



تحلیل ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای مشبک کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی با استفاده از تئوری برشی مرتبه اول

محمدصادق فایض^۱، علی داور^{۲*}، جعفر اسکندری جم^۳ و محسن حیدری بنی^۴

^۱ دانش آموخته کارشناسی ارشد، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، ایران

^۲ استادیار، مجتمع دانشگاهی مواد و فناوری های ساخت، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، ایران

^۳ استاد، مجتمع دانشگاهی مواد و فناوری های ساخت، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، ایران

^۴ دانشجوی دکتری، مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی مالک اشتر، تهران، ایران

مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۳۹۸/۱۱/۱۱؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۹/۰۶/۳۰؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۸/۱۱

چکیده

در این مقاله، ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای مشبک کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی، مورد بررسی قرار گرفته است. معادلات تعادل بر اساس تئوری برشی مرتبه اول استخراج شده است. جهت‌گیری نانولوله‌های کربنی به صورت تک محوره در راستای ضخامت فرض شده و مدول الاستیک کامپوزیت پلیمری تقویت شده با نانولوله‌های کربنی با استفاده از روش جمع آثار محاسبه می‌شود. به منظور دستیابی به پارامتر سفتی معادل پوسته استوانه‌ای مشبک از روش آغشته سازی، جهت برهم نهی اثر ریب‌ها استفاده شده است. برای صحت سنجی نتایج به دست آمده از نرم افزار آباکوس و مراجع معتبر استفاده شده است. مطابق نتایج به دست آمده حضور ریب‌های محیطی در سازه باعث افزایش فرکانس و کاهش جابجایی شعاعی می‌شود، همچنین ضخامت و زوایای ریب نیز در بهبود فرکانس مهم می‌باشند و نیز حضور نانولوله‌های کربنی نقش به سزایی در تقویت سازه و افزایش فرکانس و کاهش جابجایی شعاعی در اثر بار وارده را دارد.

کلمات کلیدی: استوانه کامپوزیتی؛ سازه‌های مشبک؛ نانولوله‌های کربنی؛ ارتعاشات.

Free Vibration Analysis of Carbon Nanotube Grid Composite Cylindrical Shell with First-Order Shear Deformation Theory

M.S. Fayez¹, A. Davar^{2*}, J. Eskandari Jam³, M. Heydari beni^{4*}

¹ M.Sc, Mechanical Engineering, Malek Ashtar University of Technology, Tehran, Iran.

² Assistant Professor, Faculty of Materials and Manufacturing Technologies, Malek Ashtar University of Technology, Tehran, Iran.

³ Professor, Faculty of Materials and Manufacturing Technologies, Malek Ashtar University of Technology, Tehran, Iran.

⁴ Ph.D Student, Mechanical Engineering, Malek Ashtar University of Technology, Tehran, Iran.

Abstract

In this paper, the free vibrations of a composite cylindrical grid shell reinforced with carbon nanotubes are investigated. Equilibrium equations are derived based on first-order shear deformation theory. The orientation of carbon nanotubes is assumed to be uniaxial in the direction of the assumed thickness and the elastic modulus of the polymer composite reinforced with carbon nanotubes is calculated using the Rule of mixture. In order to achieve the stiffness parameter equivalent to the shell of grid cylinders, Smear method has been used to suppress the effect of ribs. Abaqus software and valid references have been used to validate the obtained results. According to the results, the presence of peripheral ribs in the structure increases the frequency and reduces the radial displacement. Also, the thickness and angles of the ribs are important in improving the frequency and the presence of carbon nanotubes plays an important role in strengthening the structure and Increases the frequency and decreases the radial displacement due to the applied load.

Keywords: Composite Cylinder; Grid Structure; Carbon Nanotubes; Vibrations.

۱- مقدمه

ورق‌ها و پوسته‌ها سازه‌هایی هستند که شکل اولیه آن‌ها به ترتیب تخت و خمیده است و ضخامت آن‌ها نسبت به دو بعد دیگر بسیار کوچک است [۱]. معیاری که برای یک ورق یا پوسته‌ی نازک به کار می‌رود، این است که نسبت ضخامت به طول ضلع کوچک‌تر ورق باید کمتر از ۵ درصد باشد. این نسبت در مواردی به کمتر از یک درصد نیز می‌رسد.

پوسته‌های استوانه‌ای یکی از پرکاربردترین اشکال به کار رفته در قطعات صنعتی است. این پوسته‌ها ممکن است، در توربین‌های گاز، کوره‌های دوار، بدنه‌ی هواپیما، موشک‌ها، زیر دریایی‌ها و ... مورد استفاده قرار گیرد [۲]. به دلیل اینکه سازه‌ها تحت بارهای دینامیکی قرار دارند و دچار ارتعاش می‌شوند و برای جلوگیری از پدیده تشدید شناخت فرکانس‌های طبیعی امری حیاتی و ملزم است [۳].

تحلیل ارتعاشات آزاد یک پوسته استوانه‌ای تقویت شده با رینگ^۱ و استرینگر^۲ برای شرایط مرزی مختلف، توسط اگل به انجام رسید [۵]. اگل در تحلیل خود تقویت کننده‌ها را به صورت المان‌های جدا از هم در نظر گرفت. جیانگ، در پژوهشی در سال ۱۹۹۲، یک تکنیک عددی را برای تحلیل ارتعاشات آزاد پوسته‌های استوانه‌ای با تقویت کننده‌های عمود بر هم به کار برد [۶]. این تکنیک در قالب یک روش المان محدود ویژه توسعه داده شد. او با این روش توانست زمان لازم برای همگرایی پاسخ‌ها را کاهش دهد. تحلیل یکپارچه رفتار ارتعاشی پوسته‌های استوانه‌ای کامپوزیتی تقویت شده با مشبک و با ریب‌های موجی توسط همت نژاد و همکاران در سال ۲۰۱۳ ارائه گردید. ایشان در این مسیر از روش آغشته‌سازی برای افزودن اثر سفتی تقویت کننده‌ها به سفتی کل پوسته و تعیین پارامتر سفتی معادل بهره بردند، اما اثرات مربوط به ریب محیطی را مطالعه نکردند [۴]. در سال ۲۰۱۱، یک تکنیک آغشته‌سازی جدید برای مدل‌سازی ارتعاشات ورق‌های نازک و با تقویت کننده‌های متقاطع توسط لوان و همکاران وی ارائه گردید [۷]. آن‌ها در مقایسه نتایج حاصل از این تحلیل و حل

المان محدود دقت بالایی مشاهده کردند. پاسخ‌های دینامیکی پوسته تقویت شده با انحناهای سهمی گون توسط عدالت و همکاران وی در سال ۲۰۱۳ ارائه گردید [۸]. جهت تحلیل فوق‌الذکر، از روش انرژی برای تعیین پارامترهای ارتوتروپیک معادل پوسته استفاده گردید. رفتار کمانشی و استاتیکی پوسته‌های استوانه‌ای مشبک کامپوزیتی توسط رحیمی و همکاران در سال ۲۰۱۱ مورد بررسی قرار گرفت و اثر وجود نقص در ریب‌ها را بر توزیع تنش و پاسخ‌های کمانشی پوسته را مورد بررسی قرار دادند [۹]. شایان ذکر است که جهت انجام این پژوهش، یک تحلیل سه بعدی المان محدود در نرم افزار انسیس انجام گرفت و داده‌های هندسی و خواص مورد نیاز را با استفاده از یک نمونه رشته پیچی شده تعیین کردند. ایشان همچنین در سال ۲۰۱۰، تاثیر گشودگی مربع مستطیل را بر رفتار کمانشی سازه‌های مشبک کامپوزیتی استوانه‌ای با استفاده از روش‌های تجربی و المان محدود بررسی کردند؛ همچنین، اثر افزایش زاویه تقویت کننده و ضخامت پوسته بر مقاومت کششی پوسته‌های مشبک کامپوزیتی استوانه‌ای تحت بار محوری به صورت تجربی و عددی به کمک حل المان محدود مورد بررسی قرار گرفت. طبق انجام این پژوهش، در ضخامت‌های کم از پوسته با افزایش زاویه ریب نسبت به محور طولی، هم بار نهایی و هم بار ویژه کمانش کاهش می‌یابد [۹-۱۲]. اسکندری جم و همکاران، او در پژوهشی با استفاده از روش المان محدود به بررسی کمانش کلی صفحات ساندویچی با هسته مشبک پرداختند. نظر به نتایج تحلیل ذکر شده، با افزایش ضخامت ریب و پوسته بالایی و پایینی ساختار ساندویچی هسته مشبک، بار بحرانی کمانش افزایش می‌یابد؛ همچنین ایشان در سال ۲۰۰۹، ماتریس سفتی استوانه‌های کامپوزیتی مشبک با استفاده از روش معادل را بررسی نمودند و تاثیر ضخامت و زوایای ریب روی کمانش را تحت یک بار محوری فشاری بررسی کردند. در پژوهشی دیگر، اثر فاصله بین ریب‌های طولی و محیطی روی کمانش یک سازه مشبک با سلول‌های مربعی و تحت بار محوری توسط ایشان مورد بررسی قرار گرفت. در سال ۲۰۱۰، اسکندری جم و همکاران وی، به بررسی رفتار دینامیکی یک ورق مشبک پرداختند و در این مسیر از تئوری تغییر شکل برشی بهره بردند. دقت نتایج ذکر شده با نتایج المان محدود مقایسه گردید و در نهایت تغییرات

² Stringer

¹ Ring

$$v_{12} = V_{CN}^* v_{12}^{CN} + V_m v^m \quad (۴)$$

که در معادلات یادشده E_{11}^{CN} ، E_{22}^{CN} و G_{12}^{CN} به ترتیب نشان دهنده مدول‌های برشی و مدول‌های یانگ کربن نانوتیوب، E^m و G^m مدول یانگ و مدول برشی ماتریس می‌باشند. E_{11} و E_{22} و G_{12} مدول‌های برشی و مدول‌های یانگ سازه کامپوزیتی هستند. اگر طول تقویت‌کننده الیاف بزرگ‌تر از ضخامت نمونه باشد، فرض می‌شود، تقویت‌کننده‌ها به صورت تصادفی در دو بعد قرار گرفته‌اند [۲۱]. ضرایب η_1 ، η_2 و η_3 برای محاسبه خواص وابسته به مقیاس مواد معرفی می‌شوند. این ثابت‌ها با تطابق دادن خواص موثر کامپوزیت تقویت شده با نانولوله‌های کربنی به دست آمده از شبیه‌سازی دینامیک مولکولی با معادله جمع آثار به دست می‌آید [۲۲]؛ بنابراین در معادله (۴)، V_{CN} و V_m کسر حجمی CNTs و فاز ماتریس است که باید شرایط زیر را اقلان کند [۲۰]:

$$V_{CN} + V_m = 1 \quad (۵)$$

در این مطالعه، توزیع CNTs در امتداد ضخامت پوسته استوانه‌ای نانوکامپوزیت یکنواخت فرض می‌شود. رابطه ریاضی به صورت رابطه (۶) است:

$$V_{CN} = V_{CN}^* \quad (۶)$$

ضریب پواسون موثر برابر است با [۲۰]:

$$v_{12} = V_{CN}^* v_{12}^{CN} + V_m v^m \quad (۷)$$

در معادله (۷) v_{12}^{CN} و v^m به ترتیب ضریب پواسون نانولوله‌های کربنی و ماتریس است.

۳- معادلات حاکم

شکل ۱، یک پوسته استوانه‌ای با شعاع متوسط R ، ضخامت h و طول L را به همراه مختصات مرجع (جهت‌های مثبت قراردادی) نشان می‌دهد. سطح میانی پوسته به عنوان سطح مرجع در نظر گرفته شده و دستگاه مختصات x ، φ ، z روی آن قرار داده شده است. w ، v ، u مولفه‌های جابجایی در جهت‌های محوری (x)، محیطی (φ) و شعاعی z مشخص‌کننده تغییر شکل پوسته می‌باشند. در شکل ۲، یک المان از پوسته نشان داده شده است. M_x ، M_φ ، $M_{\varphi x}$ ، $M_{x\varphi}$ ، N_x ، N_φ ، $N_{\varphi x}$ ، $N_{x\varphi}$ ، Q_x ، Q_φ و Q_z منتجه‌های نیرو بر واحد طول می‌باشند. M_2 ، M_1 ، p_z ، p_φ ، p_x مجموع نیروها و

فرکانس طبیعی به تبعیت از دیگر پارامترها ارائه شد [۱۳-۱۶]. خواص مشبک در تحلیل اشاره شده در جهت‌های عمود بر هم متفاوت در نظر گرفته شد و از رویکرد ماکرومکانیک برای رسیدن به نتیجه استفاده گردید.

مرادی و آقاداتی در سال ۲۰۱۸، به تحلیل استاتیکی ورق‌های ساندویچی نانوکامپوزیتی مدرج تابعی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی دارای نقص پرداختند [۱۷].

در این پژوهش، ارتعاشات آزاد پوسته استوانه‌ای مشبک کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی، مورد بررسی و مطالعه قرار گرفته است. معادلات تعادل پوسته استوانه‌ای مشبک کامپوزیتی تقویت شده با نانولوله‌های کربنی بر اساس تئوری برشی مرتبه اول استخراج می‌شود. جهت گیری نانولوله‌های کربنی به صورت تک محوره در راستای ضخامت فرض می‌شود و مدول الاستیک کامپوزیت پلیمری تقویت شده با نانولوله‌های کربنی با استفاده از روش جمع آثار محاسبه می‌شود. به منظور دستیابی به پارامتر سفتی معادل پوسته استوانه‌ای مشبک از روش آغشته سازی، جهت برهم نهی اثر ریب‌ها استفاده می‌شود. فرض می‌شود که ریب‌ها ممان و نیروی محوری را تحمل می‌کنند. یک روش تحلیلی بر مبنای تغییر شکل برشی مرتبه اول (FSDT) استفاده می‌گردد. در آخر اثرات پارامترهای مختلف هندسی، زوایای ریب، اثرات حضور درصدهای مختلف نانولوله‌های کربنی، اثر وجود و یا عدم وجود ریب‌های محیطی و همچنین کسر حجمی ریب روی پاسخ دینامیکی و فرکانس طبیعی، مورد بررسی قرار گرفته است.

۲- معادلات خواص الاستیک

با افزودن نانولوله‌های کربنی به ماتریس سازه، خواص الاستیک بهبود پیدا می‌کند. یکی از روش‌هایی که برای محاسبه و تخمین اثر افزودن نانولوها بر خواص الاستیک سازه به کار می‌رود، معادله Halpin-Tsai بهبودیافته است [۲۰]. بر طبق این معادله:

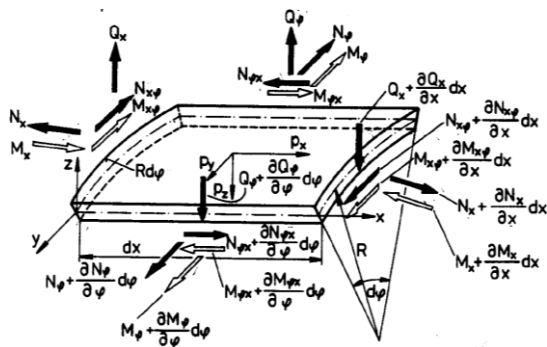
$$E_{11} = \eta_1 V_{CN} E_{11}^{CN} + V_m E^m \quad (۱)$$

$$\frac{\eta_2}{E_{22}} = \frac{V_{CN}}{E_{22}^{CN}} + \frac{V_m}{E^m} \quad (۲)$$

$$\frac{\eta_3}{G_{12}} = \frac{V_{CN}}{G_{12}^{CN}} + \frac{V_m}{G^m} \quad (۳)$$

$$R \frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi} + R \frac{\partial N_{\varphi x}}{\partial x} + RN_x \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - Q_x \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) - Q_\varphi \left(1 + \frac{\partial^2 w}{R \partial \varphi^2} - \frac{\partial v}{R \partial \varphi} \right) + RP_\varphi = 0 \quad (10)$$

$$R \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_\varphi}{\partial \varphi} + N_{x\varphi} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + RN_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_\varphi \left(1 + \frac{\partial^2 w}{R \partial \varphi^2} + \frac{\partial v}{R \partial \varphi} \right) + N_{\varphi x} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x} \right) + RP_z = 0 \quad (11)$$



شکل ۲- یک المان از پوسته با نیروها و گشتاورهای گسترده وارد بر آن [۱۹]

روابط (۹)، (۱۰) و (۱۱) شامل، عبارتهای غیر خطی می-باشند که از این عبارتها به دلیل کوچک بودن صرف نظر می-شوند. معادلات پس از ساده سازی به صورت زیر استخراج می-شوند.

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{\varphi x}}{\partial \varphi} + Rp_x = 0 \quad (12)$$

$$\frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi} + R \frac{\partial N_{\varphi x}}{\partial x} - Q_\varphi + Rp_\varphi = 0 \quad (13)$$

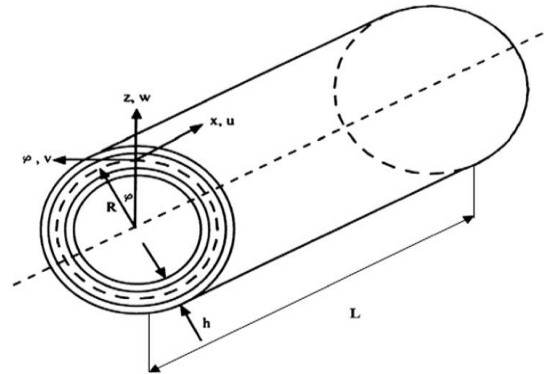
$$R \frac{\partial Q_x}{\partial x} + R \frac{\partial Q_\varphi}{\partial \varphi} + N_\varphi + Rp_z = 0 \quad (14)$$

علاوه بر تعادل نیروها، تعادل گشتاورها نیز باید برقرار باشد. معادلات تعادل گشتاورها به صورت زیر است:

$$R \frac{\partial M_{x\varphi}}{\partial x} + \frac{\partial M_\varphi}{\partial \varphi} - RM_x \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - M_{x\varphi} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \varphi} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) - RQ_\varphi + RM_2 = 0 \quad (15)$$

$$\frac{\partial M_{x\varphi}}{\partial \varphi} + R \frac{\partial M_x}{\partial x} + RM_{x\varphi} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - M_\varphi \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \varphi} - \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

ممانهای اینرسی و تحریکهای خارجی متغیر با زمان در جهت‌های x و φ و z هستند. برای به دست آوردن معادلات تعادل، نیروها و گشتاورها بر اساس اصل دالامبر، در جهت محورها مختصات و حول آنها به دست آورده شده است.



شکل ۱- هندسه و مختصات در دستگاه استوانه‌ای [۲۸]

رابطه تعادل نیروهای وارد بر جز پوسته در شکل ۲ در جهت x را می‌توان به صورت رابطه (۸) نوشت [۲۸]:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial N_x}{\partial x} dx Rd\varphi + \frac{\partial N_{\varphi x}}{\partial \varphi} dx d\varphi \\ & - N_\varphi \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \varphi} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) dx d\varphi \\ & - N_{x\varphi} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx Rd\varphi \\ & - Q_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx Rd\varphi \\ & - Q_\varphi \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx d\varphi \\ & + RP_x dx d\varphi = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

دو رابطه تعادل دیگر نیز مشابه با رابطه بالا به دست می-آید. در نتیجه سه رابطه تعادل برای نیروها در جهت x ، φ و z پس از ساده‌سازی به صورت زیر در می‌آیند [۲۸]:

$$\begin{aligned} & R \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{\varphi x}}{\partial \varphi} - Q_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ & - RN_{x\varphi} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - Q_\varphi \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ & - N_\varphi \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \varphi} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + RP_x = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

است [۲۰]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_{x\varphi}}{\partial \varphi} + P \left(\frac{1}{R} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + q_x(x, \varphi, t) \\ = I_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 \beta_x}{\partial t^2} \\ \frac{\partial N_{x\varphi}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{Q_\varphi}{R} + P \left(\frac{1}{R} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial W}{\partial \varphi} \right) \\ + q_\varphi(x, \varphi, t) = \left(I_1 + \frac{2I_2}{R} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ + \left(I_2 + \frac{I_3}{R} \right) \frac{\partial^2 \beta_\varphi}{\partial t^2} \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial Q_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{N_\varphi}{R} - P \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \varphi} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) \\ + q_r(x, \varphi, t) = I_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{x\varphi}}{\partial \varphi} - Q_x + m_x(x, \varphi, t) \\ = I_3 \frac{\partial^2 \beta_x}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial M_{x\varphi}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_\varphi}{\partial \varphi} - Q_\varphi + m_\varphi(x, \varphi, t) \\ = I_3 \frac{\partial^2 \beta_\varphi}{\partial t^2} + \left(I_2 + \frac{I_3}{R} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (23)$$

۳-۱- ماتریس سفتی پوسته

نیروهای برآیند تنش، گشتاور و نیروی برشی عمودی در رابطه ۲۳، مطابق با تئوری برشی مرتبه اول برابر است با:

$$\begin{aligned} N^T &= \{N_x, N_\varphi, N_{x\varphi}\} \\ M^T &= \{M_x, M_\varphi, M_{x\varphi}\} \\ Q^T &= \{Q_x, Q_\varphi\} \end{aligned} \quad (24)$$

و به صورت زیر نشان داده می‌شوند:

$$\begin{Bmatrix} N^{sh} \\ M^{sh} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{sh} & B^{sh} \\ B^{sh} & D^{sh} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e^T \\ k^T \end{Bmatrix} \quad (25)$$

$$Q = [H] \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{\varphi z} \end{Bmatrix} \quad (26)$$

در رابطه بالا A, B, D و H به ترتیب برابر با ماتریس‌های کششی، کوپلینگ، خمشی و ضخامت سفتی برشی است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A_{ij}, B_{ij}, D_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (1, z, z^2) \bar{Q}_{ij} dz \quad (i, j = 1, 2, 6)$$

$$-RQ_x + RM_1 = 0 \quad (16)$$

$$\frac{\partial M_{x\varphi}}{\partial \varphi} + R \frac{\partial M_x}{\partial x} + RM_{x\varphi} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - M_\varphi \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \varphi} - \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$-RQ_x + RM_1 = 0 \quad (17)$$

اگر در این معادلات نیز از عبارات‌های غیر خطی صرف نظر شود، روابط تعادل گشتاور خطی شده و به صورت زیر استخراج می‌شوند:

$$R \frac{\partial M_{x\varphi}}{\partial x} + \frac{\partial M_\varphi}{\partial \varphi} - RQ_\varphi + RM_2 = 0 \quad (18)$$

$$\frac{\partial M_{x\varphi}}{\partial \varphi} + R \frac{\partial M_x}{\partial x} - RQ_x + RM_1 = 0 \quad (19)$$

$$(N_{x\varphi} - N_{\varphi x}) = 0 \quad (20)$$

مقادیر $M_2, M_1, p_z, p_x, p_\varphi$ که به ترتیب مجموع نیروها و ممان‌های اینرسی و تحریک‌های خارجی متغیر با زمان می‌باشند، به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{cases} p_x = - \left[I_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + I_2 \frac{\partial^2 \beta_x}{\partial t^2} \right] + q_x \\ p_\varphi = - \left[\left(I_1 + \frac{2I_2}{R} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \left(I_1 + \frac{I_3}{R} \right) \frac{\partial^2 \beta_\varphi}{\partial t^2} \right] + q_\varphi \\ p_z = - \left(I_3 \right) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + q_z \\ M_1 = - \left[\left(I_3 \right) \frac{\partial^2 \beta_x}{\partial t^2} + \left(I_2 \right) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right] + m_x \\ M_2 = - \left[\left(I_2 + \frac{I_3}{R} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \left(I_3 \right) \frac{\partial^2 \beta_\varphi}{\partial t^2} \right] + m_\varphi \end{cases} \quad (21)$$

که در آن I_1 و I_2 و I_3 به صورت رابطه (۲۲) تعریف می‌شود:

$$I_1, I_2, I_3 = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (1, z, z^2) \rho_k dz \quad (22)$$

که ρ_k چگالی هر لایه است.

β_φ و β_x به ترتیب چرخش‌ها در صفحه $(x-z)$ و $(\varphi-z)$ ، q_x, q_φ, q_z نیروهای تحریک، m_x, m_φ ممان‌های تحریک می‌باشند. در روابط (۱۲) تا (۲۱) معادلات تعادل پوسته‌های استوانه‌ای بر اساس تئوری برشی مرتبه اول، به صورت زیر به دست می‌آید که دارای ۱۵ مجهول u, v, w (مولفه‌های تغییر مکان یا جابجایی)، β_φ و β_x (شیب‌ها) $M_x, M_\varphi, M_{x\varphi}, M_{\varphi x}, M_x, M_\varphi$ (منتجه‌های گشتاور) و $Q_x, Q_\varphi, N_x, N_\varphi, N_{x\varphi}, N_{\varphi x}$ (منتجه‌های نیرو می‌باشند). بر مبنای تئوری تغییر شکل برشی مرتبه اول (FSDT) موازنه‌ی معادله برای پوسته به صورت رابطه (۲۳)

(۲) تقویت کننده‌ها تنها نیروی محوری تحمل می‌کنند

و نیروی عمودی وارد بر تقویت کننده در نظر گرفته نمی‌شود.

(۳) بار بین پوسته و تقویت کننده از طریق نیروی برشی انتقال می‌یابد.

۳-۳- تحلیل کرنش

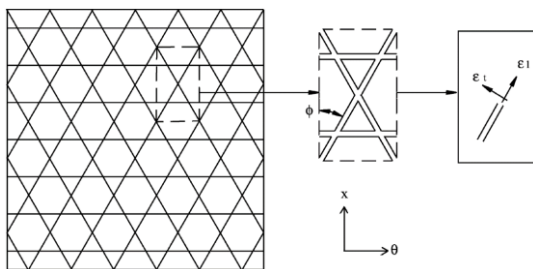
با فرض ناچیز بودن کرنش‌های عمود بر راستای طولی تقویت کننده‌ها در هر نقطه، تنها کرنش سطح بالایی تقویت کننده‌ها در هر نقطه، از رابطه ۳۲ محاسبه می‌شود.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \varepsilon_{xx}^0 + k_x \frac{z}{2} \\ \varepsilon_{\varphi\varphi} &= \varepsilon_{\varphi\varphi}^0 + k_\varphi \frac{z}{2} \\ \varepsilon_{x\varphi} &= \varepsilon_{x\varphi}^0 + k_{x\varphi} \frac{z}{2} \end{aligned} \quad (32)$$

که در معادله ۳۲، ε_{xx}^0 ، $\varepsilon_{\varphi\varphi}^0$ و $\varepsilon_{x\varphi}^0$ برابر با کرنش‌های صفحه میانی می‌باشند (همان کرنش‌های متوسط تقویت کننده‌ها) [۲۵]. از آنجا که کرنش‌های محاسبه شده در رابطه ۳۲ همان کرنش‌های سطح بالایی تقویت کننده‌ها است، بنابراین باید آن‌ها را به کرنش‌هایی در دستگاه موازی با راستای طولی تقویت کننده‌ها تبدیل کرد؛ بنابراین کرنش‌ها به صورت زیر انتقال می‌آیند:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{ll} \\ \varepsilon_{tt} \\ \varepsilon_{lt} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} c^2 & s^2 & 2sc \\ s^2 & c^2 & -2sc \\ -cs & cs & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{\varphi\varphi} \\ \varepsilon_{x\varphi} \end{Bmatrix} \quad (33)$$

که در رابطه ۳۳، ε_{ll} ، ε_{tt} و ε_{lt} به ترتیب برابر با کرنش در امتداد تقویت کننده، کرنش عمود بر محور تقویت کننده و کرنش برشی است؛ همچنین $s = \sin \varphi$ و $c = \cos \varphi$ و برابر با زاویه تقویت کننده نسبت به محور استوانه است [۲۶].



شکل ۳- سلول واحد پوسته استوانه‌ای تقویت شده

(۲۷)

$$H_{ij} = k_0 \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{ij} dz \quad (i, j = 4,5) \quad (28)$$

k_0 فاکتور تصحیح برش بوده که توسط میندلین تعریف شد و برابر با $\frac{\pi^2}{12}$ است [۲۳]. \bar{Q}_{ij} ماتریس انتقال سفتی کاهش یافته است که با توجه به خصوصیات پوسته و ریب‌های مشبک به کار می‌رود. در رابطه ۲۵ و ۲۶، $e^T = \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_\varphi^0, \varepsilon_{x\varphi}^0\}$ کرنش مهندسی سطح میانی، $\gamma_{\varphi z}^0$ و γ_{xz}^0 کرنش برشی عمودی و $k^T = \{k_x, k_\varphi, k_{x\varphi}\}$ بردار انحنا و پیچش پوسته‌ی تعریف شده با تقریب تئوری اولیه لاو به صورت روابط (۲۹-۳۱) است:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_\varphi^0 \\ \gamma_{x\varphi}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{w}{R} \\ \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (29)$$

$$\begin{Bmatrix} k_x \\ k_\varphi \\ k_{x\varphi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \frac{1}{R} \frac{\partial \beta_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{R} \\ \frac{1}{R} \frac{\partial \beta_x}{\partial \varphi} + \frac{\partial \beta_\varphi}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (30)$$

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^0 \\ \gamma_{\varphi z}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \beta_x + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \beta_\varphi + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \varphi} - \frac{v}{R} \end{Bmatrix} \quad (31)$$

۳-۲- محاسبه سفتی معادل تقویت کننده

برای به دست آوردن مدل تحلیلی، یک سلول واحد را مطابق شکل ۳ در نظر گرفته و در عمل کل سازه مشبک از تکرار این سلول به دست می‌آید. برای محاسبه مولفه‌های سفتی در این المان، عکس‌العمل‌های بین پوسته خارجی و تقویت کننده‌ها از طریق نیروها و ممان‌ها شکل ۴ در نظر گرفته شد. پس از آن سفتی معادل بر مبنای کرنش و انحنای صفحه میانی پوسته خارجی به دست آمد.

فرض‌های در نظر گرفته شده به شرح زیر است [۲۴]:

(۱) کرنش به صورت پیوسته و یکنواخت بر سطح مقطع اعمال می‌شود، لذا تنش نیز یکنواخت است.

$$N_{\theta} = \frac{AE_l}{b} \left(2sc^2 \varepsilon_{xx}^0 + 2sc^2 \kappa_x \left(\frac{t}{2} \right) + (2s^3 + 2) \varepsilon_{\theta\theta}^0 + (2s^3 + 2) \kappa_{\theta} \left(\frac{t}{2} \right) \right)$$

$$N_{x\theta} = \frac{AE_l}{b} \left(2sc^2 \varepsilon_{x\theta}^0 + 2sc^2 \kappa_{x\theta} \left(\frac{t}{2} \right) \right) \quad (36)$$

$$a = \frac{2\pi R}{N} \quad b = \frac{2\pi R}{N \tan \varphi} \quad (37)$$

که در این روابط، N برابر با نصف تعداد ریب‌ها و R شعاع پوسته استوانه‌ای است [۲۶].

همچنین اثرات چگالی ریب به صورت رابطه (۳۸) محاسبه می‌شود [۲۶]:

$$h_{st} = \frac{2A_{st}}{b \sin \varphi}$$

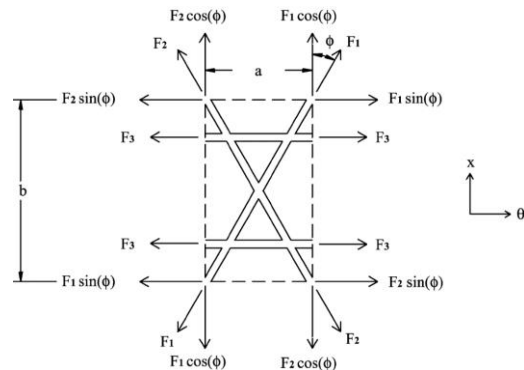
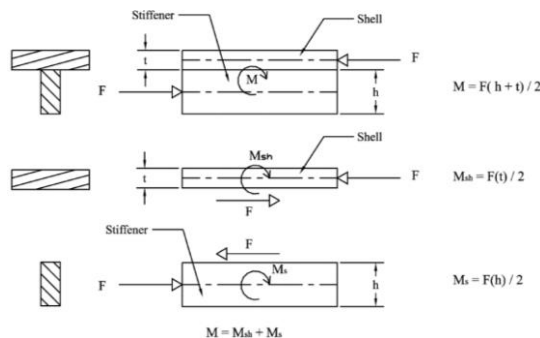
$$I_1 = \int_{-h_{st}}^{h_{st}} \rho dz$$

$$I_2 = \int_{-h_{st}}^{h_{st}} \rho_{st} z dz$$

$$I_3 = \int_{-h_{st}}^{h_{st}} \rho_{st} z^2 dz \quad (38)$$

۳-۵- تحلیل گشتاور

به دلیل وجود نیروهای برشی بین پوسته و تقویت کننده، گشتاور خمشی بر آن‌ها وارد می‌شود (شکل ۵). همانطور که در این شکل مشاهده می‌شود، گشتاور M در مجموعه پوسته‌ها و تقویت کننده‌ها به وجود می‌آید. تنها مولفه گشتاوری که در معادلات وارد می‌شود، M_{st} است، چون تنها این مولفه از گشتاور ناشی از نیروهای برشی بین پوسته و تقویت کننده‌ها روی صفحه میانی پوسته خارجی است. در نهایت ماتریس سفتی تقویت کننده‌ها به ورت زیر بدست می‌آید [۲۵]:



شکل ۴- نمودار آزاد نیرو و ممان‌ها برای یک سلول واحد

۳-۴- تحلیل نیرو

همانطور که بیان شد، تقویت کننده‌ها تنها در امتداد محور خود نیرو تحمل می‌کنند، با قرار دادن زاویه‌ی مناسب برای هریک از تقویت کننده‌ها در رابطه ۳۳ نیروی محوری هریک از آن‌ها مطابق رابطه ۳۴ به دست می‌آید.

$$F_1 = AE_1 \varepsilon_{l1} = AE_1 (c^2 \varepsilon_{xx} + s^2 \varepsilon_{\varphi\varphi} - 2sc \varepsilon_{x\varphi})$$

$$F_2 = AE_1 \varepsilon_{l2} = AE_1 (c^2 \varepsilon_{xx} + s^2 \varepsilon_{\varphi\varphi} + 2sc \varepsilon_{x\varphi})$$

$$F_3 = AE_1 \varepsilon_{l3} = AE_1 (\varepsilon_{\varphi\varphi}) \quad (34)$$

در رابطه ۳۴، E_1 برابر با مدول الاستیسیته در امتداد تقویت کننده‌ها و A نیز سطح مقطع آن است؛ همچنین ε_{xx} ، $\varepsilon_{\varphi\varphi}$ و $\varepsilon_{x\varphi}$ کرنش‌های متوسط تقویت کننده‌ها هستند. با تصویر نیروهای اعمال شده بر سلول و جمع نیروها در راستای φ و x روابط ۳۵ به دست می‌آید [۲۴]. نیروی برشی نیز با جمع اجزای نیرو در یک طرف سلول به دست می‌آید.

$$F_x = (F_1 + F_2)c$$

$$F_{\theta} = (F_1 + F_2)s + 2F_3$$

$$F_{x\theta} = (F_2 - F_1)c \quad (35)$$

منتجه‌های نیرو در جهات θ و x و منتجه‌ی نیروی برشی برای المان مورد نظر، از تقسیم نیروهای هر جهت بر طول ضلع مورد نظر برای معادل کردن با یک جهت به دست می‌آیند.

با جایگذاری معادلات ۳۳ در معادلات ۳۴ نیروها برواحد طول به صورت زیر استخراج می‌شود:

$$N_x = \frac{AE_l}{a} \left(2c^3 \varepsilon_{xx}^0 + 2c^3 \kappa_x \left(\frac{t}{2} \right) \right)$$

$$\begin{bmatrix} N_x^{st} \\ N_\theta^{st} \\ N_{x\theta}^{st} \\ M_x^{st} \\ M_\theta^{st} \\ M_{x\theta}^{st} \end{bmatrix} = AE_1 \begin{bmatrix} \frac{2c^3}{a} & \frac{2s^2c}{a} & 0 & \frac{c^3t}{a} & \frac{s^2ct}{a} & 0 \\ \frac{2sc^2}{b} & \frac{(2s^3+2)}{b} & 0 & \frac{c^2st}{b} & \frac{(2s^3+2)t}{2b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2sc^2}{b} & 0 & 0 & \frac{sc^2t}{b} \\ \frac{c^3t}{a} & \frac{s^2ct}{a} & 0 & \frac{c^3t^2}{2a} & \frac{s^2ct^2}{2a} & 0 \\ \frac{sc^2t}{b} & \frac{(2s^3+2)t}{2b} & 0 & \frac{sc^2t^2}{2b} & \frac{(2s^3+2)t^2}{4b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(2s^3+2)}{2b} & 0 & 0 & \frac{sc^2t^2}{2b} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_\theta^0 \\ \varepsilon_{x\theta}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_\theta \\ \kappa_{x\theta} \end{Bmatrix} \quad (43)$$

همچنین نیروی برش برآیند از کرنش برشی به صورت رابطه (۴۴) است:

$$F_{lz1} = A_l G_{lz} (s\varepsilon_{\theta z}^0 + c\varepsilon_{zx}^0) \quad (44)$$

$$F_{lz2} = A_l G_{lz} (-s\varepsilon_{\theta z}^0 + c\varepsilon_{zx}^0) \quad (44)$$

با حل مجدد این نیروها در راستای محور x و θ و جمع نیروها روی قسمت‌های بالایی و پایینی سلول واحد، به صورت رابطه (۴۵) بدست می‌آید:

$$q_x^{st} = (F_{lz1} + F_{lz2})c \quad (45)$$

$$q_\theta^{st} = (F_{lz1} + F_{lz2})s \quad (45)$$

که می‌توان آن‌ها را به صورت رابطه (۴۶) نوشت:

$$q_x^{st} = 2A_l G_{lz} c^2 \varepsilon_{xz}^0 \quad q_\theta^{st} = 2A_l G_{lz} cs \varepsilon_{xz}^0 \quad (46)$$

و نیرو بر واحد سطح را می‌توان با تقسیم نیروها بر طول متناظر، به صورت رابطه (۴۷) به دست آورد.

$$q_x^{st} = \frac{2A_l G_{lz} c^2 \varepsilon_{xz}^0}{a} \quad (47)$$

$$q_\theta^{st} = 2A_l G_{lz} cs \varepsilon_{xz}^0 / a \quad (47)$$

و به صورت ماتریس می‌تواند به فرم رابطه ۴۸ نوشته شود:

$$\begin{Bmatrix} Q_x^{st} \\ Q_\theta^{st} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2A_l G_{lz} c^2}{a} & 0 \\ 0 & \frac{2A_l G_{lz} cs}{b} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xz}^0 \\ \varepsilon_{z\theta}^0 \end{Bmatrix} \quad (48)$$

و درنهایت با جمع سفتی معادل پوسته و سفتی معادل ریب، ABD ماتریس که نشانگر سفتی کل سازه است، به دست می‌آید [۲۴]:

شکل ۵- گشتاور خمشی ناشی از نیروهای برشی بین

پوسته و تقویت کننده [۲۶]

برای موازنه بین گشتاورها روابط (۳۹) حاکم است:

$$M_x = (M_1 + M_2)c \quad (39)$$

$$M_\theta = (M_1 + M_2)s$$

$$M_{x\theta} = (M_2 - M_1)c$$

نیروهای به دست آمده برای تقویت کننده‌ها باید به صفحه میانی پوسته منتقل شوند، به همین جهت به دلیل وجود فاصله بین نقطه اثر نیروها و خط میانی گشتاور ایجاد می‌شود. با ضرب این نیروها در بازوی گشتاور (فاصله تا صفحه میانی پوسته) مقدار ممان‌ها به دست می‌آید.

$$M_i = \frac{F_i t}{2} \quad (40)$$

$$\begin{bmatrix} N^{st} \\ M^{st} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{st} & B^{st} \\ B^{st} & D^{st} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^0 \\ k \end{bmatrix} \quad (41)$$

$$[A^{st}] = AE_1 \begin{bmatrix} \frac{2c^3}{a} & \frac{2cs^2}{a} & 0 \\ \frac{2sc^2}{b} & \frac{(2s^3+2)}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2sc^2}{b} \end{bmatrix}$$

$$[B^{st}] = AE_1 t \begin{bmatrix} \frac{c^3}{a} & \frac{cs^2}{a} & 0 \\ \frac{sc^2}{b} & \frac{(2s^3+2)t}{2b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{sc^2}{b} \end{bmatrix}$$

$$[D^{st}] = \frac{AE_1 t^2}{2} \begin{bmatrix} \frac{c^3}{a} & \frac{cs^2}{a} & 0 \\ \frac{sc^2}{b} & \frac{(2s^3+2)}{2b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{sc^2}{b} \end{bmatrix} \quad (42)$$

و می‌توان به صورت یک ماتریس یک پارچه به صورت رابطه (۴۳) نمایش داد:

تابع تیر مودال $\eta_i(x)$ در معادله (۵۱) در راستای محور x تعریف شده است و برای مولفه‌های جابجایی v, w و β_φ به صورت عادی و برای مولفه‌های جابجایی u و β_x از مشتق اول آن استفاده می‌شود؛ بنابراین تابع $\eta_i(x)$ با توجه به مطالب یاد شده، توانایی اقناع کردن شرایط مرزی به صورت ترکیبی را خواهد داشت.

برای به دست آوردن ارتعاش آزاد از تابع زمان برابر با $e^{i\omega_{mn}t}$ می‌شود که ω_{mn} برابر با فرکانس طبیعی است و با جایگذاری معادلات ۵۱ در ۵۲ و استفاده از روش گالرکین، مجموعه‌ای از پنج معادله (۵۳) به دست می‌آید [۲۸].

$$\int_0^{2\pi} \int_0^L (L_{11}u + L_{12}v + L_{13}w + L_{14}\beta_x + L_{15}\beta_\varphi) \frac{d\eta_{\beta_x}(x)}{dx} \cos n\varphi dx d\varphi = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^L (L_{21}u + L_{22}v + L_{23}w + L_{24}\beta_x + L_{25}\beta_\varphi) \eta_{\beta_x}(x) \sin n\varphi dx d\varphi = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^L (L_{31}u + L_{32}v + L_{33}w + L_{34}\beta_x + L_{35}\beta_\varphi) \eta_{\beta_x}(x) \cos n\varphi dx d\varphi = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^L (L_{41}u + L_{42}v + L_{43}w + L_{44}\beta_x + L_{45}\beta_\varphi) \frac{d\eta_{\beta_x}(x)}{dx} \cos n\varphi dx d\varphi = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^L (L_{51}u + L_{52}v + L_{53}w + L_{54}\beta_x + L_{55}\beta_\varphi) \eta_{\beta_x}(x) \sin n\varphi dx d\varphi = 0 \quad (53)$$

با انتگرال‌گیری از معادله ۵۳ و ساده سازی آن به عبارت

$$[C]_{mn} \{\Delta\}_{mn} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{mn} \\ B_{mn} \\ C_{mn} \\ D_{mn} \\ E_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (54)$$

که در رابطه ۵۴، ضرایب C_{ij} عباراتی بسیار طولانی و پیچیده شامل، پارامترهای هندسی، خواص مکانیکی قطعه و فرکانس-های طبیعی هستند. پس از ساده سازی و جداکردن ماتریس سفتی و جرم به عبارت (۵۵) می‌رسیم:

$$[C]_{mn} \{\Delta\}_{mn} = [[K]_{mn} - \omega_{mn}^2 [M]_{mn}] \{\Delta\}_{mn} = 0 \quad (55)$$

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{st} N^{st} + V_{sh} N^{sh} \\ V_{st} M^{st} + V_{sh} M^{sh} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} Q_x \\ Q_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{st} Q_x^{st} + V_{sh} Q_x^{sh} \\ V_{st} Q_\theta^{st} + V_{sh} Q_\theta^{sh} \end{bmatrix} \quad (49)$$

۳-۶- ارتعاش آزاد

به منظور حل مسئله ارتعاش آزاد، تحریک خارجی برابر با صفر قرار می‌گیرد. پس از جایگزینی معادلات ۴۳ و ۴۸ در معادله ۲۳ نتایج به صورت رابطه (۵۰) ساده می‌شوند [۲۸]:

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14} & L_{15} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} & L_{24} & L_{25} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & L_{34} & L_{35} \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} & L_{45} \\ L_{51} & L_{52} & L_{53} & L_{54} & L_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(x, \varphi, t) \\ v(x, \varphi, t) \\ w(x, \varphi, t) \\ \beta_x(x, \varphi, t) \\ \beta_\varphi(x, \varphi, t) \end{Bmatrix} = 0 \quad (50)$$

L_{ij} اپراتور دیفرانسیلی است. به منظور اقناع شرایط مرزی u, v, w, β_x و β_φ به صورت زیر و به صورت سری دوگانه تعریف می‌شوند [۲۸]:

$$u = \bar{A}_{mn} T_{mn}(t) = A_{mn} \frac{d\eta_u(x)}{dx} \cos n\varphi T_{mn}(t)$$

$$v = \bar{A}_{mn} T_{mn}(t) = A_{mn} \frac{d\eta_u(x)}{dx} \cos n\varphi T_{mn}(t)$$

$$w = \bar{C}_{mn} T_{mn}(t) = C_{mn} \eta_w(x) \cos n\varphi T_{mn}(t)$$

$$\beta_x = \bar{D}_{mn} T_{mn}(t) = D_{mn} \frac{d\eta_{\beta_x}(x)}{dx} \cos n\varphi T_{mn}(t)$$

$$\beta_\varphi = \bar{E}_{mn} T_{mn}(t) = E_{mn} \eta_{\beta_\varphi}(x) \sin n\varphi T_{mn}(t) \quad (51)$$

که در معادلات ۵۱، تابع $\eta_i(x)$ به صورت رابطه (۵۲) تعریف می‌شود [۲۹]:

$$\eta_i(x) = \alpha_1 \cosh \frac{\lambda_m x}{L} + \alpha_2 \cos \frac{\lambda_m x}{L} - \sigma_m \left(\alpha_3 \sinh \frac{\lambda_m x}{L} - \alpha_4 \sin \frac{\lambda_m x}{L} \right)$$

$$i = u, v, w, \beta_x, \beta_\varphi \quad (52)$$

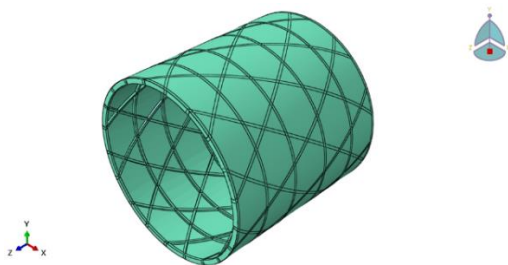
در معادله ۵۱، $T_{mn}(t)$ تابع زمان است؛ همچنین $A_{mn}, B_{mn}, C_{mn}, D_{mn}, E_{mn}$ ضرایب ثابت شکل مود طبیعی مربوط به مسئله ارتعاش آزاد است. m تعداد نیم موج محوری و n تعداد موج محیطی است.

می‌شود و آنالیز مودال و تغییرات جابجایی شعاعی بر حسب زمان در مورد آن انجام می‌گیرد.

به منظور مدل‌سازی استوانه مشبک کامپوزیتی شکل ۶، از المان $S4R$ استفاده و مسیرهای مربوط به ریب روی بدنه استوانه ترسیم می‌شود.

۵- نتایج و بحث

همانطور که گفته شد، برنامه توسعه یافته در نرم افزار متلب، برای تحلیل هرنوع استوانه مشبک با خواص و ابعاد مختلف قابل کاربرد است. در جدول ۱ خواص نانولوله‌های کربنی به کار برده شده در ماتریس و الیاف استفاده شده ارائه می‌شود؛ همچنین خواص استوانه مشبک تقویت شده با کسر حجمی-های مختلف در جدول ۲ بیان شده است.



شکل ۶- مدل‌سازی استوانه مشبک به وسیله نرم‌افزار آباکوس

که در آن $\{\Delta\}_{mn}$ بردار ضرایب شکل مود، $[M]_{mn}$ ماتریس جرم و $[K]_{mn}$ ماتریس سفتی نامیده می‌شوند.

$$[M]_{mn} = \begin{bmatrix} I_1 R & 0 & 0 & I_2 R & 0 \\ 0 & I_1 R + 2I_2 & 0 & I_2 R + I_3 & 0 \\ 0 & 0 & I_1 R & 0 & 0 \\ I_2 R & 0 & 0 & I_2 R & 0 \\ 0 & I_2 R + I_3 & 0 & 0 & I_3 R \end{bmatrix} \quad (56)$$

برای داشتن حل غیر بدیهی از معادله ۵۵، باید دترمینان ضرایب برابر با صفر شود. بنابراین:

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} \end{bmatrix} = 0 \quad (57)$$

پس از دترمینان گیری از معادله بالا و ساده سازی به یک معادله درجه ۱۰ به صورت زیر می‌رسیم:

$$a_1 \omega^{10} + a_2 \omega^8 + a_3 \omega^6 + a_4 \omega^4 + a_5 \omega^2 + a_6 = 0 \quad (58)$$

معادله ۵۸ دارای ۱۰ جواب است که پنج جواب آن مثبت و پنج جواب آن منفی است و تنها جواب‌های مثبت قابل قبول می‌باشند و فرکانس‌ها از کوچک به بزرگ متنظر با فرکانس ارتعاش خمشی، پیچشی و طولی می‌باشند [۲۸].

۴- مدل‌سازی و تحلیل در نرم افزار آباکوس

به منظور صحت‌سنجی جواب‌های به دست آمده از ارتعاش آزاد و اجباری، یک استوانه مشبک در نرم افزار آباکوس مدل‌سازی

جدول ۱- خواص مکانیکی نانولوله‌های کربنی، ماتریس و الیاف استفاده شده [۲۰، ۳۰]

نانو لوله کربنی					
E_{11}^{CN}	E_{22}^{CN}	G_{12}^{CN}	G_{23}^{CN}	ν_{12}^{CN}	ρ
۵/۶۴ TPa	۷/۰۸ TPa	۷/۹۴ TPa	۲/۳۳ TPa	۰/۱۷۵	۱۴۴۰ $\frac{Kg}{m^3}$
E Glass					
E_{11}	E_{22}	G_{12}	ν_{12}	ρ	
۷۳/۰۸ MPa	۷۳/۰۸ MPa	۳۰/۱۲ MPa	۰/۲۲	۲۶۵۷/۲۶ $\frac{kg}{m^3}$	

Poly (methyl methacrylate)

E^m	V_{12}^m	ρ
۲/۵ GPa	۰/۳۴	$940 \cdot \frac{kg}{m^3}$

جدول ۲- خواص مکانیکی ماتریس تقویت شده با نانو لوله‌های کربنی

خواص ماتریس تقویت شده با نانولوله‌های کربنی

$$V_{CN}^* = \%0$$

E_{11}	E_{22}	G_{12}	G_{23}	ν_{12}	ρ
۳۸/۲۱ GPa	۸/۸۲ GPa	۲/۶۲ GPa	۳/۲۲ GPa	۰/۲۸	$11700 \cdot \frac{kg}{m^3}$

$$V_{CN}^* = \%12$$

E_{11}	E_{22}	G_{12}	G_{23}	ν_{12}	ρ
۸۳/۹۲ GPa	۱۰/۰۳ GPa	۳/۱۶ GPa	۳/۶۳ GPa	۰/۲۷	$11730 \cdot \frac{kg}{m^3}$

$$V_{CN}^* = \%17$$

E_{11}	E_{22}	G_{12}	G_{23}	ν_{12}	ρ
۱۰۵/۳۴ GPa	۱۵/۳۷ GPa	۳/۴۹ GPa	۴/۰۷ GPa	۰/۲۶	$11742 \cdot \frac{kg}{m^3}$

$$V_{CN}^* = \%28$$

E_{11}	E_{22}	G_{12}	G_{23}	ν_{12}	ρ
۱۴۷/۹۹ GPa	۱۶/۸۱ GPa	۳/۸۸ GPa	۴/۴۰ GPa	۰/۲۶	$11769 \cdot \frac{kg}{m^3}$

طول	۲۰۰۰ mm	ابعاد همه پوسته‌های استوانه‌ای مشبک تقویت شده با نانو لوله‌های کربنی مورد بررسی نیز، مطابق جدول ۳ است، به جز مواردی که ذکر شود. کسر حجمی در نظر گرفته شده برای نانولوله‌های کربنی نیز برابر ۰/۱۲ است.
سطح مقطع ریب	۰/۰۶۰x۰/۰۶۰m	
زاویه ریب‌ها	۳۰ درجه	
CAR ^۱	۰/۰۱	
لایه چینی	[۴۵ -۴۵ ۴۵ -۴۵]	

جدول ۳- خواص هندسی استوانه مشبک

شعاع پوسته	۱۰۰۰ mm
جدول ۴- مقایسه فرکانس‌های طبیعی (هرتز) برای پوسته استوانه‌ای یکسرگیردار-یکسر آزاد	

^۱ Cell Area Ratio

فرکانس‌ها از تئوری کلاسیک استفاده می‌شود. همانطور که از این جدول مشاهده می‌شود، اختلاف بین داده‌های به دست آمده از مراجع و نرم افزار FEM^۱ بسیار ناچیز است.

۵-۳- بسط تئوری ورق‌ها

بر طبق معیاری که اغلب به منظور محاسبات فنی در تعریف یک پوسته نازک استفاده می‌شود، نسبت ضخامت به طول دهانه کوچکتر باید کمتر از ۱ به ۲۰ باشد. این نسبت برای پوسته‌های ایزوتروپیک صادق است [۱۸]، در نتیجه برای پوسته‌های استوانه‌ای مشبک باید نسبت جدیدی تعریف شود که تئوری ورق و پوسته بتواند به کار گرفته شود. به همین دلیل در جدول ۶ به بررسی این پارامتر پرداخته می‌شود.

جدول ۶، نسبت $\frac{H}{R}$ های مختلف ($H = t + h$) را برای یک استوانه کامپوزیتی مشبک تقویت شده با نانوله‌های کربنی نشان می‌دهد که در این رابطه t ، h و H به ترتیب ضخامت ریب، ضخامت پوسته و H مجموع ضخامت ریب و پوسته است. نسبت مساحت سلول واحد به سطح کل پوسته استوانه‌ای (CAR) برابر با $\frac{1}{100}$ است. همانطور که از این جدول مشاهده می‌شود، همچنانکه ضخامت از $\frac{1}{20}$ به $\frac{1}{100}$ تغییر می‌کند، خطای بین حل عددی و تحلیلی کمتر می‌شود و در نسبت ضخامت $\frac{H}{R} = \frac{1}{100}$ اختلاف خطای بین روابط تحلیلی و عددی، بین ۲ تا ۶ درصد می‌شود؛ بنابراین برای هر استوانه کامپوزیتی مشبک با نسبت CAR معین نسبتی خاص از $\frac{H}{R}$ وجود دارد که بر مبنای آن می‌توان از نظریه تئوری ورق و پوسته استفاده کرد.

۵-۴- بررسی پارامترهای موثر بر فرکانس طبیعی

۵-۴-۱- اثر کسر حجمی تقویت کننده روی فرکانس پایه در شکل ۷، اثر کسر حجمی ریب بر فرکانس طبیعی استوانه مشبک کامپوزیتی بررسی شده است.

ابتدا یک استوانه کامپوزیتی بدون ریب در نظر گرفته و سپس با کاهش ضخامت پوسته استوانه، مقدار حجم کم شده از ضخامت پوسته به ریب تبدیل می‌شود. شایان ذکر است که $CAR = \frac{1}{100}$ و سطح مقطع ریب‌ها مربع است. اثر این کاهش ضخامت و تبدیل میزان حجم کاهش یافته به ریب برای چهار کسر حجمی از نانو لوله‌های کربنی بررسی می‌شود. همانطور که از شکل مشاهده می‌شود، با افزایش کسر حجمی ریب،

$$(m=1, L=502 \text{ mm}, h=1.63 \text{ mm } E = 2.1 \times 10^{11} \frac{N}{m^2}, \nu = 0.28, \rho = 7.8 \times 10^3 \frac{Kg}{m^3})$$

n	Sharma [۱۹]	Lam [۲۷]	حاضر	
			Analytical	Numerical
۳	۷۶۰/۰	۷۵۹/۹	۷۷۳/۱	۷۷۲/۰
۴	۱۴۵۱/۰	۱۴۵۹/۳	۱۴۸۳/۱	۱۴۷۷/۰
۵	۲۳۳۶/۰	۲۳۶۰/۹	۲۳۹۳/۶	۲۴۰۰/۱
۶	۳۲۴۹/۰	۳۴۶۳/۹	۳۵۰۰/۳	۳۵۴۴/۳

۵-۱- بررسی نتایج ارتعاشات آزاد استوانه‌های ساده و مشبک کامپوزیتی

برای بررسی صحت جواب‌های به دست آمده از تحلیل ارتعاشات آزاد، فرکانس‌های به دست آمده با مراجع و نرم افزار ABAQUS مقایسه می‌شود.

۵-۲- مقایسه فرکانس‌های طبیعی با مراجع و نرم افزار ABAQUS

به منظور اطمینان از فرکانس‌های طبیعی محاسبه شده از نرم افزار متلب، نتایج به دست آمده با داده‌های مقالات موجود و نرم افزار ABAQUS صحت سنجی می‌شود. برای این امر، ابتدا فرکانس‌های یک استوانه ایزوتروپیک با شرایط مرزی یکسر آزاد یکسرگیردار با استفاده از نرم افزار متلب به دست آورده و با مراجع معتبر در جدول ۴ مقایسه می‌شود. سپس فرکانس‌های پایه یک استوانه کامپوزیتی به ازای شرایط مرزی مختلف با استفاده از نرم افزار متلب به دست آورده می‌شود و با نتایج ABAQUS و مقالات در جدول ۵ صحت سنجی می‌شود. با توجه به جدول ۴ مشاهده می‌شود که داده‌های به دست آمده از نرم افزار آباکوس و متلب اختلاف بسیار اندکی دارند؛ همچنین مطالعه حاضر در مقایسه با نتایج موجود در مقالات علمی اختلافی در حدود ۲ درصد را دارا است.

در جدول ۵ فرکانس‌های طبیعی به دست آمده از یک استوانه کامپوزیتی برای شرایط مرزی مختلف با نتایج موجود در مرجع [۲۹] نشان داده شده است. در این مرجع، برای یافتن

^۱ Finite Element Method

شکل مود در زمانی که کسر حجمی صفر است، با افزایش کسر حجمی ریب از ۰ تا ۰/۲ کاهش و از ۰/۳ تا ۰/۸ ثابت است. از این شکل می‌توان دریافت که تغییر در سفتی موجود در سازه که با افزایش اندک جرم همراه است، علاوه بر افزایش فرکانس پایه، می‌تواند باعث تغییر شکل مود نیز شود.

فرکانس پایه نیز در هر چهار کسر حجمی افزایش می‌یابد؛ بنابراین حضور ریب علاوه بر افزایش سفتی سازه به بالاتر رفتن فرکانس طبیعی آن نیز کمک می‌کند. شکل مودهای پایه نیز به ازای کسر حجمی ۰/۱۲، ۰/۱۷ و ۰/۲۸، با افزایش کسر حجمی ریب از ۰ تا ۰/۱ کاهش و از ۰/۲ تا ۰/۸ ثابت می‌ماند؛ همچنین

جدول ۵- مقایسه فرکانس طبیعی (Hz) پوسته استوانه‌ای کامپوزیتی با شرایط مرزی مختلف $m=1, \frac{h}{R}=0.002, \frac{L}{R}=6$

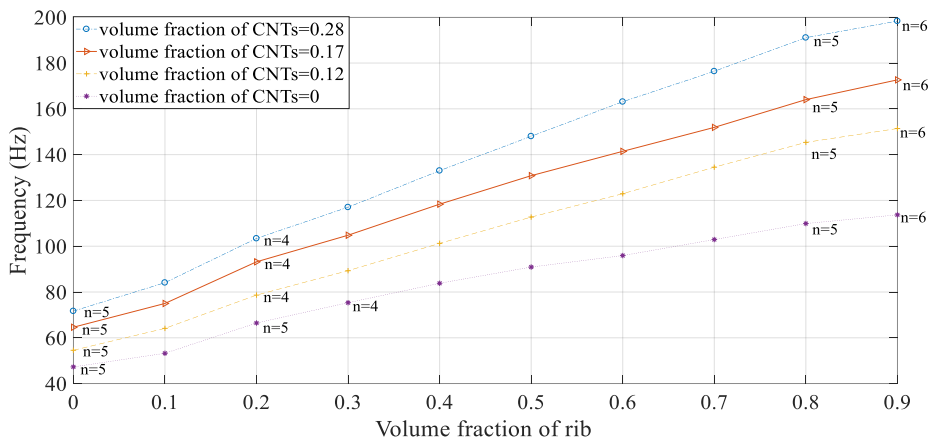
n	S-S			C-C			C-SS		
	Lam [۲۹]	present		Lam [۲۹]	present		Lam [۲۹]	present	
		Analytical	Numerical		Analytical	Numerical		Analytical	Numerical
۱	۶۰/۲۶	۶۰/۳۳	۶۰/۳۴	۸۹/۴۳	۸۹/۶۰	۸۹/۶۷	۷۸/۰۱	۷۸/۲۴	۷۸/۰۲
۲	۲۳/۶۹	۲۳/۶۲	۲۳/۶۲	۴۳/۲۰	۴۳/۵۶	۴۱/۵۸	۳۴/۰۵	۳۴/۱۴	۳۲/۵۳
۳	۱۱/۸۴	۱۱/۹۲	۱۱/۹۳	۲۳/۴۱	۲۳/۸۲	۲۰/۲۳	۱۷/۵۹	۱۷/۷۵	۱۷/۲۷
۴	۸/۴۶	۸/۲۳	۸/۲۵	۱۴/۹۷	۱۵/۲۰	۱۴/۹۸	۱۱/۲۳	۱۱/۴۳	۱۱/۲۷
۵	۸/۸۷	۸/۶۵	۸/۶۸	۱۲/۱۲	۱۲/۱۸	۱۲/۱۳	۱۰/۰۹	۱۰/۱۲	۱۰/۰۹
۶	۱۱/۵۱	۱۱/۲۹	۱۱/۰	۱۲/۴۹	۱۲/۸۵	۱۲/۸۹	۱۱/۷۳	۱۱/۸۹	۱۱/۹۵
۷	۱۵/۵۷	۱۵/۱۰	۱۵/۲۵	۱۵/۳۸	۱۵/۷۹	۱۵/۹۲	۱۵/۲۱	۱۵/۳۶	۱۵/۴۹

جدول ۶- بررسی نسبت $\frac{H}{R}$ و $\frac{L}{R}=2$. B.C.: SS-SS $V_{CNT}^* = 0.12$

n	$\frac{H}{R}$								
	$\frac{1}{20}$			$\frac{1}{40}$			$\frac{1}{80}$		
	ABAQUS	MATLAB	% *	ABAQUS	MATLAB	%	ABAQUS	MATLAB	%
۱	۱۶۴۴/۷	۱۳۵۹/۱۸	۸	۸۵۷/۳۵	۷۸۴/۸۴۴	۴	۴۲۰/۷۵	۴۱۱/۵۸	۲
۲	۹۰۵/۲۳	۸۵۳/۱۸	۹	۴۵۹/۳۸	۴۲۷/۴۹	۷	۲۳۹/۵۶	۲۱۷/۴۷	۶
۳	۵۹۳/۹۶	۵۱۴/۰۲	۱۳	۲۵۶/۸۵	۲۳۱/۰۸	۹	۱۲۲/۲۱	۱۱۴/۲۴	۶
۴	۶۴۴/۴۳	۵۳۸/۰۱	۱۶	۱۹۵/۹	۱۶۹/۷۷	۱۳	۷۶/۴۹	۷۱/۰۱	۷
۵	۸۷۰/۹۷	۷۶۰/۷۴	۱۲	۲۱۵/۰۲	۱۸۹/۹۰	۱۱	۶۲/۰۵	۵۶/۴۶	۸
۶	۱۱۷۷/۴۴	۱۰۶۷/۸۹	۹	۲۷۴/۴۶	۲۵۲/۳۱	۷	۶۵/۶۸	۵۹/۴۰	۹
۷	۱۵۳۲/۴۵	۱۴۲۶/۱۳	۶	۳۵۴/۶۳	۳۳۷/۸۸	۴	۷۹/۳۷	۷۲/۶۳	۸

n	$\frac{H}{R}$					
	$\frac{1}{100}$			$\frac{1}{200}$		
	ABAQUS	MATLAB	%	ABAQUS	MATLAB	%
۱	۳۲۸/۴۲	۳۳۶/۷۰	۴	۱۷۳/۰۱	۱۷۰/۸۸	۳
۲	۱۸۵/۵۵	۱۷۷/۷۹	۴	۹۲/۵۴	۹۰/۱۵	۳
۳	۹۷/۱۶	۹۲/۹۲	۴	۴۸/۰۴	۴۶/۵۷	۳
۴	۵۹/۲۱	۵۶/۵۹	۴	۲۸/۲۷	۲۷/۵۳	۲

۵	۴۴/۶۳	۴۲/۱۱	۵	۱۸/۹۸	۱۸/۵۴	۲
۶	۴۳/۲۹	۴۰/۴۱	۶	۱۴/۷۹	۱۴/۴۴	۲
۷	۴۹/۸۲	۴۶/۵۷	۶	۱۳/۷۲	۱۳/۴۱	۲



شکل ۷- اثر کسر حجمی ریب بر فرکانس طبیعی استوانه مشبک کامپوزیتی. $CAR = 0.01 \cdot \frac{L}{R} = 2$. $B.C = SS - SS$. زاویه برابر با 30° درجه است

شکل ۹ نشان داده شده است همانطور که از این شکل مشاهده می‌شود، با نزدیک شدن به فرکانس طبیعی درآیه A_{11} ماتریس A_{ij} کاهش و D_{11} افزایش می‌یابد، اما در مودهای بالا درآیه D_{11} به دلیل کاهش ضخامت پوسته کاهش چشمگیری پیدا می‌کند و در نتیجه باعث کاهش فرکانس سازه در مودهای بالاتر می‌شود. شکل ۸ اثبات می‌کند، سازه‌هایی که در محدوده‌های گسترده فرکانسی کاربرد دارند، ترکیبی از ریب و پوسته تاثیر مهمی بر افزایش فرکانس کلی سازه دارد.

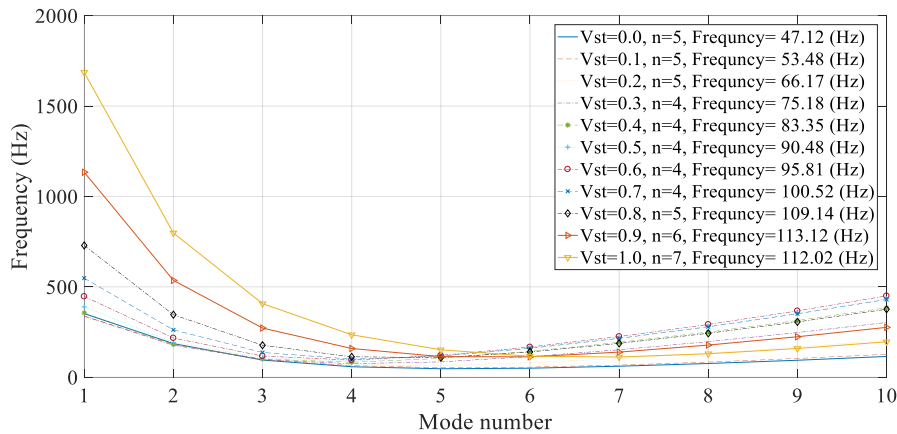
۵-۴-۳- اثر کسر حجمی نانو لوله‌های کربنی روی فرکانس
 شکل ۱۰ تا ۱۲ به بررسی اثرات نانو لوله کربنی و شرایط مرزی روی فرکانس استوانه کامپوزیتی مشبک می‌پردازد. همانطور که انتظار می‌رود، افزایش کسر حجمی نانولوله‌های کربنی، بدون توجه به نوع شرط مرزی، منجر به سفتی و در نتیجه افزایش فرکانس می‌شود. این افزایش به دلیل توانایی بی نظیر نانولوله‌های کربنی در بهبود خواص الاستیسیته ماتریس و در نتیجه افزایش سفتی سازه است. به عنوان مثال، با افزایش V_{CN}^* از $0/12$ تا $0/17$ ، جرم سازه در حدود ۱ درصد افزایش پیدا می‌کند، اما فرکانس در مودهای بالا در حدود ۲۲ درصد افزایش

۵-۴-۲- اثر کسر حجمی تقویت کننده روی فرکانس کلی سازه

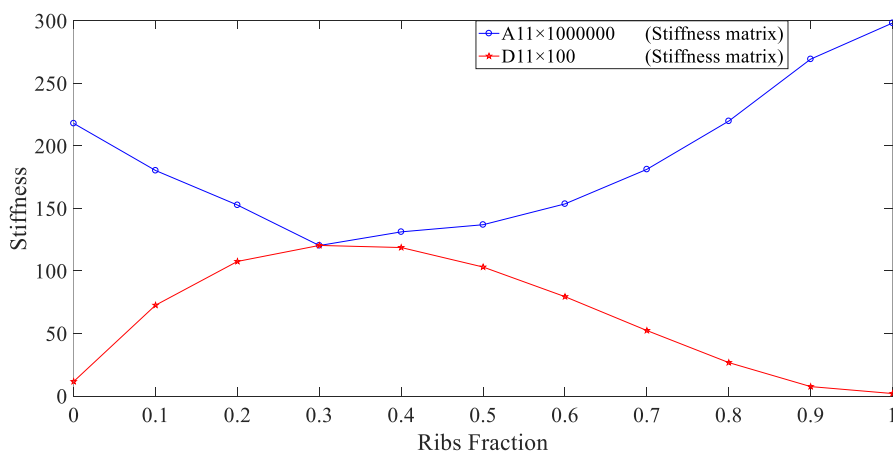
در شکل ۸، اثر کسر حجمی ریب روی فرکانس کلی سازه برای کسر حجمی $V_{CNTs}^* = 0/10$ نشان داده شده است. همانطور که از شکل ۸ مشاهده می‌شود، برای کسر حجمی ریب از ۰ تا $0/3$ ، فرکانس کاهش ناچیزی دارد و پس این محدوده با افزایش کسر حجمی ریب، فرکانس‌های ابتدایی افزایش می‌یابند. علاوه بر این پس از فرکانس پایه، ترکیبی از پوسته و تقویت کننده نقش مهمی در تعیین میزان افزایش فرکانس را دارا است و با انتخاب صحیح کسر حجمی ریب می‌توان به بیشترین میزان افزایش فرکانس دست یافت. شایان ذکر است که این اتفاق بیانگر این است که در فرکانس‌های ابتدایی اثر، ماتریس A_{ij} اثر غالبی را بر روی فرکانس می‌گذارد، چرا که این ماتریس وابسته به ضخامت پوسته نمی‌باشد و سطح ریب دارای بیشترین تاثیر روی فرکانس است. بعلاوه در مودهای بالاتر به دلیل افزایش انرژی واپیچش^۱، ماتریس سفتی خمشی، تاثیر غالب بر فرکانس را دارا است، بنابراین با نزدیک شدن ماتریس D_{ij} به صفر، سفتی کلی سازه کاهش می‌یابد. به عنوان مثال درآیه‌های A_{11} و D_{11} ماتریس A_{ij} و D_{ij} در

¹ Distortion Energy

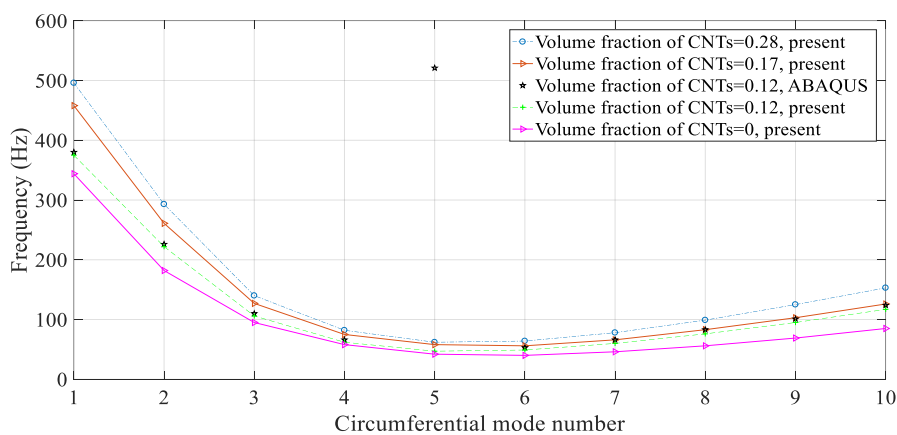
می‌یابد. علاوه بر این با افزایش V_{CN}^* از ۰/۱۷ تا ۰/۲۸ فرکانس پایه افزایش می‌یابد. استوانه مشبک کامپوزیتی با شرط مرزی C-C فرکانس‌های بالاتری دارد، چون لبه‌های گیردار سفت‌تر از دیگر شرایط مرزی می‌باشند.



شکل ۸- اثر کسر حجمی ریب روی فرکانس کلی سازه. $B.C = SS - SS$. $\frac{L}{R} = 2$. $CAR = 0.01$. زاویه ریب: ۳۰ درجه. $V_{CNTs}^* = 0$



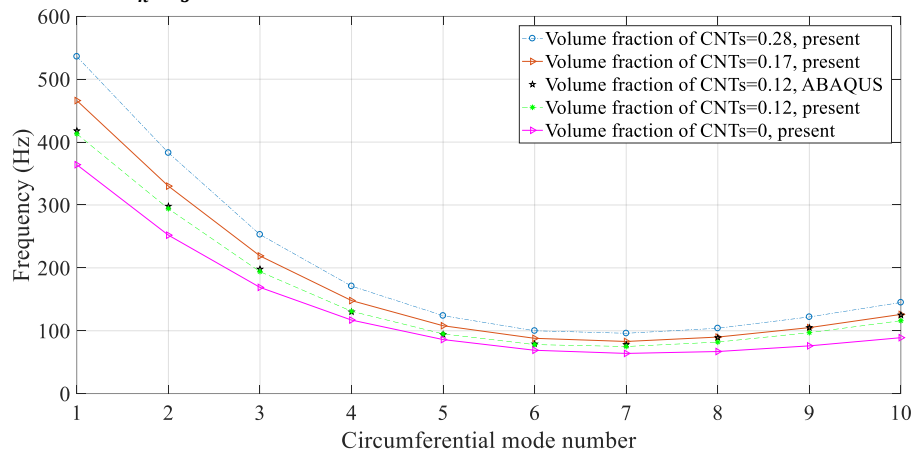
شکل ۹- مقایسه بین ماتریس (A_{11}) و (B_{11}) استوانه مشبک کامپوزیتی



شکل ۱۰- اثر کسر حجمی کربن نانوتیوب بر روی فرکانس کلی سازه. توزیع نانوتیوب کربنی به صورت UD است، مشخصه‌های

هندسی: $R=1m, L=2m$, سطح مقطع: $A=36 \times 10^{-6} m^2$, $CAR = 0.01$, زاویه ریب برابر با 30° درجه است.

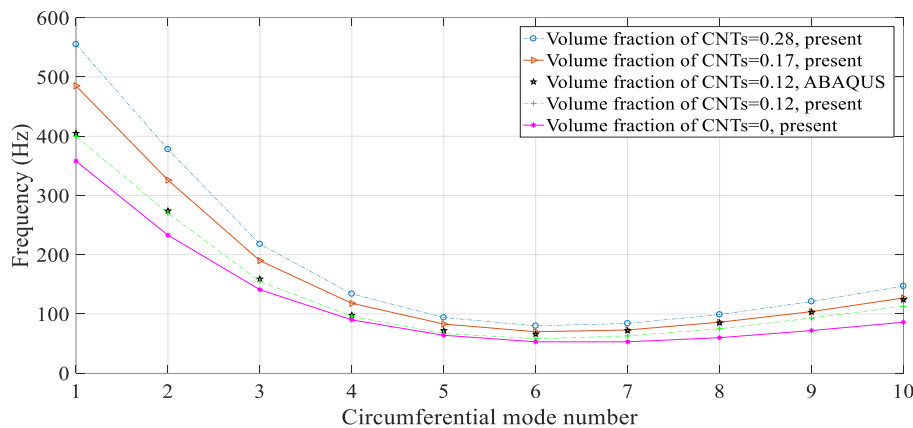
$\frac{t}{h} = \frac{2}{3}$ و نسبت ضخامت پوسته به ضخامت ریب: $\frac{H}{R} = 0.01$, B.Cs: SS-SS,



شکل ۱۱- اثر کسر حجمی کربن نانوتیوب روی فرکانس کلی سازه. توزیع نانوتیوب کربنی به صورت UD است، مشخصه‌های

هندسی: $R=1m, L=2m$, سطح مقطع: $A=36 \times 10^{-6} m^2$, $CAR = 0.01$, زاویه ریب برابر با 30° درجه است.

$\frac{t}{h} = \frac{2}{3}$ و نسبت ضخامت پوسته به ضخامت ریب: $\frac{H}{R} = 0.01$, B.C: C-C,



شکل ۱۲- اثر کسر حجمی کربن نانوتیوب بر روی فرکانس کلی سازه. توزیع نانوتیوب کربنی به صورت UD است، مشخصه‌های

هندسی: $R=1m, L=2m$, سطح مقطع: $A=36 \times 10^{-6} m^2$, $CAR = 0.01$, زاویه ریب برابر با 30° درجه است.

$\frac{t}{h} = \frac{2}{3}$ و نسبت ضخامت پوسته به ضخامت ریب: $\frac{H}{R} = 0.01$, B.C: C-SS,

به این دلیل است که روش کیدان [۲۵] اثرات مربوط به انرژی اعوجاجی^۱ و ممان اینرسی ریب را نمی‌تواند به حساب آورد.

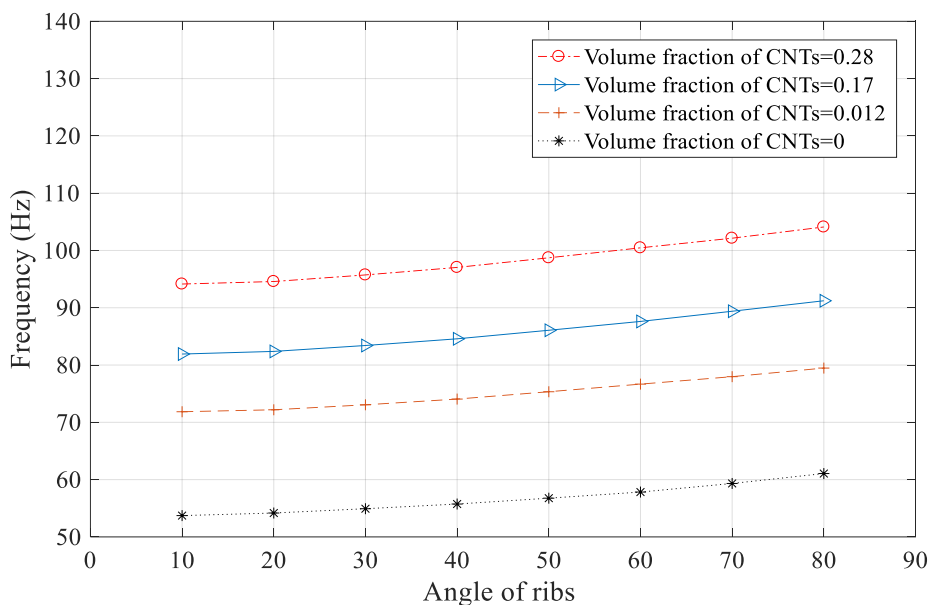
متعاقب آن شرط مرزی SS-SS، کمترین فرکانس را دارا است. بعلاوه، مشاهده می‌شود که با افزایش عدد مود، نتایج عددی و تحلیلی از یکدیگر فاصله می‌گیرند، این واگرایی نتایج

۴-۴-۵- اثرات زاویه ریب

^۱ Distortion Energy

زاویه ریب به ۸۰ درجه نزدیک می‌شود، به دلیل اینکه ریب‌های استوانه به سمت محیطی^۱ سوق پیدا می‌کنند.

در شکل ۱۳ اثرات زاویه ریب یک استوانه مشبک کامپوزیتی مطالعه می‌شود. با افزایش زاویه ریب از ۱۰ تا ۸۰ درجه، فرکانس پایه به طور خطی افزایش می‌یابد؛ بنابراین هرچه قدر



شکل ۱۳- اثرات زاویه ریب، $\frac{L}{R} = 2$. $B.C = C - C$

همچنین با توجه به جدول‌های ۷ تا ۹ می‌توان دریافت که با هندسه مشخص، افزودن ریب‌های محیطی سبب تغییر شکل مود پایه نیز می‌شود. این تغییر سبب کاهش عدد شکل مود پایه می‌شود، اما برای شرط مرزی دو سر گیردار برای این ابعاد و اندازه و نسبت CAR ذکر شده، افزودن ریب محیطی تغییری در شکل مود ایجاد نمی‌کند.

شایان ذکر است که در جدول‌های ۷ تا ۹ علامت * نشان‌گر فرکانس پایه و ** اختلاف بین استوانه تقویت شده با ریب محیطی و بدون ریب محیطی است.

۶- نتیجه‌گیری

فرکانس‌های استوانه‌ای مشبک تحت تاثیر پارامترهای مختلف هندسی، لایه چینی و خواص ماده سازنده است. تاثیر این پارامترها به صورت زیر است:

- ۱) با افزایش نسبت ضخامت پوسته و ریب به شعاع $(\frac{H}{R})$ ، اختلاف نتایج حاصل از حل عددی و تحلیلی کم می‌شود (جدول ۷).

فرکانس شعاعی افزایش می‌یابد؛ همچنین افزایش زاویه، رابطه‌ای خطی با افزایش فرکانس دارد.

۵-۴-۵- اثرات حضور و یا عدم حضور ریب محیطی

در جدول ۷ تا ۹ برای یک پوسته استوانه‌ای مشبک با زاویه ریب ۴۵ درجه، اثرات حضور ریب محیطی برای کسر حجمی‌های مختلف از نانولوله‌های کربنی و شرایط مرزی متفاوت بررسی شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، حضور ریب‌های محیطی در سازه با هر شرط مرزی باعث افزایش فرکانس به خصوص در مودهای قبل و بعد فرکانس پایه می‌شود، اما ریب‌های محیطی اثر قابل توجهی روی فرکانس پایه ندارند. این عدم تغییر به این دلیل است که در فرکانس پایه، انرژی اعوجاجی در سازه کم و افزودن ریب محیطی سبب افزایش وزن سازه می‌شود؛ در نتیجه، فرکانس پایه تغییر چندانی نمی‌کند. حال در فرکانس‌های بالاتر با افزودن ریب‌های محیطی، مقاومت سازه در برابر انرژی اعوجاجی افزایش و در نتیجه فرکانس نیز افزایش می‌یابد.

^۱ Circumferential Ribs

(۲) با افزایش کسر حجمی ریب، فرکانس پایه افزایش می‌یابد؛ همچنین تغییر در کسر حجمی می‌تواند باعث تغییر در شکل مود پایه شود (شکل ۷).
 (۳) با افزایش زاویه ریب نسبت به محور استوانه فرکانس پایه سازه به صورت خطی افزایش می‌یابد (شکل ۱۳).

جدول ۷- مقایسه پوسته استوانه‌ای با ریب و بدون ریب محیطی. $B.C = SS - SS, CAR = 0.01 \cdot \frac{L}{R} = 2$

n	$V_{CN}^* = 12$		$V_{CN}^* = 17$		$V_{CN}^* = 28$				
	بدون ریب محیطی	با ریب محیطی	بدون ریب محیطی	با ریب محیطی	بدون ریب محیطی	با ریب محیطی	**/%	**/%	
۱	۳۴۲/۳۹	۳۹۰/۴۶	۱۲/۳	۴۰۶/۷۲	۴۴۸/۵۱	۹/۳	۴۵۳/۳۸	۵۱۶/۰۱	۱۲/۱
۲	۲۱۷/۳۹	۲۲۴/۴۷	۳/۱	۲۴۳/۶۰	۲۴۷/۹۷	۱/۷	۲۸۶/۱۶	۲۹۵/۰۵	۳/۰
۳	۱۰۳/۴۹	۱۰۷/۴۰	۳/۶	۱۱۸/۲۶	۱۲۱/۰۴	۲/۲	۱۳۶/۴۱	۱۴۱/۳۹	۳/۵
۴	۶۲/۰۶	۶۲/۷۴	۱/۰	۷۰/۹۱	۷۱/۳۴	۱/۱	۸۱/۷۶	۸۲/۶۳	۱/۰
۵	۴۷/۰۶	*۴۷/۳۸	۰/۶	۵۲/۸۹	*۵۳/۳۰	۰/۷	۶۱/۹۰	*۶۲/۳۳	۰/۵
۶	*۴۵/۳۴	۴۹/۰۶	۷/۵	*۴۹/۶۷	۵۳/۵۲	۱/۷	*۵۹/۵۰	۶۴/۴۲	۷/۶
۷	۵۱/۳۷	۶۰/۵۵	۱۵/۱	۵۵/۲۸	۶۴/۵۹	۱۴/۴	۶۷/۳۴	۷۹/۴۲	۱۵/۲
۸	۶۱/۹۸	۷۷/۲۴	۱۹/۷	۶۶/۱۱	۸۱/۵۶	۱۸/۹	۸۱/۱۸	۱۰۱/۲۵	۱۹/۸

جدول ۸- مقایسه پوسته استوانه‌ای با ریب و بدون ریب محیطی. $B.C = C - C, CAR = 0.01 \cdot \frac{L}{R} = 2$

n	$V_{CN}^* = 12$		$V_{CN}^* = 17$		$V_{CN}^* = 28$				
	بدون ریب محیطی	با ریب محیطی	بدون ریب محیطی	با ریب محیطی	بدون ریب محیطی	با ریب محیطی	**/%	**/%	
۱	۳۹۶/۵۶	۴۱۷/۲۲	۴/۹	۴۵۱/۰۱	۴۶۹/۵۵	۳/۸	۵۱۷/۴۱	۵۴۱/۲۳	۴/۳
۲	۲۹۰/۸۳	۲۹۴/۳۸	۱/۳	۳۲۶/۹۷	۳۳۰/۳۰	۱/۲	۳۷۹/۴۷	۳۸۳/۶۲	۱/۰
۳	۱۹۳/۱۳	۱۹۳/۴۹	۰/۲	۲۱۷/۷۶	۲۱۸/۱۷	۰/۱	۲۵۲/۰۱	۲۵۲/۱۲	۱/۰
۴	۱۳۰/۰۳	۱۳۰/۹۱	۰/۶	۱۴۷/۴۲	۱۴۷/۶۴	۰/۱	۱۶۹/۶۹	۱۶۹/۸۷	۰/۱
۵	۹۳/۳۵	۹۴/۱۳	۰/۸	۱۰۶/۱۷	۱۰۷/۰۶	۰/۸	۱۲۱/۷۰	۱۲۲/۶۴	۰/۷
۶	۷۳/۹۰	۷۷/۰۶	۴/۱	۸۳/۹۱	۸۷/۳۴	۳/۸	۹۶/۰۳	۹۹/۸۰	۳/۷
۷	*۶۶/۶۱	*۷۴/۶۸	۱۰/۸	*۷۵/۰۵	*۸۳/۴۰	۱۰/۰	*۸۵/۹۹	*۹۵/۶۶	۱۰/۱

n	جدول ۹- مقایسه پوسته استوانه‌ای با ریب و بدون ریب محیطی $\frac{L}{R} = 2$. B.C.: C-SS, CAR = 0.01.								
	$V_{CN}^* = 0.12$		$V_{CN}^* = 0.17$		$V_{CN}^* = 0.28$				
	بدون ریب محیطی	با ریب محیطی	بدون ریب محیطی	با ریب محیطی	بدون ریب محیطی	با ریب محیطی			
			**/%	**/%	**/%	**/%			
۱	۳۷۸/۷۶	۴۰۵/۷۷	۶/۶	۴۳۴/۸۱	۴۵۸/۱۱	۵/۰	۴۹۴/۷۷	۵۲۵/۸۶	۵/۹
۲	۲۶۸/۴۶	۲۶۸/۸۳	۰/۱	۳۰۲/۲۸	۳۰۲/۷۵	۰/۱	۳۵۰/۲۴	۳۵۰/۷۰	۰/۱
۳	۱۵۳/۹۲	۱۵۴/۲۶	۰/۲	۱۷۵/۵۹	۱۷۵/۷۸	۰/۲	۲۰۰/۹۹	۲۰۱/۳۷	۰/۲
۴	۹۴/۷۸	۹۴/۸۹	۰/۱	۱۰۹/۰۹	۱۰۹/۱۳	۰/۱	۱۲۳/۸۳	۱۲۳/۹۴	۰/۱
۵	۶۶/۳۲	۶۶/۶۵	۰/۴	۷۶/۴۰	۷۶/۸۵	۰/۵	۸۶/۴۸	۸۶/۹۰	۰/۴
۶	۵۴/۸۰	*۵۸/۰۰	۵/۵	۶۲/۵۶	*۶۵/۹۸	۵/۱	۷۱/۰۲	*۷۴/۸۸	۵/۱
۷	*۵۴/۲۱	۶۳/۰۷	۱۴/۴	*۶۰/۹۵	۷۰/۱۸	۱۳/۱	*۶۹/۶۳	۸۰/۸۸	۱۳/۹
۸	۶۰/۶۸	۷۶/۴۳	۲۰/۶	۶۷/۳۹	۸۳/۷۷	۱۹/۵	۷۷/۴۰	۹۶/۴۸	۲۰/۲
۹	۷۱/۵۱	۹۴/۵۷	۲۴/۳	۷۸/۸۹	۱۰۲/۸۹	۲۳/۳	۹۰/۸۷	۱۱۸/۸۷	۲۳/۷
۱۰	۸۵/۲۳	۱۱۵/۹۳	۲۶/۴	۹۳/۷۲	۱۲۵/۶۹	۲۵/۶	۱۰۸/۰۸	۱۴۵/۴۱	۲۵/۶

دینامیکی سازه می‌شود که تاثیر آن‌ها به صورت زیر است.

(۸) با افزایش کسر حجمی نانولوله‌های کربنی از ۰ تا ۰/۲۸ همواره فرکانس کلی سازه افزایش می‌یابد (شکل ۱۰-۱۲).

۷- مراجع

- [1] Ugural AC (1999) Stress in plate and shells. 2 edn.
- [2] Edvard V (2001) Thin Plate and Shells.
- [3] Engines E. EJ200 turbofan engine.
- [4] Mackay R (1986) Wellington in action. Squadron/Signal.
- [5] Egle D, Sewall J (1968) An analysis of free vibration of orthogonally stiffened cylindrical shells with

(۴) با افزودن ریب محیطی فرکانس سازه افزایش می‌یابد و اثر حضور ریب محیطی به خصوص در مودهای بالاتر از فرکانس طبیعی مشهودتر است (جدول ۷).

(۵) حضور ریب‌های محیطی در شرایط مرزی دوسر ساده و یکسر گیردار یکسر ساده، باعث تغییر در شکل مود پایه می‌شود، اما در شرایط مرزی دوسر گیردار باعث تغییر شکل مود نمی‌شود (جدول ۸).

(۶) با تغییر لایه چینی می‌توان فرکانس‌های سازه را تغییر داد و اثر این تغییر زاویه در فرکانس‌های بالا بیشتر است.

(۷) حضور نانولوله‌های کربنی باعث تغییر در خواص ماتریس و در نتیجه تغییر فرکانس طبیعی و پاسخ

- فشار یکنواخت روی صفحه. سیزدهمین همایش ملی صنایع دریایی ایران انجمن مهندسی دریایی ایران.
- [17] Moradi-Dastjerdi R, Aghadavoudi F (2018) Static analysis of functionally graded nanocomposite sandwich plates reinforced by defected CNT. *Compos Struct* 200. 839-848
- [۱۸] یوگورال اس (۱۳۷۵) تنش در ورق‌ها و پوسته‌ها.
- [19] Sharma CB (1973) Frequencies of clamped-free circular cylindrical shell. *J Sound Vib* 525-528.
- [20] Shen HS (2011) Postbuckling of nanotube-reinforced composite cylindrical shells in thermal environments. Part I: Axially-loaded shells. *Compos Struct* 93(8): 2096-2108.
- [21] Arasteh R, Omid M, Rousta AHA, Kazerooni (2011) A study on effect of waviness on mechanical properties of multi-walled carbon nanotube epoxy composites using modified Halpin-Tsai theory. *J Macromolecul Sci Part: B Physics*.
- [22] Shen HS (2011) Postbuckling of nanotube-reinforced composite cylindrical shells in thermal environments. *Compos Struct* 2096-2108.
- [23] Lee YS, Lee KD (1997) On the dynamic response of laminated circular cylindrical shells under impulse loads. *Comput Struct* 63(1): 149-157.
- [24] Hemmatnezhad M, Rahimi G, Ansari N (2014) On the free vibrations of grid-stiffened composite cylindrical shells. *Acta Mechanica* 225(2): 609.
- [25] Kidane S, Li G, Helms J, Pang SS, Woldesenbet E (2003) Buckling load analysis of grid stiffened composite cylinders. *Compos Part B-Eng* 34(1): 1-9.
- [۲۶] زارعی م، رحیمی غ (۱۳۹۵) تحلیل ارتعاشات آزاد پوسته های استوانه‌ای کامپوزیتی مشبک دوار. مهندسی مکانیک مدرس.
- [27] Lam KY, Loy CT (1995) Influence of boundary conditions and fiber orientation and the natural frequencies of thin orthotropic laminated cylindrical shells. *Compos Struct* 21-30.
- [28] Khalili S, Malekzadeh K, Davar A, Mahajan P, (2010) Dynamic response of pre-stressed fibre metal laminate (FML) circular cylindrical shells subjected to lateral pressure pulse loads. *Compos Struct* 92(6): 1308-1317.
- [29] Lam KY, Loy CT (1998) Influence of boundary conditions for a thin laminated rotating cylindrical shell. *Compos Struct* 215-228.
- stiffeners treated as discrete elements. *AIAA J* 6(3): 518-526.
- [6] Jiang J, Olson M (1994) Vibration analysis of orthogonally stiffened cylindrical shells using super finite elements. *J Sound Vib* 173(1): 73-83.
- [7] Luan Y, Ohlrich M, Jacobsen F (2011) Improvements of the smearing technique for cross-stiffened thin rectangular plates. *J Sound Vib* 330(17): 4274-4286.
- [8] Edalata P, Khedmati MR, Soares CG (2013) Free vibration and dynamic response analysis of stiffened parabolic shells using equivalent orthotropic shell parameters. *Latin American Int J Solids Struct*.
- [۹] لطیفی رستمی سع، آلاشتی ره، رحیمی غح (۱۳۹۰) آنالیز المان محدود و اعتبارسنجی آزمایشگاهی تأثیر نقص ریب در سازه‌های مشبک کامپوزیتی استوانه‌ای. دوازدهمین کنفرانس ملی مهندسی ساخت و تولید ایران.
- [۱۰] رحیمی غح، دانشفر ا (۱۳۸۹) بررسی تاثیرگشودگی مربع مستطیل و ضریب منظر آن بر مقاومت کمانش پوسته استوانه ای مشبک کامپوزیتی.
- [۱۱] رسولی رحیمی غح (۱۳۸۹) بررسی تاثیرگشودگی مربع مستطیل و ضریب منظر آن بر مقاومت کمانش پوسته استوانه ای مشبک کامپوزیتی. دهمین همایش انجمن هوافضای ایران انجمن هوافضای ایران.
- [12] Akbari Alashti SALRr, Rahimi GH (1392) Buckling analysis of composite lattice cylindrical shells with ribs defect. *International Journal of Engineering*.
- [۱۳] نورآبادی م، تقویان س (۱۳۹۰) طراحی ساختار مشبک مخروطی با بافت سلولی غیر هم شکل. دومین کنفرانس بین المللی کامپوزیت.
- [۱۴] اسکندری جم م، نورآبادی تقویان س (۱۳۹۰) طراحی ساختار مشبک مخروطی با بافت سلولی غیر هم شکل.
- [۱۵] یوسف زاده م، اسکندری جم ج (۱۳۸۸) تعیین ماتریس سختی استوانه‌ای کامپوزیتی مشبک تحت بار محوری. هشتمین همایش انجمن هوافضای ایران.
- [۱۶] اسکندری جم ج، ناطقی ح (۱۳۹۰) تحلیل کمانش صفحات ساندویچی با هسته مشبک تحت بار محوری و