مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها/ سال ۱۳۹۹/ دوره ۱۰/ شماره ۴/ صفحه ۵۳-۶۶

مجله علمی پژوهشی مکانیک سازه‌ها و شاره‌ها

DOI: 10.22044/jsfm.2020.9453.3132

تحلیل استاتیکی پوسته‌های کامپوزیتی چندلایه هوشمند با در نظر گرفتن اثر برشی عملگر پیزوالکتریک با استفاده از روش ایزوژئومتریک

سجاد نیکویی[۱،*] و بهروز حسنی[۲]

[۱] دکتری، مهندسی هوافضا، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد

[۲] استاد، گروه مکانیک، دانشگاه فردوسی مشهد، مشهد

مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۱/۰۲؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۹/۰۴/۲۷؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۷/۱۹

چکیده

تحلیل‌های استاتیکی و ارتعاش آزاد پوسته‌های با شکل دلخواه چندلایه کامپوزیتی بر اساس روش تحلیل ایزوژئومتریک و با در نظر گرفتن تغییرشکل‌های برشی، موضوع این مقاله است. در روش ایزوژئومتریک به کار رفته در این تحقیق، از توابع پایه غیریکنواخت کسری بی-اسپلاین (نربز) از مرتبه‌های مختلف برای تعریف هندسه پوسته و نیز تقریب‌زدن متغیرهای مجهول استفاده شده است. برای احتساب تغییرشکل‌های برشی از نظریه برشی مرتبه اول یا نظریه رایزنر- میندلین استفاده شده است. در روش پیشنهادی علاوه بر سه درجه آزادی مربوط به جابجایی برای تعریف دو درجه آزادی چرخشی مستقل و همچنین به‌منظور محاسبه دقیق بردار نرمال سطح میان پوسته از مفهوم نقاط مهار استفاده شده است؛ همچنین در تحلیل پوسته‌های چندلایه از نظریه تک‌لایه معادل استفاده شده است. از آنجا که بررسی کارایی و دقت روش تحلیل ایزوژئومتریک در حل پوسته‌های با شکل دلخواه چندلایه کامپوزیتی جزو اهداف اصلی این مقاله است، مثال‌های متعدد عددی آورده شده و با سایر منابع موجود مقایسه گردیده است. نتایج بدست آمده، مؤید دقت مطلوب و کارایی روش پیشنهادی است.

کلمات کلیدی: عملگر برشی پیزوالکتریک؛ پوسته‌های کامپوزیتی؛ روش ایزوژئومتریک؛ نظریه میندلین- رایزنر؛ تحلیل استاتیکی.

Static Analysis of Laminated Composite Smart shells with Considering the Effect of the Shear Piezoelectric Actuator using the Isogeometric Approach

S. Nikoei[1,*], B. Hassani[2]

[1] Ph.D, Aero. Eng., Ferdowsi Univ., Mashhad, Iran.

[2] Prof., Mech. Eng., Ferdowsi Univ., Mashhad, Iran.

Abstract

Investigation of effects of the piezoelectric shear actuator on the static response of cross-ply laminated composite smart shells by using the isogeometric approach is the subject of this paper. In the analysis of laminated smart shells, the Mindlin-Reissner theory (first-order shear deformation theory) is used. The isogeometric approach has here been employed that utilizes the Non-Uniform Rational B-Splines (NURBS) of various orders to approximate the variables defining the geometry of smart shell as well as the unknown functions. In this research, the effect of different boundary conditions on structural transverse deformation by applying electric field has been studied. In the considered cases, smart shells possess two simply supported parallel edges while the other two edges are considered as a combination of free, clamped or simple supports. Also, study of the shear effects of the piezoelectric actuator on various factors, including the radius of curvature of the shell as well as the simultaneous mechanical and electrical loadings are amongst the objects of this article. To demonstrate the efficiency and accuracy of the isogeometric approach in the study of shear effects of the piezoelectric actuators, several numerical examples are presented and the obtained results indicate the desirability of the proposed approach.

Keywords: Piezoelectric Shear Actuator; Composite Shells; Isogeometric Approach; Reissner-Mindlin Theory; Static Analysis.

* نویسنده مسئول؛ تلفن: ۰۹۱۹۴۱۲۲۷۶۵

آدرس پست الکترونیک: S.nikoei@mail.um.ac.ir

۱- مقدمه

در سال‌های اخیر پیشرفت‌های مهمی در طراحی و ساخت سازه‌های پیشرفته‌ای همچون، اتومبیل‌ها، کشتی‌ها و وسایل پرنده صورت پذیرفته است که امروزه این تحولات در بعضی موارد با نام سازه‌های هوشمند شناخته می‌شود. بحث معرفی سازه‌های هوشمند بعد از دهه هفتاد میلادی بسیار داغ شد. از جمله این سازه‌های هوشمند، می‌توان به پیزوالکتریک‌ها اشاره نمود. اثر پیزوالکتریک توانایی برخی مواد برای تبدیل انرژی مکانیکی به انرژی الکتریکی و بالعکس است که این ویژگی خاص، آن‌ها را تبدیل به یکی از پرکاربردترین مواد در زمینه حسگرها و عملگرها کرده است. عملگرهای پیزوالکتریک، وسایلی هستند که با اعمال ولتاژ الکتریکی جابه‌جایی از خود نشان می‌دهند. بیشترین کاربرد این نوع عملگرها، از مود کششی آن‌ها نشأت می‌گیرد که از اعمال میدان الکتریکی موازی با جهت قطبیدگی عملگر پیزوالکتریک، به منظور ایجاد تغییر شکل عرضی استفاده می‌شود. به علت گستره استفاده از وصله‌های عملگر پیزوالکتریک روی ورق‌ها و پوسته‌ها، یک مدل دقیق برای مدل‌سازی خیز این‌گونه سازه‌ها مورد نیاز است. این مدل باید قابلیت بررسی خیز سازه‌های مجهز به وصله عملگر پیزوالکتریک را داشته باشد.

نوع دیگری از عملگرها موسوم به عملگرهای برشی پیزوالکتریک هستند که قابلیت ایجاد تغییر شکل و تولید نیروهای بالایی را دارند. در مود برشی این نوع از عملگرها، میدان الکتریکی عمود بر جهت قطبیدگی در نظر گرفته می‌شود. تحلیل و مدل‌سازی سازه‌های کامپوزیتی، دارای عملگر برشی پیزوالکتریک که شامل مود برشی هستند، مورد توجه کمتری نسبت به مود کششی این سازه‌ها قرار گرفته‌اند.

تمامی سازه‌هایی که به‌صورت سطوح انحنادار دیده می‌شوند، پوسته نام دارند. پوسته‌ها در واقع سازه‌های مهندسی بسیار پرکاربردی هستند که در زمینه‌های مختلف از جمله، مهندسی مکانیک و هوافضا کاربردهای فراوانی دارند [۱]. در تحلیل پوسته‌های متشکل از مواد مرکب نظریه‌هایی مختلفی حاکم است که از بین آن‌ها می‌توان به نظریه تغییرشکل برشی مرتبه اول [۲] اشاره کرد که زیرمجموعه‌ای از نظریه تک‌لایه معادل است. نظریه مرتبه اول برشی که معروف به نظریه میندلین- رایزنر نیز است، در عین دقت مناسب، هزینه محاسباتی کمتری نسبت به سایر روش‌های هم‌تراز خود دارد.

پژوهش روی پیش‌بینی خواص مؤثر و پاسخ کامپوزیت‌های هوشمند می‌تواند به دو روش تحلیلی و عددی صورت گیرد. از آنجا که حل تحلیلی بسیاری از مسائل به دلیل محدودیت‌های بسیاری دردسترس نبوده، در سال‌های اخیر، روش عددی مناسبی به نام تحلیل ایزوژئومتریک مورد استفاده دانشمندان این زمینه قرار گرفته است [۳]. این روش از دقت تحلیل بالا و کاهش هزینه‌های محاسباتی نسبت به دیگر روش‌های عددی برخوردار است.

در راستای تحلیل پیزوالکتریک‌های برشی پژوهش‌هایی انجام شده است. آلدرایهم و همکاران [۴]، مدل دقیقی برای بررسی خیز استاتیکی تیر مجهز به عملگر پیزوالکتریک در حالت برشی ارائه نمودند. رجا و همکاران [۵]، کنترل فعال ارتعاشات تیرهای چندلایه کامپوزیتی با درنظر گرفتن اثرات خمشی و برشی عملگرها را مورد بررسی قرار دادند. ول و همکاران [۶]، حل دقیقی برای خمش استوانه‌ای ورق‌های چندلایه دارای عملگر برشی را ارائه نمودند. تحلیل صفحه کامپوزیتی مجهز به عملگر پیزوالکتریک در حالت خمشی، توسط آلدرایهم و همکاران [۷] صورت گرفت. تین و همکاران [۸]، با استفاده از روش المان محدود و توسعه تئوری مرتبه اول برشی مدلی برای بررسی رفتار استاتیکی و ارتعاشی صفحه کامپوزیتی مجهز به پیزوالکتریک ارائه نمودند. خدیر و همکاران [۹]، پژوهش خود را روی تحلیل استاتیکی دقیق پوسته‌های چندلایه کامپوزیتی متمرکز نمودند. بنجدو و همکاران [۱۰]، با استفاده از روش المان محدود به تحلیل پوسته‌های چرخان ساندویچی با پیزوالکتریک برشی پرداختند.

لیو و همکاران [۱۱]، با استفاده از نظریه مرتبه اول برشی، روش گلرکین بدون المان را برای تیرها و ورق‌های کامپوزیتی چندلایه با وصله‌های پیزوالکتریک به‌کار بردند. میلازو و اورلاندو [۱۲]، تحلیل ارتعاش آزاد ورق‌های کامپوزیتی چندلایه ضخیم هوشمند را بررسی نمودند. تحلیل استاتیکی، ارتعاش آزاد و کنترل دینامیکی ورق‌های کامپوزیتی پیزوالکتریک‌دار با استفاده از روش المان محدود توسط فانگ-وان و همکاران [۱۳] انجام گرفت. ساراوانوس و همکاران [۱۴]، با استفاده از تئوری لایه‌ای و استفاده از روش

المان محدود به تحلیل ورق‌های کامپوزیتی پیزوالکتریکی پرداختند. تحلیل ورق‌های ساندویچی کامپوزیتی با استفاده از تئوری مرتبه بالای برشی و استفاده از روش ایزوژئومتریک توسط نگوین و همکاران [۱۵] صورت پذیرفت. فانگ-وان و همکاران [۱۶] در پژوهش دیگری، به تحلیل ورق‌های کامپوزیتی چندلایه با لایه‌هایی از حسگر و عملگر پیزوالکتریک با استفاده از تئوری مرتبه بالای برشی و روش ایزوژئومتریک پرداختند. نیکویی و حسنی [۱۷]، پژوهشی در زمینه تحلیل ورق‌های چندلایه کامپوزیتی پوشیده شده از لایه‌های پیزوالکتریک با استفاده از تحلیل ایزوژئومتریک و نظریه میندلین- رایزنر انجام دادند.

در این مقاله، تأثیر اثرات برشی عملگر پیزوالکتریک روی رفتار استاتیکی پوسته‌های چندلایه کامپوزیتی با لایه‌چینی متعامد و مجهز به لایه‌های پیزوالکتریک با استفاده از روش ایزوژئومتریک و بهره‌گیری از توابع پایه نربز بررسی می‌شود. ابتدا، معادلات حاکم بر رفتار استاتیکی سازه ارائه می‌شوند که بر اساس نظریه مرتبه اول برشی استوار هستند. سپس این معادلات توسط روش ایزوژئومتریک مبتنی بر توابع پایه نربز برای انواع شرایط مرزی پوسته حل می‌گردند. هدف از این مقاله، بررسی اثرات برشی عملگر پیزوالکتریک روی سازه‌های پوسته‌ای است که با درنظر گرفتن شرایط مرزی گوناگون، وجود بار مکانیکی عرضی و بار الکتریکی هم‌زمان و بررسی مرتبه توابع پایه مختلف به همراه تغییر انحنای پوسته صورت می‌گیرد.

۲- بی- اسپلاین و نربز

برای توصیف بی- اسپلاین‌ها و نربزها باید با فضای پارامتریی آشنا شد که برای معرفی آن در یک‌بعد از بردار گرهی $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$ استفاده می‌شود که ξ_i مجموعه‌ای از اعداد حقیقی غیر نزولی است و فضای پارامتری را به بخش‌هایی تقسیم می‌کند. با داشتن بردار گرهی، توابع پایه بی- اسپلاین $N_{i,p}(\xi)$ از مرتبه $\mathrm{p} = 0$ به‌صورت رابطه (۱) تعریف می‌شوند [۱۸]:

$$N_{i,0}(\xi) = \begin{cases} 1 & \text{اگر} \quad \xi_i \leqslant \xi \leqslant \xi_{i+1} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \qquad (۱)$$

توابع پایه بی- اسپلاین برای $\mathrm{p} > 0$ با توجه به روابط بازگشتی به‌صورت رابطه (۲) بیان می‌شوند:

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \qquad (۲)$$

از آنجا که این پژوهش حول محور پوسته‌های چندلایه است، فقط به بیان روابط سطوح نربز بسند می‌شود. یک سطح نربز که در جهت ξ از درجه p و در جهت η از درجه q باشد، به‌صورت رابطه (۳) بیان می‌شود:

$$S(\xi,\eta) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} R_{i,j}(\xi,\eta) P_{i,j} \qquad (۳)$$

که در آن $\{P_{i,j}\}$ شبکه نقاط کنترلی است که در دو جهت تعریف شده است؛ همچنین $\{w_{i,j}\}$ وزن‌ها و $\{N_{i,p}\}$ توابع پایه بی- اسپلاین می‌باشند که روی بردارهای گرهی تعریف شده‌اند؛ همچنین $R_{i,j}$ در رابطه (۴) بیان شده است:

$$R_{i,j}(\xi,\eta) = \frac{N_{i,p}(\xi) N_{j,q}(\eta) w_{i,j}}{\sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{m} N_{k,p}(\xi) N_{l,q}(\eta) w_{k,l}} \qquad (۴)$$

۳- معادلات حاکم بر پوسته‌های کامپوزیتی

در این بخش، معادلات حاکم بر پوسته‌های چندلایه کامپوزیتی با شکل دلخواه و شکل ضعیف معادلات دیفرانسیل حاکم بر اساس نظریه تغییرشکل برشی مرتبه اول یا میندلین- رایزنر بیان می‌شود. فرض بر این است که لایه‌ها کاملا بهم چسبیده، الاستیک و اورتوتروپیک با مقدار جابه‌جایی و کرنش کوچک باشند.

۳-۱- میدان جابه‌جایی

در ایجاد المان‌های پوسته بر اساس نظریه مرتبه اول برشی میندلین- رایزنر، بردار موقعیت به‌صورت رابطه (۵) بیان می‌شود [۱۹]:

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} R_i(\xi,\eta) P_i + \zeta \sum_{i=1}^{n} R_i(\xi,\eta) \mathbf{v}_{3i} \frac{h_i}{2} \qquad (۵)$$

با توجه به رابطه (۵)، ترم اول سمت راست این معادله، بیان‌گر سطح میان‌پوسته و ترم دوم، بیان‌گر ضخامت پوسته است که در آن P_i مختصات نقطه کنترلی iام، h_i ضخامت پوسته و $\zeta \epsilon [-1\ 1]$ مختصات راستای ضخامت است. $\mathbf{v}_{3i}$

بردار نرمال دقیق نقطه مهار مربوطه (رابطه ۶) است که به‌صورت رابطه (۶) بیان می‌شود:

$$\mathbf{v}_{3i} = \frac{\mathbf{x}_{,\xi} \times \mathbf{x}_{,\eta}}{\left\| \mathbf{x}_{,\xi} \times \mathbf{x}_{,\eta} \right\|} \quad (۶)$$

در فرمول‌بندی حاضر که مبتنی بر توابع نربز و نقاط کنترلی است، از آنجا که نقاط کنترلی بر سطح میان‌پوسته قرار ندارند، لذا نمی‌توان به‌طور مستقیم بردارهای متعامد را روی نقاط کنترلی تعریف کرد. جهت رفع این مشکل، یک الگوی نگاشت می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد. بدین منظور، هر نقطه کنترلی به یک نقطه در فضای فیزیکی و روی سطح میان‌پوسته نگاشته می‌شود. یکی از ساده‌ترین روش‌های این نوع نگاشت، نگاشت هر نقطه کنترلی با نقطه‌ای از سطح میانی است که کمترین فاصله را با آن دارد. اشکال این روش، هزینه محاسباتی زیاد آن است. برای پیدا کردن چنین نقطه‌ای باید یک روش تکراری مانند جستجوی نیوتن به‌کار گرفته شود. این هزینه با ریزتر شدن شبکه به سرعت افزایش می‌یابد. در این پژوهش از روش مذکور به علت هزینه بالای محاسباتی صرف نظر شده و از یک الگوی ساده استفاده می‌شود. نگاشت مورد استفاده بدین صورت است که برای هر نقطه کنترلی یک نقطه در فضای گرهی متناظر می‌شود. البته توجه شود که این نقاط در یک تناظر یک‌به‌یک قرار ندارند. با این حال، به‌صورت قرار دادی می‌توان نقطه متناظر هر نقطه کنترلی را روی فضای گرهی تعریف کرد. برای هر تابع پایه $R_{i,p}$، نقطه مهار که با $A_i = \left(A_{i\xi}, A_{i\eta}\right)$ نمایش داده می‌شود، به‌صورت رابطه (۷) قابل تعریف است:

$$A_{i\xi} = \begin{cases} \xi_{i+(p+1)/2} & \text{اگر } p \text{ فرد باشد} \\ \dfrac{1}{2}\left(\xi_{i+(p)/2} + \xi_{i+(p)/2}\right) & \text{اگر } p \text{ زوج باشد} \end{cases} \quad (۷)$$

$A_{i\eta}$ نیز مشابه رابطه (۷) بدست خواهد آمد. چنانچه ملاحظه می‌شود، این تعریف طوری انجام می‌شود که برای توابع از درجه فرد نقاط مهار همان گره‌ها و برای درجات زوج این نقاط مرکز دهانه‌های گرهی قرار گیرند؛ همچنین، بردار جابه‌جایی به‌صورت رابطه (۸) بیان می‌شود:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} R_i(\xi,\eta) \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} + \zeta \sum_{i=1}^{n} R_i(\xi,\eta) \boldsymbol{\mu}_i \frac{h_i}{2} \begin{Bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{Bmatrix} \quad (۸)$$

که α_i و β_i چرخش متناظر با بردارهای جهتی می‌باشند و $\mu_i = [-v_{2i} \quad v_{1i}]$ بردارهای جهتی هستند که به‌صورت رابطه (۹) بیان می‌شود:

$$\mathbf{v}_{1i} = \mathbf{e}_2 \times \mathbf{v}_{3i} \quad , \quad \mathbf{v}_{2i} = \mathbf{v}_{3i} \times \mathbf{v}_{1i} \quad (۹)$$

که در رابطه (۹) e_1، e_2 و e_3 بردارهای یکه‌ی پایه از دستگاه مختصات کلی هستند.

۳-۲- میدان کرنش

با فرض کرنش‌های کوچک و به‌کار بردن تعریف کرنش در محدوده الاستیسیته خطی سه بعدی رابطه کرنش–جابه‌جایی در مختصات کلی به‌صورت رابطه (۱۰) بیان می‌شود:

$$\{\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{zz} \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{xz}\}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\Delta}\{u_{,x} \quad u_{,y} \quad u_{,z} \quad v_{,x} \quad v_{,y} \quad v_{,z} \quad w_{,x} \quad w_{,y} \quad w_{,z}\}^{\mathrm{T}} \quad (۱۰)$$

که $\boldsymbol{\Delta} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$ است.

برای محاسبه کرنش‌ها نیاز به محاسبه مشتقات جابه‌جایی نسبت به پارامترهای x، y و z به‌صورت رابطه (۱۱) است.

$$\begin{Bmatrix} u_{,x} \\ u_{,y} \\ u_{,z} \\ v_{,x} \\ \vdots \\ w_{,z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{J}^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{,\hat{\xi}} \\ u_{,\hat{\eta}} \\ u_{,\hat{\zeta}} \\ v_{,\hat{\xi}} \\ \vdots \\ w_{,\hat{\zeta}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_{\mathbf{T}_2}^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}_{\mathbf{T}_2}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{J}_{\mathbf{T}_2}^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{,\xi} \\ u_{,\eta} \\ u_{,\zeta} \\ v_{,\xi} \\ \vdots \\ w_{,\zeta} \end{Bmatrix} \quad (۱۱)$$

که در آن $\hat{\xi}$، $\hat{\eta}$ و $\hat{\zeta}$ مختصات المان پایه، $\mathbf{T}_1$ تبدیل از المان پایه به فضای پارامتری (رابطه (۱۲)) و $\mathbf{T}_2$ تبدیل از فضای پارامتری به فضای فیزیکی مسئله است (رابطه (۱۳))؛ همچنین $\mathbf{J}$ ژاکوبین است که به‌صورت رابطه (۱۴) تعریف می‌شود:

$$\mathbf{T}_1 : \underbrace{\{\hat{\xi}, \hat{\eta}, \zeta\}}_{\text{المان پایه}} \quad \longrightarrow \underbrace{\{\xi, \eta, \zeta\}}_{\text{فضای پارامتری}}$$

$$\xi = \frac{\hat{\xi}}{2}(\xi_2 - \xi_1) + \frac{1}{2}(\xi_2 + \xi_1)$$
$$\eta = \frac{\hat{\eta}}{2}(\eta_2 - \eta_1) + \frac{1}{2}(\eta_2 + \eta_1)$$
$$\zeta = \hat{\zeta} \tag{۱۲}$$

و

$$\mathbf{T}_2 : \underbrace{\{\xi, \eta, \zeta\}}_{\text{فضای پارامتری}} \quad \longrightarrow \underbrace{\{x, y, z\}}_{\text{فضای فیزیکی}}$$

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \\ z \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} R_i(\xi,\eta) P_i + \zeta \sum_{i=1}^{n} R_i(\xi,\eta) \mathbf{v}_{3i} \frac{h_i}{2} \tag{۱۳}$$

و

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_{\mathbf{T_1}} \mathbf{J}_{\mathbf{T_2}} = \begin{bmatrix} \xi_{,\hat{\xi}} & \eta_{,\hat{\xi}} & 0 \\ \xi_{,\hat{\eta}} & \eta_{,\hat{\eta}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{,\xi} & y_{,\eta} & z_{,\zeta} \\ x_{,\eta} & y_{,\eta} & z_{,\eta} \\ x_{,\zeta} & y_{,\zeta} & z_{,\zeta} \end{bmatrix} \tag{۱۴}$$

۳-۳- روابط ساختاری با درنظر گرفتن اثر برشی پیزوالکتریک

کامپوزیت‌های چندلایه‌ای معمولا از ترکیب چندین لایه اورتوتروپیک با جهات الیاف گوناگون ساخته می‌شوند. رابطه تنش-کرنش برای kامین لایه اورتوتروپیک با فرض ناچیز بودن تنش عمودی در راستای ضخامت (یعنی $\sigma_{zz} = 0$) و در نظر گرفتن ترم‌های برشی پیزوالکتریک در دستگاه مختصات کلی $(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$ به‌صورت رابطه (۱۵) است:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}^{(k)} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} & 0 & 0 \\ \bar{Q}_{61} & \bar{Q}_{62} & \bar{Q}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{55} & \bar{Q}_{45} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{44} \end{bmatrix}^{(k)} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} - \gamma_{xz}^{\mathrm{P}} \\ \gamma_{yz} - \gamma_{yz}^{\mathrm{P}} \end{Bmatrix}^{(k)} \tag{۱۵}$$

که $\bar{Q}_{ij}$ ثابت‌های انتقال‌یافته مواد از kامین لایه به دستگاه مختصات کلی هستند و کرنش‌های برشی ناشی از اثر برشی پیزوالکتریک به‌صورت رابطه (۱۶) تعریف می‌شوند:

$$\gamma_{xz}^{P} = d_{15} cos\theta_P E_z \,, \gamma_{yz}^{P} = d_{15} sin\theta_P E_z \tag{۱۶}$$

که در آن d_{15} ضریب برشی پیزوالکتریک و E_z میدان الکتریکی در راستای ضخامت است.

با توجه به تنش‌های بدست آمده از رابطه (۱۷)، می‌توان منتجه‌های نیروهای غشایی (N)، ممان خمشی (M) و نیروهای برشی (Q) را به‌صورت رابطه (۱۷) بدست آورد:

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} \mathrm{d}z$$
$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} z\mathrm{d}z$$
$$\begin{Bmatrix} Q_{xx} \\ Q_{yy} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} \mathrm{d}z \tag{۱۷}$$

بعد از جایگذاری رابطه (۱۵) در (۱۷) و انتگرال‌گیری در راستای ضخامت پوسته کامپوزیتی چندلایه این روابط به‌صورت رابطه (۱۸) برای منتجه‌های غشایی و خمشی ساده می‌شوند:

$$\begin{Bmatrix} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D}_b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_m \\ \boldsymbol{\varepsilon}_b \end{Bmatrix} \tag{۱۸}$$

که در آن $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{m}}$ کرنش غشایی و $\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathrm{b}}$ کرنش خمشی است و $\mathbf{A}$، $\mathbf{B}$ و $\mathbf{D}_b$ ماتریس‌های سختی هستند که از رابطه (۱۹) بدست می‌آیند:

$$\left(\mathbf{A}_{ij}, \mathbf{B}_{ij}, \mathbf{D}_{ij}^{b}\right) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2) \bar{Q}_{ij} \mathrm{d}z\,; \quad i,j = 1,2,6 \tag{۱۹}$$

منتجه‌های نیروهای برشی عرضی با رابطه (۲۰) بیان می‌شود:

$$\begin{Bmatrix} Q_{xx} \\ Q_{yy} \end{Bmatrix} = k_s \begin{bmatrix} A_{55} & A_{45} \\ A_{45} & A_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} Q_{xx}^{\mathrm{P}} \\ Q_{yy}^{\mathrm{P}} \end{Bmatrix} \tag{۲۰}$$

که در آن k_s معرف ضریب تصحیح برشی است و A_{44}، A_{45} و A_{55} به‌صورت رابطه (۲۱) تعریف می‌گردند:

$$A_{ij} = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{ij} \mathrm{d}z \qquad i,j = 4,5 \tag{۲۱}$$

منتجه‌های تنشی پیزوالکتریک با رابطه (۲۲) بیان می‌شوند:

$$Q_{xx}^{\mathrm{P}} = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{55} \gamma_{xz}^{\mathrm{P}} \mathrm{d}z$$
$$Q_{yy}^{\mathrm{P}} = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}_{44} \gamma_{yz}^{\mathrm{P}} \mathrm{d}z \tag{۲۲}$$

۳-۴- تقریب میدان الکتریکی

میدان الکتریکی از تغییر میدان پتانسیل الکتریکی حاصل می‌شود. میدان پتانسیل الکتریکی با جداسازی هر لایه پیزوالکتریک به زیرلایه‌هایی در راستای ضخامت تقریب زده می‌شود. با فرض خطی بودن تغییرات تابع پتانسیل الکتریکی در هر زیرلایه و با توجه به رابطه (۲)، پتانسیل الکتریکی به‌صورت رابطه (۲۳) تقریب زده می‌شود:

$$\varphi^i(\mathrm{z}) = \ {}_{\varphi}^{i}\boldsymbol{\varphi}^i \qquad (۲۳)$$

که ${}_{\varphi}^{i}$ بردار توابع پایه برای پتانسیل الکتریکی است که در آن $\mathrm{p}=1$ است. $\boldsymbol{\varphi}^i = [\varphi^{i-1} \quad \varphi^i]$ بردار پتانسیل‌های الکتریکی سطوح بالایی (φ^i) و پایینی (φ^{i-1}) iامین زیرلایه است و $i = 1,2,\dots,N_{sl}$ که N_{sl} تعداد زیرلایه‌ها در راستای ضخامت لایه پیزوالکتریک است. برای هر المان زیرلایه، میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ می‌تواند به‌صورت رابطه (۲۴) بدست آید:

$$\mathbf{E} = -\nabla \ {}_{\varphi}^{i}\boldsymbol{\varphi}^i = -\mathbf{B}_{\varphi}\boldsymbol{\varphi}^i \qquad (۲۴)$$

با افزایش تعداد زیرلایه‌ها در راستای ضخامت لایه پیزوالکتریک، دقت میدان الکتریکی افزایش می‌یابد و تقریب میدان تقریب دقیقی می‌شود.

۳-۵- شکل ضعیف معادلات

شکل ضعیف مدل استاتیکی پوسته کامپوزیتی چندلایه هوشمند میندلین- رایزنر می‌تواند به‌صورت رابطه (۲۵) بیان می‌شود:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left(-\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{1}{2}\mathbf{D}^{\mathrm{T}}\mathbf{E} + \mathbf{u}\mathbf{f}_s - \boldsymbol{\varphi}\mathbf{q}_s\right)\mathrm{d}\Omega + \sum \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{F}_p - \sum \boldsymbol{\varphi}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}_p = \mathbf{0} \qquad (۲۵)$$

که $\mathbf{u}$ جابه‌جایی مکانیکی، $\boldsymbol{\varphi}$ پتانسیل الکتریکی، $\mathbf{f}_{\mathrm{s}}$ و $\mathbf{F}_{\mathrm{p}}$ نیروهای سطحی و نقطه‌ای مکانیکی و $\mathbf{q}_{\mathrm{s}}$ و $\mathbf{Q}_{\mathrm{p}}$ نیز بارهای سطحی و نقطه‌ای الکتریکی هستند. در این رابطه میدان جابه‌جایی مکانیکی $\mathbf{u}$ و میدان پتانسیل الکتریکی $\boldsymbol{\varphi}$ توابع مجهول هستند که تقریب آن‌ها به ترتیب در روابط (۸) و (۲۳) بیان شده‌اند. با جایگذاری این میادین تقریب و در رابطه (۲۵) رابطه (۲۶) بدست خواهد آمد:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{u\varphi} \\ \mathbf{K}_{\varphi u} & \mathbf{K}_{\varphi\varphi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\varphi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_u \\ \mathbf{F}_{\varphi} \end{Bmatrix} \qquad (۲۶)$$

که در آن $\mathbf{u}_i = [u_i \quad v_i \quad w_i \quad \alpha_i \quad \beta_i]^{\mathrm{T}}$ بردار درجات آزادی برای نقطه کنترلی i است و ماتریس‌های سختی و جرم به صورت رابطه (۲۷) بیان می‌شوند:

$$\mathbf{K}_{uu} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_u^{\mathrm{T}}\mathbf{c}\mathbf{B}_u\mathrm{d}\Omega$$

$$\mathbf{K}_{u\varphi} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_u^{\mathrm{T}}\mathbf{e}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}_{\varphi}\mathrm{d}\Omega$$

$$\mathbf{K}_{\varphi\varphi} = -\int_{\Omega} \mathbf{B}_{\varphi}^{\mathrm{T}}\mathbf{p}\mathbf{B}_{\varphi}\mathrm{d}\Omega \qquad (۲۷)$$

که $\mathbf{K}_{\varphi u} = \mathbf{K}_{u\varphi}$ و $\mathbf{B}_u = [\mathbf{B}_m \quad \mathbf{B}_b \quad \mathbf{B}_s\ ]$ است.

مقدار جابه‌جایی ایجاد شده در پوسته چندلایه با وجود عملگر برشی پیزوالکتریک و اعمال میدان پتانسیل الکتریکی از رابطه (۲۸) بدست خواهد آمد:

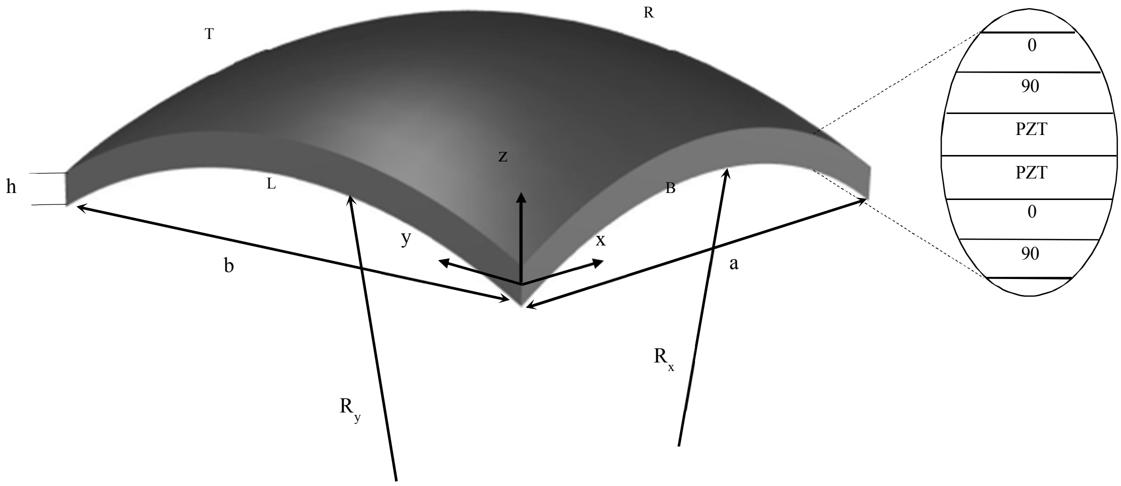
$$\mathbf{u} = \mathbf{K}_{uu}^{-1}(\mathbf{F}_u - \mathbf{K}_{u\varphi}\boldsymbol{\varphi}) \qquad (۲۸)$$

در صورت عدم اعمال نیروی خارجی ($\mathbf{F}_u = \mathbf{0}$) بر پوسته و تنها اعمال میدان پتانسیل الکتریکی مقدار جابه‌جایی هر نقطه کنترلی به‌صورت رابطه (۲۹) بدست می‌آید:

$$\mathbf{u} = -\mathbf{K}_{uu}^{-1}\mathbf{K}_{u\varphi}\boldsymbol{\varphi} \qquad (۲۹)$$

۴- نتایج و بحث

در این پژوهش، کارایی روش تحلیل عددی مطرح شده در پوسته‌های کامپوزیتی چندلایه با لایه‌هایی از عملگر برشی پیزوالکتریک با مثال‌هایی نشان داده شده است. در ابتدای کار تغییرشکل عرضی بی‌بعد ورق و پوسته کروی با اعمال ولتاژ بررسی شده است. در ادامه، تأثیر عواملی مانند مرتبه توابع پایه، شعاع انحنای پوسته، شرایط مرزی گوناگون و بارگذاری توامان مکانیکی و الکتریکی مورد بحث قرار گرفته است. نتایج بدست آمده با $(\mathrm{p}+1)\times(\mathrm{q}+1)$ نقطه گوسی هستند؛ همچنین در تمامی مثال‌ها، $N_{sl} = 10$ در نظر گرفته شده است؛ همچنین، برای حل مثال‌های مختلف پوسته‌های چندلایه کامپوزیتی هوشمند با چیدمان شش لایه‌ای و لایه‌چینی [0 90 PZT PZT 0 90]، شرایط هندسی با توجه به شکل ۱ به شرح رابطه (۳۰) در نظر گرفته شده است:



شکل ۱- نمایی از پوسته دوانحنایی لایه‌ای هوشمند با شعاع‌های انحنای R_x و R_y (نمادهای B، R، T و L به ترتیب بیانگر لبه‌های پایین، راست، بالا و چپ هستند)

$$a = b\ ,\quad R/a = 5\ ,\quad a/h = 10\ ,$$
$$k_s = 5/6\ ,\quad \theta_P = 0^\circ\ , \tag{۳۰}$$

که در آن زاویه θ_P برای هر دو لایه پیزوالکتریک است. ماده مورد استفاده برای لایه‌های کامپوزیتی کربن- اپکسی T300/5208 است که خواص آن در جدول ۱ آمده است؛ همچنین ماده پیزوالکتریک مورد استفاده در این مقاله، PZT5H است که خواص آن در جدول ۲ آمده است.

تغییرشکل عرضی پوسته‌های چندلایه در مثال‌های موجود با استفاده از رابطه $\bar{w} = \frac{wh}{d_{15} b \varphi_z}$ به‌صورت بی‌بعد بیان می‌شوند که در آن φ_z ولتاژ به کار رفته در راستای ضخامت لایه پیزوالکتریک است؛ همچنین هر دو لایه پیزوالکتریک با دو ولتاژ یکسان و مثبت تحریک می‌شوند.

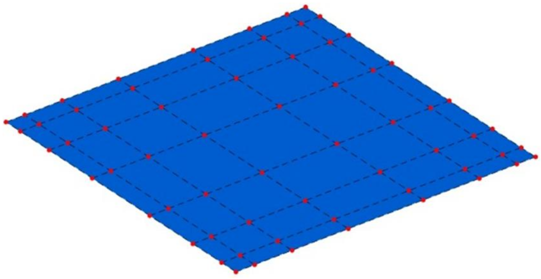
بهره‌گیری از روش تحلیل ایزوژئومتریک در تحلیل خمشی پوسته‌های چندلایه کامپوزیتی هوشمند با لایه‌چینی متعامد و وجود لایه‌های پیزوالکتریک برشی مسیر را هموار کرده است. شرایط مرزی حاکم در مسائل با درنظر گرفتن شرط مرزی ساده در دو لبه موازی دلخواه و همچنین در دو لبه دیگر ترکیبی از شرایط مرزی آزاد (F)، گیردار (C) و یا ساده (S) به‌صورت رابطه (۳۱) اعمال می‌شود:

$$\text{F: } N_{xx} = N_{xy} = M_{xx} = M_{xy} = Q_{xx} = 0$$
$$\text{C: } u = v = w = \alpha = \beta = 0$$
$$\text{S: } u = w = \beta = N_{xx} = M_{xx} = 0 \tag{۳۱}$$

نکته قابل ذکر نحوه نام‌گذاری لبه‌ها در شرایط مرزی مختلف است که با توجه به شکل ۱ به‌صورت BRTL صورت می‌گیرد.

۴-۱- مثال اول (ورق)

در این مثال، تغییرشکل عرضی بی‌بعد ورق ($R_x = R_y = \infty$) کامپوزیتی شش لایه که دو لایه آن را عملگر پیزوالکتریک برشی تشکیل می‌دهد (شکل ۱)، تحت اعمال ولتاژ مورد بررسی قرار گرفته است. بردارهای گرهی مورد استفاده در این مثال به‌صورت $\Xi = \{0,0,1,1\}$ و $H = \{0,0,1,1\}$ بیان می‌شوند. این ورق با ۸×۸ (شکل ۲) نقطه کنترلی مدل شده است؛ همچنین وزن نقاط کنترلی در اینجا برای تمامی نقاط یک در نظر گرفته شده است. شرایط مرزی در لبه‌های $x = 0, a$ به‌صورت ساده و در لبه‌های $y = 0, b$ به‌صورت ترکیبی از شرایط بیان شده در رابطه (۳۱) در نظر گرفته



شکل ۲- مدل‌سازی ورق با شبکه نقاط کنترلی ۸×۸

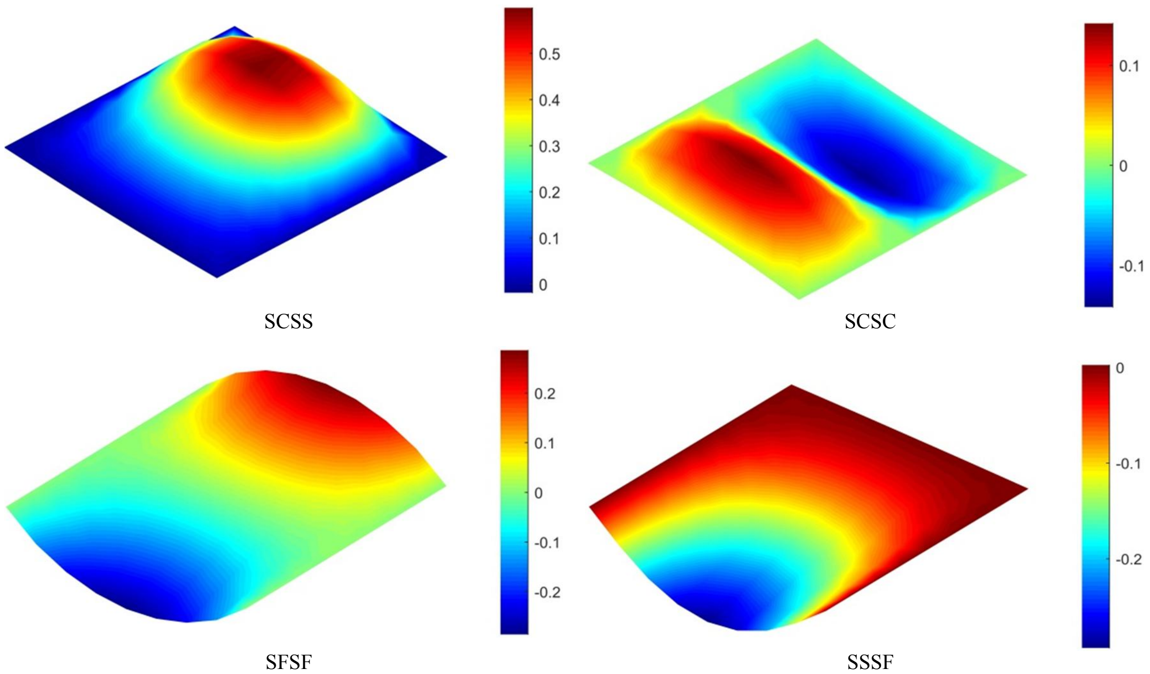
شده است که با توجه به شکل ۳ شرایط مرزی گوناگون SCSC، SCSS، SSSF و SFSF استفاده شده است. مشخصات مواد مورد استفاده در جداول ۱ و ۲ آمده است.

همان‌طور که در شکل ۳ مشاهده می‌شود، عملگر پیزوالکتریک برشی در ورق چندلایه با شرط مرزی SCSC تغییرشکل عرضی مثبت و منفی ایجاد نموده‌اند. این تغییرشکل حول محور $y = b/2$ پادمتقارن است. زمانی‌که ورق تحت شرط مرزی SCSS قرار می‌گیرد، تغییرشکل عرضی مثبت است و ماکزیمم مقدار آن نزدیک به لبه تحت شرط مرزی ساده است. تغییرشکل لبه آزاد ورق چندلایه تحت شرایط مرزی SSSF کامل مشهود است که بیشترین مقدار جابه‌جایی نیز در همین لبه اتفاق افتاده است؛ همچنین تغییرشکل عرضی برای ورق با شرط مرزی SFSF نسبت به محور $y = b/2$ پادمتقارن است و بیشترین مقدار خود را در لبه‌های آزاد دارد.

همان‌طور که از شکل ۳ مشخص است، با تعداد کمی از نقاط کنترلی و توابع پایه مرتبه سه، روش پیشنهادی پاسخ قابل قبولی ارائه نموده است که در مقایسه با مرجع [۲۰] که حل تحلیلی این دست از مسائل را بیان کرده است، در بیشینه تغییرشکل عرضی بی‌بعد ($\overline{w}_{max}$) با شرایط مرزی گوناگون همگرایی بسیار مناسبی ارائه می‌دهد (جدول ۳).

جدول ۱- خواص ماده کربن- اپکسی T300/5208 [۷]

مشخصه	مقدار
$(GPa)E_1$	۱۳۲
$(GPa)E_2$	۱۰/۸
$(GPa)G_{12}$	۵/۶۵
$(GPa)G_{13}$	۵/۶۵
$(GPa)G_{23}$	۳/۳۸
ν_{12}	۰/۲۴



شکل ۳- تغییرشکل عرضی بی‌بعد ورق ($R_x = R_y = \infty$) با لایه‌چینی [0 9، PZT PZT 0 9] و استفاده از توابع مرتبه ۳ نربز با شرایط مرزی SCSC، SCSS، SSSF و SFSF

جدول ۲- خواص ماده پیزوالکتریک PZT5H [۷]

مشخصه	مقدار
$(\mathrm{GPa})C_{11}$	۱۲۷/۲
$(\mathrm{GPa})C_{22}$	۱۲۷/۲
$(\mathrm{GPa})C_{33}$	۱۱۷/۴۴
$(\mathrm{GPa})C_{12}$	۸۰/۲
$(\mathrm{GPa})C_{13}$	۸۴/۶۷
$(\mathrm{GPa})C_{23}$	۸۴/۶۷
$(\mathrm{GPa})C_{44}$	۲۳
$(\mathrm{GPa})C_{55}$	۲۳
$(\mathrm{GPa})C_{66}$	۲۳/۵
$(\mathrm{m/V})d_{15}$	۷۴۱×۱۰^{-۱۲}

جدول ۳- بیشترین تغییرشکل عرضی بی‌بعد ($\overline{w}_{max}$) ورق

شرایط مرزی	کار حاضر	مرجع [۲۰]
SCSC	۰/۱۸۴	۰/۱۸۸
SCSS	۰/۵۸۹	۰/۵۹۲
SSSF	۰/۲۹۹	۰/۳۰۷
SFSF	۰/۲۹۲	۰/۲۹۵

۴-۲- مثال دوم (پوسته کروی)

در این مثال، تغییر شکل عرضی بی‌بعد پوسته کروی شکل $(\mathrm{R_x = R_y = R})$ کامپوزیتی شش لایه‌ای با دولایه‌ی عملگر پیزوالکتریک برشی تحت اعمال ولتاژ که برای مدل‌سازی و تحلیل این سازه از شبکه نقاط کنترلی ۱۱×۱۱ (شکل ۴) استفاده شده است، در شکل ۵ نشان داده شده است. بردارهای گرهی مورد استفاده در این مثال، به‌صورت $\Xi = \{0,0,0,1,1,1\}$ و $\mathrm{H} = \{0,0,0,1,1,1\}$ اعمال شده است. در مدل‌سازی اولیه پوسته کروی وزن نقاط کنترلی که در مرکز انحنای پوسته (نقاط کنترلی به غیر از نقاط چهار گوشه پوسته) واقع شده‌اند ۰/۸ در نظر گرفته شده است. شرایط مرزی در لبه‌های $\mathrm{y = 0, b}$ ساده و در دو لبه دیگر $\mathrm{x = 0, a}$ به‌صورت ترکیبی از شرایط بیان شده است. این شرایط به‌صورت SSSF ،SSSC ،SCSC و SFSF بر سازه پوسته کروی اعمال می‌گردند. مشخصات مواد مورد استفاده در جداول ۱ و ۲ آمده است.

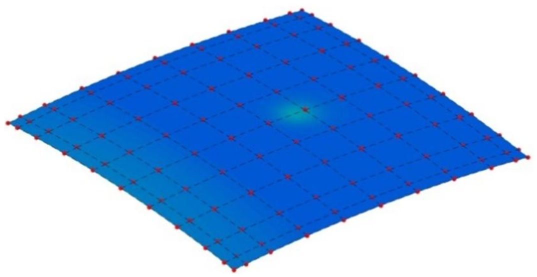
همانند مثال قبل، در این مثال نیز با شبکه کنترلی و توابع پایه مرتبه ۴ همگرایی نسبتا خوبی برای سازه‌های پوسته‌ای با استفاده از روش ایزوژئومتریک بدست آمد که نتایج حاصل از این مثال نیز با نتایج بدست‌آمده مرجع [۲۰] مقایسه شده است که مصداق دقت بالای روش پیشنهادی است (جدول ۴).

۴-۳- مثال سوم (پوسته استوانه‌ای)

در این مثال، همانند مثال قبل، تغییرشکل عرضی بی‌بعد پوسته استوانه‌ای ($R_{\mathrm{x}} = R, R_{\mathrm{y}} = \infty$) کامپوزیتی شش لایه با دولایه عملگر پیزوالکتریک برشی تحت اعمال ولتاژ در شکل ۶ نشان داده شده است. بردارهای گرهی مورد استفاده در پوسته استوانه‌ای به‌صورت $\Xi = \{0,0,0,1,1,1\}$ و $\mathrm{H} = \{0,0,1,1\}$ معرفی می‌شوند. در مدل‌سازی اولیه پوسته استوانه‌ای وزن نقاط کنترلی که در مرکز انحنای پوسته (نقاط کنترلی به غیر از نقاط لبه‌های صاف پوسته) واقع شده‌اند، ۰/۷۰۷ در نظر گرفته شده است. شرایط مرزی در لبه‌های $\mathrm{x = 0, a}$ ساده و در دو لبه دیگر $\mathrm{y = 0, b}$ به‌صورت ترکیبی از شرایط بیان شده است. این شرایط به‌صورت SSSF ،SSSC ،SCSC و SFSF بر سازه پوسته استوانه‌ای اعمال می‌گردند. شبکه ۱۰×۱۰ از نقاط کنترلی برای مدل‌سازی و تحلیل این پوسته درنظر گرفته شده است. مشخصات مواد مورد استفاده در جداول ۱ و ۲ قابل مشاهده است.

همانند مثال قبل، در این مثال با شبکه کنترلی و توابع پایه مرتبه ۴ همگرایی بسیار مناسبی برای سازه‌های پوسته استوانه‌ای با استفاده از روش ایزوژئومتریک بدست آمد.

همچنین نتایج بدست آمده با استفاده از روش پیشنهادی نزدیکی بسیار خوبی با نتایج تحلیلی مرجع [۲۰] دارند (جدول ۵).



شکل ۴- مدل‌سازی پوسته کروی با شبکه نقاط کنترلی ۱۱×۱۱

۴-۴- مثال چهارم

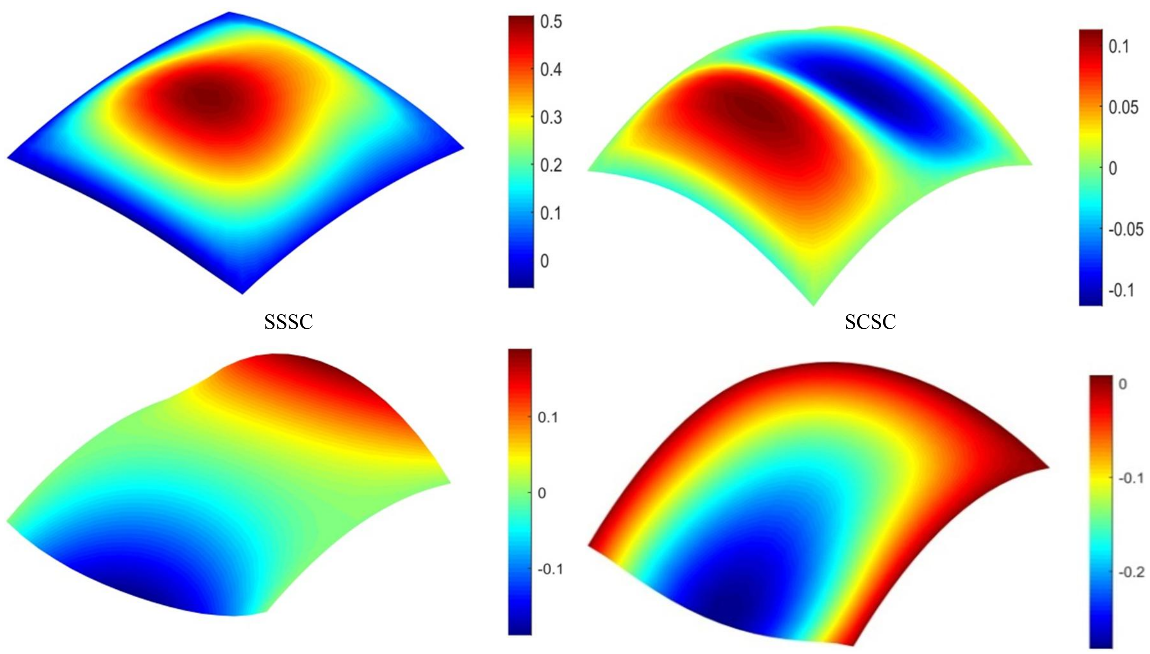
در این مثال، تأثیر عوامل مختلفی از جمله، مرتبه توابع پایه، تغییرات شعاع انحنا پوسته (R/a) و شرایط مرزی گوناگون بر بیشترین تغییرشکل عرضی بی‌بعد پوسته کروی چندلایه با لایه‌هایی از عملگر پیزوالکتریک برشی مورد بررسی قرار گرفته است. نتایج حاصل از این بررسی، در جدول ۶ آمده است.

جدول ۴- بیشترین تغییرشکل عرضی بی‌بعد $(\overline{w}_{max})$ پوسته کروی

شرایط مرزی	کار حاضر	مرجع [۲۰]
SCSC	۰/۱۲۵	۰/۱۲۸
SCSS	۰/۵۰۸	۰/۵۱۳
SSSF	۰/۲۹۸	۰/۳۰۵
SFSF	۰/۱۹۳	۰/۱۹۸

جدول ۵- بیشترین تغییرشکل عرضی بی‌بعد $(\overline{w}_{max})$ پوسته استوانه‌ای

شرایط مرزی	کار حاضر	مرجع [۲۰]
SCSC	۰/۱۴۹	۰/۱۵۳
SCSS	۰/۶۱۹	۰/۶۲۳
SSSF	۰/۲۹۳	۰/۳۰۱
SFSF	۰/۲۵۹	۰/۲۶۴



شکل ۵- تغییرشکل عرضی بی‌بعد پوسته کروی ($R_x = R_y = R$) با لایه‌چینی [0 9 PZT PZT 0 9] و استفاده از توابع مرتبه ۴ نربز با شرایط مرزی SCSC، SSSC، SSSF و SFSF

جدول ۶- جابه‌جایی بی‌بعد عرضی پوسته کروی چندلایه با عملگر پیزوالکتریک برشی [0 90 PZT PZT 0 90] تحت ولتاژ φ_z و شرایط مرزی گوناگون

شرایط مرزی	مرتبه	R/a				
		۵	۱۰	۲۰	۵۰	۱۰۰
SCSC	۲	۰/۰۲۰۵	۰/۰۲۰۴	۰/۰۲۰۴	۰/۰۲۰۴	۰/۰۲۰۴
	۳	۰/۰۵۶۸	۰/۰۵۶۳	۰/۰۵۶۱	۰/۰۵۶۰	۰/۰۵۶۰
	۴	۰/۱۱۵۹	۰/۱۱۴۹	۰/۱۱۴۵	۰/۱۱۴۴	۰/۱۱۴۴
	۵	۰/۱۱۶۰	۰/۱۱۵۰	۰/۱۱۴۶	۰/۱۱۴۴	۰/۱۱۴۴
SSSC	۲	۰/۰۷۸۰	۰/۰۸۸۰	۰/۰۹۱۵	۰/۰۹۲۷	۰/۰۹۲۹
	۳	۰/۲۲۸۲	۰/۲۶۲۲	۰/۲۷۳۴	۰/۲۷۶۹	۰/۲۷۷۴
	۴	۰/۵۱۶۰	۰/۵۹۸۷	۰/۶۲۷۱	۰/۶۳۵۸	۰/۶۳۷۱
	۵	۰/۵۱۶۱	۰/۵۹۸۸	۰/۶۲۷۲	۰/۶۳۵۸	۰/۶۳۷۱
SSSF	۲	۰/۰۸۹۷	۰/۰۹۵۹	۰/۰۹۷۹	۰/۰۹۸۶	۰/۰۹۸۶
	۳	۰/۲۶۸۰	۰/۲۸۸۵	۰/۲۹۵۴	۰/۲۹۷۴	۰/۲۹۷۷
	۴	/۶۱۷۰	۰/۶۶۸۵	۰/۶۸۵۸	۰/۶۹۱۱	۰/۶۹۱۹
	۵	/۶۱۷۱	۰/۶۶۸۶	۰/۶۸۵۹	۰/۶۹۱۱	۰/۶۹۱۹
SFSF	۲	۰/۰۲۶۴	۰/۰۲۷۶	۰/۰۲۸۰	۰/۰۲۸۱	۰/۰۲۸۱
	۳	۰/۰۸۰۸	۰/۰۸۴۵	۰/۰۸۵۸	۰/۰۸۶۲	۰/۰۸۶۳
	۴	۰/۱۸۹۸	۰/۱۹۸۷	۰/۲۰۱۷	۰/۲۰۲۷	۰/۲۰۲۸
	۵	۰/۱۸۹۹	۰/۱۹۸۸	۰/۲۰۱۸	۰/۲۰۲۸	۰/۲۰۲۹

همان‌طور که مشاهده می‌شود، با افزایش مرتبه توابع پایه، با توجه به شکل ۵ که در آن این تغییرشکل‌ها برای توابع پایه مرتبه ۴ نشان داده شده‌اند، پاسخ به مقادیر دقیق‌تر همگرا می‌شود. از این جدول مشاهده می‌شود که خیز بیشینه برای پوسته کروی با توابع مرتبه ۴ و ۵ کاملا یکسان هستند؛ همچنین با افزایش شعاع انحنای پوسته دیده می‌شود که بیشترین مقدار تغییرشکل عرضی بی‌بعد دست‌خوش تغییر نمی‌شود.

۴-۵- مثال پنجم

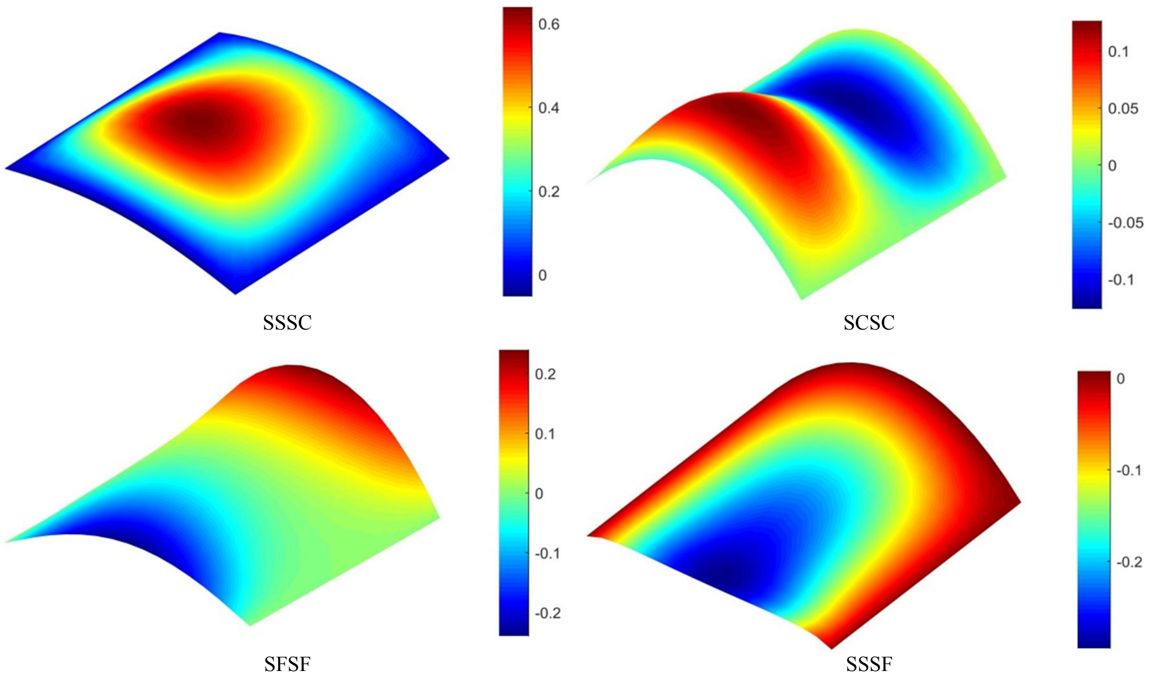
در این مثال نیز همانند مثال دوم، پوسته کروی چندلایه با لایه‌هایی از عملگر پیزوالکتریک برشی با لایه‌چینی [0 90 PZT PZT 0 90]، شرط مرزی SCSC و ابعاد هندسی متناظر رابطه (۳۱) مورد بررسی قرار گرفته است؛ البته با این تفاوت که در این مثال، پوسته چندلایه تحت دو نوع بارگذاری مکانیکی و الکتریکی قرار گرفته است. بارگذاری مکانیکی آن به‌صورت یک بار یکنواخت عرضی $P = 1\mathrm{kPa}$ بر

روی سطح بالایی پوسته و در راستای محور z اعمال می‌شود. برای اعمال این نوع بارگذاری از آنجا که فرمول‌بندی پوسته به‌صورت گفته شده در متن از بردار نرمال‌های دقیق در نقاط مهار (که تصویر نقاط کنترلی روی سطح میان‌پوسته هستند [۲۱]) استفاده می‌نماید، لذا برای اینکه بارگذاری عرضی در جهت محور z باشند، باید در کسینوس زاویه بین بردار نرمال نقطه مهار و محور z ضرب شوند تا در راستای محور z اعمال شوند؛ همچنین، بارگذاری الکتریکی آن با مقادیر مختلفی از ولتاژ $V = 0, 10, 50, 100, 200$ volt بر روی لایه‌های عملگر پیزوالکتریک برشی اعمال می‌شوند ($V = \varphi_z$). نمودار میزان جابه‌جایی عرضی بی‌بعد شده ($\bar{w} = \frac{wh}{d_{15} b \varphi_z}$) خط مرکزی ($y = b/2$) پوسته کروی چندلایه در شکل ۷ برای بارگذاری‌های مکانیکی، الکتریکی و ترکیب هر دو نوع بارگذاری ترسیم شده است.

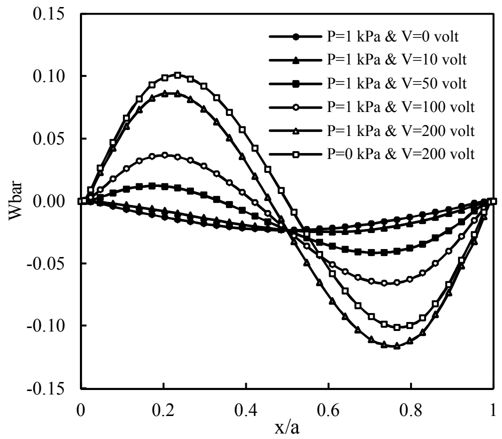
همان‌طور که مشاهده می‌شود، هنگامی که فقط بار مکانیکی اعمال می‌شود، مقداری جابه‌جایی عرضی در راستای $-z$ به‌وجود می‌آید. با افزایش مقدار ولتاژ اعمالی بر دو لایه عملگر پیزوالکتریک برشی، رفته‌رفته مقدار جابه‌جایی ناشی از بار مکانیکی در یک طرف خنثی و معکوس و در طرف دیگر تشدید می‌شود. علت این تغییر شکل را می‌توان به نحوه اعمال شرایط مرزی (به شکل ۵ شرط مرزی SCSC توجه شود) نسبت داد. توجه شود، هنگامی که فقط بارگذاری الکتریکی اعمال می‌شود، مقدار جابه‌جایی بی‌بعد خط مرکزی پوسته کروی با شکل ۵ شرط مرزی SCSC دقیقا یکسان می‌شود.

۴- نتایج و بحث

در این مقاله، به بررسی اثرات برشی عملگر پیزوالکتریک بر پاسخ استاتیکی پوسته‌های کامپوزیتی چندلایه متعامد هوشمند با بهره‌گیری از نظریه میندلین- رایزنر پرداخته شده است. با توجه به عدم وجود حل تحلیلی برای بسیاری از سازه‌های پوسته‌ای هوشمند، از بین راه‌حل‌های عددی متنوعی که تا به حال معرفی شده‌اند، روش تحلیل ایزوژئومتریک که بر مبنای توابع پایه نربز استوار است، در این پژوهش مورد استفاده قرار گرفت. در این مطالعه، روش



شکل ۶- تغییرشکل عرضی بی‌بعد پوسته استوانه‌ای ($R_x = R, R_y = \infty$) با لایه‌چینی [0 9 (PZT PZT 0 9) 0 9] و استفاده از توابع مرتبه ۴ نربز با شرایط مرزی SCSC، SSSC، SSSF و SFSF



شکل ۷- تغییر شکل عرضی ناشی از اعمال بارگذاری مکانیکی و الکتریکی بر روی پوسته کروی کامپوزیتی هوشمند با استفاده از توابع مرتبه ۴ نربز با شرط مرزی SCSC

تحلیل ایزوژئومتریک در ترکیب فرمول‌بندی پوسته‌های چندلایه هوشمند، با عملگر برشی پیزوالکتریک و روش زیرلایه که در تقریب میدان الکتریکی به‌کار رفته است، پیشنهاد گردید که در مقایسه با حل تحلیلی نتایج بسیار قابل قبولی بدست آمد.

در ابتدا، روابط حاکم بر پوسته‌های کامپوزیتی با لایه‌هایی از عملگر برشی پیزوالکتریک بدست آمد و سپس تأثیر عملگر برشی روی ورق و پوسته کروی شش لایه با وجود شرایط مرزی مختلف (دو لبه موازی با تکیه‌گاه ساده و دو لبه دیگر با شرایط تکیه‌گاهی مختلف، مرکب از آزاد، گیردار و ساده) مورد بحث قرار گرفت و اثرات این شرایط مرزی بر تغییرشکل عرضی بی‌بعد سازه مطالعه شد؛ همچنین اثرات تغییر شعاع انحنای پوسته به همراه تغییر توابع پایه مورد بررسی قرار گرفت. همان‌طور که مشاهده شد، با افزایش شعاع انحنای پوسته، میزان بیشترین تغییرشکل عرضی سازه دچار تغییر اندکی می‌شود. بعلاوه، ملاحظه گردید، با افزایش مرتبه توابع پایه، دقت حل افزایش می‌یابد. در ادامه تاثیر بارگذاری هم‌زمان مکانیکی و الکتریکی روی پوسته کروی مورد بررسی قرار گرفت و مشاهده گردید که می‌توان تغییرشکل عرضی ناشی از اعمال بار گسترده را با اعمال ولتاژ به عملگر برشی به نحو دلخواه کنترل کرد.

۵- مراجع

[1] Linhard J, Wüchner R, Bletzinger KU (2007) "Upgrading" membranes to shells—The CEG rotation free shell element and its application in structural analysis. Finite Elem Anal Des 44 (1-2): 63-74.

[2] Reissner E (1945) The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. J Appl Math 12: 69-77.

[3] Hughes TJ, Cottrell JA, Bazilevs Y (2005) Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement. Comput Methods Appl Mech Eng 194(39-41): 4135-4195.

[4] Aldraihem OJ, Khdeir AA (2003) Exact deflection solutions of beams with shear piezoelectric actuators. Int J Solids Struct 40(1): 1-12.

[5] Raja S, Prathap G, Sinha P (2002) Active vibration control of composite sandwich beams with piezoelectric extension-bending and shear actuators. Smart Mater Struct 11(1): 63-71.

[6] Vel SS, Batra R (2001) Exact solution for the cylindrical bending of laminated plates with embedded piezoelectric shear actuators. Smart Mater Struct 10(2): 240-251.

[7] Aldraihem OJ, Khdeir AA (2006) Analytical solutions of antisymmetric angle-ply laminated plates with thickness–shear piezoelectric actuators. Smart Mater Struct 15(2): 232-242.

[8] Thinh TI (2010) Static behavior and vibration control of piezoelectric cantilever composite plates and comparison with experiments. Comput Mater Sci 49(4): S276-S280.

[9] Khdeir A and Aldraihem O (2011) Exact analysis for static response of cross ply laminated smart shells. Compos Struct 94(1): 92-101.

[10] Benjeddou A, Gorge V, Ohayon R (2001) Use of piezoelectric shear response in adaptive sandwich shells of revolution-Part 2: Finite element implementation. J Intell Mater Syst Struct 12(4): 247-257.

[11] Liew K, Lim H, Tan M, He X (2002) Analysis of laminated composite beams and plates with piezoelectric patches using the element-free Galerkin method. Comput Mech 29(6): 486-497.

[12] Milazzo A, Orlando C (2012) An equivalent single-layer approach for free vibration analysis of smart laminated thick composite plates. Smart Mater Struct 21(7): 075031.

[13] Phung-Van P, Nguyen-Thoi T, Le-Dinh T, Nguyen-Xuan H (2013) Static and free vibration analyses and dynamic control of composite plates integrated with piezoelectric sensors and actuators by the cell-based smoothed discrete shear gap

method (CS-FEM-DSG3). Smart Mater Struct 22(9): 095026.

[14] Saravanos DA, Heyliger R, Hopkins DA (1997) Layerwise mechanics and finite element for the dynamic analysis of piezoelectric composite plates. Int J Solids Struct 34(3): 359-378.

[15] Nguyen-Xuan H, Thai CH, Nguyen-Thoi T (2013) Isogeometric finite element analysis of composite sandwich plates using a higher order shear deformation theory. Compos Part B Eng 55(67): 558-574.

[16] Phung-Van P, De Lorenzis L, Thai CH, Abdel-Wahab M, Nguyen-Xuan H (2015) Analysis of laminated composite plates integrated with piezoelectric sensors and actuators using higher-order shear deformation theory and isogeometric finite elements. Comput Mater Sci 96(14): 495-505.

[17] Nikoei S, Hassani B (2018) Static and free vibration isogeometric analysis of laminated composite plates integrated with piezoelectric using Reissner–Mindlin theory. Modares Mech Eng 17(11): 181-191.

[18] Piegl L, Tiller W (1997) The NURBS book. 2end edn. Springer Science & Business Media, Berlin.

[19] Benson D, Bazilevs Y, Hsu M-C, Hughes T (2010) Isogeometric shell analysis: the Reissner–Mindlin shell. Comput Methods Appl Mech Eng 199(5-8): 276-289.

[20] Khdeir A, Aldraihem O (2011) Analysis of smart cross ply laminated shells with shear piezoelectric actuators. Smart Mater Struct 20(10): 105030.

[21] Nikoei S, Hassani B (2019) Isogeometric analysis of laminated smart shell structures covered with piezoelectric sensors and actuators using degenerated shell formulation. J Intell Mater Syst Struct 30(13): 1913-1931.