته مخروطی تقویت شده [۳۸]

که در رابطه فوق  $\{\sigma\}$  بیانگر تنش‌های ایجاد شده در پوسته مخروطی است؛ همچنین  $E$  و  $\nu$  به ترتیب مدول یانگ و نسبت پواسان مربوط به این پوسته است. با محاسبه تنش، منتجه‌های نیرو  $\{N\}$  و منتجه‌های گشتاور  $\{M\}$  مربوط به پوسته به کمک رابطه ۴ محاسبه می‌شوند [۳۹]:

$$\{N\} = \begin{Bmatrix} \bar{N}_s \\ \bar{N}_\theta \\ \bar{N}_{s\theta} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_s \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{s\theta} \end{Bmatrix} dz$$

$$\{M\} = \begin{Bmatrix} \bar{M}_s \\ \bar{M}_\theta \\ \bar{M}_{s\theta} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_s \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{s\theta} \end{Bmatrix} z dz \quad (4)$$

و در نهایت منتجه‌های نیرو و گشتاور معادل پوسته مخروطی ناقص تقویت شده با تقویت کننده‌های طولی و محیطی که به ترتیب با  $\{N\}$  و  $\{M\}$  نمایش داده می‌شوند، به صورت روابط ۵ استخراج گردیده است:

جدول ۱- مشخصات هندسی و جنس پوسته یک [۳۷]

مقدار	نام پارامتر
۰/۰۰۲۵	$h$ : ضخامت (m)
۱۰	$\alpha$ : زاویه رأس (deg)
۰/۰۸۶۹۹۵	$R_1$ : شعاع قاعده کوچک (m)
۰/۱۳۳۳۵	$R_2$ : شعاع قاعده بزرگ (m)
۰/۰۰۰۰۳۹۶	$b_r$ : عرض مقطع رینگ‌ها (m)
۰/۰۰۶۳	$h_r$ : ارتفاع رینگ‌ها (m)
۰/۰۸۸۹	$S$ : فاصله‌ی رینگ‌ها (m)
۰/۰۰۰۸	$b_{st}$ : عرض مقطع تقویت کننده طولی (m)
۰/۰۱۲۷	$h_{st}$ : ارتفاع تقویت کننده طولی (m)
۳	تعداد رینگ‌ها
۰	تعداد تقویت کننده طولی
۶۰۶۱ آلومینیوم	جنس پوسته مخروطی
۶۰۶۱ آلومینیوم	جنس رینگ‌ها
۲۰۲۴ آلومینیوم	جنس تقویت کننده طولی

همچنین بر اساس تئوری پوسته‌های انعطاف پذیر<sup>۱</sup> و قانون هوک [۴۱]، روابط تنش- کرنش<sup>۲</sup> برای پوسته‌های نازک همگن به صورت رابطه ۳ نوشته می‌شود [۳۹ و ۴۲]:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_s \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{s\theta} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_s^0 + zX_s \\ \varepsilon_\theta^0 + zX_\theta \\ \varepsilon_{s\theta}^0 + zX_{s\theta} \end{Bmatrix} \quad (3)$$

<sup>1</sup> Flexural Shell Theory  
<sup>2</sup> Stress-Strain Relations

تقویت‌کننده‌های رینگی است؛ همچنین پایین‌نویس  $st$  برای این پارامترها، بیانگر همین مقادیر برای تقویت‌کننده‌های طولی می‌باشند [۳۷ و ۳۸].

برای به‌دست آوردن معادلات حاکم بر پوسته مخروطی تقویت شده، از اصل هامیلتون استفاده شده است. از این رو انرژی کرنشی<sup>۱</sup> ( $U$ ) پوسته مخروطی تقویت شده در غیاب نیروهای خارجی به کمک رابطه ۷ تعیین می‌شود [۴۱]:

$$U = \int_0^{2\pi} \int_{s_1}^{s_2} \left\{ \frac{1}{2} [N_s \varepsilon_s + N_\theta \varepsilon_\theta + N_{s\theta} \varepsilon_{s\theta} + M_s X_s + M_\theta X_\theta + 2M_{s\theta} X_{s\theta}] \right\} ds d\varphi \quad (7)$$

همچنین انرژی جنبشی<sup>۲</sup> پوسته مخروطی تقویت شده ( $T$ )، با استفاده از فرضیات تئوری دائل-مشری-ولاسف<sup>۳</sup>، به‌صورت رابطه ۸ نوشته می‌شود [۳۷]:

$$T = \int_0^{2\pi} \int_{s_1}^{s_2} \left\{ \frac{1}{2} [m_{sh} + m_{st} + m_r] \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right\} ds d\varphi \quad (8)$$

که در آن  $m_{sh}$ ،  $m_{st}$  و  $m_r$  مطابق رابطه ۹ می‌باشند [۳۷]:

$$\begin{cases} m_{sh} = \rho_{sh} h \\ m_{st} = \frac{\rho_{st} A_{st}}{b_{st}} \\ m_r = \frac{\rho_r A_r}{b_r} \end{cases} \quad (9)$$

که در رابطه فوق  $\rho_{sh}$ ،  $\rho_{st}$  و  $\rho_r$  به ترتیب چگالی‌های مربوط به پوسته، تقویت‌کننده طولی و تقویت‌کننده محیطی هستند. مطابق اصل همیلتون می‌توان نوشت [۴۲]:

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T + W - U) dt = 0 \quad (10)$$

با جایگذاری روابط ۷ و ۸ در رابطه ۱۰، معادلات حرکت استخراج گردیده است:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_s}{\partial s} + \frac{\partial N_{s\theta}}{\partial \varphi} + \frac{N_s - N_\theta}{s} &= 0 \\ \frac{\partial N_{s\theta}}{\partial s} + \frac{1}{s} \frac{\partial N_\theta}{\partial \varphi} + 2 \frac{N_{s\theta}}{s} &= 0 \\ \frac{\partial^2 M_s}{\partial s^2} + \frac{2}{s} \frac{\partial M_s}{\partial s} + \frac{2}{s} \frac{\partial^2 M_{s\theta}}{\partial s \partial \varphi} - \frac{1}{s} \frac{\partial M_\theta}{\partial s} + \frac{2}{s^2} \frac{\partial M_{s\theta}}{\partial \varphi} & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{N\} &= \begin{Bmatrix} N_s \\ N_\theta \\ N_{s\theta} \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} (A_{10} + A_{30})\varepsilon_s + A_{20}\varepsilon_\theta + A_{31}X_s \\ A_{20}\varepsilon_s + (A_{10} + A_{32})\varepsilon_\theta + A_{33}X_\theta \\ A_{60}\varepsilon_{s\theta} \end{Bmatrix} \\ \{M\} &= \begin{Bmatrix} M_s \\ M_\theta \\ M_{s\theta} \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} A_{12}X_s + (A_{22} + A_{34})X_\theta + A_{31}\varepsilon_s \\ A_{22}X_s + (A_{12} + A_{35})X_\theta + A_{33}\varepsilon_\theta \\ (A_{62} + A_{36} + A_{37})X_{s\theta} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (5)$$

که در آن:

$$A_{1k} = \frac{E h^{k+1}}{(1 - \nu^2)} \int_{-1/2}^{1/2} z^k dz, k = 0, 1, 2$$

$$A_{2k} = \frac{\nu E h^{k+1}}{(1 - \nu^2)} \int_{-1/2}^{1/2} z^k dz, k = 0, 1, 2$$

$$A_{6k} = \frac{E h^{k+1}}{(1 + \nu)} \int_{-1/2}^{1/2} z^k dz, k = 0, 1, 2$$

$$A_{30} = \frac{E_{st} A_{st}}{b_{st}}$$

$$A_{31} = \frac{E_{st} A_{st}}{b_{st}} C_{st}$$

$$A_{32} = \frac{E_r A_r}{b_r}$$

$$A_{33} = \frac{E_r A_r}{b_r} C_r$$

$$A_{34} = \frac{E_{st} A_{st}}{b_{st}} (C_{st}^2 + I_{st}^2)$$

$$A_{35} = \frac{E_r A_r}{b_r} (C_r^2 + I_r^2)$$

$$A_{36} = \frac{G_r J_r}{b_r}$$

$$A_{37} = \frac{G_{st} J_{st}}{b_{st}} \quad (6)$$

در روابط فوق،  $E_r$ ،  $G_r$ ،  $I_r$ ،  $J_r$ ،  $A_r$ ،  $C_r$  و  $b_r$  به ترتیب مدول یانگ، مدول برشی، ممان اینرسی، ثابت پیچشی، مساحت سطح مقطع، فاصله مرکز تقویت‌کننده از صفحه میانی پوسته و عرض سطح مقطع (مطابق شکل ۱) برای

<sup>1</sup> Strain Energy

<sup>2</sup> Kinetic Energy

<sup>3</sup> Donnell-Mushtari-Vlasov Theory

$$+e^{2x} \left( \frac{\partial^2 F_1}{x^2} + 3 \frac{\partial F_1}{\partial x} + 2F_1 \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ + 2e^{2x} \left( \frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial F_1}{\partial \theta} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \\ - \rho_t h s_1^4 e^{4x} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

$$N_s(s_1, \theta) = N_s(s_2, \theta) = 0$$

$$M_s(s_1, \theta) = M_s(s_2, \theta) = 0 \quad (۱۳)$$

که  $x$  متغیر مستقل جدید،  $s_1$  مقدار ثابت هندسی مطابق شکل ۱ و  $F_1$  شکل تغییر یافته تابع تنش است؛ همچنین ضرایب  $C$  در روابط، ضرایب معلومی بر حسب خواص هندسی، خواص مکانیکی و شکل مود<sup>۲</sup> ارتعاش مجموعه هستند. با توجه به استفاده از تابع تنش ایری، نیاز به یک معادله سازگاری وجود دارد. از این رو معادله سازگاری برای پوسته مخروطی ناقص به صورت رابطه ۱۴ استخراج گردیده است [۴۱]:

$$b_1 e^{2x} \frac{\partial^4 F_1}{\partial \theta^4} + 2(b_2 + b_5) e^{2x} \frac{\partial^4 F_1}{\partial \theta^2 \partial x^2} \\ + 4(b_2 + b_5) e^{2x} \frac{\partial^4 F_1}{\partial \theta^3 \partial x} + 4b_1 e^{2x} \frac{\partial^3 F_1}{\partial x^3} \\ + 4b_1 e^{2x} \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} + 2(b_5 + b_2 + b_1) e^{2x} \frac{\partial^2 F_1}{\partial \theta^2} \\ - \left( \frac{\partial w}{\partial \theta} \right)^2 + 2 \frac{\partial w}{\partial \theta} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial w}{\partial x} \\ + s_1 e^x \cot(\alpha) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + b_1 e^{2x} \frac{\partial^4 F_1}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ - \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \right)^2 - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{\partial w}{\partial x} s_1 e^x \cot(\alpha) \\ - \left( \frac{\partial w}{\partial s} \right)^2 = 0 \quad (۱۴)$$

که ضرایب  $b_1$ ،  $b_2$  و  $b_5$  عبارتند از:

$$b_1 = \frac{A_{10} + A_{32}}{A_{10}^2 + A_{10}A_{32} + A_{30}A_{10} + A_{30}A_{32} - A_{20}^2} \\ b_2 = \frac{A_{20}}{A_{10}^2 + A_{10}A_{32} + A_{30}A_{10} + A_{30}A_{32} - A_{20}^2} \\ b_5 = \frac{1}{A_{60}} \quad (۱۵)$$

$$+ \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 M_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{N_\theta \cot(\alpha)}{s} + N_s \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \\ - N_\theta \left( \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{1}{s} \frac{\partial w}{\partial s} \right) \\ - 2N_{s\theta} \left( \frac{1}{s} \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \theta} - \frac{1}{s^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \\ - (m_{sh} + m_{st} + m_r) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (۱۱)$$

## ۲-۲- روش حل معادلات حاکم

برای حل معادلات حرکت حاکم بر مسئله از تابع تنش ایری<sup>۱</sup> استفاده شده است، در این روش با معرفی تابع تنش ایری، تنها دو متغیر تابع تنش  $F$  و جابجایی  $w$  در مسئله باقی می‌مانند. بدین منظور، ابتدا متغیرهای مسئله که شامل سه مؤلفه جابجایی  $u$ ،  $v$  و  $w$  می‌باشند، به کمک تعریف تابع تنش ایری به دو متغیر تابع تنش و جابجایی شعاعی کاهش داده می‌شود.

تابع تنش ایری به صورتی تعریف می‌شود که روابط ۱۲ صادق باشد [۴۱]:

$$N_s = \frac{1}{s} \frac{\partial F}{\partial s} + \frac{1}{s^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} \\ N_\theta = \frac{\partial^2 F}{\partial s^2} \\ N_{s\theta} = \frac{1}{s^2} \frac{\partial F}{\partial \theta} - \frac{1}{s} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta \partial s} \quad (۱۲)$$

همانطور که مشاهده می‌شود، با انتخاب تابع تنش به شکل فوق، معادلات اول و دوم از دستگاه معادلات ۱۱ ارضا می‌شوند. به کمک تغییر متغیرهای  $s = s_1 e^x$  و  $F = F_1 e^{2x}$  معادله حرکت حاکم به صورت رابطه ۱۳ استخراج می‌شود:

$$\left( \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} + 3 \frac{\partial F_1}{\partial x} + 2F_1 \right) s_1 e^{3x} \cot(\alpha) \\ - C_3 \left( \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - 4 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + 4 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\ - 2(C_4 + C_6) \left( \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^2 \partial x^2} - 2 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial \theta^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \\ + e^{2x} \left( \frac{\partial^2 F_1}{\partial \theta^2} + \frac{\partial F_1}{\partial x} + 2F_1 \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

<sup>2</sup> Mode shape

<sup>1</sup> Airy Stress Function

$$\lambda = \frac{C_8 - C_{12}C_5}{C_3C_{12} + C_2C_{13} - C_7} \quad (21)$$

برای حل معادله ۱۹، از روش هموتویی پرتوربیشن<sup>۱</sup> [۴۴] استفاده شده است؛ در این روش معادله ۱۹ به شکل رابطه ۲۲ در نظر گرفته می‌شود:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \omega^2 u + \varepsilon[(Q_0 - \omega^2)u + Q_1 u^3 + Q_2 u^5] = 0 \quad (22)$$

که در رابطه فوق  $\varepsilon \in [0, 1]$ ، ضریب تأثیر نامیده می‌شود و  $\omega$  فرکانس طبیعی ارتعاشات غیرخطی مجموعه است؛ همچنین پاسخ معادله به صورت سری توانی (۲۳) در نظر گرفته شده است [۴۵]:

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots \quad (23)$$

با جایگذاری معادله ۲۳، در معادله ۲۲ و برابر صفر قرار دادن ضرایب جملات با توان‌های مختلف  $\varepsilon$  می‌توان نوشت:

$$\varepsilon^0: \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + \omega^2 u_0 = 0 \quad (24)$$

$$\varepsilon^1: \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \omega^2 u_1 + (Q_0 - \omega^2)u_0 + Q_1 u_0^3 + Q_2 u_0^5 = 0 \quad (25)$$

پاسخ همگن معادله ۲۴، به صورت رابطه ۲۶ است:

$$u_0 = A \cos(\omega t) \quad (26)$$

که در رابطه فوق  $A$ ، دامنه بی بعد ارتعاشات غیرخطی مجموعه است.

اینک با جایگذاری رابطه ۲۶ در معادله ۲۵ و انجام عملیات ریاضی، رابطه ۲۷ نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} + \omega^2 u_1 + \left( Q_0 - \omega^2 + \frac{3}{4} Q_1 A^2 + \frac{5}{8} Q_2 A^4 \right) A \cos(\omega t) + \left( Q_1 + \frac{5}{4} Q_2 A^2 \right) \frac{A^3}{4} \cos(3\omega t) + \frac{Q_2 A^5}{16} \cos(5\omega t) = 0 \quad (27)$$

با حذف جمله سکولار<sup>۲</sup>، فرکانس طبیعی غیرخطی و فرکانس طبیعی خطی پوسته مخروطی ناقص به صورت روابط ۲۸ و ۲۹ به دست آمده است:

لازم به ذکر است که شرایط مرزی مسئله به صورت تکیه‌گاه ساده است:

$$v(s_1, \theta) = v(s_2, \theta) = 0$$

$$w(s_1, \theta) = w(s_2, \theta) = 0 \quad (16)$$

برای حل معادله حرکت (رابطه ۱۳)، در ابتدا تابعی برای جابجایی شعاعی مطابق رابطه ۱۷ به گونه‌ای حدس زده می‌شود که شرایط مرزی هندسی مسئله را ارضا کند [۳۹]:

$$w = f(t)e^x [\sin(\beta_1 x) \sin(\beta_2 \phi) + \psi \sin^2(\beta_1 x)] \quad (17)$$

که در آن  $f(t)$  تابعی مجهول از زمان و  $\psi$  پارامتر ایجاد ارتباط بین قسمت‌های خطی و غیرخطی جابجایی شعاعی می‌باشند؛ همچنین  $\beta_1 = \frac{m\pi}{x_0}$ ،  $\beta_2 = \frac{n}{\sin(\alpha)}$ ،  $x_0 = \ln\left(\frac{s_2}{s_1}\right)$ ، که  $m$  شماره موج‌های طولی و  $n$  شماره موج‌های محیطی است. با جایگذاری رابطه ۱۷ در معادله سازگاری (رابطه ۱۴)، یک جواب خصوصی برای تابع تنش  $F_1$  تعیین می‌شود [۳۹]. پس از جایگذاری  $w$  و  $F_1$  در رابطه ۱۳، عبارت سمت چپ این معادله  $\Pi$  نامگذاری می‌شود و روش گالرکین مطابق روابط ۱۸ بر این معادله اعمال می‌شود:

$$\int_0^{x_0} \int_0^{2\pi \sin(\alpha)} \Pi e^x \sin(\beta_1 x) \sin(\beta_2 \phi) d\phi dx = 0$$

$$\int_0^{x_0} \int_0^{2\pi \sin(\alpha)} \Pi e^x \sin^2(\beta_1 x) d\phi dx = 0 \quad (18)$$

با حذف  $\frac{\partial^2 f(t)}{\partial t^2}$  از روابط فوق و همچنین با در نظر گرفتن  $u(t) = \frac{f(t)}{h}$ ، معادله غیرخطی حاکم بر مسئله به صورت رابطه ۱۹ استخراج گردیده است:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Q_0 u + Q_1 u^3 + Q_2 u^5 = 0 \quad (19)$$

در رابطه فوق ضرایب  $Q_0$ ،  $Q_1$  و  $Q_2$  به صورت روابط ۲۰ می‌باشند:

$$Q_0 = \frac{C_2}{C_1}$$

$$Q_1 = \lambda \frac{C_3}{C_1} + \frac{C_5}{C_1}$$

$$Q_2 = \lambda^2 \frac{C_4}{C_1} \quad (20)$$

و  $\lambda$  عبارتست از:

<sup>1</sup> Homotopy Perturbation Method (HPM)

<sup>2</sup> Secular Term

$$\frac{d}{dt} = D_0 + \varepsilon D_1 + \dots$$

$$\frac{d^2}{dt^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_1) + \dots$$

(۳۶)

حل عمومی معادله ۳۴، به صورت رابطه ۳۷ استخراج گردیده است [۴۶]:

$$u_0 = A(T_1)e^{i\omega_0 T_0} + P e^{i\Omega T_0} + C.C \quad (37)$$

که در این رابطه:

$$A = \frac{1}{2} a \exp(i\beta) \quad (38)$$

$$T_1 = \varepsilon t \quad (39)$$

$$P = \frac{1}{2} f_1 (\omega_0^2 - \Omega^2)^{-1} \quad (40)$$

عبارت  $C.C$  در رابطه ۳۷، بیانگر مزدوج مختلط<sup>۲</sup> جملات باقیمانده سمت راست تساوی است؛ همچنین در رابطه ۳۸،  $a$  و  $\beta$  توابع حقیقی بر حسب زمان می باشند [۴۶].

### ۲-۳-۲- بررسی رزونانس مافوق هارمونیک<sup>۳</sup>

در حالت رزونانس مافوق هارمونیک [۳۶]، فرکانس تحریک  $\Omega$ ، یک سوم فرکانس خطی  $\omega_0$  است که ارتباط بین آن‌ها با استفاده از پارامتر تنظیم<sup>۴</sup>  $\sigma$ ، به صورت رابطه ۴۱ نشان داده شده است:

$$3\Omega = \omega_0 + \varepsilon\sigma \quad (41)$$

با استفاده از رابطه ۴۱ و با جایگذاری رابطه ۳۷ در ۳۵ و پس از حذف ترم‌های سکولار، در رزونانس مافوق هارمونیک معادله‌ی ۴۲ استخراج گردیده است:

$$2i\omega_0 A' + 6Q_1 A P^2 + 3Q_1 A^2 \bar{A} + Q_1 P^3 e^{i\sigma T_1} = 0 \quad (42)$$

که در رابطه فوق  $A'$  و  $\bar{A}$  به ترتیب مشتق زمانی و مزدوج مختلط پارامتر  $A$  هستند. با جایگذاری رابطه ۳۸ در رابطه ۴۲ و جدا کردن دو قسمت حقیقی و موهومی و با در نظر گرفتن  $\gamma = \sigma T_1 - \beta$  و حذف  $T_1$  از رابطه حاصل، معادلات ۴۳ و ۴۴ استخراج گردیده است:

$$\omega_{NL} = (Q_0 + \frac{3}{4} Q_1 A^2 + \frac{5}{8} Q_2 A^4)^{0.5} \quad (28)$$

$$\omega_L = (Q_0)^{0.5} \quad (29)$$

### ۲-۳-۲- ارتعاشات اجباری و رزونانس ثانویه

#### ۲-۳-۱- بررسی ارتعاشات اجباری

برای بررسی ارتعاشات اجباری، سیستم تحت تأثیر نیروی هارمونیک جانبی<sup>۱</sup> (در جهت ضخامت)، به صورت رابطه ۳۰ در نظر گرفته شده است:

$$\bar{F} = f' \sin(\beta_1 x) \sin(\beta_2 \phi) \cos(\Omega t) \quad (30)$$

در رابطه فوق  $f'$  نشان دهنده دامنه تحریک و  $\Omega$  فرکانس تحریک است. با در نظر گرفتن نیروی خارجی، معادله ۱۳ به صورت ۳۱ رابطه نوشته می شود:

$$\Pi = f' \sin(\beta_1 x) \sin(\beta_2 \phi) \cos(\Omega t) \quad (31)$$

با اعمال روش گلرکین (روابط ۱۸) عبارت‌های شامل  $x$  و  $\phi$  از معادله ۳۱ حذف شده و شکل ناهمگن رابطه ۱۹ به صورت رابطه ۳۲ به دست می آید:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Q_0 u + Q_1 u^3 + Q_2 u^5 = f_1 \cos(\Omega t) \quad (32)$$

که در آن  $f_1$  مقدار ثابت و حاصل انتگرال گیری گلرکین از طرف راست معادله است.

برای استفاده از روش هموتویی پرتوربیشن، رابطه فوق به صورت رابطه ۳۳ نوشته می شود:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Q_0 u + \varepsilon Q_1 u^3 + \varepsilon^2 Q_2 u^5 = f_1 \cos(\Omega t) \quad (33)$$

بر اساس روش هموتویی پرتوربیشن، با برابر صفر قرار دادن ضرایب جملات با توان‌های مختلف  $\varepsilon$  در رابطه‌ی فوق، روابط ۳۴ و ۳۵ استخراج شده است:

$$\varepsilon^0: D_0^2 + \omega_0^2 u_0 = f_1 \cos(\Omega T_0) \quad (34)$$

$$\varepsilon^1: D_0^2 u_1 + \omega_0^2 u_1 = -2D_0 D_1 u_0 - Q_1 u_0^3 \quad (35)$$

که در روابط فوق  $\omega_0$  فرکانس خطی سیستم و  $T_0 = t$  است؛ همچنین  $D_0$  و  $D_1$  پارامترهای چندگانه زمانی است که مشتق زمانی نسبت به آنها تعریف می شوند [۴۶]:

<sup>2</sup> Complex Conjugate  
<sup>3</sup> Superharmonic Resonance  
<sup>4</sup> Detuning Parameter

<sup>1</sup> Transverse Harmonic Force

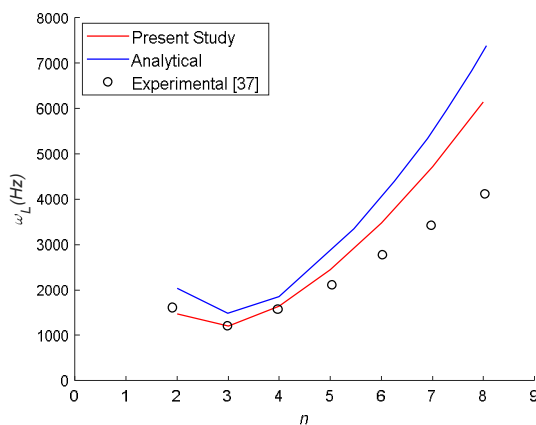


ازای اولین مد طولی، یعنی  $m = 1$  و  $n$  های (شماره موج‌های عرضی) مختلف است. همان‌گونه که در شکل ملاحظه می‌شود، نتایج تحقیق حاضر تطابق خوبی با نتایج اخذ شده در مرجع [۳۷] دارد.

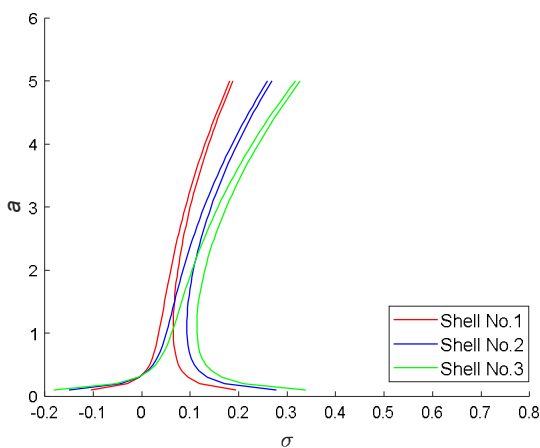
### ۳-۲- نمودار معادله‌ی پاسخ فرکانسی برای رزونانس

مافوق هارمونیک برای سه پوسته‌ی بررسی شده

با توجه به رابطه (۵۱)، نمودار پاسخ فرکانسی برای سه پوسته ۱، ۲ و ۳، به ازای اولین موج طولی  $m = 1$  و ششمین موج محیطی  $n = 6$  و مقدار یکسان  $F = 1$  در شکل ۳، رسم گردیده است.



شکل ۲- مقایسه فرکانس طبیعی خطی پوسته شماره ۱ با نتایج موجود



شکل ۳- نمودار پاسخ فرکانسی برای سه پوسته، به ازای تعداد تقویت‌کننده‌های طولی متفاوت

$$a' = -\frac{Q_1 P^3}{\omega_0} (\sin(\gamma)) \quad (43)$$

$$a\gamma' = a\sigma - \frac{3Q_1 P^2}{\omega_0} a - \frac{3Q_1}{8\omega_0} a^3 - \frac{Q_1 P^3}{\omega_0} \cos(\gamma) \quad (44)$$

با در نظر گرفتن شرایط حالت پایدار، یعنی نقطه‌ای که در آن  $a' = 0$  و  $\gamma' = 0$  می‌باشند، روابط ۴۵ و ۴۶ از روابط ۴۳ و ۴۴ نتیجه می‌شوند:

$$\sin(\gamma) = 0 \quad (45)$$

$$a\sigma - \frac{3Q_1 P^2}{\omega_0} a - \frac{3Q_1}{8\omega_0} a^3 = \frac{Q_1 P^3}{\omega_0} \cos(\gamma) \quad (46)$$

پس از به توان دو رساندن دو معادله رابطه فوق و جمع آنان با یکدیگر، معادله پاسخ فرکانسی  $a$  به عنوان تابعی از پارامتر تنظیم  $\sigma$  و مقدار  $f_1$  در حالت رزونانس مافوق هارمونیک به صورت رابطه ۴۷ به دست آمده است:

$$\left(a\sigma - \frac{3Q_1 P^2}{\omega_0} a - \frac{3Q_1}{8\omega_0} a^3\right)^2 = \frac{Q_1^2 P^6}{\omega_0^2} \quad (47)$$

با حل رابطه فوق،  $\sigma$  به صورت رابطه ۴۸ استخراج گردیده است:

$$\sigma_{1,2} = \frac{3Q_1 P^2}{\omega_0} + \frac{3Q_1}{8\omega_0} a^2 \pm \left(\frac{Q_1^2 P^6}{\omega_0^2 a^2}\right)^{1/2} \quad (48)$$

در نهایت بر اساس تئوری دائل که در این تحقیق به کار گرفته شده است، فرکانس طبیعی غیرخطی، فرکانس طبیعی خطی و معادله پاسخ فرکانسی در رزونانس مافوق هارمونیک به ترتیب به صورت روابط ۴۹، ۵۰ و ۵۱ تعیین می‌شود:

$$\omega_{NL} = \left(Q_0 + \frac{3}{4} Q_1 A^2 + \frac{5}{8} Q_2 A^4\right)^{0.5} \quad (49)$$

$$\omega_L = (Q_0)^{0.5} \quad (50)$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{3Q_1 P^2}{\omega_0} + \frac{3Q_1}{8\omega_0} a^2 \pm \left(\frac{Q_1^2 P^6}{\omega_0^2 a^2}\right)^{1/2} \quad (51)$$

### ۳- نتایج

#### ۳-۱- اعتبارسنجی

برای اطمینان از نتایج به دست آمده، پوسته شماره ۱، با مشخصات درج شده در جدول ۱، در نظر گرفته شده است و فرکانس طبیعی حاصل شده در این تحقیق با نتایج تحلیلی و آزمایشگاهی موجود در مرجع [۳۷]، برای پوسته شماره ۱، در شکل ۲ مقایسه گردیده است. فرکانس طبیعی خطی به

در نمودار  $a$  برحسب  $\sigma$ ، انحراف منحنی به سمت راست، سخت‌شوندگی سیستم و انحراف به سمت چپ، نرم‌شوندگی سیستم را نشان می‌دهد [۳۶]. از این رو بررسی نمودار پاسخ فرکانسی در شکل ۳، نشان می‌دهد که پوسته مخروطی تقویت شده، به صورت یک سیستم غیرخطی سخت‌شونده<sup>۱</sup> عمل کرده است؛ همچنین افزایش تعداد تقویت‌کننده‌های طولی، باعث افزایش میزان انحراف منحنی پاسخ فرکانسی به سمت راست و سخت‌شوندگی سیستم گردیده و در نتیجه با افزایش تعداد تقویت‌کننده‌های طولی، سازه صلب‌تر گردیده است.

طبق نمودار پاسخ فرکانسی در شکل ۴، افزایش تعداد تقویت‌کننده‌های رینگی پوسته باعث کاهش میزان انحراف منحنی پاسخ فرکانسی به سمت راست گردیده است، به عبارت دیگر، می‌توان گفت که پدیده تشدید به ازای تعداد تقویت‌کننده رینگی، بیشتر در فرکانس تحریک کوچک‌تری رخ می‌دهد؛ همچنین با افزایش تعداد تقویت‌کننده‌های رینگی، سخت‌شوندگی سازه کاهش یافته است. به عبارت دیگر، می‌توان گفت که با افزایش تعداد تقویت‌کننده‌های رینگی رفتار سیستم نرم‌تر شده و به حالت رفتار سیستم خطی نزدیک می‌شود.

### ۳-۳- بررسی تأثیر پارامترهای مختلف بر پوسته در حالت مافوق هارمونیک

در تمامی نمودارها، اولین موج طولی  $m = 1$  و ششمین موج محیطی  $n = 6$  و مقدار یکسان ضریب ثابت  $F = 1$  فرض شده است.

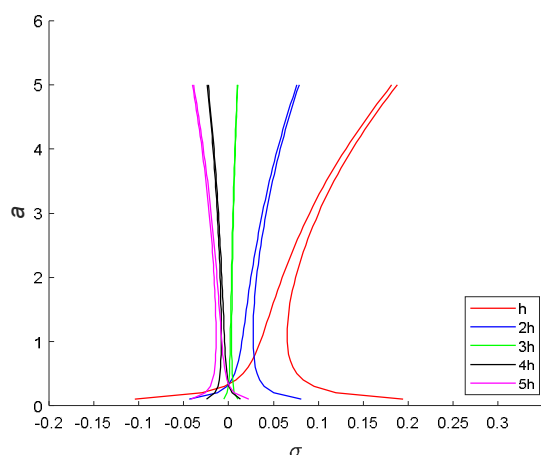
#### ۳-۳-۱- بررسی تأثیر تعداد تقویت‌کننده‌های رینگی

در شکل ۴، نمودار پاسخ فرکانسی برای پوسته ۲، به ازای تعداد تقویت‌کننده‌های طولی ثابت و برابر ۳ و تعداد تقویت‌کننده‌های رینگی متغیر و برابر ۰، ۳ و ۶، مورد بررسی قرار گرفته است.

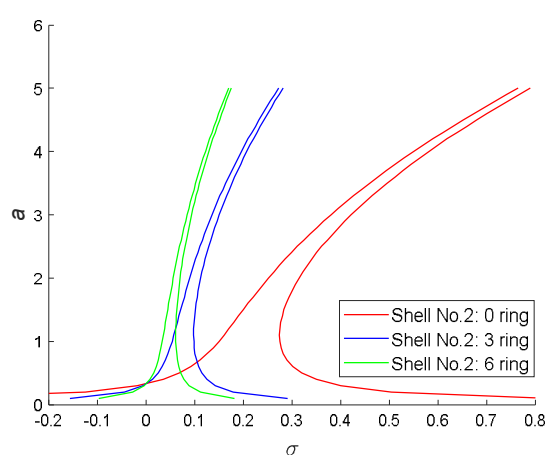
### ۳-۳-۲- بررسی تأثیر تغییر ضخامت پوسته

برای بررسی تأثیر تغییر ضخامت پوسته، نمودار پاسخ فرکانسی برای هر سه پوسته به ازای ضخامت‌های مختلف، به صورت نمودارهای شکل ۵، ۶ و ۷ مورد بررسی قرار گرفته است.

همان‌طور که در نمودارهای شکل ۵، ۶ و ۷ مشاهده می‌شود، افزایش ضخامت باعث انحراف منحنی به سمت چپ گردیده است، به عبارت دیگر، با افزایش ضخامت، دامنه پاسخ در یک پارامتر تنظیم مشخص بزرگ‌تر می‌شود که این امر موجب کاهش میزان سخت‌شوندگی سیستم شده است.

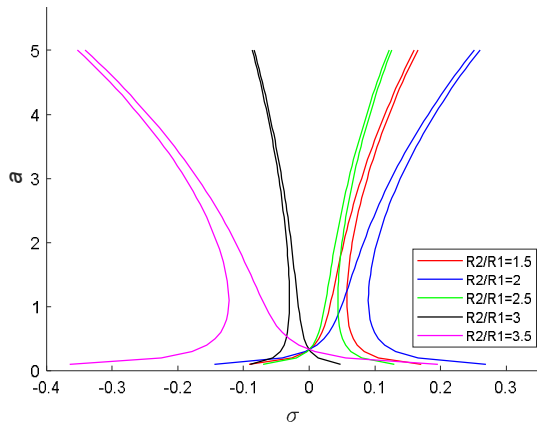


شکل ۵- نمودار پاسخ فرکانسی به ازای ضخامت‌های مختلف برای پوسته ۱

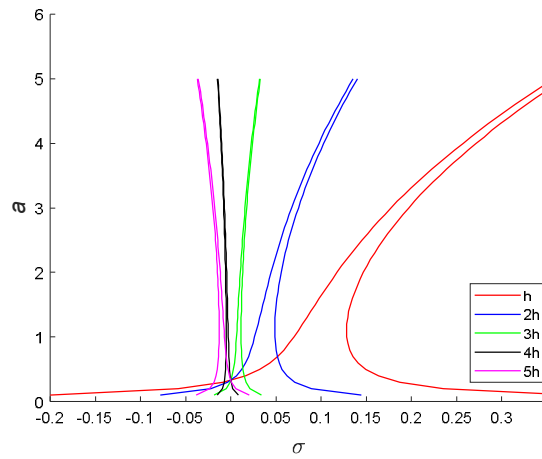


شکل ۶- نمودار پاسخ فرکانسی برای پوسته شماره ۲، به ازای تعداد تقویت‌کننده‌های رینگی متفاوت

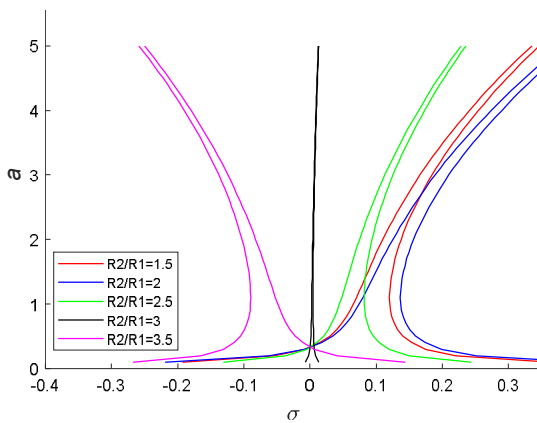
<sup>۱</sup> Hardening-Type



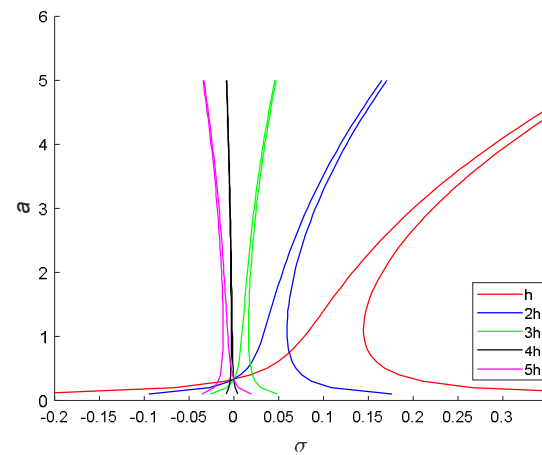
شکل ۸- نمودار پاسخ فرکانسی به ازای  $\frac{R_2}{R_1}$  های متفاوت برای پوسته ۱



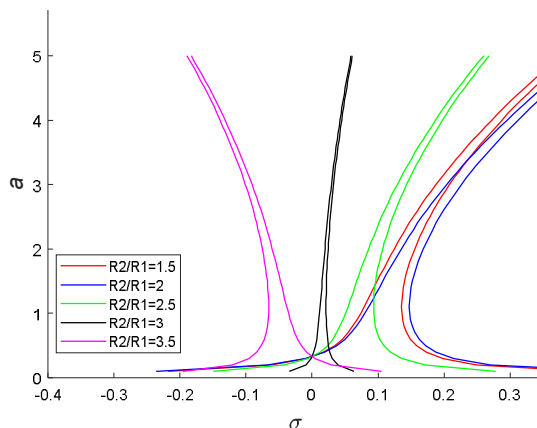
شکل ۶- نمودار پاسخ فرکانسی به ازای ضخامت‌های مختلف برای پوسته ۲



شکل ۹- نمودار پاسخ فرکانسی به ازای  $\frac{R_2}{R_1}$  های متفاوت برای پوسته ۲



شکل ۷- نمودار پاسخ فرکانسی به ازای ضخامت‌های مختلف برای پوسته ۳



شکل ۱۰- نمودار پاسخ فرکانسی به ازای  $\frac{R_2}{R_1}$  های متفاوت برای پوسته ۳

### ۳-۳-۳- بررسی تأثیر تغییر نسبت قاعده‌ی بزرگ به کوچک پوسته

برای بررسی تأثیر تغییر نسبت قاعده بزرگ به کوچک پوسته، نمودار پاسخ فرکانسی برای هر سه پوسته به ازای  $\frac{R_2}{R_1}$  های متفاوت، به صورت نمودارهای ۸، ۹ و ۱۰، مورد بررسی قرار گرفته است. همان‌طور که در نمودارهای شکل ۸، ۹ و ۱۰ مشاهده می‌شود، افزایش نسبت قاعده بزرگ به کوچک پوسته تا حدی مطلوب و موجب سخت‌شوندگی سیستم گردیده است، اما هنگامی که اختلاف این دو قاعده از میزان مشخصی بیشتر شده است، منحنی به سمت چپ انحراف

- conical shells formed by geodesically spiral and circumferential ribs. *Int J Appl Mech* 9(04): 1750047.
- [7] Sofiyev AH (2012) The non-linear vibration of FGM truncated conical shells. *Compos Struct* 94(7): 2237-2245.
- [8] Duc ND, Seung-Eock K, Khoa ND, Chan DQ (2020) Nonlinear buckling and post-buckling analysis of shear deformable stiffened truncated conical sandwich shells with functionally graded face sheets and a functionally graded porous core. *J Sandw Struct Mater* 099636220906821.
- [9] Duc ND, Seung-Eock K, Chan DQ (2018) Thermal buckling analysis of FGM sandwich truncated conical shells reinforced by FGM stiffeners resting on elastic foundations using FSDT. *J Therm Stresses* 41(3): 331-365.
- [10] Nezamoleslami R, Khadem SE (2017) Investigation of the vibration of lattice composite conical shells formed by geodesic helical ribs. *Steel Compos Struct* 24(2): 249-264.
- [11] Nezamoleslami R, Khadem SE (2017) Analysis of linear vibrational behavior of anisogrid lattice composite conical shells, formed by helical ribs. *Mod Mech Eng* 17(3): 251-262. (in Persian)
- [12] Mamaghani AE, Khadem SE, Bab S (2016) Vibration control of a pipe conveying fluid under external periodic excitation using a nonlinear energy sink. *Nonlinear Dyn* 86(3): 1761-1795.
- [13] Mamaghani AE, Khadem SE, Bab S, Pourkiaee SM (2018) Irreversible passive energy transfer of an immersed beam subjected to a sinusoidal flow via local nonlinear attachment. *Int J Mech Sci* 138: 427-447.
- [14] Hosseini R, Hamed M, Ebrahimi-Mamaghani A, Kim HC, Kim J, Dayou J (2017) Parameter identification of partially covered piezoelectric cantilever power scavenger based on the coupled distributed parameter solution. *Int J Smart Nano Mater* 8(2-3): 110-124.
- [15] Ebrahimi-Mamaghani A, Sotudeh Gharebagh R, Zarghami R, Mostoufi N (2019) Dynamics of two-phase flow in vertical pipes. *J Fluid Struct* 87:150-73.
- [16] Ebrahimi-Mamaghani A, Mirtalebi SH, Ahmadian MT (2020) Magneto-mechanical stability of axially functionally graded supported nanotubes. *Mater Res Express* 6(12): 1250c5.
- [17] Sarparast H, Ebrahimi-Mamaghani A. Vibrations of laminated deep curved beams under moving loads. *Compos Struct* 226: 111262.
- [18] Mirtalebi SH, Ebrahimi-Mamaghani A, Ahmadian MT (2019) Vibration control and manufacturing of intelligibly designed axially functionally graded

پیدا کرده است. به عبارت دیگر می توان گفت، هنگامی که اختلاف قاعده بزرگ از کوچک پوسته از عدد ۲ بیشتر شود، احتمال پدیده پرش [۳۶] کاهش یافته است، در نتیجه سیستم رفتار نرم شونده‌گی از خود نشان می‌دهد.

#### ۴- نتیجه گیری

در این تحقیق رزونانس ثانویه پوسته مخروطی ناقص تقویت شده با سازه مشبک، مورد بررسی قرار گرفت. نتایج تحلیل حاکی از آن است که در سازه مذکور، افزایش تعداد تقویت کننده‌های طولی و افزایش ضخامت پوسته، باعث انحراف بیشتر نمودار پاسخ فرکانسی به سمت راست شده که بیانگر صلبیت بیشتر سیستم است؛ اما افزایش تعداد تقویت کننده‌های رینگ، باعث انحراف بیشتر نمودار پاسخ فرکانسی به سمت چپ گردیده است که بیانگر کاهش سخت‌شوندگی سیستم است؛ همچنین، افزایش نسبت  $\frac{R_2}{R_1}$  تا میزان مشخصی باعث افزایش و از مقدار مشخصی به بعد، باعث کاهش انحراف نمودار پاسخ فرکانسی به سمت راست شده است که تا حدی سخت‌شوندگی سیستم و از آن به بعد نرم‌شوندگی سیستم را نشان داده است.

#### ۵- مراجع

- [1] Sofiyev AH, Osmancebioglu E (2017) The free vibration of sandwich truncated conical shells containing functionally graded layers within the shear deformation theory. *Compos B Eng* 120:197-211.
- [2] Sofiyev AH (2015) On the vibration and stability of shear deformable FGM truncated conical shells subjected to an axial load. *Compos B Eng* 80: 53-62.
- [3] Sofiyev AH, Schnack E (2012) The vibration analysis of FGM truncated conical shells resting on two-parameter elastic foundations. *Mech Adv Mater Struc* 19(4): 241-249.
- [4] Anh VT, Duc ND (2019) Vibration and nonlinear dynamic response of eccentrically stiffened functionally graded composite truncated conical shells surrounded by an elastic medium in thermal environments. *ACTA Mech* 230(1): 157-178.
- [5] Nguyen PD, Quang VD, Anh VT, Duc ND (2019) Nonlinear vibration of carbon nanotube reinforced composite truncated conical shells in thermal environment. *Int J Struct Stab Dy* 19(12): 1950158.
- [6] Khadem SE, Nezamoleslami R (2017) Investigation of the free vibrations of composite anisogrid lattice

- singular convolution based on the shear deformation theory. *Compos B Eng* 45(1):1001-1009.
- [32] Civalek O (2007) Linear vibration analysis of isotropic conical shells by discrete singular convolution (DSC). *Struct Eng Mech* 25(1): 127-130.
- [33] Li FM, Kishimoto K, Huang WH (2009) The calculations of natural frequencies and forced vibration responses of conical shell using the Rayleigh-Ritz method. *Mech Res Commun* 36(5): 595-602.
- [34] Jin G, Su Z, Ye T, Jia X (2014) Three-dimensional vibration analysis of isotropic and orthotropic conical shells with elastic boundary restraints. *Int J Mech Sci* 89: 207-221.
- [35] Jin G, Ma X, Shi S, Ye T, Liu Z (2014) A modified Fourier series solution for vibration analysis of truncated conical shells with general boundary conditions. *Appl Acoust* 85: 82-96.
- [36] Nayfeh AH, Mook DT (1979) *Nonlinear Oscillations*. John Wiley & Sons, New York.
- [37] Crenwelge OE, Muster D (1969) Free vibration of ring and stringer stiffened conical shells. *J Acoust Soc Am* 49: 176-185.
- [38] Mecitoglu Z (1996) Vibration characteristics of a stiffened conical shell. *J Sound Vib* 197: 191-206.
- [39] Sofiyev AH (2011) Non-linear buckling behavior of FGM truncated conical shells subjected to axial load. *Int J Non Lin Mech* 46: 711-719.
- [40] Agamirov VL (1990) *Dynamic problems of nonlinear shells theory*. Nauka, Moscow. (in Russian)
- [41] Zhang GQ (1989) Derivation of the governing equations of anisotropic conical shells. Delft University of Technology, Faculty of Aerospace Engineering, Report LR-609, Delft.
- [42] Jones RM (1999) *Mechanics of Composite Materials*. 2nd edn. Taylor & Francis, Philadelphia.
- [43] Subhi Qatu M (2004) *Vibration of laminated shells and plates*. Elsevier Inc., San Diego.
- [44] Liao SJ, Chwang AT (1998) Application of homotopy analysis method in nonlinear oscillations. *ASME J Appl Mech* 65: 914-922.
- [45] He JH (1999) Homotopy perturbation technique. *Comput Methods Appl Mech Eng* 178: 257-262.
- [46] Nayfeh AH (1973) *Perturbation methods*. Wiley, New York.
- cantilevered macro/micro-tubes. *IFAC-PapersOnLine* 52(10): 382-7.
- [19] Ebrahimi-Mamaghani A, Sotudeh-Gharebagh R, Zarghami R, Mostoufi N (2020) Thermo-mechanical stability of axially graded Rayleigh pipes. *Mech Based Des Struc* 5:1-30.
- [20] Ansaryan Y, Jafari A (2017) Investigation of free and forced vibration of a composite circular cylindrical shell with internal fluid. *Journal of Solid and Fluid Mechanics* 7(2): 93-100. (in Persian)
- [21] Ehsani A, Rezaeepazhand J (2015) Effect of grid configuration on buckling and vibration response of composite grid plates. *Journal of Solid and Fluid Mechanics* 5(3): 93-100. (in Persian)
- [22] Hemmati R, Talebitooti M (2019) Effects of boundary conditions, cone angle and core material on free vibration of the joined sandwich conical-conical shell. *Journal of Solid and Fluid Mechanics* 9(4): 167-180. (in Persian)
- [23] Irie T, Yamada G, Kaneko Y (1982) Free vibration of a conical shell with variable thickness. *J Sound Vib* 82(1): 83-94.
- [24] Sankaranarayanan N, Chandrasekaran K, Ramaiyan G (1988) Free vibrations of laminated conical shells of variable thickness. *J Sound Vib* 123(2): 357-371.
- [25] Sivadas KR, Ganesan N (1990) Free vibration of cantilever conical shells with variable thickness. *Comput Struct* 36(3): 559-566.
- [26] Sivadas KR, Ganesan N (1991) Vibration analysis of laminated conical shells with variable thickness. *J Sound Vib* 148(3): 477-491.
- [27] Tong L (1993) Free vibration of composite laminated conical shells. *Int J Mech Sci* 35(1): 47-61.
- [28] Kang JH, Leissa AW (1999) Three-dimensional vibrations of hollow cones and cylinders with linear thickness variations. *J Acoust Soc Am* 106(2): 74855.
- [29] Liew KM, Ng TY, Zhao X (2005) Free vibration analysis of conical shells via the element-free kp-Ritz method. *J Sound Vib* 281(3-5): 627-645.
- [30] Civalek Ö (2007) Numerical analysis of free vibrations of laminated composite conical and cylindrical shells: Discrete singular convolution (DSC) approach. *J Comput Appl Math* 205: 251-271.
- [31] Civalek Ö (2013) Vibration analysis of laminated composite conical shells by the method of discrete