



تحلیل جابجایی طبیعی سیال شامل میکروذرات معلق دارای خاصیت مغناطیسی در یک کانال عمودی با طول بی‌نهایت

محمدحسین عبدالهی جهدی^{۱*} و یاشار آریان‌فر^۲

^۱ استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه شهیدمدنی آذربایجان

^۲ کارشناس ارشد، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه شهیدمدنی آذربایجان

مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۰۶/۱۷؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۸/۰۸/۰۶؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۴/۳۰

چکیده

در کار حاضر، مسأله‌ی جابجایی طبیعی یک سیال شامل ذرات معلق دارای خاصیت مغناطیسی، تحت تاثیر میدان مغناطیسی، چاه و چشمه گرمایی داخل یک کانال عمودی به صورت تحلیلی بررسی شده است. شرایط مرزی دیواره‌ها طوری است که یک دیواره به صورت شار گرمایی ثابت بوده و دیواره‌ی دیگر در دمای ثابت قرار گرفته و میدان مغناطیسی نیز از سمت دیواره‌ی دما ثابت به کانال اعمال شده است. نتایج دقیق حاصل از حل معادلات براساس روش تشابهی برای چند حالت فیزیکی به دست آمده و تأثیر پارامترهای مسأله روی پروفیل‌های سرعت و دما بررسی گردیده است. نتایج نشان می‌دهد که تفاوت در شرایط مرزی، رفتار متفاوتی از توزیع سرعت و دما را در طرفین کانال در پی خواهد داشت. به طوری که با اعمال میدان مغناطیسی، توزیع سرعت حالت سینوسی داشته و با افزایش شدت میدان، دامنه‌ی آن افزایش می‌یابد. همچنین، در حضور چشمه گرمایی با افزایش عدد پرانتل، دمای بی‌بعد در نزدیکی دیواره‌ی دما ثابت کاهش یافته و در طرف دیگر کانال افزایش می‌یابد و در حضور چاه گرمایی، عکس این پدیده اتفاق می‌افتد. علاوه بر این، توزیع عدد نوسلت در عرض کانال به ازای مقادیر مختلف چشمه و چاه گرمایی و نسبت‌های دمای دیواره‌ها، نشان داده شده است.

کلمات کلیدی: جابجایی طبیعی؛ کانال عمودی؛ میدان مغناطیسی؛ حل تحلیلی.

Analysis of Natural Convection of Hydromagnetic Fluid Contains Micro-Particles in a Infinite Vertical Channel

M.H. Abdollahi Jahdi^{1,*}, Y. Arianfar²

¹ Assist. Prof., Mech. Eng., Azarbaijan Shahid madani Univ., Tabriz, Iran.

² M.Sc., Mech. Eng., Azarbaijan Shahid madani Univ., Tabriz, Iran.

Abstract

This study presents an analytical investigation of the natural convection hydromagnetic flow of a particulate suspension through a vertical channel in the presence of magnetic field and heat sink or source effects. The boundary conditions of the walls are such that one wall is in constant heat flux and the other wall is at a constant temperature and, the magnetic field is exerted on channel from the iso-thermal wall. The exact results of solving the equations are obtained for several physical states and the effect of the problem parameters on the velocity and temperature profiles is investigated. The results show that differences in boundary conditions will lead to different behavior of velocity and temperature distributions on both sides of the channel. So that by applying a magnetic field, the velocity distribution has a sinusoidal shape and with increasing the intensity of the field, its amplitude increases. Also in the presence of a source, with increasing Prandtl number the dimensionless temperature decreases near the iso-thermal wall and increases on the other side and in the presence of a heat sink, the opposite happens. Moreover, the distribution of the Nusselt number across the channel for different values of heat source and sink and temperature ratios is shown.

Keywords: Natural Convection; Vertical Channel; Magnetic Field; Analytical Solution.

۱- مقدمه

جابجایی طبیعی، از حرکت سیال در اثر تغییر چگالی حاصل از فرایند گرمایش ناشی می‌شود. حرکت سیال، اعم از گاز یا مایع در جابجایی آزاد، نتیجه نیروهای شناوری است که هنگام انجام فرآیند گرمایش یا سرمایش و تغییر چگالی در نزدیکی سطح، بر سیال وارد می‌شود. اگر سیال تحت میدان نیروهای خارجی از قبیل ثقل نباشد، نیروهای شناوری وجود نخواهد داشت [۱].

جریان جابجایی طبیعی دوفازی سیال-ذره، یکی از جذاب‌ترین و چالش برانگیزترین حیطه‌های پژوهشی در انتقال حرارت است. امروزه در صنعت سرمایش و گرمایش، سیالات مبادله‌کننده حرارت یا مبردها، نقش بسیار مهمی بازی می‌کنند. با توجه به بحران انرژی و مسائل زیست محیطی، استفاده از تجهیزات اقتصادی‌تر و سازگارتر با محیط زیست به یکی از موضوعات مهم علم تهویه و تبرید بدل گشته است. افزودن ذرات جامد به صورت معلق در سیال پایه، یکی از روش‌های افزایش انتقال حرارت است. افزایش ضریب هدایت حرارت، ایده اصلی در بهبود مشخصه‌های انتقال حرارت در سیالات است. از آنجا که ضریب هدایت حرارتی ذرات جامد معمولاً خیلی بزرگ‌تر از سیالات است، افزودن این ذرات جامد، موجب افزایش ضریب هدایت حرارتی سیال پایه می‌شود.

مطالعات اندکی روی جابجایی طبیعی دو فازی شامل ذرات معلق صورت گرفته است. اکثر تحقیقات روی جابجایی طبیعی در کانال‌های عمودی با دیواره‌های موازی، آن هم برای حالت تک فازی، انجام گرفته است. اکبری و برگرز^۱ [۲]، انتقال حرارت همرفت طبیعی در جریان آرام را در بین سطوح کانال دیوار ترومب مطالعه کردند. یائو^۲ [۳] مسئله همرفت ترکیبی را در ناحیه ورودی یک کانال عمودی بررسی کرده و برای مطالعه هیدرودینامیکی و حرارتی جریان آرام توسعه یافته در یک کانال حرارت داده شده، یک راه حل تحلیلی ارائه داد. اثرات گذرا در جریان همرفت طبیعی خنک کننده صفحات موازی عمودی،

توسط جوشی^۳ منتشر شد. آنگ^۴ و همکاران [۵]، جریان جابجایی آزاد آرام بین صفحات موازی عمودی را بررسی کردند که بطور نامتقارن گرم شده بودند.

از سوی دیگر مطالعات اندکی پیرامون جریان جابجایی طبیعی شامل سوسپانسیون سیال-ذره، درون هندسه‌های گوناگون صورت گرفته است. ضیایی‌راد و کسای‌پور [۶]، مطالعه عددی جابجایی ترکیبی برای نانوسیال آب-مس را روی صفحه افقی بررسی کرده و نشان دادند که با افزایش کسر حجمی نانوذرات، پارامتر جابجایی افزایش می‌یابد. چامخا و رمضان^۵ [۷]، برخی نتایج تحلیلی و عددی برای جریان جابجایی طبیعی شامل، سوسپانسیون دوفازی در درون صفحات عمودی بی‌نهایت را ارائه دادند. در تحقیقی دیگر، نظری [۸]، حل تشابهی جابجایی آزاد نانوسیال را در مجاورت یک صفحه گرم و محیط متخلخل بررسی کرد. ال‌سوبائی و چامخا^۶ [۹]، یک مطالعه تحلیلی پیرامون جریان همرفت طبیعی شامل، سوسپانسیون ذرات درون یک کانال عمودی با دیواره‌های دما ثابت را انجام دادند. چامخا و ال‌رشیدی^۷ [۱۰]، بررسی تحلیلی جابجایی طبیعی در یک کانال دوبعدی برای جریان شامل، میکروذرات در حضور میدان مغناطیسی را مورد مطالعه قرار دادند؛ همچنین در تحقیق دیگری منصور^۸ و همکاران [۱۱]، بررسی عددی جابجایی طبیعی نانوسیال آب-مس داخل یک حفره و در حضور میدان مغناطیسی، چشمه و چاه گرمایی را انجام دادند.

در کارهای اخیر مربوط به پیشینه پژوهش، هیچ گزارشی درخصوص تاثیر جابجایی شرایط مرزی و تغییر جهت اعمال میدان مغناطیسی بر رفتار هیدرودینامیکی و گرمایی سیال داخل کانال ارائه نشده است. در کار حاضر، تاثیر میدان مغناطیسی، چشمه و چاه گرمایی بر سوسپانسیون ذرات جامد دارای خاصیت مغناطیسی در یک کانال عمودی بررسی شده و تاثیر این پارامترها بر رفتار هیدرودینامیک و گرمایی سوسپانسیون در جریان جابجایی

³ Joshi⁴ Aug⁵ Chamkha and Ramadan⁶ Al-Subaie and Chamkha⁷ Chamkha and Al-Rashidi⁸ Mansour¹ Akbari and Borgers² Yao

هستند. پارامترهای دیگر شامل، ρ و μ و σ به ترتیب، چگالی، ویسکوزیته دینامیکی، ضریب هدایت الکتریکی فاز سیال می‌باشند. N ، ضریب جابجایی مومنتوم بوده و معادلات شامل آن، نیروی درگ درون فازی بین فازها را بیان می‌کند [۱۰].

۳-۲- معادله انرژی فاز سیال

$$\rho c \vec{V} \cdot \nabla T = \nabla \cdot (k \nabla T) + \rho_P c_P N_T (T_P - T) \pm Q (T - T_0) \quad (3)$$

در رابطه (۳) T دمای سیال، T_0 دمای نقطه مبدا "۰" در کانال و Q بسته به علامتش، ضریب جذب یا دفع گرما هستند. پارامترهای c و k به ترتیب، گرمای ویژه و ضریب هدایت دمایی فاز سیال می‌باشند. علاوه بر آن ضریب N_T ، بیانگر انتقال گرمای داخلی بین فازهای سیال و ذرات است [۱۰].

۴-۲- معادله پیوستگی فاز ذره

$$\nabla \cdot (\rho_P \vec{V}_P) = 0 \quad (4)$$

۵-۲- معادله مومنتوم فاز ذره

$$\rho_P \vec{V}_P \cdot \nabla \vec{V}_P = \rho_P N (\vec{V}_P - \vec{V}) + \rho_P \vec{g} \quad (5)$$

۶-۲- معادله انرژی فاز ذره

$$\rho_P c_P \vec{V} \cdot \nabla T_P = -\rho_P c_P N_T (T_P - T) \quad (6)$$

بردار سرعت ذره و T_P دمای فاز ذره بوده، ρ_P و c_P نیز، چگالی و گرمای ویژه ذرات می‌باشند [۱۰].

فرضیات زیر برای نقطه‌ای مانند "۰" در ورودی کانال به عنوان نقطه مبدأ در نظر گرفته شده است:

$$V = 0, \sigma = \sigma_0, T = T_0, \rho = \rho_0, \mu = \mu_0,$$

$$V_P = V_{P0}, T_P = T_{P0}, \mu_P = \mu_{P0}$$

با استفاده از فرضیات فوق، معادلات (۱) تا (۶) برای نقطه‌ی مبدا به صورت زیر خواهد بود:

معادله مومنتوم فاز سیال:

$$0 = -\nabla P - \rho_{P0} N (0 - \vec{V}_{P0}) + \rho_0 \vec{g} \quad (7)$$

آزاد آرام، مورد مطالعه قرار گرفته است؛ همچنین، برخلاف کار مربوط به مرجع [۱۰]، میدان مغناطیسی در مقابل شار گرمایی بوده و از طرف دیواره دما ثابت به کانال اعمال شده است. چهار حالت مختلف برای بررسی انتخاب شده است که عبارتند از: جریان بدون میدان مغناطیسی و چاه و چشمه گرمایی، جریان تحت تاثیر میدان مغناطیسی، جریان در حضور چشمه گرمایی و جریان در حضور چاه گرمایی. مساله در حالت دوبعدی و در کانال عمودی با طول بی‌نهایت بررسی شده و با بی‌بعدسازی و تبدیل معادلات مشتق جزعی به معادلات معمولی خطی، نتایج دقیق تحلیلی به دست آمده است.

۲- معادلات حاکم برای مدل دوفازی

جریان همرفت طبیعی آرام سوسپانسیون، در شرایط پایدار، در یک کانال عمودی با صفحات موازی در نظر گرفته شده است. دیواره‌های کانال در شرایط شار ثابت - دما ثابت نگه داشته می‌شوند. طرحواره مسئله در شکل ۱ نشان داده شده است. فاز سیال به صورت نیوتونی، لزج، هادی الکتریسیته و با امکان قرار گرفتن چشمه و چاه گرمایی، داخل جریان آن، فرض شده است. ذرات از نظر الکتریکی نارسانا بوده و فشار فاز ذرات نیز نسبت به فشار فاز سیال قابل چشم‌پوشی است. هر دو فاز به صورت پیوسته فرض می‌شوند. معادلات حاکم برای این بررسی، بر پایه قانون پایستگی جرم (پیوستگی)، قانون مومنتوم خطی و قانون انرژی برای هر دو فاز سیال و ذره هستند. به ازای نسبت حجمی بسیار کوچک ذرات در سوسپانسیون [۱۲]، این قوانین و معادلات در حالت برداری می‌توانند به صورت زیر نوشته شوند:

۱-۲- معادله پیوستگی فاز سیال

$$\nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (1)$$

۲-۲- معادله مومنتوم فاز سیال

$$\rho \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} = -\vec{\nabla} P + \nabla \cdot (\mu \nabla \vec{V}) - \rho_P N (\vec{V}_P - \vec{V}) + \rho \vec{g} + \sigma (\vec{V} \times \vec{B}) \times \vec{B} \quad (2)$$

در روابط (۱) و (۲) \vec{V} بردار سرعت سیال، \vec{g} بردار گرانش، $\vec{\nabla} P$ بردار گرادیان فشار و \vec{B} بردار القای مغناطیسی

با فرض ثابت بودن همه پارامترهای سوسپانسیون (به جز غلظت سیال در جمله شناوری معادله مومنتوم خطی فاز سیال) تقریب بوزینسک به طور مناسبی می‌تواند به کار گرفته شود. در معادله (۱۲) حذف گرادیان فشار از معادله مومنتوم فاز سیال و بکارگیری تقریب بوزینسک نتیجه می‌دهد:

$$\vec{V} \cdot \nabla \vec{V} = -\frac{\rho P_0}{\rho_0} \vec{g} + \frac{\mu_0}{\rho_0} \nabla \cdot \nabla \vec{V} - \frac{\rho P_0}{\rho_0} N (\vec{V} - \vec{V}_P) - \beta^* (T - T_0) \vec{g} + \frac{\sigma_0}{\rho P_0} (\vec{V} \times \vec{B}) \times \vec{B} \quad (13)$$

که β^* ضریب انبساط حجمی است. معادله مومنتوم خطی فاز سیال، یعنی معادله (۲)، با معادله (۱۳) جایگزین خواهد شد.

دیواره‌های کانال به طول بی‌نهایت فرض می‌شوند. این مطلب بیانگر آن است که وابستگی متغیرها به جهت x در مقایسه با وابستگی‌شان به جهت y قابل چشم‌پوشی خواهد بود؛ بنابراین، همه متغیرهای وابسته در معادلات (۳) تا (۶) و (۱۲) فقط تابعی از y خواهند بود:

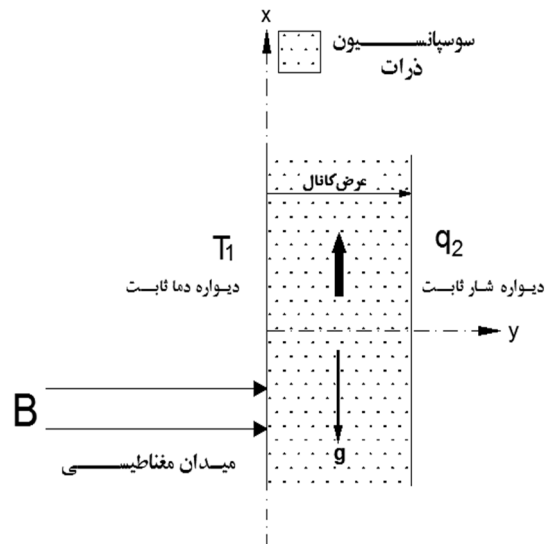
$$\vec{V} = U(y) \vec{e}_x, \quad \vec{V}_P = U_P(y) \vec{e}_x \quad (14-الف)$$

$$T = T(y), \quad T_P = T_P(y) \quad (14-ب)$$

که $U(y)$ مولفه x سرعت فاز سیال، $U_P(y)$ مولفه x سرعت فاز ذرات، $T(y)$ و $T_P(y)$ هم دمای فاز سیال و فاز ذرات هستند. \vec{e}_x بردار واحد در جهت x است. این فرضیات همچنین این مطلب را می‌رسانند که بردار ثابت \vec{g} تبدیل به $g \vec{e}_x$ خواهد شد که عبارت است از: بزرگی شتاب ناشی از گرانش در جهت x . همچنین، فرض این است که سیال رسانای الکتریکی، تحت تاثیر یک میدان مغناطیسی یکنواخت بوده است که میدان به صورت عمود بر جهت جریان قرار داده شده است. نیروی محرکه الکتریکی $\sigma \vec{V} \times \vec{B}$ در معادله (۱۳) موجب ایجاد جریانی می‌شود که تحت فعل و انفعالاتی با \vec{B} موجب تغییر سرعت جریان خواهد شد. این مطلب بیان‌گر این است که:

$$\sigma (\vec{V} \times \vec{B}) \times \vec{B} = -\sigma B^2 U(y) \vec{e}_x \quad (15)$$

که بزرگی القای مغناطیسی است. با تجمیع همه‌ی فرضیات فوق در یکجا، معادلات حاکم بر جریان داخل کانال با طول بی‌نهایت شامل صفحات موازی، می‌تواند به صورت زیر بازنویسی شود:



شکل ۱- هندسه مورد مطالعه و میدان مغناطیسی یکنواخت اعمال شده

با مرتب کردن معادله فوق:

$$-\nabla P = \rho_{P0} N (0 - \vec{V}_{P0}) - \rho_0 \vec{g} \quad (8)$$

معادله انرژی فاز سیال:

$$\rho_{P0} c_{P0} N_T (T_{P0} - T_0) = 0 \quad (9)$$

که نتیجه می‌دهد $T_{P0} = T_0$

معادله مومنتوم فاز ذرات:

$$\rho_{P0} N (0 - \vec{V}_{P0}) = -\rho_{P0} \vec{g} \quad (10)$$

معادله انرژی فاز ذرات:

$$0 = -\rho_{P0} c_{P0} N_T (T_{P0} - T_0) \quad (11)$$

که بار دیگر تساوی $T_{P0} = T_0$ نتیجه می‌شود.

لازم به ذکر است که در معادلات پیوستگی هر دو فاز، با قرار دادن سرعت مساوی صفر، هر دو سمت تساوی برابر صفر خواهد بود.

نکته دوم در مورد حذف شدن عبارتهای شامل گرادیان سرعت نیز، چون در نقطه مبدأ، سرعت فاز سیال صفر در نظر گرفته شده و سرعت فاز ذره هم ثابت فرض شده است، لذا گرادیان آنها نیز برابر صفر خواهد بود.

حال با جایگذاری معادله (۸) در معادله (۱۰):

$$-\nabla P = -\rho_{P0} \vec{g} - \rho_0 \vec{g} \quad (12)$$

به ترتیب عبارتند از: معکوس عدد استوکس مومنتوم^۱، بارگذاری ذرات^۲، عدد گراش، مربع عدد هارتمن، پارامتر شناوری، عدد پرائتل، نسبت گرمای ویژه، معکوس عدد استوکس دما^۳، پارامتر چشمه یا چاه گرما. و در نهایت شرایط مرزی بدون بعد نیز عبارتند از:

$$u(0) = u(1) = 0 \quad (۲۷-الف)$$

$$\theta(0) = r_{qt}, \quad \left. \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right|_{\eta=1} = -1 \quad (۲۷-ب)$$

که پارامتر r_{qt} عبارت است از نسبت دمایی دیواره‌ها و برابر است با:

$$r_{qt} = \frac{T-T_0}{q_2 h/k}$$

۳- حل تحلیلی معادلات و نتایج حاصله

در این بخش، حل تحلیلی برای حالت‌های خاص مساله موردنظر، در شرایط مختلف ارائه شده است.

حالت یک: این حالت، جابجایی طبیعی پایای دوفازی

ذره-سیال را از بین کانال عمودی شار ثابت-دمائیت، با فرض نبود اثرات میدان مغناطیسی ($M=0$) و چاه و چشمه گرمایی ($\varphi=0$) بررسی می‌کند. معادلات حاکم برای این نمونه به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$D^2 u - \alpha \kappa (u - u_p) + Gr \theta + \kappa H = 0 \quad (۲۸)$$

$$\frac{1}{Pr} D^2 \theta + \kappa \varepsilon \gamma (\theta_p - \theta) = 0 \quad (۲۹)$$

$$\alpha (u - u_p) - H = 0 \quad (۳۰)$$

$$\theta_p - \theta = 0 \quad (۳۱)$$

که D^2 یک عملگر مشتق دوم را نسبت به η مشخص می‌کند.

شرایط مرزی عبارتند از:

$$u(0) = u(1) = 0 \quad (۳۲-الف)$$

$$\theta(0) = r_{qt}, \quad D\theta(1) = -1 \quad (۳۲-ب)$$

از معادله (۳۰) بدست می‌آید:

$$u_p(\eta) = u(\eta) - \frac{H}{\alpha} \quad (۳۳)$$

$$\mu_0 \partial_{yy} U - \rho_{p0} N(U - U_p) - \sigma_0 B^2 U + \beta^* \rho_0 g(T - T_0) + \rho_{p0} g = 0 \quad (۱۶)$$

$$k \partial_{yy} T + \rho_p c_p N_T (T_p - T) \pm Q(T - T_0) = 0 \quad (۱۷)$$

$$\rho_p N(U - U_p) - \rho_p g = 0 \quad (۱۸)$$

$$T_p - T = 0 \quad (۱۹)$$

لازم به ذکر است که معادلات پیوستگی برای هر دو فاز بطور یکسان ارضا می‌شود.

شرایط مرزی برای این مسئله عبارت است از:

$$U(0) = U(h) = 0 \quad (۲۰-الف)$$

$$T(0) = T_1, \quad \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_h = -\frac{q_2}{k} \quad (۲۰-ب)$$

که در آن h عرض کانال است. T_1 دمای کانال در $y=0$ و q_2 شار گرمایی دیوار در $y=h$ است.

برای ادامه روند حل مساله، نیاز به بی‌بعدسازی معادلات هست. برای بدست آوردن پارامترهایی که امکان بی‌بعدسازی را بدهند، می‌توان نوشت:

$$\eta = \frac{y}{h}, \quad u = \frac{U \rho h}{\mu}, \quad u_p = \frac{U_p \rho h}{\mu}, \quad \theta = \frac{k(T-T_0)}{q_2 h}, \quad \theta_p = \frac{k(T_p-T_0)}{q_2 h} \quad (۲۱)$$

با جایگذاری این پارامترها در معادلات (۱۶) تا (۱۹)، به معادلات بی‌بعد زیر می‌رسیم:

$$\partial_{\eta\eta} u - \alpha \kappa (u - u_p) - M^2 u + Gr \theta + \kappa H = 0 \quad (۲۲)$$

$$\frac{1}{Pr} \partial_{\eta\eta} \theta + \kappa \varepsilon \gamma (\theta_p - \theta) \pm \phi \theta = 0 \quad (۲۳)$$

$$\alpha (u - u_p) - H = 0 \quad (۲۴)$$

$$\theta_p - \theta = 0 \quad (۲۵)$$

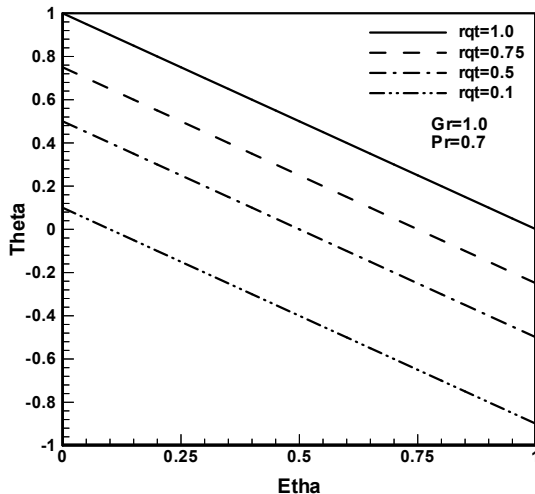
بطوری‌که:

$$\alpha = h^2 \frac{N \rho}{\mu}, \quad \kappa = \frac{\rho_p}{\rho}, \quad Gr = \frac{\beta^* q_2 h^4 \rho^2 g}{k \mu^2}, \quad M^2 = \frac{\sigma B^2 h^2}{\mu}, \quad H = \frac{\rho^2 h^3 g}{\mu^2}, \quad Pr = \frac{\mu c}{k}, \quad \gamma = \frac{c_p}{c}, \quad \varepsilon = \frac{\rho N_T h^2}{\mu}, \quad \phi = \frac{Q h^2}{\mu c} \quad (۲۶)$$

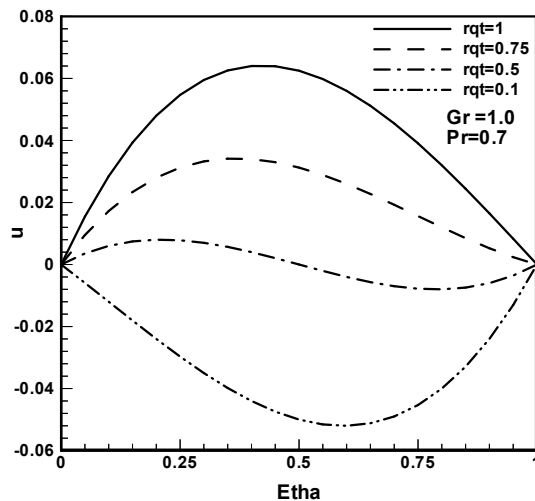
¹ Momentum Inverse Stokes Number

² Particle Loading

³ Temperature Inverse Stokes Number



شکل ۲- تاثیر r_{qt} بر روی پروفیل‌های دمایی فاز سیال و ذره



شکل ۳- تاثیر r_{qt} روی پروفیل سرعت فاز سیال

در شکل‌های نشان داده شده، برای دیگر پارامترهای فیزیکی بی‌بعد مساله، مقادیر ثابتی در نظر گرفته شده است. به عنوان مثال، برای حالت یک (شکل‌های ۲ تا ۴)، مقادیر عددی پارامترها عبارتند از:

$$\alpha = 1, \varepsilon = 1, \phi = 0, \gamma = 1, \kappa = 1,$$

$$Gr = 1, H = 1, M = 0, Pr = 0.7$$

شکل ۴، پروفیل سرعت فاز ذرات را برای مقادیر مختلف r_{qt} ارائه می‌دهد. افزایش دمای فاز سیال به دلیل افزایش مقدار r_{qt} باعث افزایش اثرات شناوری می‌شود. این

که بیانگر این مطلب می‌باشد که سرعت فاز ذره، مشابه سرعت فاز سیال بوده، با این تفاوت که سرعت آن به اندازه عبارت H/α از سرعت فاز سیال کمتر است. معادله (۳۱) بیان می‌کند که:

$$\theta_p(\eta) = \theta(\eta) \quad (34)$$

با جایگذاری معادله (۳۴) در معادله (۲۹) بدست می‌آید:

$$D^2\theta = 0 \quad (35)$$

جواب این معادله مرتبه دوم معمولی که شرایط مرزی (۳۲) را ارضا می‌کند، عبارت است از:

$$\theta = -\eta + r_{qt} \quad (36)$$

این معادله بیان می‌کند که دمای هر دوفاز، یک شکل خطی از هدایت خالص را دارد.

حال، با جایگذاری معادلات (۳۳) و (۳۶) در معادله (۲۸):

$$D^2u = Gr(\eta - r_{qt}) \quad (37)$$

جواب این معادله مرتبه دوم معمولی، با اعمال شرایط مرزی (۳۲) عبارت است از:

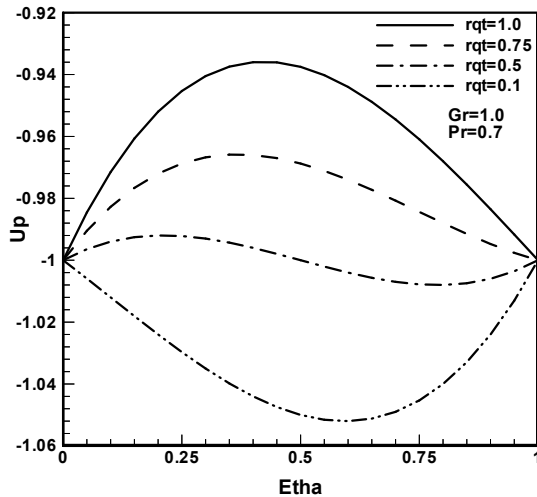
$$u(\eta) = \frac{Gr}{6}[\eta^3 - 3\eta^2 r_{qt} + (3r_{qt} - 1)\eta] \quad (38)$$

این معادله نشان می‌دهد که پروفیل سرعت فاز سیال یک رابطه مکعب با فاصله عمودی دارد. راه‌حل متناظر با $u_p(\eta)$ از جایگذاری معادله (۳۸) در معادله (۳۳) بدست می‌آید:

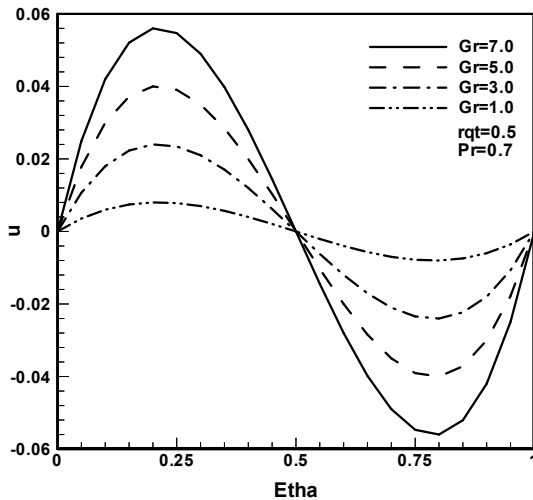
$$u_p(\eta) = \frac{Gr[\eta^3 - 3\eta^2 r_{qt} + (3r_{qt} - 1)\eta]}{6} - \frac{H}{\alpha} \quad (39)$$

شکل ۲، رابطه خطی بین پروفیل دمایی فاز سیال و فاز ذره با r_{qt} را نشان می‌دهد که با نزدیک‌تر شدن به دیواره شارثابت، در حال کاهش است. پرواضح است که زمانی که r_{qt} افزایش می‌یابد، پروفیل‌های دمایی نیز رشد می‌کنند.

شکل ۳ پروفیل سرعت فاز سیال را برای مقادیر مختلف r_{qt} ارائه می‌دهد. در این نمونه، سرعت از حالت منفی در $r_{qt} = 0.1$ تا حالت مثبت بعد از $r_{qt} = 0.5$ ، در حال تغییر است. افزایش دمای فاز سیال به دلیل افزایش مقدار r_{qt} باعث افزایش اثرات شناوری می‌شود. این مطلب شامل، جریان‌های پرسرعت فاز سیال در کانال می‌شود، مانند آنچه که در شکل ۳ نشان داده شده است.



شکل ۴- تاثیر r_{qt} بر روی پروفیل سرعت فاز ذره



شکل ۵- تاثیر عدد گراشف روی پروفیل سرعت فاز سیال

شکل ۶ اثرات افزایش عدد گراشف، Gr ، را در میدان سرعت برای فاز ذرات نشان می‌دهد. نمودار مشابه شکل قبل برای فاز سیال بوده، هرچند که در این شکل، پروفیل سرعت همواره منفی است. افزایش مقادیر عدد گراشف، به مانند فاز سیال، اثر شناوری دمایی را بالا می‌برد.

شکل ۷ پروفیل سرعت را برای فاز سیال، به ازای مقادیر مختلف عدد هارتمن، یعنی M ، ارائه می‌دهد. عدد هارتمن، یک کمیت بدون بعد است که به صورت نسبت نیروی الکترومغناطیس به نیروی ویسکوزیته تعریف می‌شود

مطلب شامل، جریان‌های پرسرعت فاز ذره در کانال می‌شود، همانند فاز سیال که در شکل ۴ نشان داده شده است.

حالت دو: این حالت عبارت است از جریان جابجایی آزاد پایای دوفازی ذره-سیال از میان یک کانال عمودی شارثابت-دمائثابت، تحت تاثیر یک میدان متقاطع که به صورت عمودی بر مسیر جریان اعمال شده است (از سمت دیواره دمائثابت) و جریان هیچ اثر ناشی از چشمه و چاه گرمایی ندارد ($\phi=0$). معادلات حاکم و شرایط مرزی همانند حالت یک خواهند بود، بجز معادله مومنوم فاز سیال که می‌تواند به صورت زیر نوشته شود :

$$D^2u - \alpha\kappa(u - u_p) + Gr\theta - M^2u + \kappa H = 0 \quad (40)$$

با جایگزینی معادلات (۳۳) و (۳۶) در معادله (۴۰) نتیجه می‌دهد :

$$D^2u - M^2u = -Gr(-\eta + r_{qt}) \quad (41)$$

حل معادله فوق تحت شرایط مرزی (۳۲) سرعت فاز سیال را به صورت زیر می‌دهد :

$$u(\eta) = c_1 e^{M\eta} + c_2 e^{-M\eta} + \frac{Gr(-\eta + r_{qt})}{M^2} \quad (42)$$

بطوری که:

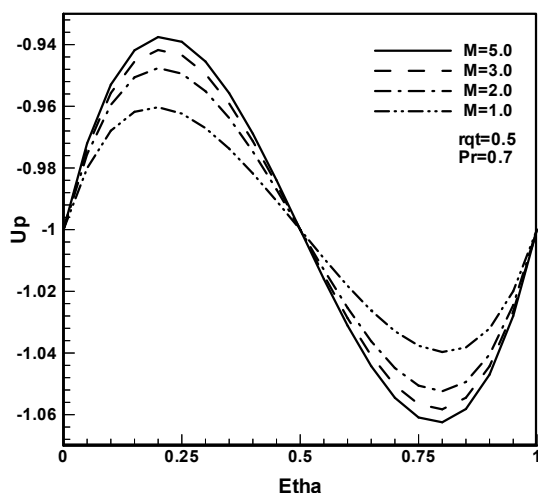
$$c_1 = \left(\frac{Gr}{M^2}\right) \left(\frac{r_{qt} - (r_{qt} - 1)e^M}{e^{2M} - 1}\right) \quad (43)$$

$$c_2 = \left(\frac{Gr}{M^2}\right) \left(\frac{e^M(r_{qt} - 1) - e^{2M}r_{qt}}{e^{2M} - 1}\right) \quad (44)$$

متناظراً پروفیل سرعت فاز ذره، u_p ، می‌تواند بدین صورت نوشته شود :

$$u_p(\eta) = u(\eta) - \frac{H}{\alpha} \quad (45)$$

شکل ۵ اثرات افزایش عدد گراشف Gr را در میدان سرعت برای فاز سیال نشان می‌دهد. نمودار شبیه به حالت سینوسی بوده و دارای بیشینه و کمینه است. افزایش مقادیر عدد گراشف، اثر شناوری دمایی را بالا می‌برد که با ترم $Gr\theta$ در معادله (۲۸) ارائه شده است. این ترم نیروی محرکه جریان را ارائه می‌دهد. بدین صورت که هرگاه $Gr=0$ باشد، هیچ جریانی در کانال برقرار نخواهد شد و جابجایی طبیعی نخواهیم داشت. با افزایش مقادیر عدد گراشف، دامنه تغییرات پروفیل سرعت نیز افزایش می‌یابد.



شکل ۸- تاثیر M بر روی پروفیل سرعت فاز ذره

حالت سه: این حالت جریان جابجایی طبیعی پایایی دوفازی در یک کانال عمودی شارثابت-دمائت را در حضور یک منبع گرما ($\phi > 0$) و یک میدان مغناطیسی (از سمت دیواره‌ی دمائت اعمال می‌شود) بررسی می‌کند. معادلات حاکم و شرایط مرزی برای این حالت نیز به مانند حالت دوم خواهد بود، بجز معادله انرژی فاز سیال که به دلیل وجود منبع گرما، می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$\frac{1}{Pr} D^2 \theta + \kappa \gamma \varepsilon (\theta_p - \theta) - \phi \theta = 0 \quad (46)$$

جایگذاری معادله (۳۴) در معادله (۴۶) و حل معادله دیفرانسیل حاصل با توجه به شرایط مرزی (۳۲)، دمای فاز سیال را به صورت زیر بدست می‌دهد:

$$\begin{aligned} \theta(\eta) &= \theta_p(\eta) \\ &= \left[\frac{-1 - r_{qt} \sqrt{\phi Pr} \sinh \sqrt{\phi Pr}}{\sqrt{\phi Pr} \cosh \sqrt{\phi Pr}} \right] \sinh \sqrt{\phi Pr} \eta \\ &\quad + r_{qt} \cosh \sqrt{\phi Pr} \eta \end{aligned} \quad (47)$$

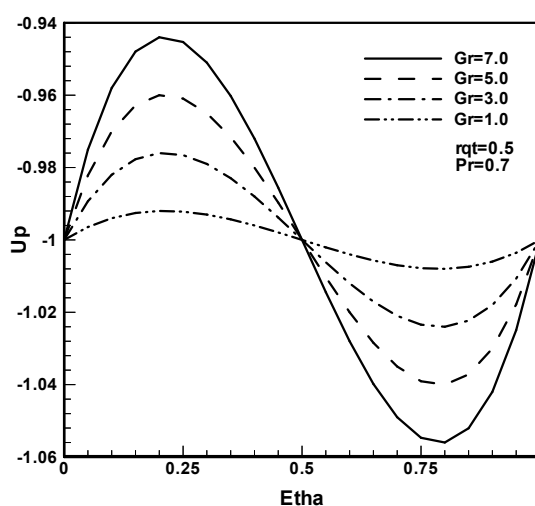
با جایگذاری معادله (۳۳) و (۴۷) در معادله (۴۰) نتیجه می‌دهد:

$$D^2 u - M^2 u = -Gr \theta(\eta) \quad (48)$$

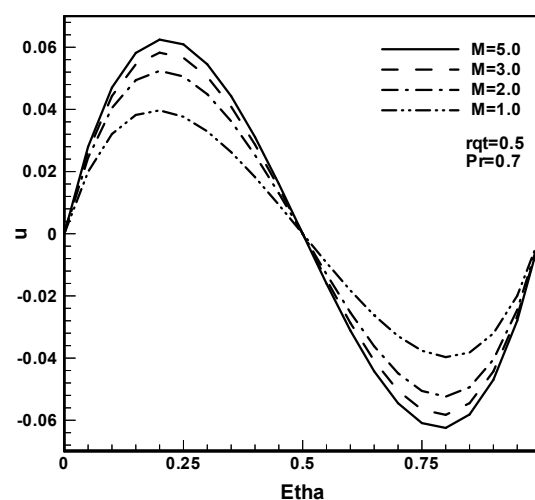
حل این معادله دیفرانسیل با شرایط مرزی (۳۲) سرعت فاز سیال را به صورت معادله (۴۹) نتیجه می‌دهد که در بخش ضمایم نشان داده شده است (برای حل معادلاتی که جواب طولانی دارند، از برنامه Maple16

[۱۳]. در این حالت، با افزایش مقادیر عدد هارتمن، پروفیل سرعت شکل سینوسی بخود گرفته و رفته رفته قدرمطلق دامنه آن افزایش می‌یابد. این رفتار، عکس حالتی است که میدان مغناطیسی با شار گرمایی هم جهت باشند [۱۰].

شکل ۸ پروفیل سرعت را برای فاز ذرات، به ازای مقادیر مختلف عدد هارتمن، یعنی M، ارائه می‌دهد. این پروفیل نیز همانند پروفیل سرعت فاز سیال بوده، با این تفاوت که به اندازه $-\frac{H}{\alpha}$ تغییر یافته است.



شکل ۶- تاثیر عدد گراشف بر روی پروفیل سرعت فاز ذره



شکل ۷- تاثیر M بر روی پروفیل سرعت فاز سیال

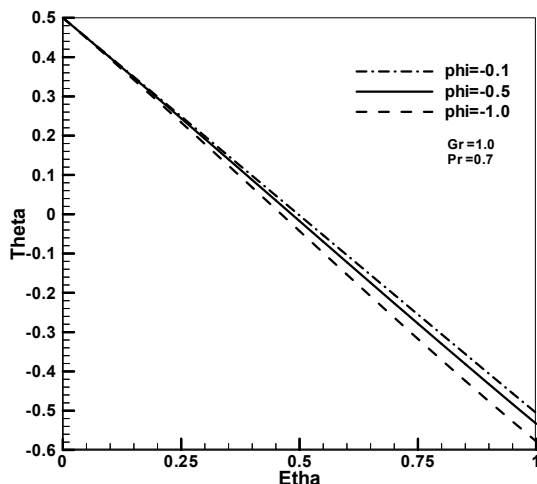
نتیجه می‌دهد که می‌تواند برای حل مسئله متناظر در غیاب میدان مغناطیسی نیز به کار رود. با قرار دادن M مساوی صفر و اعمال قاعده هوپیتال به معادله (۵۴)، سرعت فاز سیال برای این مسئله به صورت معادله (۵۵) به دست می‌آید که هر دو معادله فوق در بخش ضمایم نشان داده شده است.

شکل ۹ نشان می‌دهد که θ و θ_p تابع ϕ بوده، بدین صورت که به ازای چاه گرمایی ($\phi < 0$) کاهش می‌یابند. تغییرات در حوالی دیوار دما ثابت بسیار ناچیز بوده و با نزدیک شدن به سمت دیوار شار ثابت، میزان تغییرات بیش‌تر می‌شود.

شکل ۱۰ نیز نشان می‌دهد که θ و θ_p تابع ϕ بوده، بدین صورت که به ازای چشمه گرمایی ($\phi > 0$) افزایش می‌یابند. تغییرات در حوالی دیوار دما ثابت بسیار ناچیز بوده و برخلاف حالت قبل، با حرکت به سمت دیوار شار ثابت، میزان تغییرات در جهت عکس بیش‌تر می‌شود.

شکل ۱۱ بیان‌گر این مورد است که در حضور چاه گرمایی، هر دو مقدار θ و θ_p با افزایش عدد پرانتل (Pr) در نزدیکی دیوار دما ثابت افزایش یافته و با نزدیک شدن به دیوار شار گرمایی ثابت، کاهش می‌یابند.

شکل ۱۲ نیز معرف تغییرات θ و θ_p در عرض کانال در حضور منبع گرما بوده و روند عکس پدیده قبلی را نشان می‌دهد.



شکل ۹- تاثیر ϕ منفی بر روی پروفیل‌های دمایی فاز سیال و ذره

استفاده شده است). پروفیل سرعت فاز ذره با جایگذاری معادله (۴۹) در معادله (۳۳) به دست می‌آید.

این راه حل می‌تواند برای به دست آوردن پاسخ مسئله متناظر بدون میدان مغناطیسی ($M=0$) به کار رود؛ بنابراین، سرعت فاز سیال این مسئله، با مساوی صفر قرار دادن M و اعمال قاعده هوپیتال به معادله (۴۹) به دست خواهد آمد. بدین ترتیب، خواهیم داشت:

$$u(\eta) = \left[\left(\frac{1+r_{qt}\sqrt{\phi Pr} \sinh \sqrt{\phi Pr}}{\sqrt{\phi Pr} \cosh \sqrt{\phi Pr}} \right) \sinh \sqrt{\phi Pr} - \cosh \sqrt{\phi Pr} \left[Gr \left(1 + \frac{r_{qt}\sqrt{\phi Pr} \sinh \sqrt{\phi Pr} + \frac{r_{qt}}{2}\phi Pr \cosh \sqrt{\phi Pr}}{\phi Pr (3 \cosh \sqrt{\phi Pr} + \sqrt{\phi Pr} \sinh \sqrt{\phi Pr})} \right) \right] \right] \eta - \frac{Gr r_{qt}}{2\sqrt{\phi Pr}} (\eta \sinh(\sqrt{\phi Pr} \eta)) + \left[Gr \left[1 + r_{qt}\sqrt{\phi Pr} \sinh \sqrt{\phi Pr} + \frac{r_{qt}}{2}(\sqrt{\phi Pr} \sinh \sqrt{\phi Pr} + \phi Pr \cosh \sqrt{\phi Pr}) \right] \right] \frac{\eta \cosh(\sqrt{\phi Pr} \eta)}{\phi Pr (3 \cosh \sqrt{\phi Pr} + \sqrt{\phi Pr} \sinh \sqrt{\phi Pr})} \quad (50)$$

حالت چهارم: این حالت، جریان جابجایی طبیعی پایای دوفازی از بین یک کانال عمودی شار ثابت-دما ثابت را در حضور یک چاه گرمایی ($\phi < 0$) و یک میدان مغناطیسی (میدان از سمت دیواره دما ثابت اعمال می‌شود) بررسی می‌کند. معادلات حاکم و شرایط مرزی برای این نمونه نیز مانند نمونه دو خواهد بود، مگر معادله انرژی فاز سیال که می‌تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$\frac{1}{Pr} D^2 \theta + \kappa \gamma \varepsilon (\theta_p - \theta) + \phi \theta = 0 \quad (51)$$

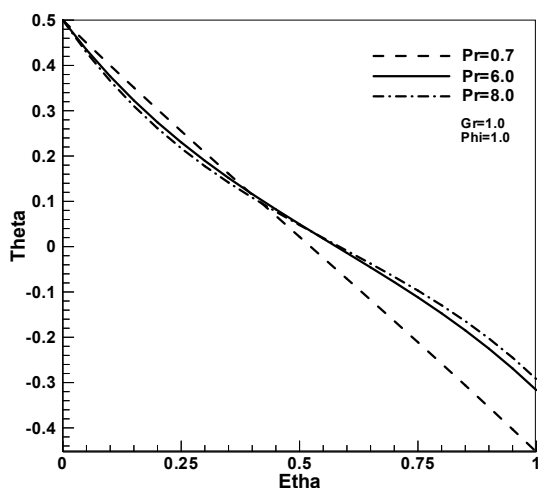
با جایگذاری معادله (۳۴) در معادله (۵۱) و حل معادله دیفرانسیل حاصل، دمای فاز سیال به دست می‌آید:

$$\theta(\eta) = \theta_p(\eta) = \left(\frac{r_{qt}\sqrt{\phi Pr} \sin \sqrt{\phi Pr} - 1}{\sqrt{\phi Pr} \cos \sqrt{\phi Pr}} \right) \sin \sqrt{\phi Pr} \eta + r_{qt} \cos \sqrt{\phi Pr} \eta \quad (52)$$

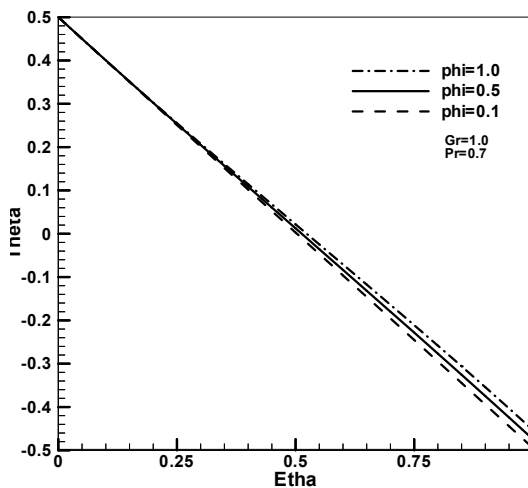
با جایگذاری معادله (۳۳) و (۵۲) در معادله (۴۰) و مرتب کردن آن، خواهیم داشت:

$$D^2 u - M^2 u = -Gr \theta(\eta) \quad (53)$$

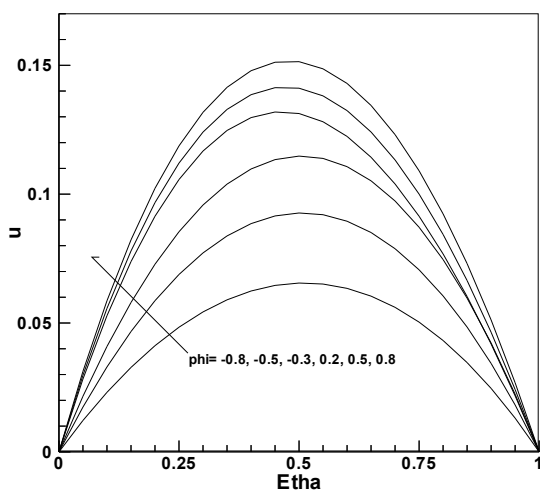
معادله (۵۳) بر اساس شرایط مرزی داده شده در (۳۲) حل شده و سرعت فاز سیال را به صورت معادله (۵۴)



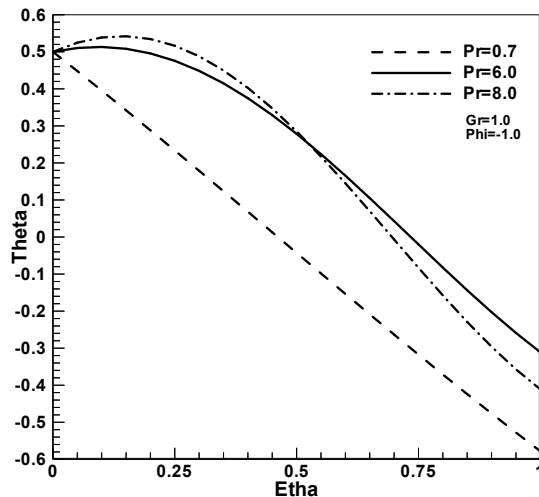
شکل ۱۲- تاثیر عدد پرانتل بر روی پروفیل‌های دمایی فاز سیال و ذره ($\phi = +1$)



شکل ۱۰- تاثیر ϕ مثبت بر روی پروفیل‌های دمایی فاز سیال و ذره



شکل ۱۳- تاثیر ϕ بر روی پروفیل سرعت فاز سیال



شکل ۱۱- تاثیر عدد پرانتل روی پروفیل‌های دمایی فاز سیال و ذره ($\phi = -1$)

گرمای جابجایی به هدایتی را داشته و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Nu = \frac{h^* y}{k} \quad (56)$$

با توجه به روابط موجود در انتقال گرما و همچنین با بی‌بعدسازی روابط حاکم بر مساله، عدد نوسلت بر اساس متغیرهای بی‌بعد موجود در کار حاضر، به صورت زیر به دست می‌آید:

$$Nu = \frac{-\eta}{\theta} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right)_{\eta=0} \quad (57)$$

شکل ۱۳ نیز معرف پروفیل سرعت فاز سیال به ازای مقادیر مختلف چشمه یا چاه گرما (ϕ) بوده و افزایش سرعت را در اثر افزایش ϕ نشان می‌دهد.

نظر به این که در پدیده مورد مطالعه، گرادیان‌های دما، شار گرمایی و چشمه و چاه گرمایی حضور دارند، لازم است، یک دید کلی از گرمای انتقال یافته در عرض کانال داشته باشیم و این که چه سهمی از گرمای انتقال یافته، هدایتی و یا جابجایی است. عدد بی‌بعد نوسلت، مفهوم نسبت انتقال

مفهوم را می‌رساند که جهت انتقال گرما در این نقطه، عکس شده و علامت دمای بی‌بعد در یک طرف منحنی، عکس طرف دیگر است.

۴- بحث و نتیجه گیری

مساله جریان جابجایی آزاد از بین یک کانال عمودی صفحه موازی شار ثابت - دما ثابت، در حضور میدان مغناطیسی و اثرات چاه و چشمه گرمایی بررسی گردید. معادلات حاکم بر مساله بی‌بعد بوده و مساله به صورت تحلیلی حل گردید. راه حل‌های دقیق برای چهار نمونه خاص به دست آمده و نتایج حاصل به صورت رابطه و نمودار نمایش داده شدند تا تاثیر پارامترهای فیزیکی را بر مساله بیان کنند.

نتایج بدست آمده بر اساس مطالعات پارامتریک روی حالت‌های فوق را می‌توان در موارد زیر خلاصه کرد:

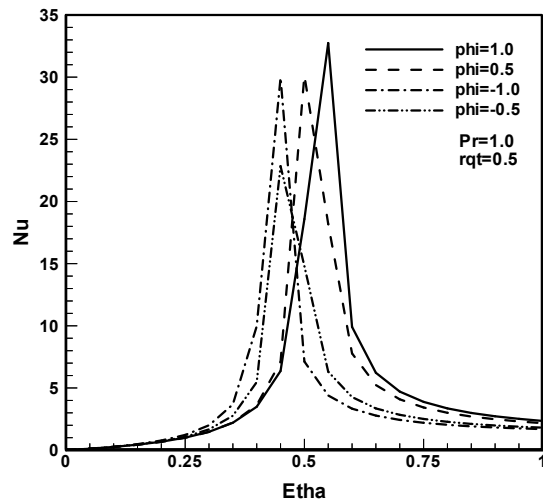
(۱) در غیاب میدان مغناطیسی و چاه و چشمه گرمایی، پروفیل‌های دمایی هر دو فاز یکسان بوده و یک شکل خطی ناشی از هدایت خالص دارند.

(۲) یک افزایش در مقادیر نسبت دمایی دیوار، اثر شنواری دمایی را افزایش داده که در نتیجه باعث افزایش جریان هر دو فاز در کانال گردید.

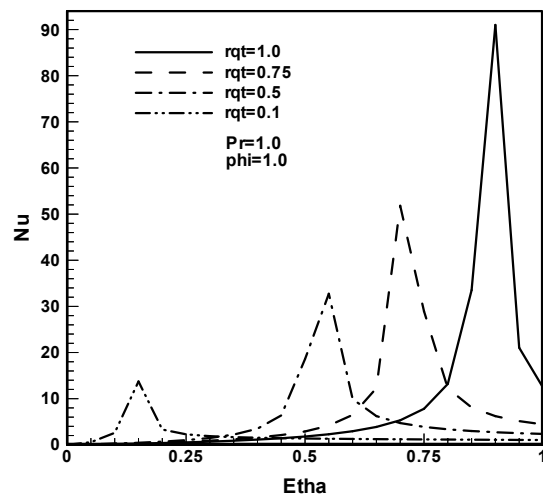
(۳) با توجه به نتایج مربوط به تاثیر عدد هارتمن بر دامنه سرعت هر دو فاز در حضور میدان مغناطیسی و مقایسه آن با نتایج مرجع [۱۰]، مشاهده می‌شود که تغییر در راستای میدان مغناطیسی، رفتار متفاوتی را نتیجه می‌دهد. به طوری که پروفیل سرعت حالت سینوسی داشته و با افزایش مقادیر عدد هارتمن، دامنه سرعت هر دو فاز افزایش می‌یابد.

(۴) افزایش در مقادیر ضریب تولید و جذب گرما، به ترتیب موجب افزایش و کاهش دما می‌شود.

(۵) دمای هر دو فاز به ازای عرض کانال، در حضور چشمه گرما با افزایش عدد پرانتل کاهش یافته و سپس افزایش می‌یابد، ولی در حضور چاه گرمایی، اول افزایش یافته و سپس کاهش می‌یابد.



شکل ۱۴- تاثیر ϕ بر روی توزیع عدد نوسلت



شکل ۱۵- تاثیر r_{qt} بر روی توزیع عدد نوسلت

شکل ۱۴ نشان می‌دهد که در یک چشمه و چاه معین، هدایت گرمایی در نزدیکی دیواره دما ثابت بیشتر از جابجایی بوده، ولی در نواحی مرکزی کانال، جایی که سرعت سیال افزایش می‌یابد، جابجایی گرمایی به شدت افزایش یافته و این افزایش با زیاد شدن ϕ بیش‌تر است که نمودار مربوط به سرعت نیز به بیانی به همین رفتار مربوط است. شکل ۱۵ نیز اولاً نشان گر کاهش جابجایی با کاهش نسبت دمایی دیواره در یک ϕ ثابت است. دوماً، با افزایش نسبت دمایی دیواره، سهم جابجایی گرمایی در نزدیکی دیواره‌ی شار ثابت، نسبت به دیواره مقابل بیش‌تر است؛ همچنین، نقطه ناپیوستگی مربوط به عدد نوسلت، این

ضریب جابجایی گرمای درون‌فازی	N_T	۶) سرعت در کانال با تولید گرما افزایش یافته و با جذب گرما کاهش می‌یابد.
فشار هیدرواستاتیک سیال	P	۷) در حضور چشمه و چاه گرمایی، انتقال گرمای جابجایی در کانال افزایش می‌یابد؛ همچنین، با افزایش نسبت دمایی دیواره، انتقال گرما در نزدیکی دیواره دما ثابت عمدتاً هدایتی بوده، ولی در نزدیکی دیواره شار ثابت، جابجایی گرمایی غالب است.
عدد پرانتل	Pr	۸) کار حاضر، از نظر دقت نتایج و هزینه محاسبات، نشان‌گر مزیت نتایج تحلیلی نسبت به روش‌های عددی بوده و نیز به دلیل نتایج حاصل از حل معادلات دیفرانسیل خطی، نیازی به اعتبارسنجی و مقایسه با دیگر نتایج نمی‌باشد.
ضریب جذب یا دفع گرما	Q	
شار گرمایی دیوار	q_2	
نسبت گرمایی دیواره‌ها	r_{qt}	
دمای فاز سیال	T	
دمای فاز ذره	T_p	
سرعت بی‌بعد فاز سیال	u	۵- علائم و نشانه‌ها
سرعت بی‌بعد فاز ذره	u_p	B میدان مغناطیسی
سرعت فاز سیال	U	c گرمای ویژه فاز سیال
سرعت فاز ذره	U_p	c_p گرمای ویژه فاز ذره
مختصات کارتزین	x, y	g شتاب گرانشی
	علائم یونانی	Gr عدد گراشف
عدد استوکس معکوس سرعت	α	h عرض کانال
نسبت گرمای ویژه	γ	h^* ضریب جابجایی انتقال گرما
عدد استوکس معکوس دما	ε	H پارامتر بی‌بعد شناوری
متغیر بی‌بعد در جهت y	η	k هدایت گرمایی فاز سیال
دمای بی‌بعد فاز سیال	θ	M عدد هارتمن
بار ذرات	κ	N ضریب جابجایی مومنوم درون‌فازی
لزجت دینامیکی	μ	Nu عدد بی‌بعد نوسلت

ضریب بی بعد تولید یا جذب گرما	ϕ	چگالی فاز سیال	ρ
		چگالی فاز ذرات	ρ_p
		هدایت الکتریکی فاز سیال	σ

۶- ضمایم

روابط (۴۹) و (۵۴) و (۵۵) به صورت زیر بوده و در این بخش درج شده‌اند:

$$u(\eta) = \left[\frac{1}{\sinh M} \left[\left(\frac{1+r_{qt}\sqrt{\phi Pr} \sinh \sqrt{\phi Pr}}{\sqrt{\phi Pr} \cosh \sqrt{\phi Pr}} \right) \sinh \sqrt{\phi Pr} - \cosh \sqrt{\phi Pr} \left(\frac{Gr \left(1+r_{qt}\sqrt{\phi Pr} \sinh \sqrt{\phi Pr} + \frac{r_{qt}}{2} \left(\sqrt{\phi Pr} \sinh \sqrt{\phi Pr} + \phi Pr \cosh \sqrt{\phi Pr} - \frac{M^2}{\sqrt{\phi Pr}} \sinh \sqrt{\phi Pr} - M^2 \cosh \sqrt{\phi Pr} \right) \right)}{\phi Pr (3 \cosh \sqrt{\phi Pr} + \sqrt{\phi Pr} \sinh \sqrt{\phi Pr}) + M^2 (\cosh \sqrt{\phi Pr} + \sqrt{\phi Pr} \sinh \sqrt{\phi Pr})} \right) \right] \right] * \sinh(M\eta) - \frac{Gr r_{qt}}{2\sqrt{\phi Pr}} (\eta \sinh(\sqrt{\phi Pr} \eta)) + \eta \cosh(\sqrt{\phi Pr} \eta) * \left[\frac{Gr \left(1 + \frac{r_{qt}}{2} \left(2\sqrt{\phi Pr} \sinh \sqrt{\phi Pr} + \sqrt{\phi Pr} \sinh \sqrt{\phi Pr} + \phi Pr \cosh \sqrt{\phi Pr} - \frac{M^2}{\sqrt{\phi Pr}} \sinh \sqrt{\phi Pr} - M^2 \cosh \sqrt{\phi Pr} \right) \right)}{\phi Pr (3 \cosh \sqrt{\phi Pr} + \sqrt{\phi Pr} \sinh \sqrt{\phi Pr}) + M^2 (2 \cosh \sqrt{\phi Pr} + \sqrt{\phi Pr} \sinh \sqrt{\phi Pr})} \right] \quad (49)$$

$$u(\eta) = \frac{\sinh M\eta}{\sinh M} \left[\frac{Gr r_{qt}}{\phi Pr + M^2} \left[\cosh M - \cos \sqrt{\phi Pr} + \sin \sqrt{\phi Pr} \left(\frac{\phi Pr \sqrt{\phi Pr} \sin \sqrt{\phi Pr} + M^2 \sqrt{\phi Pr} \sin \sqrt{\phi Pr}}{\phi Pr \sqrt{\phi Pr} \cos \sqrt{\phi Pr} + M^2 \sqrt{\phi Pr} \sin \sqrt{\phi Pr}} \right) \right] - \frac{Gr r_{qt}}{\phi Pr + M^2} \cosh(M\eta) + \frac{Gr r_{qt}}{\phi Pr + M^2} \left[\frac{\phi Pr \sin \sqrt{\phi Pr} + M^2 \sin \sqrt{\phi Pr}}{\phi Pr \cos \sqrt{\phi Pr} + M^2 \sin \sqrt{\phi Pr}} \right] \sin \sqrt{\phi Pr} \eta + \frac{Gr r_{qt}}{\phi Pr + M^2} \cos \sqrt{\phi Pr} \eta \quad (54)$$

$$u(\eta) = \left[\frac{Gr r_{qt}}{\phi Pr} [1 - \cos \sqrt{\phi Pr} + \sin \sqrt{\phi Pr} (\tan \sqrt{\phi Pr})] \right] \eta - \frac{Gr r_{qt}}{\phi Pr} + \frac{Gr r_{qt}}{\phi Pr} \tan \sqrt{\phi Pr} \sin \sqrt{\phi Pr} + \frac{Gr r_{qt}}{\phi Pr} \cos \sqrt{\phi Pr} \eta \quad (55)$$

[5] Aung W, Fletcher LS, Sernas V (1972) Development of laminar free convection between vertical flat plates with asymmetric heating. Int J Heat Mass Tran 15: 2293-2228.

[6] Ziaei-Rad M, Kasaeipoor A (2015) A Numerical study of similarity solution for mixed-convection cooper-water nanofluid boundary layer flow over a horizontal plate. Modares Mechanical Engineering 14(14): 190-198. (In Persian)

[7] Chamkha AJ, Ramadan H (1998) Analytical solution for the two-phase free convection flow of a particulate suspension past an infinite vertical plate. Int J Eng Sci 36: 49-60.

۷- مراجع

[1] Holman JP (2010) Heat transfer. 10th edn. McGraw-Hill, New York.

[2] Akbari HT, Borges R (1979) Finite convection laminar flow within Trombe wall channel. Solar Energy 22: 165-174.

[3] Yao LS (1983) Free and forced convection in the entry region of a heated vertical channel. Int J Heat Mass Tran 26: 65-72.

[4] Joshi HM (1988) Transient effects in natural convection cooling of vertical parallel plates. Int Commun Heat Mas 15: 227-238.

- isothermal channels in the presence of a heat source or sink. *Energy Conv Manag* 5: 851-858.
- [11] Mansour MA, Chamkha AJ, Bakeir MAY (2015) Magnetohydrodynamic natural convection and entropy generation of a cu-water nanofluid in a cavity with wall mounted heat source-sink. *J Nanofluids* 4: 254-269.
- [12] Marble FE (1970) Dynamics of dusty Gases. *Ann Rev Fluid Mech* 2: 397-447.
- [13] Cramer KR, Pai S (1973) Magnetofluid dynamics for engineering and applied physicists. Scripta Publishing Company, New York.
- [8] Nazari M (2016) Thermal non-equilibrium similarity solution for nanofluid boundary layer in a porous medium. *Amirkabir Journal of Mechanical Engineering* 48(3): 281-290. (In Persian)
- [9] Al-Subaie M, Chamkha AJ (2003) Analytical solutions for hydromagnetic natural convection flow of a particulate suspension through a channel with heat generation or absorption effects. *Heat Mass Transfer* 39(8): 701-707.
- [10] Chamkha AJ, Al-Rashidi SS (2010) Analytical solutions for hydromagnetic natural convection flow of a particulate suspension through isoflux-