



مطالعه تحلیلی و عددی جذب انرژی در ضربه‌گیرهای استوانه‌ای با ضخامت دیواره متغیر

علی عبدالمنافی^۱ و حسین رحمانی^{۲*}

^۱ دانشجوی کارشناسی ارشد، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده شهید نیکبخت، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان، ایران

^۲ استادیار، گروه مهندسی مکانیک، دانشکده شهید نیکبخت، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان، ایران

مقاله مستقل، تاریخ دریافت: ۱۳۹۹/۰۱/۲۳؛ تاریخ بازنگری: ۱۳۹۹/۰۲/۲۸؛ تاریخ پذیرش: ۱۳۹۹/۰۶/۱۲

چکیده

در این پژوهش، به بررسی فروریزش جاذب‌های استوانه‌ای جدار نازک پرداخته شده است که در آن ضخامت دیواره‌ها بر اساس فرمول توزیع توانی غیرخطی مواد مدرج هدفمند تغییر می‌کند. بارگذاری وارد بر جاذب انرژی به صورت محوری و شبه استاتیکی است. ابتدا با در نظر گرفتن رفتار تنش-کرنش ماده به صورت الاستیک کامل-پلاستیک برای جنس لوله، مدل تحلیلی فروریزش با استفاده از تئوری الکساندر محاسبه و مقدار انرژی جذب شده و همچنین نیروی متوسط لهیدگی به دست آمده است. سپس به منظور بالا بردن دقت نتایج، مدل رفتاری ماده با در نظر گرفتن رفتار کار سختی، بررسی و روابط نیروی متوسط و انرژی جذب شده، مجدداً استخراج شده‌اند. به منظور راستی آزمایی نتایج حاصل از رابطه تحلیلی، چندین مدل در حالت‌های مختلف در نرم‌افزار آباکوس شبیه‌سازی و با نتایج تحلیل مقایسه شده‌اند. نتیجه نهایی مطالعه، ارائه دو رابطه تحلیلی بین میزان جذب انرژی و نیروی متوسط لهیدگی و ارتباط آنها با سایر ابعاد هندسی جسم مانند، طول، قطر، ضخامت و نحوه تغییرات آن است؛ همچنین تاثیر خواص مکانیکی شامل، رفتار پلاستیک و چگونگی رفتار غیرخطی منطقه پلاستیک مربوط به جنس نمونه مورد استفاده در ضربه‌گیرها در روابط اعمال شده‌اند. با ساده‌سازی معادلات حاصل، معادلات پایه‌ای در تحقیقات گذشته حاصل می‌شود.

کلمات کلیدی: ضخامت متغیر تابعی؛ لوله استوانه‌ای؛ فروریزش؛ نیروی متوسط لهیدگی؛ شبه استاتیکی.

Analytical and Numerical Investigation of Cylindrical Energy Absorbers with Functionally Graded Thickness

A. Abdolmanafi¹, H. Rahmani^{2,*}

¹ Ms. Student, Mech. Eng. Department, University of Sistan and Baluchestan., Zahedan, Iran.

² Assistant Prof., Mech. Eng. Department, University of Sistan and Baluchestan., Zahedan, Iran.

Abstract

In this study, the crashworthiness of cylindrical tubes with variable thickness, under axial load, is investigated. The loading is applied quasi static. Wall-Thickness changes are considered to follow the nonlinear power distribution equation. Firstly, by considering the elastic-perfectly plastic behavior for material, an analytical relation is extracted based on Alexander's theory. Then, in order to increase the accuracy of the results, the effects of work hardening is applied to material behavior and the formulas are rewritten. Finally, to validate the analytical results, using simulation in ABAQUS FE software, several models have been studied in different modes and the results have been compared. The results show an acceptable agreement between the analytical results and the simulation. The final result of this research is presenting two analytical relation between absorbed energy and mean force with mechanical properties and geometric parameters of energy absorber. Moreover, by simplifying the derived analytical equation, we can obtain the basic equations in later researches.

Keywords: Functionally Graded Thickness; Cylindrical tube; Collapse; Mean Crash Force; Quasi-static.

* نویسنده مسئول؛ تلفن: ۰۵۴۳۱۱۲۳۲۷۸؛ فکس: ۰۵۴۳۳۴۴۷۰۹۲

آدرس پست الکترونیک: H.Rahmani@eng.usb.ac.ir

۱- مقدمه

امروزه جاذب‌های انرژی به صورت گسترده در وسایل نقلیه برون‌شهری، درون‌شهری، وسایل نقلیه هوایی، تجهیزات صنعتی و غیره کاربرد دارد. روش اصلی جذب انرژی در جاذب‌ها، تغییر شکل پلاستیک و مچالگی است. از جمله جاذب‌های متداولی که در صنعت مورد استفاده قرار می‌گیرد، جاذب‌های استوانه‌ای جدار نازک می‌باشند. دلیل استفاده از این جاذب‌ها، بالا بودن انرژی مخصوص (مقدار انرژی جذب شده به جرم جاذب) آنها، مخصوصاً در بارگذاری‌های محوری است که باعث بالا رفتن کارایی این نوع از جاذب‌ها می‌شود [۱]. با توجه به کاربرد گسترده‌ای که این نوع جاذب‌ها دارند، تحقیقات فراوانی روی آنها در بارگذاری‌های دینامیکی و شبه استاتیکی انجام شده است [۲-۵]. ظرفیت جذب انرژی در لوله‌های جداره نازک به میزان قابل توجهی تحت تاثیر خواص مواد و هندسه لوله است [۶]. وقتی طول لوله استوانه‌ای بزرگتر از طول بحرانی شود، تغییر شکل آن به صورت کمانش اولیه خواهد بود که از نظر ضربه‌پذیری و میزان جذب انرژی ناکارآمد است. وقتی یک لوله استوانه‌ای تحت بار محوری قرار می‌گیرد، می‌تواند به صورت متقارن، غیر متقارن و ترکیبی فرو بریزد [۷]. بررسی ضربه‌گیرهای با مقطع دایره از سال ۱۹۶۰ میلادی آغاز شد. الکساندر برای اولین بار مدلی برای بررسی فروریزش لوله‌ها به صورت چین‌دار متقارن ارائه نمود [۸]. در کنار تحقیقات تئوری، تحقیقات عددی و تجربی زیادی انجام شده است. اندروز و همکاران در سال ۱۹۸۳ با بررسی فروریزش تعداد زیادی لوله آلومینیومی با ابعاد مختلف تحت بار شبه استاتیکی محوری، شیوه فروریزش لوله‌های مختلف را بررسی کردند، در این تحقیق نموداری بر اساس نسبت‌های بدون بُعد طول به قطر و ضخامت به قطر ارائه شد [۹]. ویرزبیک در سال ۱۹۹۲ ضربه‌گیر در حال لهیدگی را به سه بخش، ناحیه چین خورده که کاملاً تغییر شکل داده است، ناحیه‌ای که هنوز دست نخورده باقی مانده است و ناحیه‌ای که ناحیه فعال فروریزش است و دو ناحیه فوق‌الذکر را به هم متصل می‌کنند، تقسیم کرد [۱۰]. در فروریزش لوله‌ها تحت بار محوری ضربه‌ای و شبه استاتیکی بررسی عوامل موثر بر شکل فروریزش مهم است. گیلو در سال ۲۰۰۱ و کاراگیز در سال ۲۰۰۴ در تحقیقات مفصلی با انجام آزمایش‌های تجربی و

شبه سازی عددی به مطالعه تاثیر ابعاد هندسی لوله مانند، ضخامت، قطر و طول بر شیوه فروریزش پرداختند. این محققان فروریزش لوله‌های آلومینیومی را با نسبت قطر به ضخامت جداره بین ۱۰ تا ۴۵ و نسبت طول به قطر بین ۱ تا ۱۱ را تحت بار شبه استاتیکی انجام داده و نمودار کاملی را برای نحوه فروریزش ارائه دادند [۱۱]. با توجه به تحقیقات انجام شده، چین خوردگی متقارن، باعث افزایش میزان جذب انرژی می‌شود. به همین دلیل محققان به سمت تغییر رفتار فروریزش ضربه گیرها رفتند. ایجاد دندانه [۱۲، ۱۳]، شیار [۱۴] یا آغازگر [۱۵، ۱۶] از جمله این کارها است. در سال ۲۰۰۳ ماملیس به کمک روش المان محدود و تعدادی آزمایش‌های تجربی به مطالعه تاثیر ایجاد تعدادی شیار از بیرون روی محیط لوله پرداخت، این لوله‌ها تحت بار محوری بررسی شدند. در این تحقیق اثر تعداد شیارهای ایجاد شده بر بار و نوع فروریزش بررسی شده است [۱۷]. از جمله پژوهش‌های نسبتاً جدیدی که روی ضربه‌گیرها در حال انجام است، بررسی اثر تغییر ضخامت دیواره لوله‌های استوانه‌ای روی نوع فروریزش، نیروی متوسط و ماکزیمم لهیدگی است. در این مطالعات، تغییرات ضخامت را با استفاده از رابطه گرادیان تابعی^۱ تخمین می‌زنند. بایکوسوگل و مرو، جذب انرژی لوله‌های دایره‌ای آلومینیومی، با ضخامت متغیر تحت بارگذاری محوری، را در سال ۲۰۱۵ بررسی کردند. هدف اصلی این مطالعه، بررسی اثرات شیب ضخامت برای جذب انرژی بوده و نتایج آن با لوله‌های جداره نازک با ضخامت ثابت مقایسه شده است [۱۸]. لی و همکاران به بررسی توانایی جذب انرژی لوله‌های استوانه‌ای جداره نازک با ضخامت یکنواخت و لوله‌های مخروطی تحت بارگذاری مورب با وزن یکسان تحت زاویه بار ۱۰، ۲۰ و ۳۰ درجه پرداختند [۱۹]. ژو، به بررسی لوله‌های با ضخامت متغیر تابعی با بازده جذب انرژی بالا پرداخت. به جز پارامترهای هندسی مانند، قطر و طول، شاخص گرادیان که تنوع ضخامت را کنترل می‌کند نیز، تاثیر قابل توجهی بر افزایش جذب انرژی دارد [۲۰]. اردین و همکاران، رفتار ضربه‌پذیری لوله‌های جداره نازک از جنس آلومینیوم با ضخامت متغیر را به صورت تجربی مورد

¹ Functionally Graded Thickness (FGT)

سختی در این مدل استخراج خواهد شد. در ادامه به منظور راستی‌آزمایی و اطمینان از صحت نتایج به دست آمده، مدل‌های تئوری با نتایج شبیه‌سازی عددی نرم افزار المان محدود در پارامترهای ابعادی ثابت مقایسه می‌شود. نوآوری برجسته این تحقیق، ارائه مدل‌های تحلیلی برای لوله‌های جدارنازک با ضخامت تابعی متغیر با در نظر گرفتن رفتار الاستیک کامل-پلاستیک و الاستیک-پلاستیک غیرخطی برای جاذب‌های انرژی است که ضخامت آنها از بالا تا پایین به صورت پیوسته و بر اساس تابع غیر خطی توانی تغییر می‌کند. ویژگی منحصر به فرد این نوع از جاذب‌ها، داشتن نیروی پیک اولیه پایین است، در حالی که میزان انرژی جذب مخصوص آنها با نمونه‌های ضخامت ثابت برابر بوده و از مقدار انرژی مخصوص جاذب‌های شیاردار بیشتر است. این امر باعث می‌شود تا ضربه‌گیر در برابر نیروهای کم نیز از خود واکنش نشان داده و مانند جسم صلب عمل نکند.

۲- بررسی تحلیلی رفتار ماده و معادلات اساسی

در این بخش، یک مدل ساده از یک لوله جداره نازک با ضخامت متغیر مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای تحلیل فروریزش استوانه جدار نازک، فرض می‌شود که نمونه تحت نیروی فشاری P قرار دارد. در مرحله اول، جنس لوله از ماده‌ای با رفتار الاستیک-کامل-پلاستیک در نظر گرفته می‌شود. در این حالت فرض می‌شود که نمونه فاقد کارسختی باشد و تنش بعد از رسیدن به حد تسلیم، ثابت خواهد ماند. این تئوری برای اولین بار توسط الکساندر [۸] ارائه شده و بعد از آن در تحقیقات زیادی مورد استفاده قرار گرفت [۲۷-۲۹]. برای این منظور، استوانه‌ای به صورت شکل ۱ در نظر بگیرد. معادله تغییرات ضخامت دیواره در هر x دلخواهی به صورت رابطه ۱ قابل محاسبه است:

$$t_i = t_{Top} + (t_{Bot} - t_{Top}) \left(\frac{x}{L}\right)^n \quad (1)$$

پارامتر $t_{Top}(t_{min})$ ضخامت در قسمت بالای استوانه، $t_{Bot}(t_{max})$ ضخامت در قسمت پایین استوانه، L طول نمونه، x متغیر فاصله از بالای نمونه و n پارامتر تعیین درجه تغییرات ضخامت است. چنانچه مقدار n برابر صفر باشد، ضخامت ثابت خواهد بود و اگر برابر ۱ باید تغییرات به صورت خطی و در غیر این صورت تغییرات غیر خطی است. مقدار n می‌تواند از صفر تا هر عدد مثبتی افزایش یابد.

مطالعه قرار دادند. برای نشان دادن راندمان لوله‌های جداره نازک با ضخامت متغیر، لهیدگی شبه استاتیک آن با لوله‌های ضخامت ثابت مقایسه شده است؛ همچنین نمونه‌های آزمایشی از آلیاژ آلومینیوم ۶۰۶۰ تست شد. نتایج نشان داد که مولفه‌های جذب انرژی در لوله‌های با ضخامت متغیر بهتر از لوله‌های با ضخامت ثابت است [۲۱]. لی و همکاران در سال ۲۰۱۷، ساختار لوله‌های جداره نازک را به علت وزن سبک و قابل توجه بودن آنها به عنوان جذب کننده انرژی مورد مطالعه قرار دادند. نتایج نشان می‌دهد که لوله‌های استوانه‌ای جداره نازک با قطر متغیر دارای مزایای زیادی در جذب انرژی نسبت به لوله‌های مستطیل شکل، مخروطی و دایره‌ای شکل با وزن یکسان هستند [۲۲]. ژینگ و همکاران در سال ۲۰۱۷، تجزیه و تحلیل جذب انرژی را در لوله‌های استوانه‌ای با ضخامت متغیر تحت زوایای بار ۰، ۱۰، ۲۰، ۳۰، ۴۰ مورد بررسی قرار دادند. آنها تاثیر نسبت طول به قطر و شاخص شیب ضخامت را به عنوان متغیرهای طراحی روی ویژگی‌های فروریزش بررسی کردند. نتایج نشان می‌دهد که نسبت طول به قطر تاثیر بیشتری روی ویژگی‌های جذب انرژی دارد [۲۳]؛ همچنین پژوهش‌هایی به صورت آزمایشی و شبیه‌سازی برای بهینه‌سازی رفتار جاذب‌های با ضخامت جداره متغیر تابعی در بارگذاری‌های مورب یا محوری انجام شده است [۲۴-۲۶].

مطالعه تحقیقات پیشین نشان می‌دهد، اکثر مطالعات انجام شده بر مبنای آزمون‌های آزمایشگاهی یا شبیه‌سازی‌های عددی بوده است. در بررسی جاذب‌های انرژی، یکی از مفیدترین کارها که سبب صرفه‌جویی در هزینه و زمان می‌شود، استخراج یک رابطه تئوری برای محاسبه جذب انرژی بر مبنای مشخصات هندسی و خواص مکانیکی جنس لوله می‌باشد. در این تحقیق به ارائه یک مدل تحلیلی به منظور محاسبه انرژی جذب شده کل و نیروی متوسط لهیدگی برای لوله‌های استوانه‌ای جداره نازک با ضخامت متغیر تابعی پرداخته خواهد شد. ابتدا با در نظر گرفتن رفتار الاستیک کامل-پلاستیک برای ماده تشکیل دهنده، رابطه جذب انرژی در یک چین خوردگی و به تبع آن در کل نمونه لهیده شده محاسبه می‌شود. سپس به منظور بالا بردن دقت نتایج، روابط مجدداً برای همان نمونه و این بار با در نظر گرفتن رفتار پلاستیک غیر خطی با اعمال کار

فرض می‌کنیم که هنگام فرریش تعداد N چین خوردگی در نمونه ایجاد شود، از اندیس i برای تعیین شماره گره و از اندیس j برای تعیین شماره چین خوردگی‌ها برابر $2h$ در نظر گرفته می‌شود. این فرض با توجه به جدار نازک بودن نمونه منطقی است. در نتیجه ضخامت دیواره در محل تشکیل هر لولای پلاستیک (به عنوان مثال در محل گره i ام) بصورت رابطه ۲ تعریف می‌شود:

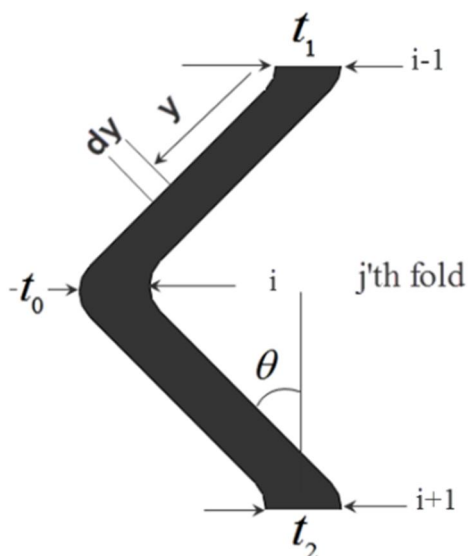
$$t_i = t_{Top} + (t_{Bot} - t_{Top}) \left(\frac{i \times h}{L} \right)^n \quad (2)$$

برای سادگی تحلیل، به بررسی تنها یک چین ایجاد شده در شکل ۲ به عنوان مثال چین j ام می‌پردازیم که تصویر ساده شده آن در شکل ۳ نشان داده شده است.

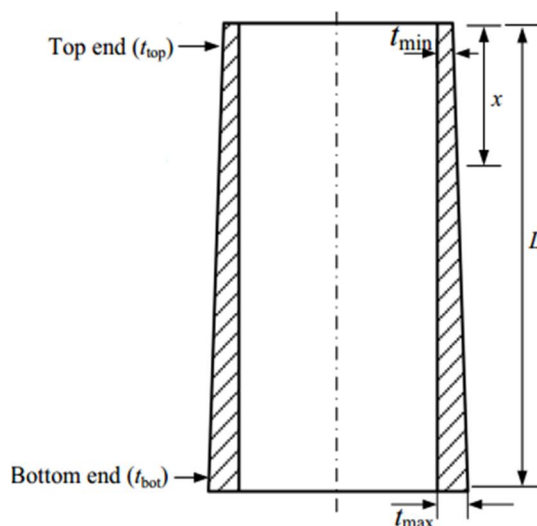
۲-۱- رفتار الاستیک کامل پلاستیک

با فرض اینکه جنس لوله الاستیک-کامل پلاستیک است، W_B برای یک چین ضمن تغییر θ از صفر تا $\frac{\pi}{2}$ برابر می‌شود با [۸]:

$$W_B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} M_{(i-1)p} \pi D d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} M_{(i+1)p} \pi D d\theta + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} M_{ip} \pi (D + 2h \sin\theta) d\theta \quad (3)$$



شکل ۳- هندسه چین خوردگی و محل تشکیل گره‌ها



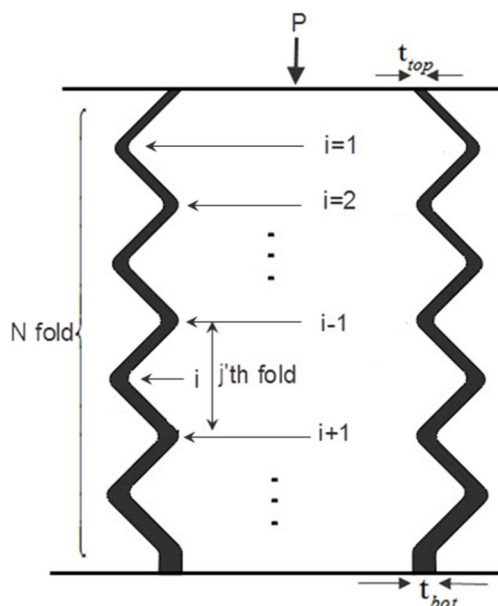
شکل ۱- طرح شماتیک لوله استوانه‌ای با ضخامت دیواره متغیر

انرژی جذب شده پوسته ضمن چین‌دار شدن، از دو نوع انرژی زیر نیز تشکیل خواهد شد [۸]:

(۱) انرژی W_B که باید صرف خمش لولاهای گردد.

(۲) انرژی W_S که برای کشیدگی دیواره بین دو لولا نیاز است.

در شکل ۲ هندسه کلی استوانه مورد نظر برای بررسی چین خوردگی نشان داده شده است.



شکل ۲- پارامترهای ابعادی استوانه در حال چین خوردن

که در رابطه بالا مقدار W_s انرژی جذبی ناشی از کشیدگی بوده و المان dA المان سطح و کرنش حقیقی ε به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$dA = \pi(D + 2y\sin\theta)dy \quad (10)$$

$$\varepsilon = \ln\left(\frac{D + 2y\sin\theta}{D}\right) \quad (11)$$

در نتیجه تغییرات کرنش بر اساس تغییر زاویه θ برابر است با:

$$\frac{d\varepsilon}{d\theta} = \frac{2y\cos\theta}{D + 2y\sin\theta} \quad (12)$$

با توجه به تفاوت ضخامت در بالا و پایین لولای مرکزی مقدار این انرژی در دو نیم چین متفاوت خواهد بود. به همین دلیل ابتدا رابطه تغییرات ضخامت در بالا و پایین نیم چین را با استفاده از رابطه تغییرات گرادینانی به صورت معادلات ۱۳ و ۱۴ بازنویسی می‌کنیم:

$$t = t_1 + (t_0 - t_1)\left(\frac{y}{h}\right)^n \quad (13)$$

$$t = t_2 + (t_0 - t_2)\left(\frac{y}{h}\right)^n \quad (14)$$

با جایگذاری روابط ۱۳ و ۱۴ در رابطه ۹ و انتگرالگیری از معادله برای θ از صفر تا 90° درجه، مقدار انرژی غشایی در نیم چین بالا به صورت معادله ۱۵ و در نیم چین پایین به صورت رابطه ۱۶ به دست می‌آید.

$$W_{s1} = 2\sigma_0\pi h^2\left(t_1 + \frac{t_0 - t_1}{n + 2}\right) \quad (15)$$

$$W_{s2} = 2\sigma_0\pi h^2\left(t_2 + \frac{t_0 - t_2}{n + 2}\right) \quad (16)$$

در روابط ۱۵ و ۱۶ همانطور که قبلاً بیان شد، ضخامت‌ها را نسبت به ضخامت بالا و پایین استوانه می‌توان از رابطه ۷ به دست آورد.

با توجه به عبارات بالا مقدار کل انرژی جذب شده برای چین ز از جمع روابط ۶، ۱۰ و ۱۱ به دست می‌آید. به بیان دیگر:

$$W_{Tj} = W_{Bj} + W_{s1j} + W_{s2j} \quad (17)$$

برای محاسبه نیروی متوسط لهیدگی در هر چین لازم است، مقدار کل انرژی جذبی را به طول لهیدگی تقسیم کرد. برای چین ز این مقدار برابر رابطه ۱۸ است.

$$P_{mj} = \frac{W_{Tj}}{2h - 2t_0} \quad (18)$$

در رابطه (۱)، جمله اول انرژی خمشی در نیم لولای $i-1$ ، جمله دوم انرژی خمشی در نیم لولای $i+1$ و جمله سوم مقدار انرژی در لولای i است که در شکل ۳ نشان داده شده است. M_p گشتاور خمشی پلاستیک است و از رابطه ۴ به دست می‌آید.

$$M_p = \frac{\sigma_0 t^2}{2\sqrt{3}} \quad (4)$$

که در رابطه ۴، $\sigma_0 = \sigma_y$ بر مبنای معیار تسلیم فون میسر بوده و σ_y تنش تسلیم ماده است. با انتگرالگیری از رابطه ۳ داریم:

$$W_B = M_{(i-1)p} \frac{\pi^2}{2} D + M_{(i+1)p} \frac{\pi^2}{2} D + 2M_{ip} \pi \left(\frac{\pi D}{2} + 2h\right) \quad (5)$$

تفاوت مقادیر گشتاورهای خمشی پلاستیک، ناشی از تفاوت در ضخامت‌های محل‌های خمش یا در واقع، ضخامت دیواره است. برای تعیین ضخامت محل‌های ایجاد لولاهای پلاستیک می‌توان از رابطه ۲ استفاده کرد. فرض می‌کنیم، ضخامت در محل لولای $i-1$ برابر t_1 ، در محل لولای i برابر t_0 و در محل لولای $i+1$ برابر t_2 باشد. با جایگذاری رابطه (۴) در معادله (۵)، W_B به صورت رابطه (۶) به دست خواهد آمد.

$$W_B = \frac{\sigma_0 \pi^2 D}{4\sqrt{3}} (t_1^2 + t_2^2) + \frac{\sigma_0 \pi^2 D}{2\sqrt{3}} t_0^2 \left(\frac{\pi D}{2} + 2h\right) \quad (6)$$

که در رابطه ۶، مقدار هر یک از ضخامت‌ها بر مبنای ضخامت بالا و پایین نمونه به صورت رابطه ۷ بیان می‌شود و i بیانگر شماره چین خوردگی مورد نظر است:

$$t_1 = t_{Top} + (t_{Bot} - t_{Top}) \left(\frac{(i-1) \times h}{L}\right)^n$$

$$t_2 = t_{Top} + (t_{Bot} - t_{Top}) \left(\frac{(i+1) \times h}{L}\right)^n$$

$$t_0 = t_{Top} + (t_{Bot} - t_{Top}) \left(\frac{i \times h}{L}\right)^n \quad (7)$$

معادلات انرژی غشایی حالت کامل پلاستیک به صورت رابطه ۸ و ۹ است [۲۹].

$$W_s = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{dW_{s1}}{d\theta}\right) d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{dW_{s2}}{d\theta}\right) d\theta \quad (8)$$

$$\frac{dW_s}{d\theta} = \int_0^h \sigma_0 t \left(\frac{d\varepsilon}{d\theta}\right) dA \quad (9)$$

$$W_B = \frac{\sigma_0 \pi^2 D}{4\sqrt{3}} (t_1^2 + t_2^2) + \frac{\sigma_0 \pi^2 D}{2\sqrt{3}} t_0^2 \left(\frac{\pi D}{2} + 2h \right) \quad (21)$$

برای محاسبه میزان انرژی جذب شده ناشی از کشیدگی دیواره بین دو لولا داریم [۳۰]:

$$dW_S = \sigma_h \varepsilon_h dv \quad (22)$$

که در رابطه ۲۲، σ_h و ε_h به ترتیب تنش و کرنش محیطی هستند. برای محاسبه این تنش، با تنش موثر و تنش‌های اصلی در راستاهای طولی، محیطی و شعاعی می‌توان از روابط تنش کرنش لوی-لود استفاده کرد [۳۱]. با ساده سازی این روابط، نسبت تنش‌های محیطی و موثر به صورت معادله ۲۳ به دست می‌آید.

$$\sigma_h = \frac{2}{\sqrt{3}} \bar{\sigma} \quad (23)$$

$$\varepsilon_h = \frac{2}{\sqrt{3}} \bar{\varepsilon}$$

همچنین رابطه بین تنش و کرنش موثر در مواد با کارسختی غیر خطی به صورت رابطه ۲۴ است [۳۰].

$$\bar{\sigma} = k \bar{\varepsilon}^{n'} \quad (24)$$

همانند شکل ۳، یک المان کوچک به عرض dy در فاصله y از لولا در نظر می‌گیریم. کرنش واقعی در نیم چین بالایی بصورت معادله ۲۵ است:

$$\varepsilon_h = \ln \left(\frac{D + 2y \sin \theta}{D} \right) = \ln \left(\frac{2y \sin \theta}{D} \right) \quad (25)$$

همچنین المان حجم به صورت رابطه ۲۶ تعریف می‌شود:

$$dv = \pi D \left(t_1 + (t_0 - t_1) \left(\frac{y}{h} \right)^n \right) dy \quad (26)$$

برای $\theta = \frac{\pi}{2}$ و بسط تیلور، رابطه ۲۵ در اطراف نقطه $y = 0$ بصورت رابطه ۲۷ ساده خواهد شد.

$$\varepsilon_h = \frac{2y}{D} \quad (27)$$

در نتیجه رابطه تنش کرنش را می‌توان به صورت معادله ۲۸ نوشت.

$$\sigma_h = k (1.155)^{n'+1} \left[\frac{2y}{D} \right]^{n'} \quad (28)$$

با جایگذاری معادلات ساده شده فوق در رابطه ۲۲ داریم:

$$dW_{S1} = k \pi D \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{n'+1} \times \int_0^h \left(t_1 + (t_2 - t_1) \left(\frac{y}{h} \right)^n \right) \left(\frac{2y}{D} \right)^{n'+1} dy \quad (29)$$

و در نتیجه انرژی جذب شده و نیروی متوسط کل حاصل از لهیدگی تمام استوانه با فرض ایجاد K چین در نمونه به صورت رابطه (۱۹) قابل محاسبه است.

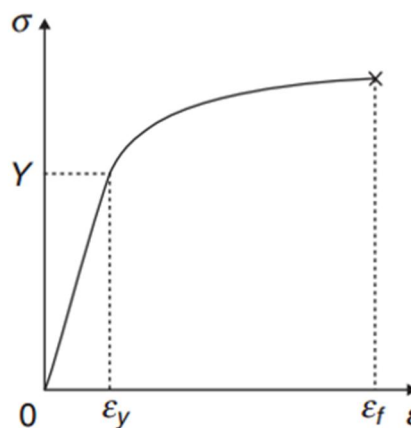
$$P_{mj} \approx \frac{\sum_{j=1}^K W_{Tj}}{L(1 - \sum_{j=1}^K 2t_{0j})} \quad (19)$$

که عبارت $\sum_{j=1}^K 2t_{0j}$ تقریباً برابر طول استوانه بعد از لهیدگی است که باید از طول اولیه کم شود.

۲-۲- تعیین انرژی در نظر گرفتن کار سختی

در این قسمت فرض می‌شود، بعد از اینکه نمونه دچار تغییر شکل پلاستیک می‌شود، تنش دیگر ثابت نمانده، بلکه به صورت غیر خطی شروع به افزایش کند.

نمودار این تغییرات در شکل ۴ نشان داده است:



شکل ۴- نمودار تغییرات تنش کرنش پلاستیک با کار سختی غیر خطی

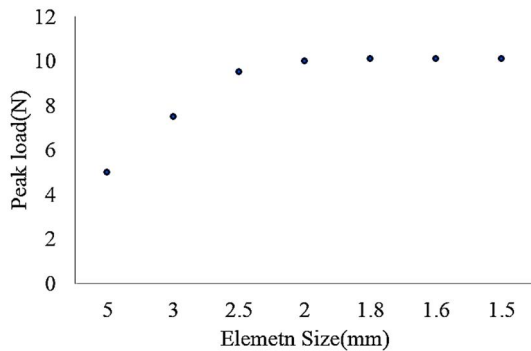
رابطه تغییرات تنش و کرنش در این حالت به صورت رابطه ۲۰ تعریف می‌شود.

$$\sigma = \begin{cases} E\varepsilon & \varepsilon \leq \varepsilon_y \\ \sigma_y + K(\varepsilon - \varepsilon_y)^k & \varepsilon_y \leq \varepsilon \leq \varepsilon_f \end{cases} \quad (20)$$

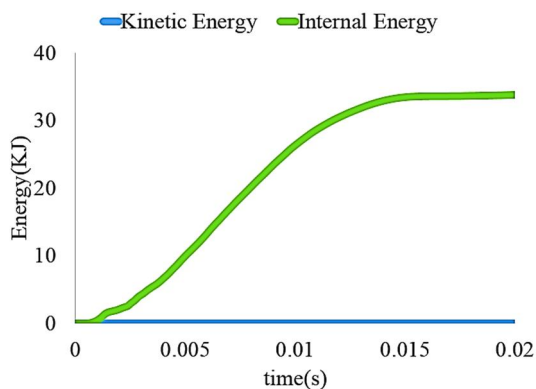
در این حالت نیز، همانند قست قبل، نیاز هست که دو نوع انرژی محاسبه شود. برای محاسبه انرژی ناشی از خمش و ایجاد لولاهای پلاستیک می‌توان از رابطه ۶ استفاده کرد؛ چرا که در لولاهای از اثرات کار سختی صرف نظر می‌شود [۳۰]. در نتیجه مقدار انرژی ناشی از خمش یک لولا به صورت رابطه ۲۱ بیان می‌شود.

و نرخ کرنش بتوان صرفنظر کرد. این مقدار با توجه به آزمون‌های تجربی انجام شده، برابر ۱۲ میلی‌متر بر دقیقه در نظر گرفته شده است [۳۲]. زمان حل صریح مدل مورد نظر با توجه به کم بودن سرعت حرکت فک‌ها، بسیار زمان‌گیر خواهد بود. برای این منظور، می‌توان از مقیاس جرمی استفاده کرد. در این روش که برای حل‌های شبه استاتیکی کاربرد دارد، بازه‌های زمانی حل تا حدی که تاثیرات انرژی جنبشی ناچیز بوده افزایش یافته و این کار باعث کاهش زمان تحلیل می‌شود. با توجه به بررسی‌های گذشته در این تحلیل ما مقدار مقیاس جرمی را برابر ۱۰۰۰ در نظر می‌گیریم. چنانچه نسبت این دو کمتر از ۰/۰۰۱ باشد، مقدار مقیاس جرمی درست انتخاب شده است [۳۳].

در شکل ۶ تغییرات انرژی داخلی با مقدار انرژی جنبشی مقایسه شده‌اند. همانطور که مشاهده می‌شود، مقادیر مربوط به انرژی جنبشی بسیار ناچیز است و این امر در واقع بیانگر عدم دخالت اینرسی جسم و شبه استاتیک بودن مسئله است.



شکل ۵- تاثیر اندازه المان در نیروی پیک اولیه



شکل ۶- مقایسه انرژی داخلی و جنبشی ضربه‌گیر

با انتگرالگیری از رابطه ۲۹ و جایگذاری کران‌های انتگرالگیری مقدار انرژی جذب ناشی از کشیدگی نیم چین بالا به صورت رابطه ۳۰ به دست می‌آید:

$$W_{S1} = k\pi D \left(\frac{4}{\sqrt{3}D} \right)^{n'+1} \times t_1 \left(\frac{h^{n'+2}}{n'+2} \right) + \frac{t_1 - t_0}{h^n} \left(\frac{h^{n'+n+2}}{n'+n+2} \right) \quad (30)$$

همچنین برای نیم چین پایین با توجه به تفاوت ضخامت‌ها داریم:

$$W_{S2} = k\pi D \left(\frac{4}{\sqrt{3}D} \right)^{n'+1} \times t_1 \left(\frac{h^{n'+2}}{n'+2} \right) + \frac{t_2 - t_0}{h^n} \left(\frac{h^{n'+n+2}}{n'+n+2} \right) \quad (31)$$

انرژی کل جذب شده و همچنین نیروی متوسط لهدگی همانند قسمت قبل با استفاده از روابط ۱۷ تا ۱۹ برای یک چین و همچنین کل استوانه قابل محاسبه است.

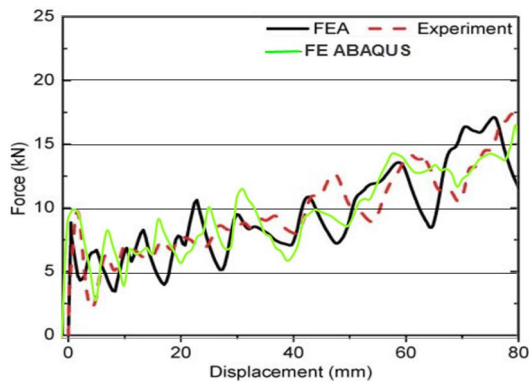
۳- شبیه‌سازی عددی

یکی از روش‌های کاربردی برای بررسی جاذب‌های انرژی، شبیه‌سازی با نرم افزار المان محدود آباکوس است. در این پژوهش به کمک این نرم افزار، مدل‌های مختلفی برای راستی‌آزمایی روابط تحلیلی انجام شده است. مدل نرم افزاری شامل دو صفحه صلب به عنوان فک‌های پرس برای شبیه‌سازی عددی شبه استاتیکی و یک استوانه جدار نازک به عنوان جاذب انرژی است. المان‌های به کار رفته برای جسم شکل پذیر از نوع C3D8R هشت گرهی آجری و برای صفحات صلب از نوع C3D4 چهارگره‌ی صلب درجه دو هستند. برای به دست آوردن اندازه بهینه المان‌های مورد استفاده در شبکه‌بندی المان محدود از روش استقلال شبکه استفاده شده است. در شکل ۵ نمودار تغییرات نیروی ماکزیمم لهدگی بر حسب اندازه مش رسم شده و بر این اساس اندازه المان برابر ۱/۸ میلی‌متر انتخاب شده است؛ چرا که بعد از این مقدار، دیگر تفاوتی در اندازه نیروی اولیه لهدگی ایجاد نشده است.

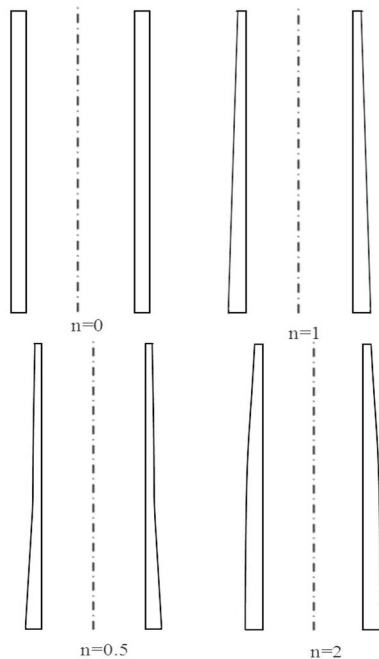
شرایط مرزی حاکم بر مسئله شامل، مقید کردن کامل صفحه پایینی و حرکت آرام صفحه بالایی با سرعت ثابت است. باید سرعت حرکت به‌صورتی باشد که از اثرات اینرسی

جدول ۱- مقایسه نتایج شبیه‌سازی عددی مطالعه حاضر با نتایج آزمایشگاهی و شبیه‌سازی عددی مرجع [۳۴]

نتیجه شبیه‌سازی مرجع [۳۴]	نتیجه آزمایشگاهی مرجع [۳۴]	نتیجه تحقیق حاضر	
۷۷۸	۷۹۰	۷۷۳/۸۲	انرژی جذب شده (J)
۹۷۲۵	۹۸۷۵	۹۶۷۳	نیروی متوسط لهیدگی (KN)



شکل ۸- مقایسه منحنی نیرو-جابجایی در حالت شبیه‌سازی عددی و آزمایشگاهی برای لوله دایره‌ای جدار نازک با ضخامت متغیر [۳۴]



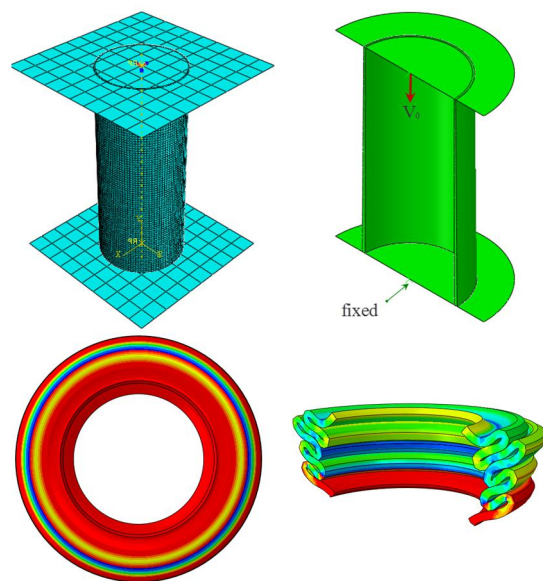
شکل ۹- گرادبان تغییرات ضخامت جداره استوانه

با توجه به سرعت بعد از فروریزش جاذب انرژی با استخراج تغییرات نیروی وارد بر صفحه صلب بر حسب زمان و همچنین جابجایی صفحه بر حسب زمان می‌توان نمودار نیرو جابجایی را به دست آورد. سطح مقطع زیر این نمودار بیانگر میزان انرژی جذب شده توسط ضربه‌گیر در طول لهیدگی است. در شکل ۷ شرایط مرزی المان بندی و نمونه بعد از فروریزش در نرم افزار نشان داده شده است.

برای اطمینان از صحت شبیه‌سازی عددی، رفتار نمودار نیرو مکان یک مدل تجربی و شبیه‌سازی عددی از مرجع [۳۴] با نرم افزار آباکوس مقایسه و انطباق آنها در شکل ۸ نشان داده شده است. مشخصات هندسی و خواص مواد به کار رفته در مرجع مورد نظر آورده شده است.

در جدول ۱، مقدار انرژی جذب شده و نیروی متوسط لهیدگی برای نمودارهای شکل ۸ به صورت عددی با هم مقایسه شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، اختلاف بین نتایج عددی تحقیق حاضر و نتایج آزمایشگاهی و شبیه‌سازی عددی مرجع [۳۴] ناچیز است.

در ادامه برای بررسی تاثیر تغییرات ضخامت دیواره استوانه، چهار حالت برای n در رابطه ۱ در نظر گرفته شده است و بر مبنای آن، مدل‌های مختلفی در نرم افزار مدل و تحلیل شده است. در شکل ۹ مقطع برش خورده دیواره استوانه جدار نازک، در ۴ حالت نشان داده شده است.



شکل ۷- مراحل مدل سازی در نرم افزار آباکوس

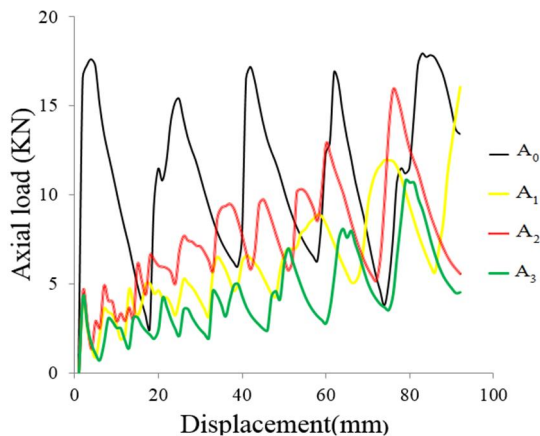
در ادامه شبیه سازی عددی این نمونه ها با مشخصات داده شده در آباکوس انجام شده است. سپس میزان انرژی جذب شده، مقدار نیروی و با هم مقایسه خواهد شد.

در شکل ۱۰ نمودار تغییرات نیرو بر حسب جابجایی برای نمونه‌ها نشان داده شده است. در حالت ضخامت ثابت، نمونه دارای پیک نیروی بسیار بالایی است، در حالی که برای دیگر نمونه‌ها، مقدار این نیروی اولیه کاهش چشمگیری داشته است.

در شکل ۱۱ به مقایسه انرژی جذب شده در ۴ حالت مختلف هندسی پرداخته شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، جاذب A_0 دارای بیشترین مقدار جذب و نمونه A_3 دارای کمترین مقدار جذب نیروست. این امر با توجه به اینکه جاذب A_0 یک استوانه کامل و ضخامت جداره آن از همه نمونه‌های دیگر بیشتر است و همچنین نمونه A_3 دارای کمترین ضخامت جداره است، کاملاً منطقی به نظر می‌رسد.

جدول ۴- ابعاد نمونه‌ها

نمونه	D(mm)	L(mm)	M(kg)	n
A_0	۰/۰۵	۰/۱۵	۰/۲۰۲	۰
A_1	۰/۰۵	۰/۱۵	۰/۱۳۳	۱
A_2	۰/۰۵	۰/۱۵	۰/۱۵۶	۲
A_3	۰/۰۵	۰/۱۵	۰/۱۱۰	۰/۵



شکل ۱۰- نمودار نیرو- جابه‌جایی فروریزش

جنس لوله‌های استوانه‌ای از نوع آلیاژ آلومینیوم 6061-T6 انتخاب شده است که خصوصیات مکانیکی آن مطابق جدول ۲ است [۳۵]. نقاط تنش کرنش واقعی برای حالت کار سختی توانی در جدول ۳ تقریب زده شده است. در جدول ۴، ابعاد نمونه‌ها شامل طول، قطر، جرم آورده شده است؛ همچنین پارامتر n که بیانگر تابع تغییرات ضخامت است نیز، بیان شده است. با توجه به مشخصات ذکر شده در جداول بیان شده و روش استفاده شده در مرجع [۳۰]، ضرایب مربوط به رفتار تنش کرنش در حالت رابطه توانی (رابطه ۲۴) را می‌توان به صورت رابطه (۳۲) نوشت.

$$\sigma = 405.7 \varepsilon^{0.034} \quad (32)$$

در نتیجه مقدار ضریب $k=40.5/8$ MPa و ضریب n' برابر 0.034 خواهد بود.

جدول ۲- خصوصیات مکانیکی آلیاژ آلومینیوم 6061-T6

[۳۵]

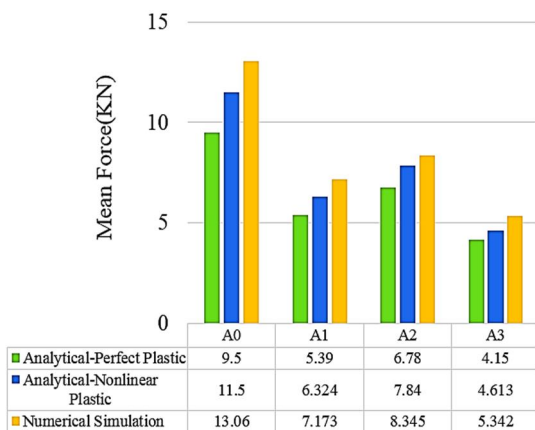
ضریب پواسون	تنش تسلیم MPa	مدول الاستیسیته MPa	چگالی $\frac{kg}{m^3}$	Al6061-T6
۰/۳	۳۱۳	۶۹	۲۷۰۰	

جدول ۳- مقادیر تنش- کرنش استفاده شده در حالت کار

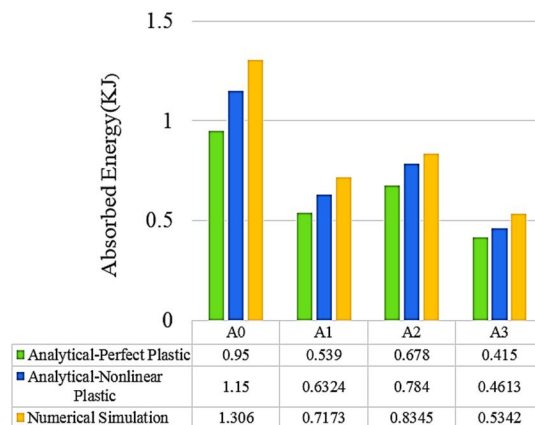
سختی توانی برای آلیاژ آلومینیوم 6061-T6 در نرم افزار

آباکوس [۳۵]

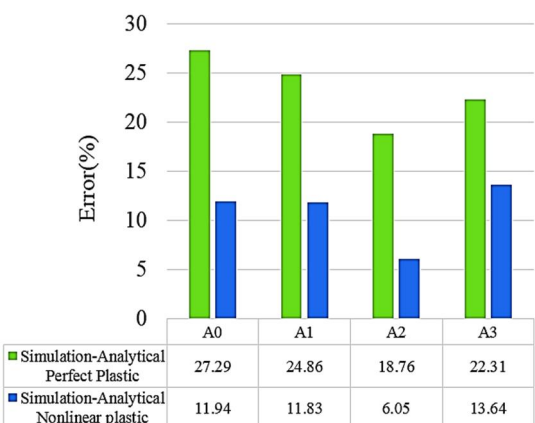
ε_0	σ_0 (MPa)
۰	۳۱۳
۰/۰۰۰۵	۳۱۹
۰/۰۰۵۳	۳۳۵
۰/۰۱۷۱	۳۴۶
۰/۰۲۸۷	۳۵۶
۰/۰۴۰۳	۳۶۴
۰/۰۵۱۶	۳۷۰
۰/۰۶۲۹	۳۷۵



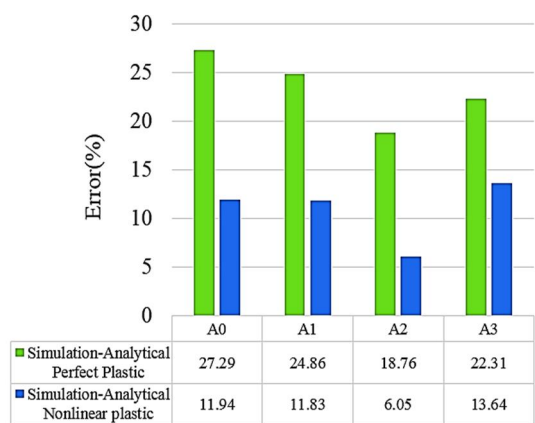
شکل ۱۲- مقایسه نیروی متوسط لهیدگی در نمونه‌ها در حالت شبیه سازی عددی و تحلیلی



شکل ۱۱- مقایسه انرژی جذب شده در نمونه‌ها در حالت شبیه سازی عددی و تحلیلی



شکل ۱۳- خطای بین تخمین انرژی جذب شده برای روش تحلیلی اول و دوم با شبیه سازی عددی



شکل ۱۴- خطای بین تخمین نیروی متوسط لهیدگی برای روش تحلیلی اول و دوم با شبیه سازی عددی

در این نمودار مقدار نیروی جذب شده برای دو حالت تحلیلی با فرض‌های رفتار الاستیک-کامل پلاستیک و اعمال کارسختی برای تغییر شکل پلاستیک و همچنین شبیه‌سازی عددی نرم افزار مقایسه شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، روال تغییرات مقدار انرژی جذب شده برای هر کدام از روش‌های تحلیل و شبیه‌سازی یکسان است.

در شکل ۱۲ مقایسه بین نیروی متوسط لهیدگی در جذب‌ها نشان داده شده است. مقدار این نیروی برای شبیه سازی عددی نرم افزاری از تقسیم انرژی جذب شده به طول لهیدگی و برای نمونه‌های تحلیلی از رابطه ۱۹ محاسبه شده است. نمونه A₀ دارای کمترین طول لهیدگی است و نمونه A₃ دارای بیشترین طول لهیدگی است. این مسئله به دلیل تفاوت آنها در ضخامت است که در نمونه A₃ به دلیل کم بودن ضخامت، استوانه توانایی افزایش طول لهیدگی را خواهد داشت.

در شکل ۱۳ و ۱۴ به مقایسه خطای بین روابط تحلیلی ارائه شده در این مطالعه و شبیه‌سازی نرم افزاری پرداخته شده است. همانطور که مشاهده می‌شود، با اعمال کارسختی به معادلات انرژی جذب شده، دقت تخمین انرژی جذب شده و نیروی متوسط به صورت قابل توجهی افزایش پیدا کرده است و تقریباً با خطایی حدود ۱۰ درصد و کمتر امکان پیش بینی جذب انرژی را دارد.

مقادیر خطا برای نیروهای متوسط و انرژی جنبشی کاملاً یکسان هستند، چون هر دوی آنها بر حسب ضریب ثابتی با هم در ارتباطند.

- [6] Zhang X, Tian Q, Yu T (2009) Axial crushing of circular tubes with buckling initiators. *Thin wall struct* 47(6-7): 788-797.
- [7] Zarei H, Kröger M (2006) Multiobjective crashworthiness optimization of circular aluminum tubes. *Thin wall struct* 44(3): 301-308.
- [8] Alexander J (1960) An approximate analysis of the collapse of thin cylindrical shells under axial loading. *Q J Mech Appl Math* 13(1): 10-15.
- [9] Andrews K, England G, Ghani E (1983) Classification of the axial collapse of cylindrical tubes under quasi-static loading. *Int J Mech Sci* 25(9-10): 687-696.
- [10] Wierzbicki T, Bhat SU, Abramowicz W, Brodtkin D (1992) Alexander revisited—a two folding elements model of progressive crushing of tubes. *Int J Solids Struct* 29(24): 3269-3288.
- [11] Guillow S, Lu G, Grzebieta R (2001) Quasi-static axial compression of thin-walled circular aluminium tubes. *Int J Mech Sci* 43(9):2103-2123.
- [12] Audi RF, Brooks RJ, Cormier JM, Smith DS, Rossi MA (2009) Modular energy absorber with ribbed wall structure, ed: Google Patents.
- [13] Ralston DD, Holdren KE, Bastien KR, Gorman D, Kulkarni A (2011) Energy absorber with sidewall stabilizer ribs. ed: Google Patents.
- [14] Shahravi S, Rezvani MJ, Jahan A (2019) Multi-response optimization of grooved circular tubes filled with polyurethane foam as energy absorber. *Journal of Optimization in Industrial Engineering* 12(1): 133-149.
- [15] Nia AA, Nejad KF, Badnava H, Farhoudi H (2012) Effects of buckling initiators on mechanical behavior of thin-walled square tubes subjected to oblique loading. *Thin wall struct* 59: 87-96.
- [16] Rezvani MJ, Jahan A (2015) Effect of initiator, design, and material on crashworthiness performance of thin-walled cylindrical tubes: A primary multi-criteria analysis in lightweight design. *Thin Wall Struct* 96: 169-182.
- [17] Mamalis A, Manolakos D, Ioannidis M, Kostazos P, Kastanias S (2003) Numerical modelling of the axial plastic collapse of externally grooved steel thinwalled tubes. *Int J Crashworthiness* 8(6): 583-590.
- [18] Baykasoglu C, Cetin MT (2015) Energy absorption of circular aluminium tubes with functionally graded thickness under axial impact loading. *Int J Crashworthiness* 20(1): 95-106.
- [19] Li G, Xu F, Sun G, Li Q (2015) A comparative study on thin-walled structures with functionally graded thickness (FGT) and tapered tubes withstanding oblique impact loading. *Int J Impact Eng* 77: 68-83.

۴- نتیجه‌گیری

برای کاهش نیروی بیشینه اولیه در فروریزش جاذب‌های انرژی استوانه‌ای، راهکار پیشنهادی استفاده از ضربه‌گیرهای با ضخامت متغیر است. این نوع از جاذب‌های انرژی این امکان را به طراح می‌دهد تا علیرغم کاهش نیروی بیشینه اولیه، مقدار جذب انرژی را نیز با ضخامت قسمت‌های انتهایی استوانه، کنترل کند. تحقیقات انجام شده روی این نوع از جاذب‌ها اکثراً آزمایشگاهی و شبیه‌سازی عددی بوده‌اند. در این پژوهش:

۱- به بررسی رفتار جذب انرژی در لوله‌های جدار نازک با ضخامت دیواره متغیر بر مبنای رفتار توانی غیر خطی پرداخته شد.

۲- یک رابطه تحلیلی برای استوانه با فرض رفتار الاستیک کامل پلاستک بر مبنای میزان انرژی خمشی و کشش جداره در چین‌ها ارائه شد.

۳- برای اصلاح رفتار ماده، تغییرات غیر خطی برای تغییر شکل‌های پلاستیک با در نظر گرفتن کارسختی اعمال و روابط تئوری مجدداً به دست آمد.

۴- مقادیر انرژی و نیروی متوسط لهیدگی از روش روابط تحلیلی به دست آمده و با نتایج شبیه‌سازی عددی با نرم افزار آباکوس با برای سه نمونه مقایسه شد.

۵- مراجع

- [1] Zarei H, Kröger M (2008) Optimum honeycomb filled crash absorber design. *Mater Design* 29(1): 193-204.
- [2] Abramowicz W, Jones N (1984) Dynamic axial crushing of circular tubes. *Int J Impact Eng* 2(3): 263-281.
- [3] Gupta N (1998) Some aspects of axial collapse of cylindrical thin-walled tubes. *Thin Wall Struct* 32(1-3): 111-126.
- [4] Abramowicz W, Jones N (1984) Dynamic axial crushing of square tubes. *Int J Impact Eng* 2(2): 179-208.
- [5] Al Galib D, Limam A (2004) Experimental and numerical investigation of static and dynamic axial crushing of circular aluminum tubes. *Thin Wall Struct* 42(8): 1103-1137.

- [28] Hosseini-pour S, Daneshi G (2003) Energy absorption and mean crushing load of thin-walled grooved tubes under axial compression. *Thin wall struct* 41(1): 31-46.
- [29] Rezvani M, Nouri M D (2015) Analytical model for energy absorption and plastic collapse of thin-walled grooved frusta tubes. *Mech Adv Mater Struc* 22(5): 338-348.
- [30] Rezvani M, Nouri MD (2017) Mathematical modelling of energy absorption in thin-walled grooved conical tubes with considering of strain hardening phenomena. *Int J Struc Eng* 8(4): 308-326.
- [31] Chirwa E (1993) Theoretical analysis of tapered thin-walled metal inverbucktube. In *J Mech Sci* 35(3-4): 325-351.
- [32] Rezvani M, Nouri MD (2014) Axial crumpling of aluminum frusta tubes with induced axisymmetric folding patterns. *Arab J Sci Eng* 39(3): 2179-2190.
- [33] Ghamarian A, Zarei H (2012) Crashworthiness investigation of conical and cylindrical end-capped tubes under quasi-static crash loading. *Int J Crashworthiness* 17(1): 19-28.
- [34] Li G, Xu F, Sun G, Li Q (2015) Crashworthiness study on functionally graded thin-walled structures. *Int J Crashworthiness* 20(3): 280-300.
- [35] Rezvani M, Nouri MD, Rahmani H (2012) Experimental and numerical investigation of grooves shape on the energy absorption of 6061-T6 aluminium tubes under axial compression. *Int J Mater Struc Integrity* 6(2-4): 151-168.
- [20] Xu F (2015) Enhancing material efficiency of energy absorbers through graded thickness structures. *Thin Wall Struct* 97: 250-265.
- [21] Erdin ME, Baykasoglu C, Cetin MT (2016) Quasi-static axial crushing behavior of thin-walled circular aluminum tubes with functionally graded thickness. *Procedia Engineer* 149: 559-565.
- [22] Pang T, Kang H, Yan X, Sun G, Li Q (2017) Crashworthiness design of functionally graded structures with variable diameters. *Int J Crashworthiness* 22(2): 148-162.
- [23] Yao S, Xing Y, Zhao K (2017) Crashworthiness analysis and multiobjective optimization for circular tubes with functionally graded thickness under multiple loading angles. *Adv Mech Eng* 9(4): 1687814017696660.
- [24] Yin H, Dai J, Wen G, Tian W, Wu Q (2019) Multi-objective optimization design of functionally graded foam-filled graded-thickness tube under lateral impact. *Int J Com Meth-sign* 16(1):1850088.
- [25] Baykasoğlu C, Baykasoğlu A, Tunay Çetin M (2019) A comparative study on crashworthiness of thin-walled tubes with functionally graded thickness under oblique impact loadings. *Int J Crashworthiness* 24(4): 453-471.
- [26] Li C, Wang D (2019) Knowledge-Based Engineering-based method for containership lashing bridge optimization design and structural improvement with functionally graded thickness plates. *P I Mech Eng M-J Eng* 233(3):760-778.
- [27] Gupta N, Abbas H (2000) Mathematical modeling of axial crushing of cylindrical tubes. *Thin Wall Struct* 38(4): 355-375.